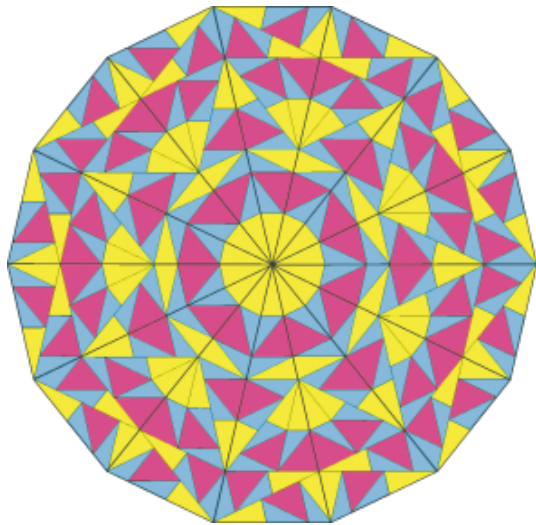


Betegel een veelhoek met driehoekjes

Nationale Wiskunde Dagen, 2 februari 2007



Aldine Aaten (Leiden)
Jeanine Daems (Leiden)
Michiel Kwetters (Utrecht)
Jasper Lukkezen (Leiden)

Isfahan, mei 2006







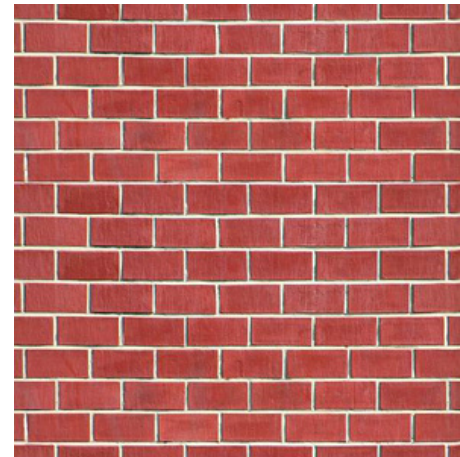
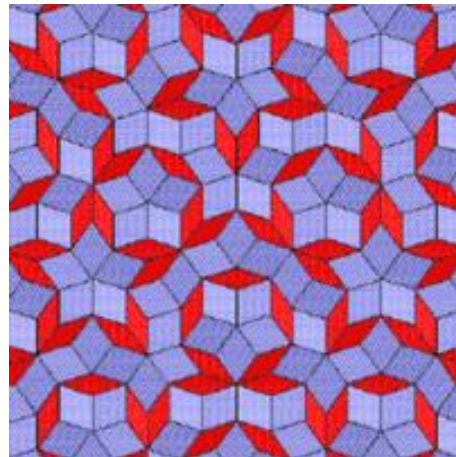




Een figuur **betegelen** betekent: de figuur opvullen met vlakke figuren, zodanig dat er geen overlap of gaten ontstaan.

De vlakke figuurtjes waarmee we de grote figuur opvullen noemen we **tegels**.

Voorbeelden van betegelingen van het vlak:



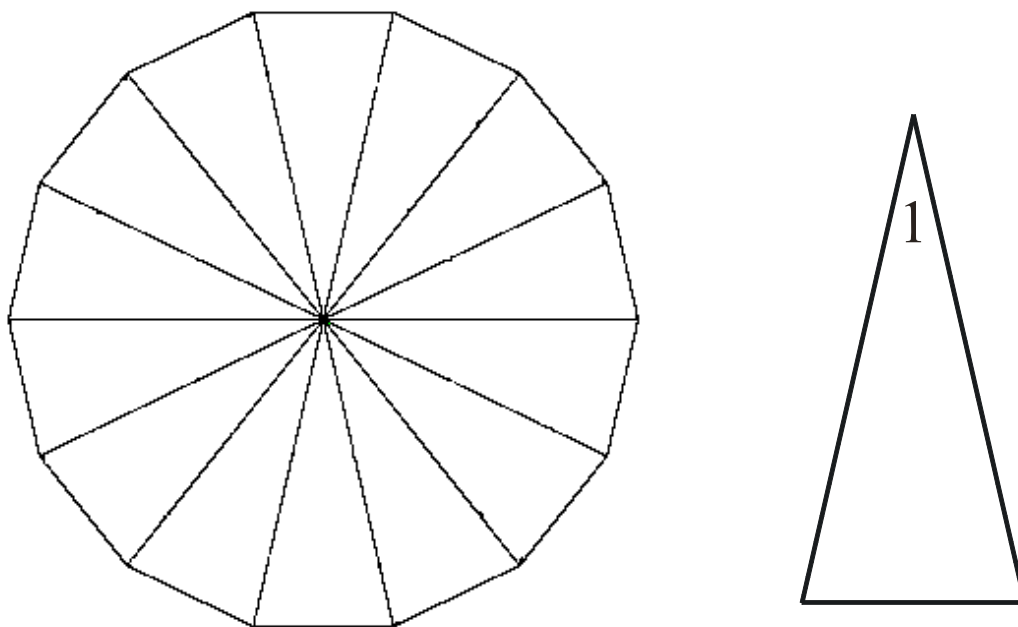
Inspiratie: Islamitische traditie



Doel van de workshop

- Betegelen van een 14-hoek met 3 speciale tegels
- Door middel van vergrotingen van deze tegels betegelen we een grotere 14-hoek
- Zo kun je uiteindelijk het hele vlak vullen
- Hetzelfde met een 18-hoek en 3 andere speciale tegels

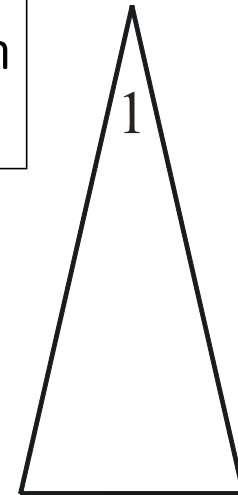
We gaan een **14-hoek** betegelen met driehoekjes.
Makkelijkste manier:



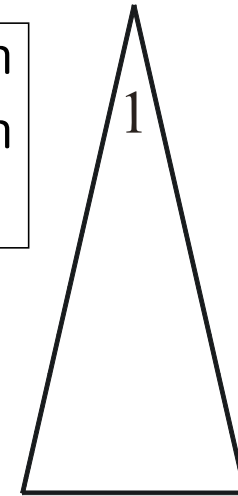
De tophoek van zo'n punt noemen we

$$1 \text{ "="} \frac{360^\circ}{14} \approx 25,7^\circ$$

Opdracht 1: Wat zijn de hoeken in zo'n driehoek? (Druk de hoeken uit in termen van de tophoek.)



