

1





WISKUNDE IN DE INTERNE LOGISTIEK

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfswiskunde


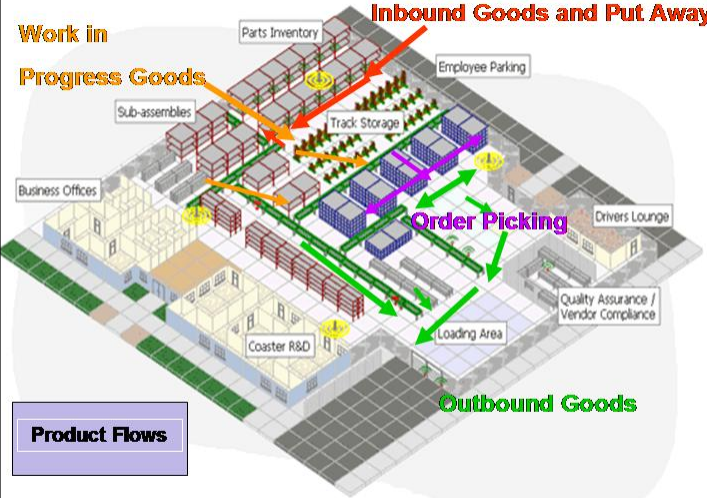
René de Koster
Rotterdam School of Management
Erasmus University
rkoster@rsm.nl
<http://www.rsm.nl/rdekoster>



2



... magazijnen



Work in Progress Goods

Inbound Goods and Put Away

Order Picking

Outbound Goods

Product Flows

Labels in diagram: Parts Inventory, Sub-assemblies, Business Offices, Coaster R&D, Track Storage, Employee Parking, Drivers Lounge, Quality Assurance / Vendor Compliance, Loading Area.



3

Ontwerp van een magazijn

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde

Palletmagazijnen met trucks

1. Hoeveel voorraad ligt er (hoe groot moet het zijn in #pallets opslag)?
2. Hoe lang en hoe breed moet het magazijn zijn?

Automatische magazijnen met kranen

3. Hoe lang en hoe hoog moet een gang zijn?
4. Hoeveel gangen en kranen zijn nodig in een automatisch magazijn?

Sorteerinstallaties

5. Wat is de capaciteit van een sorteerinstallatie?



R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10




4

Hoeveel voorraad ligt er (#pallets opslagcapaciteit) ?

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde

1






5

2 stappen:


1. Bepalen gemiddelde voorraadhoogte per opgeslagen product (uitgedrukt in pallets)
2. Bepalen maximale gelijktijdige voorraad uitgedrukt in pallets

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde



ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

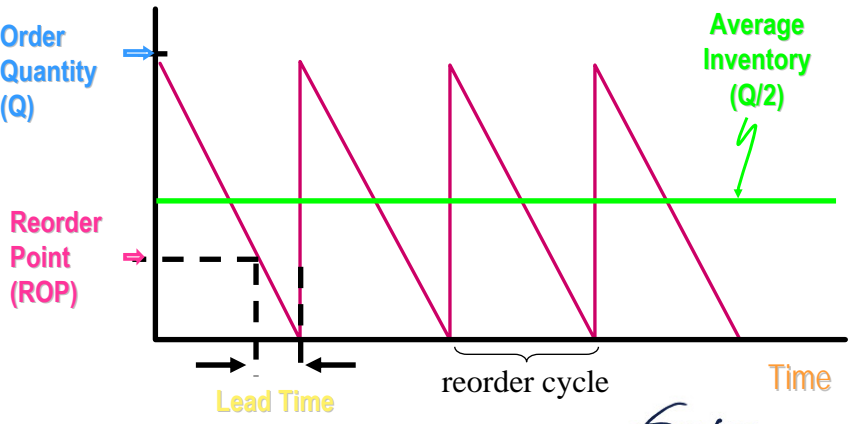
R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10



