Het vermoeden van Poincaré

Joseph Steenbrink
IMAPP, Radboud University Nijmegen

6 februari 2010

Outline

Henri Poincaré

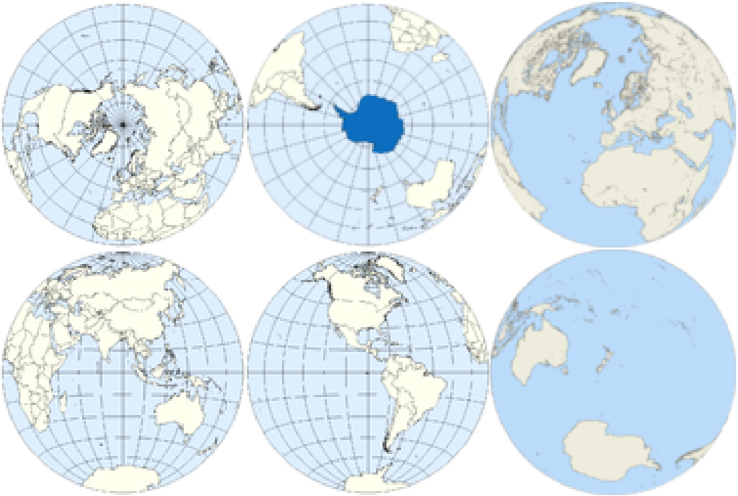
- Nancy 1854 - Parijs 1912
- Achtergrond in de mijnbouw
- Promotie 1879 bij Hermite
- Zeer breed wiskundig, astronomisch, natuurkundig werk
- Formuleerde het Vermoeden van Poincaré

Outline

Oppervlakken

- Een oppervlak: verzameling die uit een collectie tweedimensionale kaarten (atlas) is opgebouwd
- Tweedimensionale kaart: een stuk van het vlak
- Gegeven is hoe twee kaarten overlappen

Een atlas van de aarde?



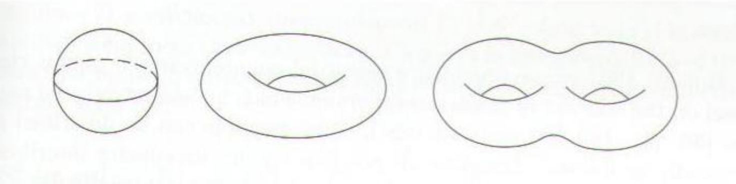
Compactheid

- Het aardoppervlak is compact
- want elke atlas ervan (met eventueel oneindig veel kaarten) bevat een eindige deelatlas
- Een vlak is niet compact
- Atlas: alle cirkelschijven met straal 1
- Geen enkel eindig aantal schijven overdekt het hele vlak.

Oriëntatie

- Het aardoppervlak is georiënteerd
- want “rechtsafslaan” betekent in alle geografische kaarten hetzelfde
- Een Möbiusband is niet oriënteerbaar

Klassificatie van compacte samenhangende georiënteerde oppervlakken



De 2-sfeer

- Dit is het oppervlak van een bol
- Als deel van de driedimensionale ruimte: de punten met afstand 1 tot de oorsprong.
- Vergelijking:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

- Is het enige compacte samenhangende oriënteerbare oppervlak waarop elke lus samentrekbaar is.

Intermezzo: enkelvoudige samenhang

- Zij S een of andere ruimte.
- Een lus op S is een continue afbeelding van de cirkel naar S
- Een lus is samentrekbaar als deze continue afbeelding kan worden uitgebreid tot een continue afbeelding van de cirkelschijf naar S
- S heet enkelvoudig samenhangend als elke lus op S samentrekbaar is

Voorbeeld: een grote cirkel op een bol is samentrekbaar. Een meridiaan of parallel op een torus niet.

Lichamen

- Een lichaam: ruimte die uit een collectie driedimensionale kaarten (atlas) is opgebouwd
- Driedimensionale kaart: een stuk van de drie-dimensionale ruimte
- Gegeven is hoe elk tweetal kaarten overlappen

De 3-sfeer

- Als deelverzameling van de vierdimensionale ruimte: alle punten met afstand 1 tot de oorsprong
- Vergelijking

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

- Vermoeden van Poincaré:

De 3-sfeer is het "enige" compacte oriënteerbare enkelvoudig samenhangende lichaam.

Aanvankelijk fout vermoeden

- Zwakkere eis dan samentrekbaarheid voor een lus mogelijk: nulhomoloog
- Lus op M heet nulhomoloog als hij uit te breiden is tot een continue afbeelding van een oppervlak naar M waarvan de rand de gegeven cirkel is
- Poincaré's eerste vermoeden:

  De 3-sfeer is het 'enige' samenhangende compacte oriënteerbare lichaam waarop elke lus nulhomoloog is.