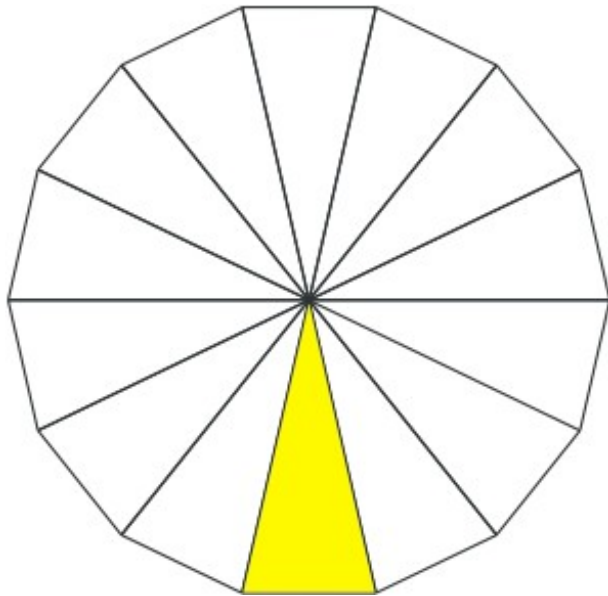
Opdracht 1: Wat zijn de hoeken in zo'n driehoek? (Druk de hoeken uit in termen van de tophoek.)



Oplossing:

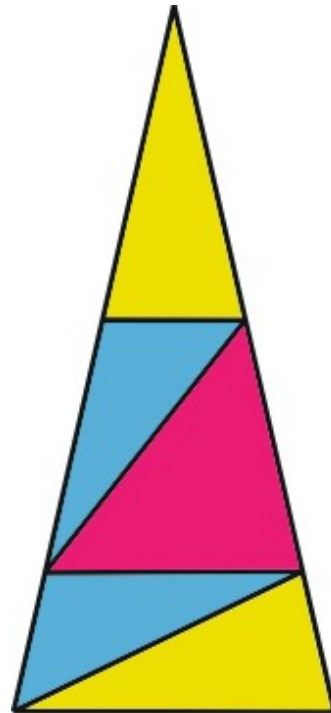
- Alle hoeken samen zijn $180^\circ = 7$ keer de tophoek.
- De twee benedenhoeken zijn gelijk.
- Dus de benedenhoeken zijn allebei 3.

Opdracht 2: Betegel één punt van de 14-hoek.
Gebruik de 5 uitgedeelde tegels.
Oftewel: leg van de 5 uitgedeelde tegels een driehoek die gelijkvormig is met de gele driehoek in het plaatje.

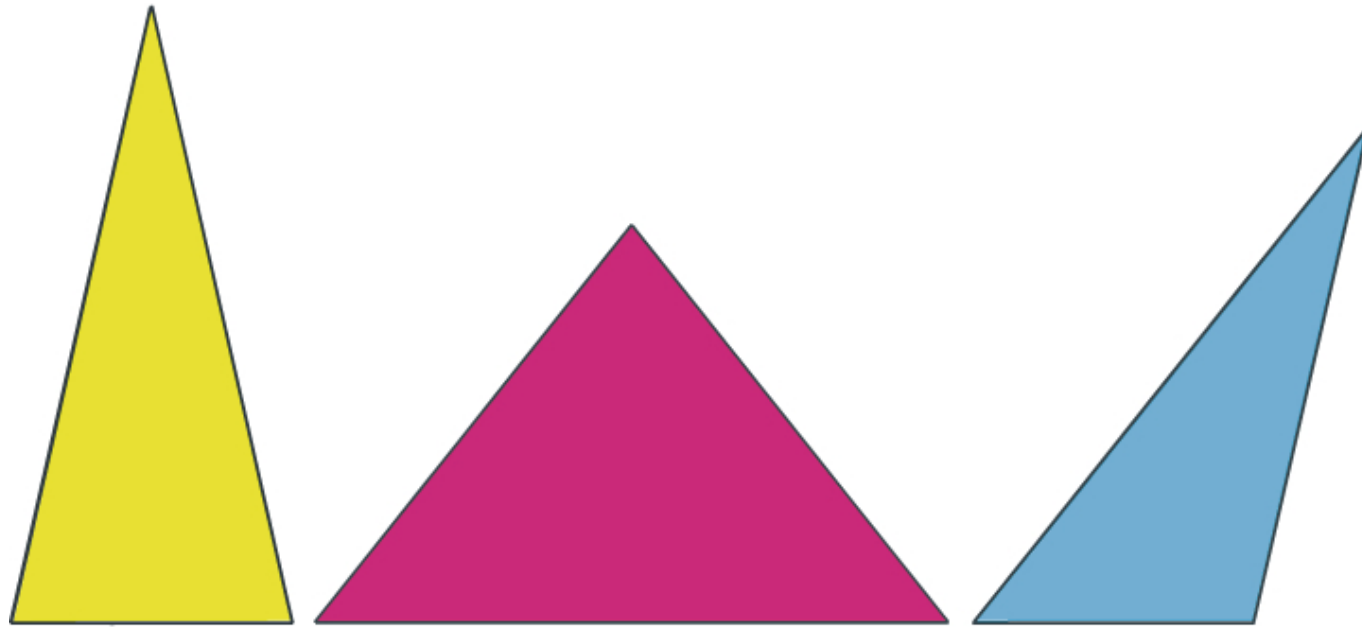


Opdracht 2: Betegel één punt van de 14-hoek.
Gebruik de 5 uitgedeelde tegels.