6


Wanneer en hoeveel bestellen? Bestelpuntmethode

Inventory Level



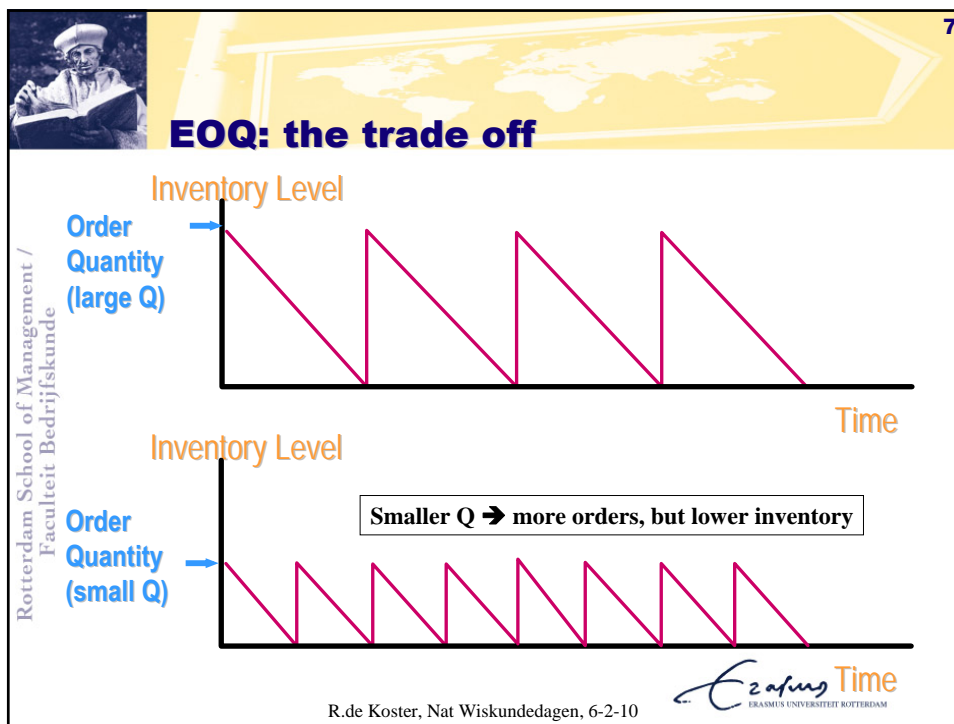
Time

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde



ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10



8


Hoeveel bestellen?

- **EOQ (economic order quantity): minimaliseert kosten**

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde

Erasmus
ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10




9

Which inventory-related costs?


- **Holding costs** - associated with holding or “carrying” inventory over time. For example due to: Obsolescence, Insurance, Extra staffing, Interest, Pilferage, Damage, Warehousing
Typically: 10-15% of value per year
- **Ordering costs** - associated with costs of placing order and receiving goods. For example due to: Supplies, Forms, Order processing, Clerical support, Payments, Transportation.

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde



ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10




10

Total (annual) costs $TC(Q)$

Ordering costs $\frac{D}{Q} S$ ← unit ordering cost
 (annual) demand $\frac{D}{Q}$
 order quantity Q

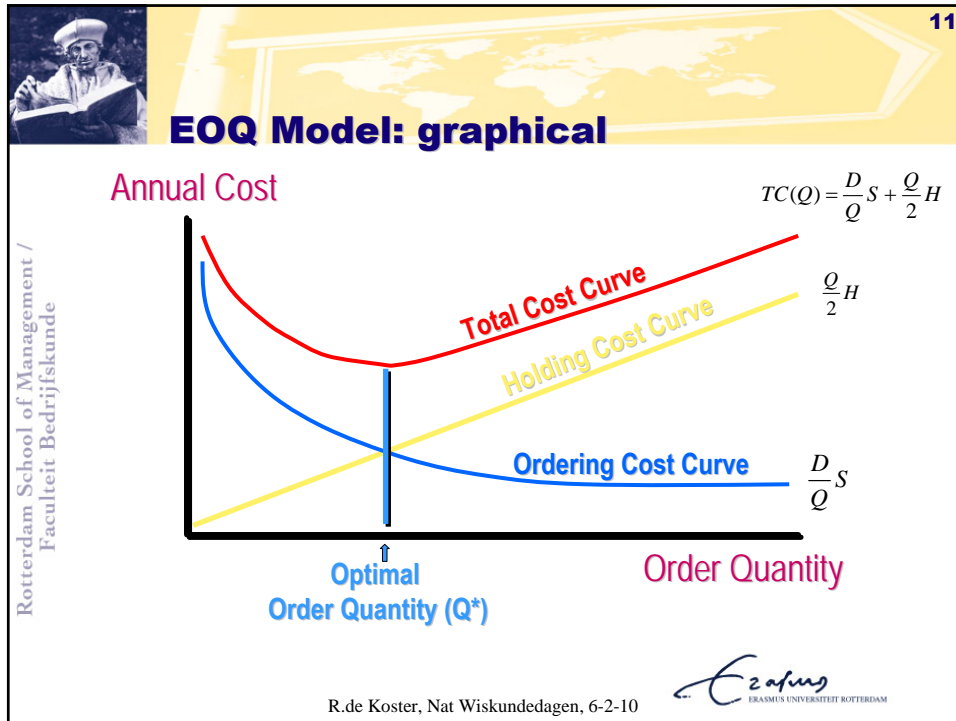
Inventory holding cost $\frac{Q}{2} H$ ← unit holding cost per year