Tegenvoorbeeld

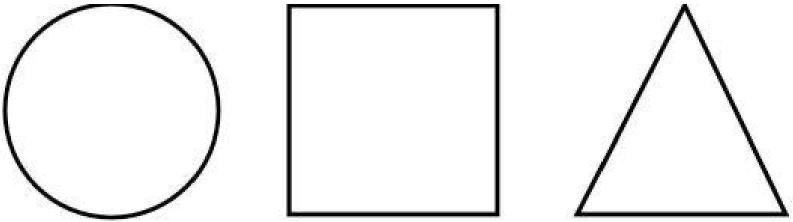
- Poincaré vond een tegenvoorbeeld voor zijn eerste vermoeden.
- Het is de configuratieruimte van regelmatige twintigvlakken met alle hoekpunten op de 2-sfeer.
- Hierop is elke lus nulhomoloog
- maar niet elke lus is samentrekbaar!
- Voorbeeld van zo'n lus: draai een gegeven twintigvlak over 72 graden rond een hoekpunt.

Outline

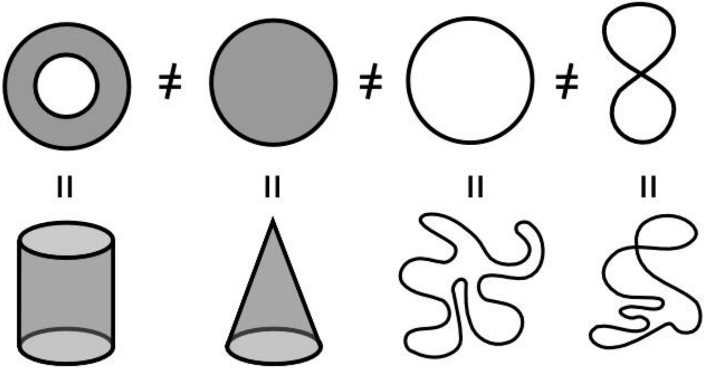
Riemannse meetkunde

- In de meetkunde gaat het om afstanden
- Metrische ruimte M: een ruimte met een afstandsfunctie
- Dus voor elke puntenpaar P, Q is er een afstand $d(P, Q)$
- Eigenschappen hiervan:
  - positief
  - symmetrisch
  - driehoeksongelijkheid
- Omgeving van $P \in M$: bevat alle punten Q van M dicht genoeg bij P
- Open verzamelingen $\Longrightarrow$ topologie

Drie topologisch gelijke figuren



Q en A topologisch niet hetzelfde



Aard van het vermoeden

- Het vermoeden van Poincaré hoort thuis in de topologie.
- Poincaré ontwikkelde zelf veel nieuwe topologische begrippen
- Toch is voor de oplossing een metrische benadering gekozen!
- Eerste stap: differentieerbare structuur
- Tweede stap: Riemannse metriek

Riemannse metriek

- Gegeven: ruimte M met differentieerbare structuur
- Kan dan spreken van raakvectoren in een punt van M
- Riemannse metriek: kent aan elke raakvector van M een lengte toe
- Pad op M: differentieerbare afbeelding $\gamma : [a, b] \to M$
- Booglengte van het pad:

$$\int_a^b |\gamma'(t)| \, dt$$

- Dan afstandsbegrip op M

De Riemannse metriek variëren

- Lokale gedaante Riemannse metriek: symmetrische matrix $g_{ij}(x)$ van functies op M
- Er is dus veel ruimte om deze te variëren
- Riccikromming: ook symmetrische matrix van functies $R_{ij}(x)$
- Ricci-kromming bepaald door Riemannse metriek
- Ricci-stroming: de differentiaalvergelijking

$$\frac{dg}{dt} = -2R(g(t))$$

Zo ontstaat een dynamiek voor de metriek op M

Richard Hamilton

- Bestudeerde de Ricci-stroming voor ruimtes met positieve kromming
- Liet zien dat de metriek dan evolueert naar een metriek met constante kromming (1981)
- In het algemene geval treden er singulariteiten op
- Deze sturen alles in de war

Grisha Perelman

- Kreeg de singulariteiten van de Ricci-stroming onder controle
- Publiceerde drie artikelen op het web in 2002-2003
- Na drie jaar was men overtuigd dat ze correct zijn en het Vermoeden van Poincaré bewijzen
- Hem werd in 2006 de Fields Medal toegekend
- Deze heeft hij geweigerd

Perelman

Diswis Poincaré

- Beoogd module voor Wiskunde D
- Ontwikkeld door Sebas Eliëns bij De Praktijk
- Financiering: GQT, Compositio, ITS academy
- Werkdocument is gereed
- Najaar 2010: master class op RU Nijmegen