Oplossing:



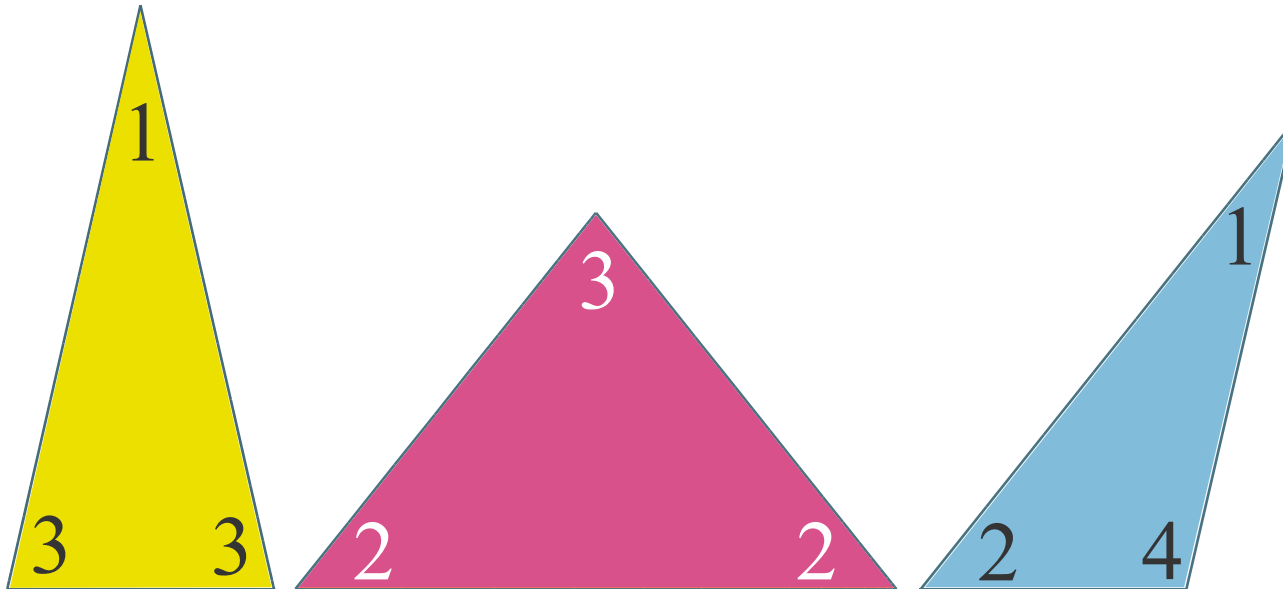
De drie tegels



Opdracht 3: Wat zijn de hoeken van de andere tegels (in termen van tophoek 1)?

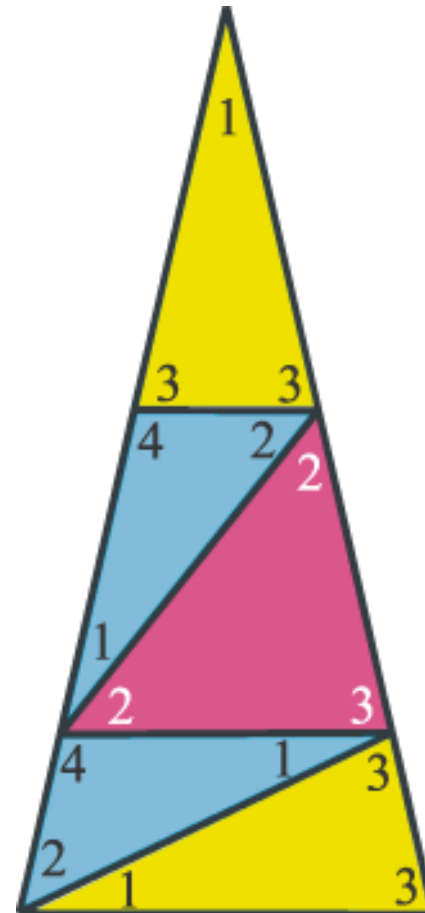
Opdracht 3: Wat zijn de hoeken van de andere tegels (in termen van tophoek 1)?

Oplossing:

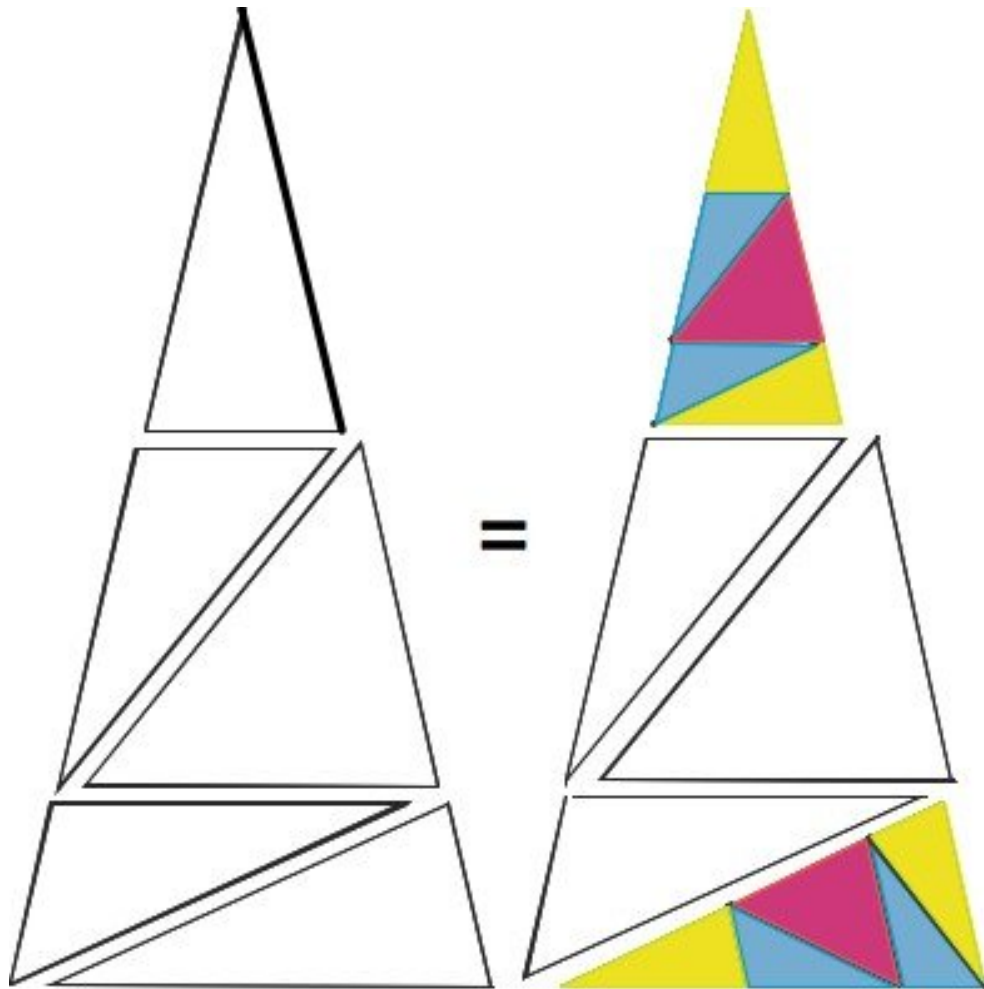


Uitleg:

De som van hoeken die samen een rechte lijn vormen is 7.



Waarom hebben we vergrotingen nodig?



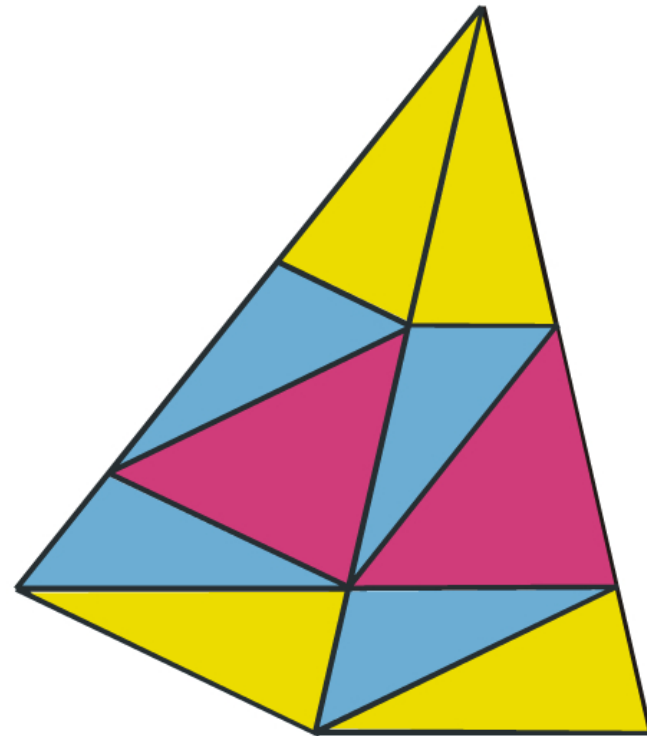
Vergrotingen zoeken

Opdracht 4:

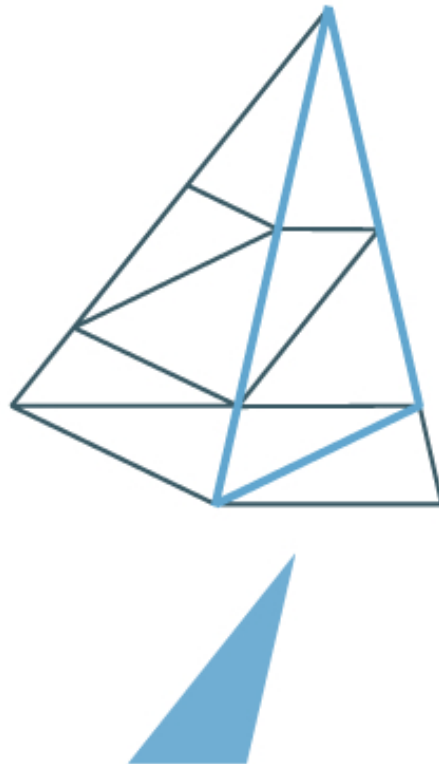
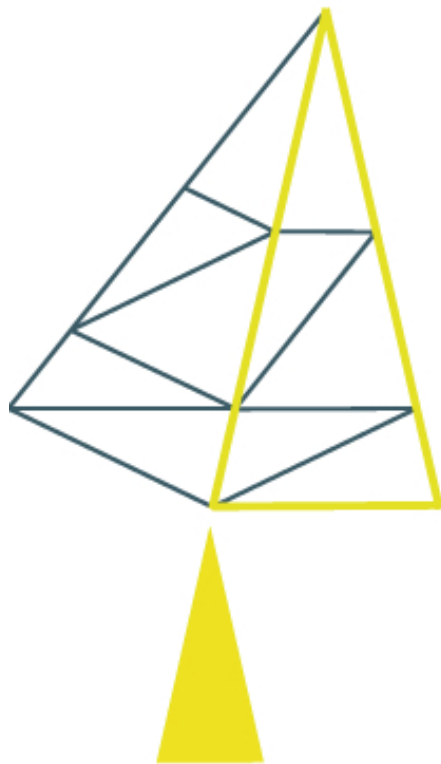
Leg twee punten naast elkaar op deze manier.