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde



ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10



12


The Economic Order Quantity

- Total annual costs are now: $TC(Q) = \frac{D}{Q}S + \frac{Q}{2}H$
- To find the best order size, we need to find Q such that TC is minimized.
- Setting derivative equal to zero: $TC(Q)' = \frac{D}{-Q^2}S + \frac{H}{2} = 0$
- gives the Optimal (or Economic) Order Quantity Q^*

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{H}}$$

Erasmus
ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10




13

EOQ Assumptions


- Known and constant **demand**
- Known and constant **lead time**
- **Instantaneous and complete receipt** of material
- **No quantity discounts**
- Only ordering cost and holding cost
- **No stockouts**

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde



ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10




14

Reorder points

- Simple inventory models assume that everything is 100% predictable.
- In reality there may be **uncertainty**.
- Reorder point if all EOQ assumptions hold: $ROP = d * L$
- Otherwise use **safety stock**: $ROP = d * L + ss$
- What is a good level for the safety stock?

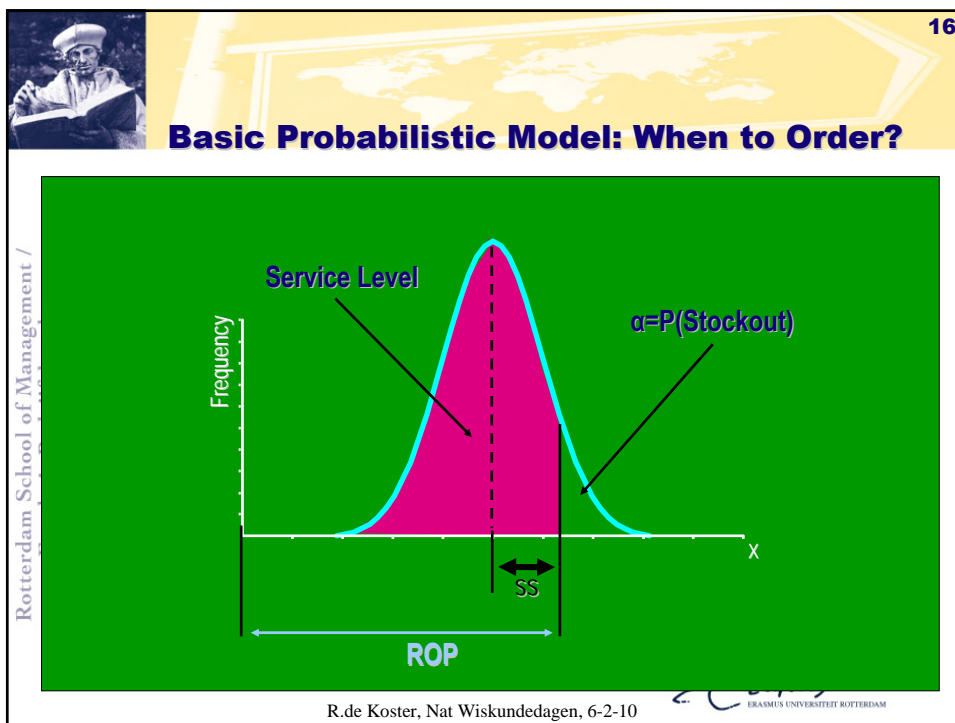
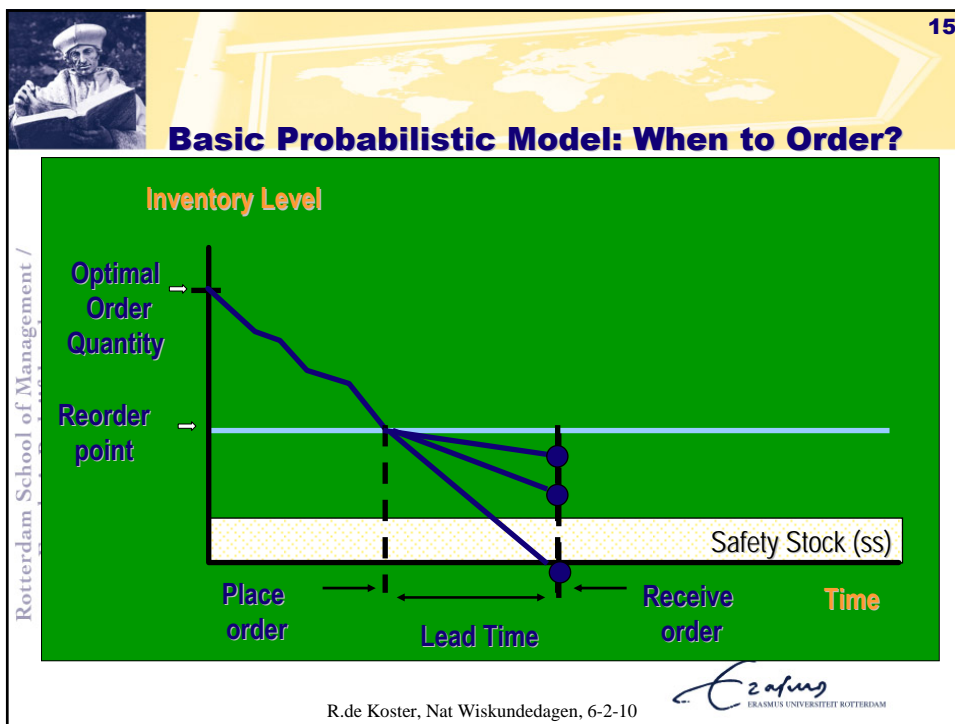
- Basic probabilistic model: **lead time demand** is normally distributed.
- Other probabilistic models: **lead time** and/or **daily demand** are normally distributed.


Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde



ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10




17

Reorder points

- Reorder point if all EOQ assumptions hold: $ROP = d \cdot L$
- Otherwise use safety stock: $ROP = \bar{d} \cdot \bar{L} + ss_\alpha = \bar{d} \cdot \bar{L} + Z_\alpha \sigma_{dL}$
($1-\alpha$ =service level). Let X_{dL} = lead time demand

$$P[X_{dL} > ROP] < \alpha$$


$$\Leftrightarrow P\left[\frac{X_{dL} - \bar{d} \cdot \bar{L}}{\sigma_{dL}} > Z_\alpha\right] < \alpha$$

- If lead time demand is normally distributed, then $\frac{X_{dL} - \bar{d} \cdot \bar{L}}{\sigma_{dL}}$ follows a standard normal distribution and we can lookup Z_α in a table:


$$1 - \Phi(Z_\alpha) = \alpha \Rightarrow Z_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$$

Question: how to determine σ_{dL} ?

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde



R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10


18


Assumption: leadtime constant

$$VAR(X_{dL}) = VAR(X_1 + X_2 + \dots + X_L) = L \cdot VAR(X_d) \Rightarrow \sigma_{dL} = \sigma_d \sqrt{L}$$


(assuming iid daily demand and constant lead time)

- Average inventory level during a reorder cycle:
inventory just after reordering: $Q + ss$
inventory just before reordering: ss
 \Rightarrow average inventory level: $\frac{Q}{2} + ss$

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde



R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10




19

We weten nu hoeveel voorraad er gemiddeld ligt per artikel i voor een bepaalde servicegraad $1-\alpha$:


$$\frac{Q_i}{2} + ss_i = \frac{Q_i}{2} + Z_\alpha \sigma_i \sqrt{L_i}$$

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde



ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10



20

Hoeveel opslaglocaties (pp) hebben we nodig?

N artikelen, vrij locatie opslagsysteem, dan

$$\# pp = \frac{\left(\sum_{i=1}^N \left[\frac{\frac{Q_i}{2} + ss_i}{(\text{units}_i / \text{pallet})} \right] \right) \times (1 + \text{veiligheidsfactor})}{\text{gewenste vulgraad}}$$


Veiligheidsfactor:

- Rekening houden met groei over ca. 5 jaar
- Rekening houden met gelijktijdige aanwezigheid (0-30%)

Vulgraad: ca. 80%

“vaste locatie” opslagsysteem: vervang $\frac{Q}{2}$ door: Q

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde



ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10

21

Hoe lang en hoe breed moet het magazijn zijn?

2 Moeten de pallets in de breedte of in de diepte opgeslagen worden?

PALETTE EUR-EPAL®
EPAL EUR

Europallets: 120 x 80 cm

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde

22

Hoe lang en hoe breed moet het magazijn zijn? (2)

Deep or wide pallet storage?

