Richting geven aan het onderwijs in meten en meetkunde in de bovenbouw

Situatieschets

In het reken-wiskundeonderwijs in de bovenbouw van de basisschool is meetkunde een beetje het stiefkindje. Er is nauwelijks aandacht voor dit deel van het reken-wiskundeonderwijs en als er al aandacht voor is, kan dit zeker niet worden getypeerd als systematische aandacht. Natuurlijk verwerven leerlingen binnen en buiten de school meetkundige vaardigheden, die bruikbaar zijn voor alledag. PPON laat dit zien. Vrijwel alle leerlingen weten zich redelijk te redden in eenvoudige alledaagse meetkundige situaties. Dit neemt echter niet weg dat leerlingen in de bovenbouw van de basisschool niet worden voorbereid op de meetkunde die in het voortgezet onderwijs aan de orde is.

Voor het meten ligt de situatie anders. Daarvoor is aanzienlijk meer aandacht in de bovenbouw van de basisschool. Veelal ligt de nadruk in het onderwijs op het oefenen van relaties tussen maten in het metrieke stelsel. Daar valt wat voor te zeggen, omdat het mooi zou zijn als leerlingen tegen het eind van de basisschool de systematiek binnen het metrieke stelsel doorzien. Daarnaast zou het goed zijn als leerlingen tegen het einde van de basisschool in staat zijn maten en relaties tussen maten kunnen inzetten bij het oplossen van eenvoudige meetproblemen. PPON laat zien dat dit laatste leerlingen steeds moeilijker afgaat.

Deze situatie vraagt om andere keuzen in het onderwijs. Zo kan men zich afvragen of leerlingen die in de basisschool nauwelijks op systematische wijze met meetkunde in aanraking zijn geweest wel adequaat worden voorbereid op het vervolgonderwijs. Verder blijkt alle aandacht voor relaties tussen maten onvoldoende op te leveren en zouden we toch zeker mogen verwachten dat een ruime meerderheid van de leerlingen zich tegen het einde van de basisschool weet te redden in eenvoudige meetsituaties.

Gericht keuzen maken

Voor het maken van keuzen voor het onderwijs in meten en meetkunde gebruiken we de waarden van het reken-wiskundeonderwijs als oriënteringsbasis. In het algemeen worden drie van dergelijke ‘waarden’ onderscheiden: de *algemeen praktische en vormende waarde*, de *voorbereidende waarde*, en de *intrinsieke waarde*. Bij de *algemeen praktische en vormende waarde* gaat het om de wiskunde die nodig is voor het maatschappelijk functioneren. Dit omvat de vormende waarde, omdat het hier ook gaat om problemen oplossen, redeneren en een eigen standpunt innemen en verdedigen. Bij de *voorbereidende waarde* gaat het om de waarde van het onderwijs met het oog op het vervolgonderwijs. Het gaat hierbij ook om voorbereiden op het verwerven van kennis en vaardigheden binnen het curriculum van de basisschool. Bij de *intrinsieke waarde* gaat het – tot slot – om de schoonheid van de wiskunde zelf. We leren wiskunde omdat het als mooi systeem in elkaar zit of omdat het fraai oogt.

De ‘waarden’ dienen als invalshoek om keuzes, die aanvankelijk voortkwamen uit gesignaleerde knelpunten, te verantwoorden en zonodig aan te scherpen. We geven in dit werkdocument een eerste uitwerking van keuzen die gemaakt zouden kunnen worden voor het meet- en meetkundeonderwijs

Niet oefenen, maar leren afleiden en construeren

Het onderwijs richt zich op het goed leren kennen van lengtematen en de relaties ertussen. Dit vormt feitelijk een manier om de betekenis van de voorvoegsels als ‘milli’, ‘centi’, enzovoorts te leren kennen. Wanneer leerlingen de systematiek bij de lengtematen doorzien, wordt deze kennis ingezet om andere maten te ontwikkelen en relaties tussen deze maten te beredeneren. Dit wordt telkens gedaan in situaties die daar om vragen en ook wanneer leerlingen de nieuwe maat nog niet beschikbaar hebben.

Op deze manier verschuift de nadruk op het oefenen van relaties in het metrieke stelsel naar het leren construeren van maten. De vraag wordt: hoe maak je de maat? Ook dit proces leidt voor een deel van de leerlingen tot het leren kennen van relaties tussen maten. Voor een ander deel van de leerlingen zal dit evenwel niet zo zijn en zij zullen in betekenisvolle situaties telkens weer moeten overwegen welke maat nodig is en hoe die geconstrueerd kan worden. Zij kunnen zich zonder volledige greep op het stelsel wel staande houden. Aldus verschuift de nadruk in het onderwijs naar het toepassen van het meten.