Opdracht 5:

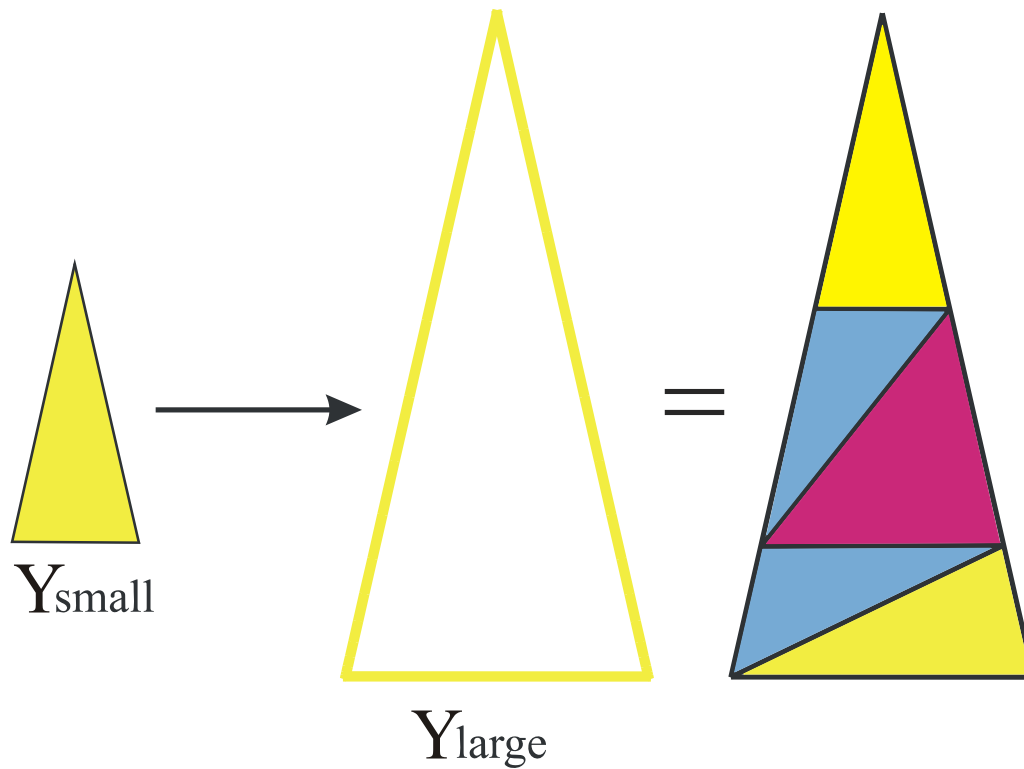
Zoek naar vergrotingen van de blauwe en de magenta tegel in deze figuur.



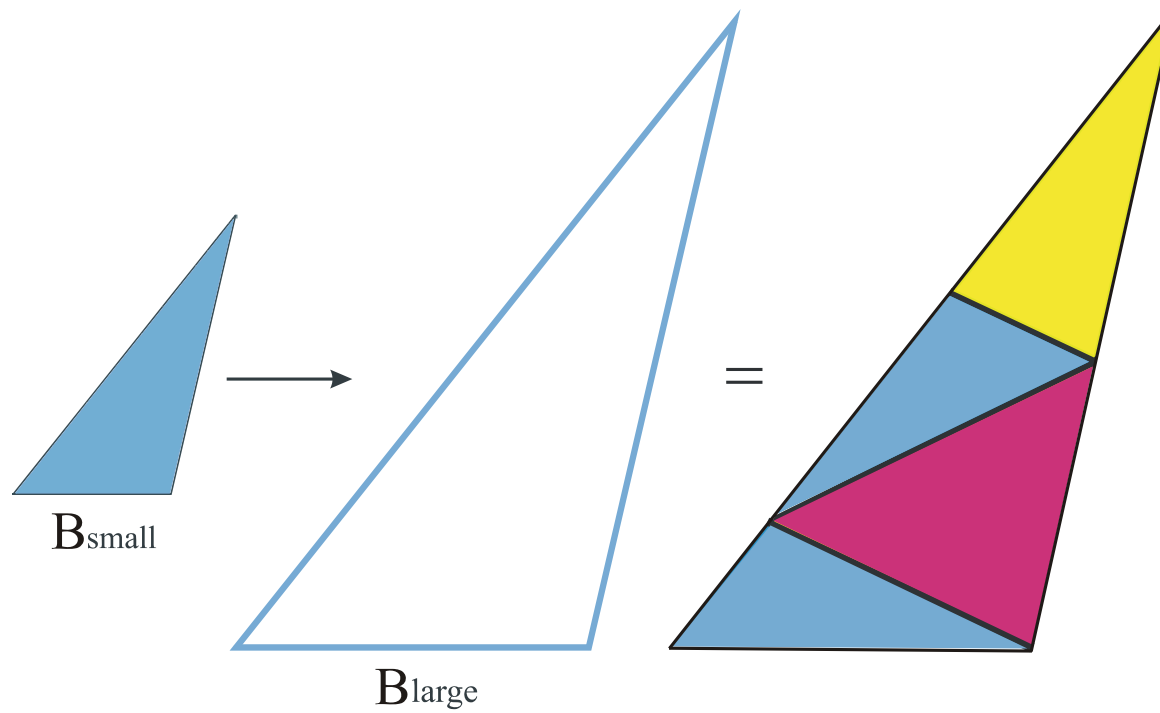
Oplossing: met behulp van gelijkvormigheid