Cost ratios: warehouse write
personnel
equipment

Conclusion: good space utilizati

R.de Koster, Nat Wisk

management /
kunde

23


Hoe lang en hoe breed moet het magazijn zijn? (2)

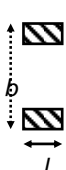
Deep or wide pallet storage?

Cost ratios:	warehouse write-off/rent	:65-75 %
	personnel	:20-25%
	equipment	:5-10%

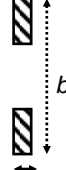
Conclusion: good space utilization!

Example: small "forklift" trucks (2.1m aisle width)






$b = \text{aisle width} + 2.4 + 0.2m$
 $l = 0.8 + 0.2m$



$b = \text{aisle width} + 1.6 + 0.2m$
 $l = 1.2 + 0.2m$

**aisle width = 2.5m $\Rightarrow O = 5.1 m^2$
6.6% less space needed!**

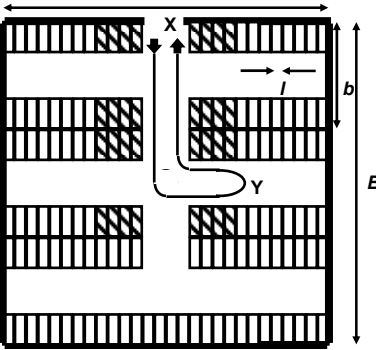
aisle width = 2.1m $\Rightarrow O = 5.5 m^2$
R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10

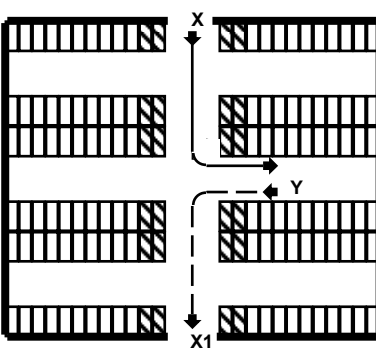


24

Hoe lang en hoe breed moet het magazijn zijn? (3)

2 typische layouts (met random opslag):







Ave. single-cycle travel time: $TT = 2(L/4 + B/2) = B + L/2$

Assume needed storage space is given: $LB = C$

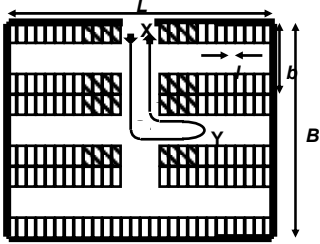
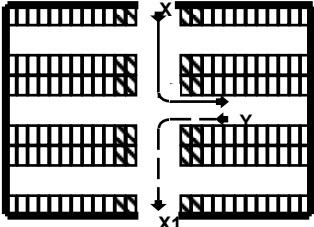
Q: what is the optimum warehouse length/width ratio?

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10




25

Hoe lang en hoe breed moet het magazijn zijn? (3)

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde

Ave. single-cycle travel time: $TT = B + \frac{L}{2}$


Substitute $B = \frac{C}{L} \Rightarrow TT(L) = \frac{C}{L} + \frac{L}{2}$

Take derivative wrt L , equate to zero: $TT'(L) = -\frac{C}{L^2} + \frac{1}{2} = 0$

This results in $L = \sqrt{2C}$


$B = \frac{C}{\sqrt{2C}} = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{2}}$

 $\left. \vphantom{B = \frac{C}{\sqrt{2C}} = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{2}}}\right\} \Rightarrow L = 2B$

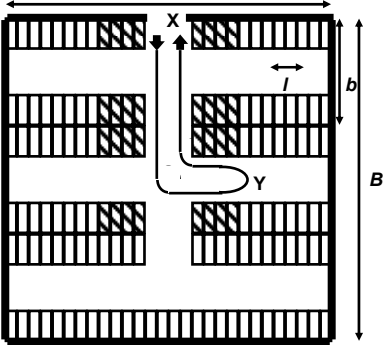
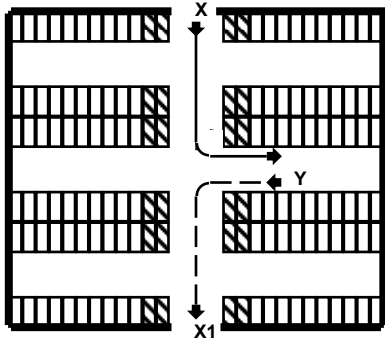


ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10


26

How to design a pallet bulk warehouse?(4)


Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde

$P (= \#pp) = 2n L/l \times B/b$ ($n = \text{nr of levels}$), $L=2B \Rightarrow$

$B = \sqrt{(Plb/n)} / 2$ Note: L/l , B/b are integers!