Systematischer aandacht voor meetkunde

Met name bij meetkunde geldt dat er in het basisonderwijs weinig en geïsoleerde aandacht aan wordt gegeven. Leerkrachten weten vaak niet waar ze in ieder geval aandacht op moeten richten en hoe ze leerlingen kunnen helpen verder te komen in dit leergebied. Ook hier kiezen we voor de invalshoek van de waarden van het reken-wiskundeonderwijs als oriënteringsbasis. We verantwoorden de meetkunde vanuit, de algemeen praktische en vormende waarde, de voorbereidende waarde en de intrinsieke waarde. Verder kiezen we voor een indeling van dit leerstofgebied in verschillende deelgebieden. In de basisschool moeten leerlingen in aanraking komen met meetkundige verschijnselen, die we globaal in twee clusters delen die we ‘oriëntatie in de ruimte’ en ‘vlakke en ruimtefiguren’ noemen. Door en voor het leren begrijpen van deze verschijnselen worden allerlei meetkundige instrumenten ontwikkeld die mogelijk maken deze verschijnselen te modelleren, visualiseren en representeren. We kiezen er dan ook voor om systematisch aandacht te besteden aan meetkundige aspecten, die meer instrumenteel van aard zijn.

Meer ruimte voor exploreren en redeneren

Uit de inrichting van het onderwijs, zoals dat hiervoor is geschetst, volgt dat leerlingen in het onderwijs in meten en meetkunde de kans krijgen werkelijk op onderzoek te gaan. De nadruk in het onderwijs komt zo te liggen op het redeneren en het formuleren van een eigen standpunt of aanpak. Overigens gaat het daarbij vooral om het mentaal handelen, representeren van situaties en ontdekken van systematiek. Het gaat echter ook om relevantie en uitdaging voor leerlingen. Daarnaast wordt op deze manier de wiskundetaal verbreedt en verdiept, omdat de werkwijze noopt tot communicatie en interactie.

Door deze keuze krijgt het werkelijke toepassen meer ruimte. Daarnaast biedt dit mogelijkheden om de meetkunde meer systematisch op te bouwen en bijvoorbeeld ook aandacht te schenken aan meer abstracte of formele meetkunde.

Werkdocument

Het Tal-team is nog maar kort met de onderwerpen meten en meetkunde bezig. We zoeken naar verschuiving in accenten in het onderwijs. Er zijn daarvoor enkele ideeën ontwikkeld en een aantal daarvan is zodanig uitgewerkt dat die zich lenen om bediscussieerd te kunnen worden. Deze uitwerkingen vindt u in dit werkdocument. In het hoofdstuk rond meten wordt het idee van constructie van maten door leerlingen verder uitgewerkt. In het stuk rond meetkunde wordt ingegaan op de waarden in het meetkundeonderwijs en op een voorgestelde indeling van het leerstofgebied.

Dit geheel betitelen we met nadruk als ‘werkdocument’. Het is het materiaal zoals we het nu hebben liggen. We gaan er verder mee aan de slag en daarbij nemen we graag reacties van lezers mee. U kunt bijvoorbeeld reageren door e-mail te sturen aan: talbovenbouw@fi.uu.nl.

Domeinbeschrijving meten in de bovenbouw

1 Inleiding

Meten is een van de meest rijke bronnen van het reken-wiskundeonderwijs. Meetsituaties laten zich goed gebruiken om kinderen uit te dagen en om ze te leren hun eigen wereld op een wiskundige manier in beeld te krijgen. Meten benadrukt de praktische waarde van de wiskunde. Dit is echter, zo moeten we vaststellen, niet de realiteit van het meetonderwijs. Het meetonderwijs is weinig effectief. De vele onderwijsuren die worden besteed aan het leren van relaties tussen metrische maten resulteert er uiteindelijk in dat een aanzienlijk deel van de leerlingen zich niet kan redden in situaties waar de meetkennis moet worden toegepast. Daarmee bereid het huidige meetonderwijs niet altijd even optimaal voor op gebruiken van het meten in het voortgezet onderwijs, zowel bij het vak wiskunde als bij andere vakken. Bovendien krijgen de leerlingen zo onvoldoende de kans om het systeem achter de metrische maten goed te verkennen. Wij stellen daarom in deze notitie een alternatief voor en werken die tot op zekere hoogte uit. We kiezen er voor in het basisonderwijs niet in te zetten op het volledig kennen van het metrieke stelsel door alle leerlingen. In plaats daarvan zorgen we ervoor dat leerlingen goed thuis raken in de lengtematen en alle relaties daartussen. Dit vormt vervolgens een basis om andere relaties te construeren in situaties die daartoe uitlokken. Voor een aantal leerlingen leidt dit tot het kennen van het metrieke stelsel en de systematiek achter dit systeem. Andere leerlingen zullen enkel relaties tussen maten leren kennen en zullen in andere gevallen telkens weer de benodigde maten moeten construeren.