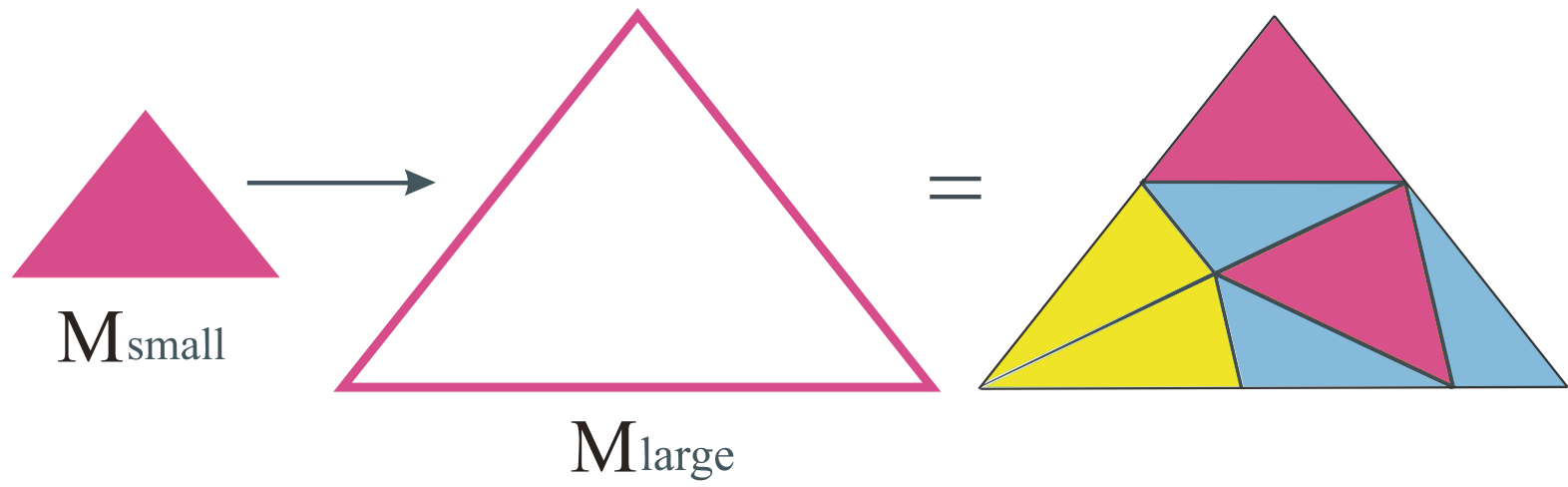
Vergroting van de gele tegel



Vergroting van de blauwe tegel

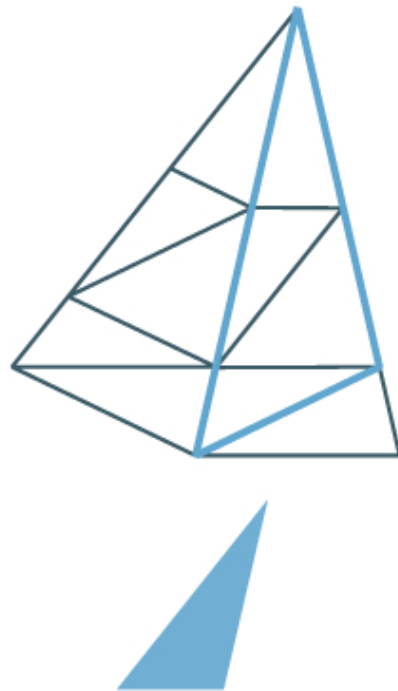
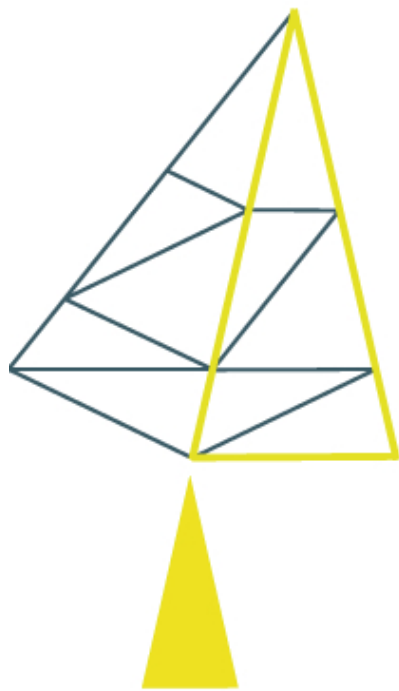


Vergroting van de magenta tegel



Belangrijk:

De 3 tegels zijn nu vergroot met *dezelfde* vergrotingsfactor!



Als we de vergrote gele driehoek nu wéér met *dezelfde* factor vergroten, kunnen we die opvullen met vergrote tegels!