$L = \sqrt{(Plb/n)}$

nr of sections
nr of aisles



ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10

27

Automatische magazijnen met kranen (AS/RS)

3.

Management /
Wiskunde



ERASMUS
ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

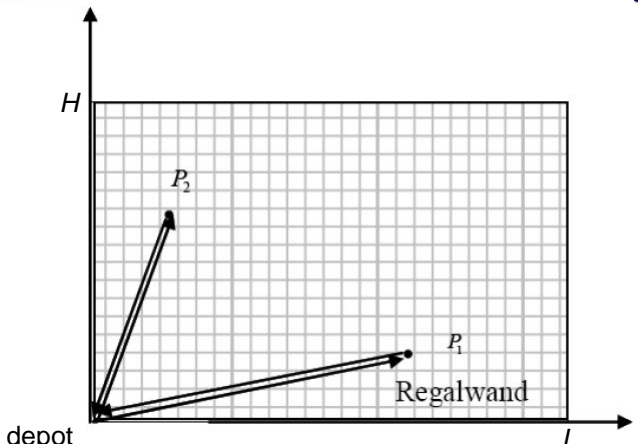
Wiskundedagen, 6-2-10

28

Optimale lengte/hoogte verhouding van een opslaggang?

3.


Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde



Zijaanzicht van een gang

ERASMUS
ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10



29

Kraan rijdt en heft tegelijk!

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde

Data:

v_x, v_y = horizontale, verticale snelheid van de kraan


$t_x = \frac{L}{v_x}, t_y = \frac{H}{v_y}$: rijtijd/heftijd naar verste/hoogste locatie


$T = \max\{t_x, t_y\}, b = \min\{\frac{t_x}{T}, \frac{t_y}{T}\}$ de vormfactor van de stelling

Veronderstel $t_x \geq t_y$, dan $b = \frac{t_y}{t_x}$

Z = rijtijd (heen en weer naar locatie). Gezocht: E[Z]

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10

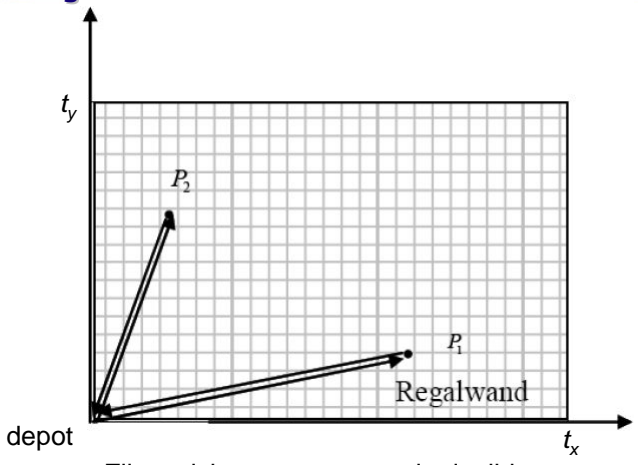




30


Rijtijden, getekend in de tijddimensie

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde



Zijaanzicht van een gang, in de tijd

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10





31

Gemiddelde rijtijd?

Stel een magazijn is 50 sec rijtijd lang, en 50 sec heftijd hoog.

Random opslag (elke locatie even waarschijnlijk)


Wat is de gemiddelde rijtijd naar een locatie (enkele reis)?

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde



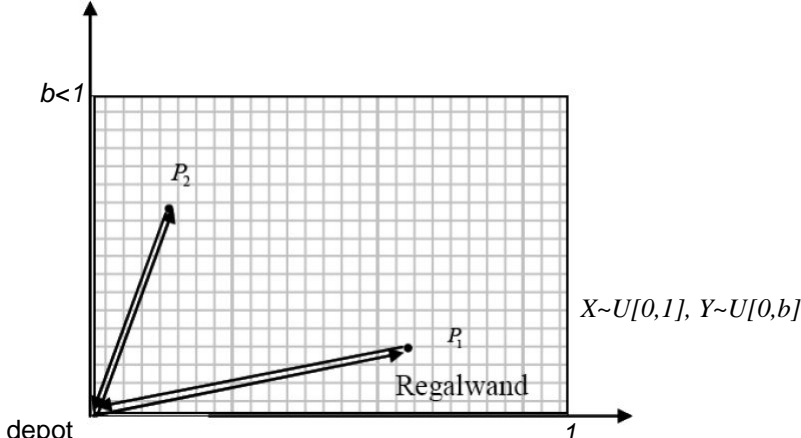
ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10