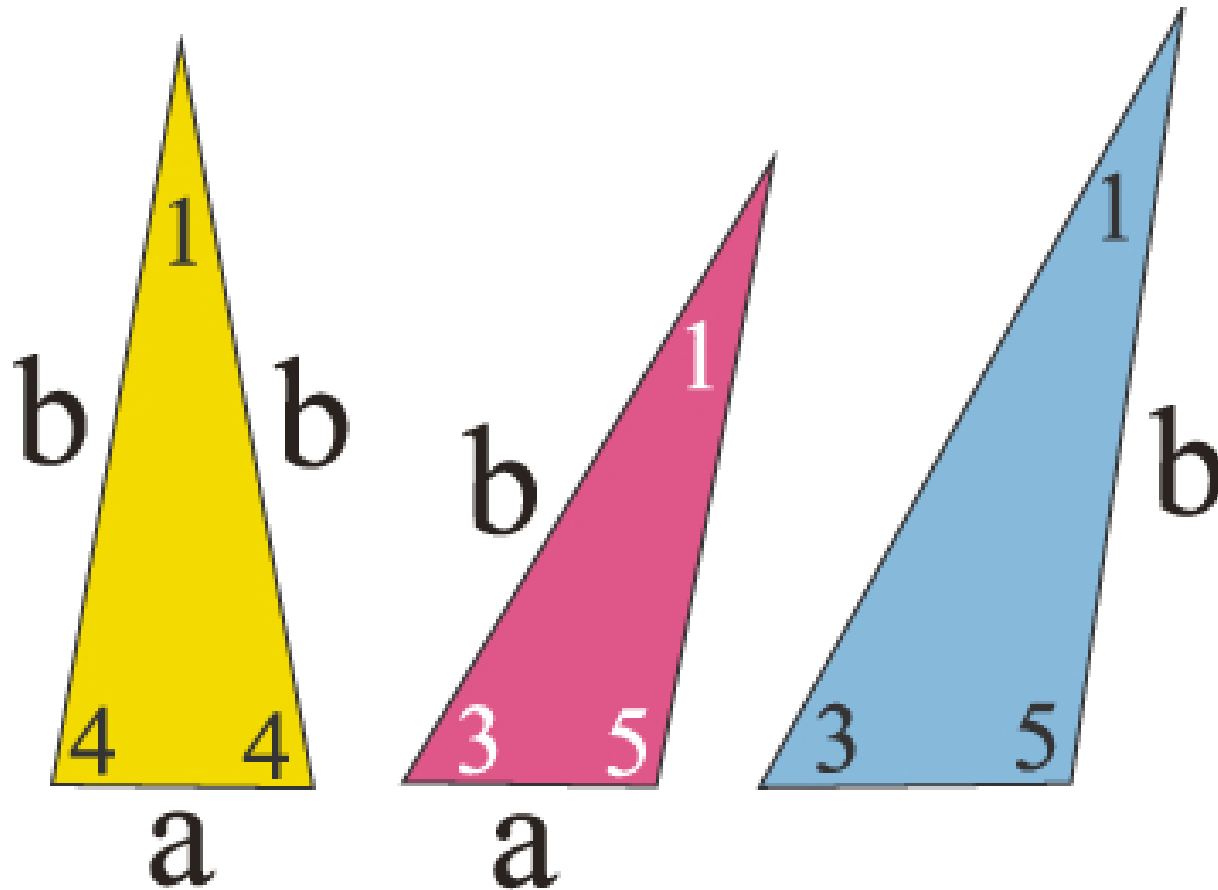
Dat doen we nu niet: we gaan verder met een punt van de 18-hoek. Daarvan maken we uiteindelijk een vergroting.

Een grote 18-hoek betegelen

Er worden nu *nieuwe* tegeltjes uitgedeeld.

18 gele tegeltjes vormen samen een regelmatige 18-hoek.

De tegeltjes om een 18-hoek mee te betegelen:



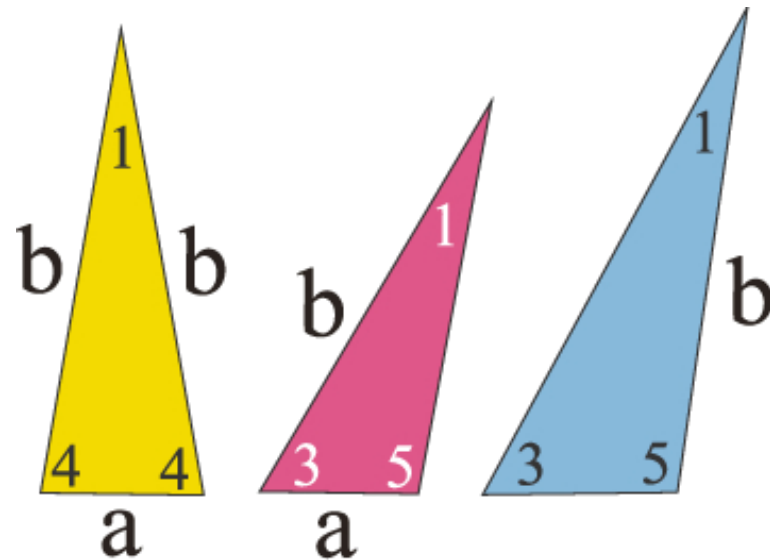
Om een vergroting te maken van de **gele** driehoek heb je nodig: 4 gele, 3 blauwe en 1 magenta tegels.

Voor een vergroting van de **blauwe** driehoek heb je nodig: 4 gele, 4 blauwe en 1 magenta tegels.

Voor een vergroting van de **magenta** driehoek heb je nodig: 3 gele, 3 blauwe en 1 magenta tegels.

Opdracht 6:

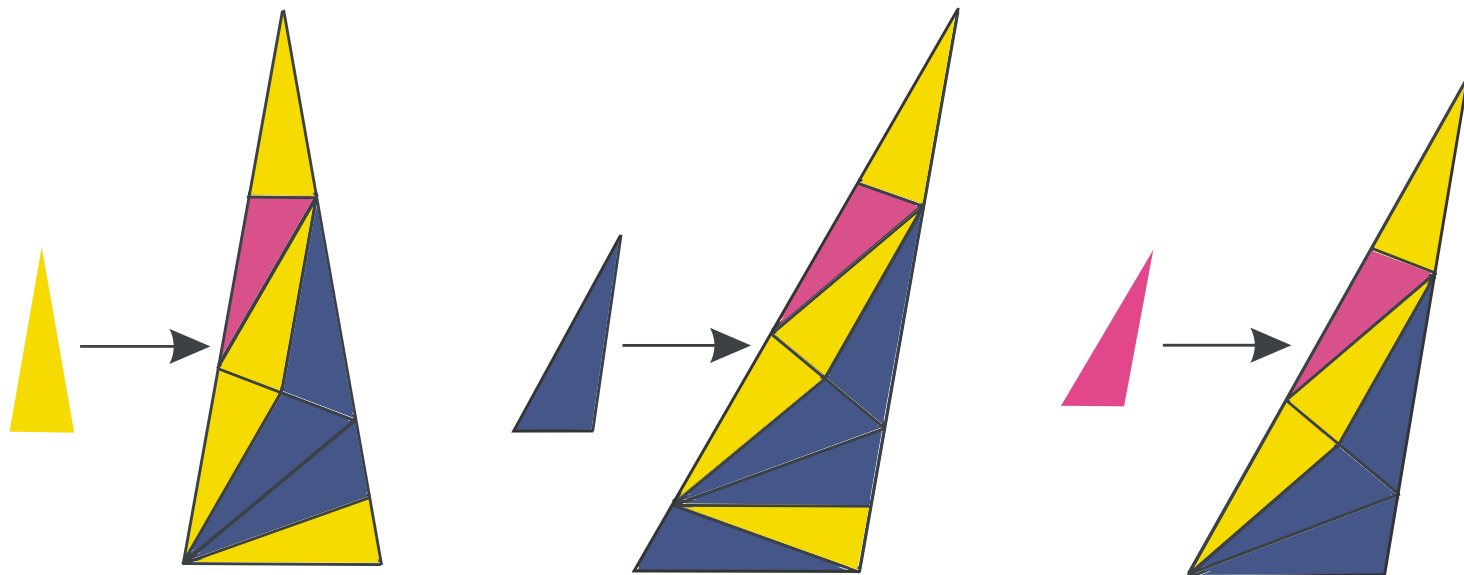
Maak nu vergrotingen van de gele, de blauwe en de magenta tegels. De vergrotingen moeten precies passen op de uitgedeelde zwarte driehoeken.



Opdracht 6:

Maak nu vergrotingen van de gele, de blauwe en de magenta tegels. De vergrotingen moeten precies passen op de uitgedeelde zwarte driehoeken.

Oplossing:



Opdracht 7:

Maak nu

- 4 vergrotingen van de gele tegel
- 3 vergrotingen van de blauwe tegel
- en 1 vergroting van de magenta tegel.

Leg ze op de zwarte uitgedeelde driehoeken.

Opdracht 8:

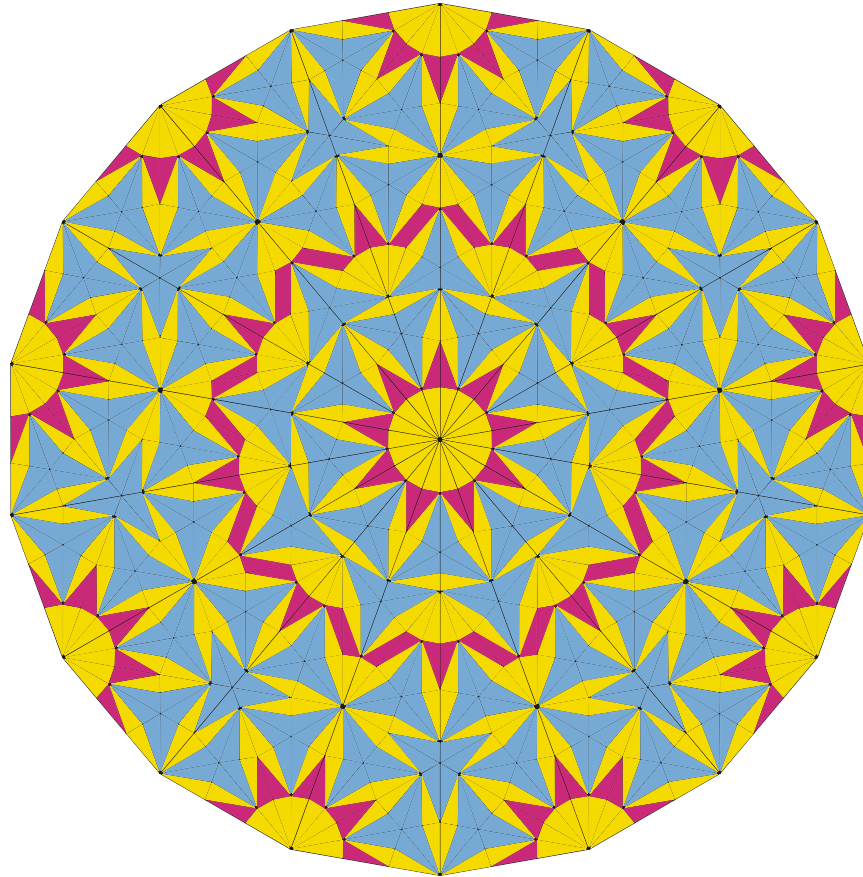
Maak hiermee een nog verder vergrote gele tegel
(= punt van een nog grotere 18-hoek).

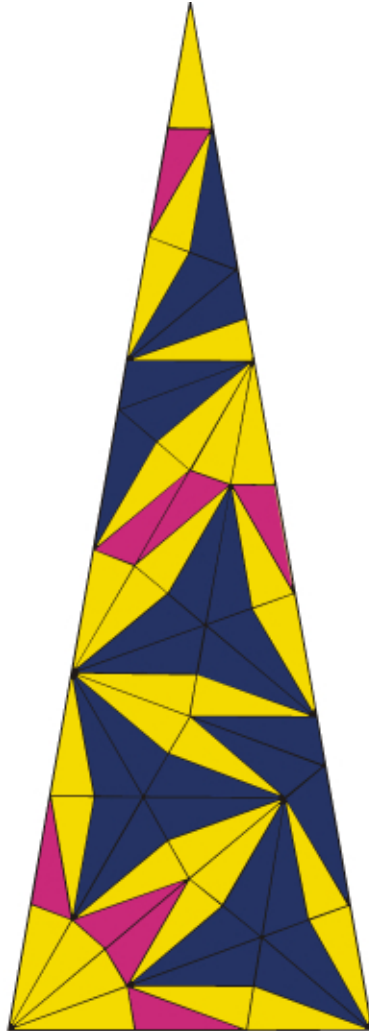
Opdracht 9:

- Zet de spiegels aan weerszijden van de punt.
- Probeer door het verwisselen van tegeltjes meer symmetrie te krijgen in de 18-hoek, misschien wordt hij er mooier van!



Bijvoorbeeld:





Zo kunnen we natuurlijk ook de vergrotingen van de blauwe en magenta tegels verder vergroten. Deze nieuwe vergrotingen kun je weer samenstellen tot een nog grotere vergroting van de 18-hoek! Enzovoorts...