32

Herschalen van de magazijn­dimensies, deel alle tijden door $T=t_x$




Zijaanzicht van een gang, in de tijd, geschaald

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde



ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10



33

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde


$$F_Z(z) = P[Z \leq z] = P[\max\{X, Y\} \leq z] = P[X \leq z] \cdot P[Y \leq z]$$

$$P[X \leq z] = \begin{cases} z, & \text{als } 0 \leq z \leq 1 \\ 1, & \text{als } z > 1 \end{cases} \quad P[Y \leq z] = \begin{cases} \frac{z}{b}, & \text{als } 0 \leq z \leq b \\ 1, & \text{als } z > b \end{cases}$$


$$F_Z(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{b}, & \text{als } 0 \leq z \leq b \\ z, & \text{als } b < z \leq 1 \\ 1, & \text{als } z > 1 \end{cases}, \text{ dus } f_Z(z) = \begin{cases} \frac{2z}{b}, & \text{als } 0 \leq z \leq b \\ 1, & \text{als } b < z \leq 1 \\ 0, & \text{als } z > 1 \end{cases}$$

$$E[Z] = 2 \int_0^\infty z f_Z(z) dz = 2 \int_0^b \frac{2z^2}{b} dz + 2 \int_b^1 z dz + 2 \int_1^\infty 0 dz$$

$$= 2 \left. \frac{2z^3}{3b} \right|_0^b + 2 \left. \frac{z^2}{2} \right|_b^1 = 2 \left(\frac{2b^2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{b^2}{2} \right) = 1 + \frac{b^2}{3}$$



R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10




34


Terugschalen: vermenigvuldigen met T

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde

$$E[Z] = \left(1 + \frac{b^2}{3}\right)T$$



R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10



35

Optimale stellingafmeting?


Stel een stelling is 30m lang
Wat is dan de optimale hoogte?

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde



ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10



36

Optimale stellingafmeting?

$$\min! E[Z] = \left(1 + \frac{t_y}{3}\right) t_x$$


odv $t_x \cdot t_y = C$

$t_y = \frac{C}{t_x}$, substitutie geeft: $E[Z] = t_x + \frac{C^2}{3t_x^3}$

Afgeleide gelijk aan 0 stellen geeft:


$$1 + \frac{-9C^2 t_x^2}{9t_x^6} = 0 \Rightarrow t_x = \sqrt{C}, \text{ en daarom ook } t_y = \sqrt{C}, \text{ ofwel } t_x = t_y$$

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde



ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10




37

Optimale stellingen zijn vierkant!


- Althans in de tijd
- Stel $v_x = 2 \text{ m/s}$, $v_y = 0,5 \text{ m/s}$. Optimale stellingafmetingsverhouding in m?
- dan moet de stelling dus 4-maal zo lang zijn als hoog

Rotterdam School of Management /
 Faculteit Bedrijfskunde



ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10



38

Hoeveel kranen en gangen nodig?

4. Stel ik heb 4000 sec^2 stellingruimte nodig en ik moet per uur minimaal 200 pallets inslaan en/of uitslaan

min! N
 odv $2N \cdot t_x \cdot t_y = 4000$

$$\frac{N \cdot 3600}{\left(1 + \frac{t_y}{t_x}\right)^2} \geq 200$$

min! N
 odv $2N \cdot t_x^2 = 4000$


$$\frac{N \cdot 3600}{\left(1 + \frac{1}{3}\right)t_x} \geq 200$$

Oplossingsmethode:

```


N := 0, tp = 0;
While tp < 200
do N := N + 1; t_x := sqrt(2000/N); tp := (N * 3600) / ((1 + 1/3)t_x)
end do;
    
```

Rotterdam School of Management /
 Faculteit Bedrijfskunde



ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10


39

Hoeveel kranen en gangen nodig?

Stel ik heb 4000m² stellingruimte nodig en ik moet per uur minimaal 200 pallets inslaan en/of uitslaan

Oplossingsmethode:

$N := 0, tp = 0;$
 While $tp < 200$


do $N := N + 1; t_x := \sqrt{\frac{2000}{N}}; tp := \frac{N \cdot 3600}{(1 + \frac{1}{3})t_x}$


end do;

#gangen	tx (sec)	tp (pal/hr)
1	44.7	60.4
2	31.6	170.8
3	25.8	313.7
4	22.4	483.0

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10




40

Hoeveel kranen en gangen nodig?

Stel ik heb 4000sec² stellingruimte nodig en ik moet per uur minimaal 200 pallets inslaan en/of uitslaan

Oplossingsmethode:

$N := 0, tp = 0;$
 While $tp < 40$


do $N := N + 1; t_x := \sqrt{\frac{2000}{N}}; tp := \frac{N \cdot 3600}{(1 + \frac{1}{3})t_x}$

end do;

#gangen	tx (sec)	tp (pal/hr)
1	44.7	60.4
2	31.6	170.8
3	25.8	313.7
4	22.4	483.0

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10



41



Wat is de capaciteit van een sorteerinstallatie?

5.


Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde




Erasmus
ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

Wiskundedagen, 6-2-10

42



Sorter layouts


Line Sorter

Loop Sorter

Erasmus
ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

Source: Vanderlande

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10

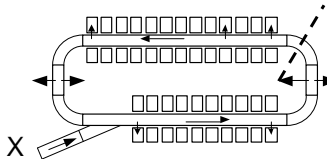


43

Loop sorter met 1 induct. Wat is de totale sorteercapaciteit bij gegeven nominale machinecapaciteit C

Single induct point versus multi induct points


Capaciteit bij elke doorsnede = C (prod/sec). Gevraagd: X



Oplissing: $X = C$

Single induct point / groups from aside

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde



R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10



44

Sorteercapaciteit bij 2 inducts?



Multi induct points / groups from aside

Aanname: 2 inducts gelijkmatig verdeeld. Sorteergoten gelijkmatig verdeeld. Dan:


$$\left. \begin{array}{l} X + \frac{1}{2}Y = C \\ X = Y \end{array} \right\} \Rightarrow X = \frac{2}{3}C$$

Ofwel: totale sorteercapaciteit = $2X = \frac{4}{3}C$

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde



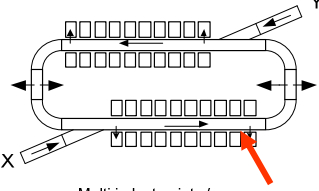
R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10



45

Sorteercapaciteit bij 3 inducts?

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde




Multi induct points / groups
from aside


Aanname: 3 inducts gelijkmatig verdeeld. Sorteergoten gelijkmatig verdeeld. Dan:

$$X + \frac{1}{3}X + \frac{2}{3}X = C \Leftrightarrow \frac{1}{3}X \sum_{i=1}^3 i = C \Leftrightarrow \frac{X \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = C \Rightarrow X = \frac{1}{2}C$$

Ofwel: totale sorteercapaciteit = $3X = \frac{3}{2}C$

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10

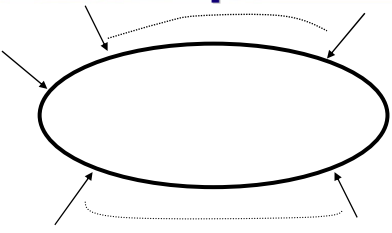




46

Sorteercapaciteit bij N inducts?

Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde




Aanname: N inducts gelijkmatig verdeeld. Sorteergoten gelijkmatig verdeeld. Dan:


$$\frac{1}{N}X \sum_{i=1}^N i = C \Leftrightarrow \frac{X \cdot (N+1) \cdot N}{N \cdot 2} = C \Rightarrow X = \frac{2}{N+1}C$$

Ofwel: totale sorteercapaciteit = $NX = \frac{2N}{N+1}C$

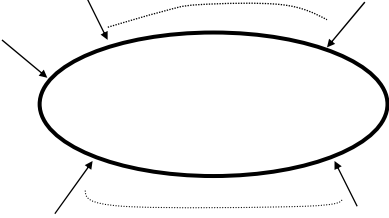
R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10



47




Sorteer capaciteit bij N inducts?




Rotterdam School of Management /
Faculteit Bedrijfskunde

Als het aantal inducts toeneemt kunnen we bijna 2 maal zoveel producten per uur sorteren als de nominale sorteer capaciteit!


ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM


R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10

48




Er zijn nog meer interessante vraagstukken binnen magazijnen, oplosbaar met “school”wiskunde (of ietsje meer)

- Welk magazijn is het best? *Oplossing met DEA (lineair programmeren)*
- Hoeveel dockdeuren zijn nodig teneinde bepaalde maximale truckwachtijd te krijgen? *Modelleren als M/M/m wachtrij*
- Wat is de optimale stapeldiepte (met betrekking tot ruimtegebruik)?



Ruimtegebruik modelleren als functie van de stapeldiepte (en hoogte) en eerste orde condities toepassen


ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

R.de Koster, Nat Wiskundedagen, 6-2-10