De maten die we kinderen willen leren zullen aanvankelijk alleen die maten zijn die in dagelijkse leven een rol spelen. Echter, omdat de waarde van het meten ook gelegen is in het leren kennen van wiskundige systemen en relaties, zal het construeren van maten een belangrijke rol spelen in het onderwijs. Daarbij denken we niet aan een korte kennismaking met relaties tussen maten, als bijvoorbeeld cm^2 en m^2, maar een voortdurende aandacht voor het telkens in betekenisvolle situaties afleiden of heruitvinden van de relaties tussen de maten. We pleiten, met andere woorden, voor een verschuiving van het oefenen naar het construeren van maten en van relaties tussen maten, om leerlingen zo de kans te geven deze relaties en geconstrueerde maten beter te begrijpen. Daarvoor is het nodig telkens uitdagende problemen centraal te stellen in het meetonderwijs. Daarbij gaat het om problemen die de kinderen in overleg met de leerkracht, zelfstandig of samen met enkele leerlingen aanpakken. Het gaat hierbij om situaties waarbij de leerlingen werkelijk op onderzoek gaan en de opbrengst van het onderzoek wordt gedeeld met de rest van de klas.

Natuurlijk moeten leerlingen ook bepaalde zaken rond het meten van buiten leren, omdat het op onderzoek gaan veronderstelt dat je daarvoor voldoende middelen beschikbaar hebt. Dat geldt bijvoorbeeld voor de voorvoegsels als ‘milli’, ‘centi’, ‘deci’, ‘deca’, ‘hecto’ en ‘kilo’. Deze voorvoegsel krijgen betekenis door ze toe te passen op onder meer de lengtematen. Deze lengtematen en de relaties ertussen worden aldus ook stevig verankerd. Dit geheel vormt vervolgens de basis voor het onderzoeken aan andere maten.

Overigens leren kinderen in de bovenbouw van de basisschool niet alleen werken met metrische maten. Ze wegen met gewichten en verkennen relaties tussen gewichtsmaten. Ze leren omgaan met digitaal en analoog aangegeven tijden en verkennen tijdsverschillen. Ze rekenen met geld en maken kennis met samengestelde grootheden als snelheid en soortelijk gewicht. Uitgangspunt voor het programma bij dergelijke andere maten is de redzaamheid in maatschappij en eisen die het vervolgonderwijs stelt. Daarbij is het van belang dat deze maten een plek krijgen in netwerk van meetweetjes en relaties tussen maten.

De meeste getallen die wij gebruiken en waar leerlingen kennis mee maken, bereiken ons via een meetinstrument. En het verkennen van deze meetinstrumenten maakt onderdeel uit van het meetonderwijs in de bovenbouw. Dat geldt voor meetinstrumenten waarvan de werking voor de leerlingen in de regel wel duidelijk zal zijn, als de liniaal, klok en balans. Dat geldt ook voor minder doorzichtige apparaten, die - als een soort black box - meetgetallen naar voren brengen, zoals bijvoorbeeld een digitale weegschaal. Het gaat er nu om om betekenissen te vinden bij deze getallen, om aldus na te gaan wat het meetinstrument doet.

In dit stuk zullen voor het meten kerninzichten worden geformuleerd. Het gaat daarbij om inzichten die de kern van het meten blootleggen, die alle leerlingen op een of andere manier moeten verwerven. Deze kerninzichten vloeien voort uit de hierboven geformuleerde uitgangspunten van het voorgestelde programma, waar het oefenen tot op zekere hoogte verruild is voor het telkens weer construeren van maten en relaties tussen maten.

2 De context van het meten

In de onderbouw van de basisschool maakten de leerlingen kennis met nogal wat aspecten van het meten. De grootheid lengte kreeg daarbij in het onderwijs een centrale plaats, maar er was ook nadrukkelijke aandacht voor de grootheden inhoud en gewicht. Het verwerven van het meten verliep daarbij van vergelijken via afpassen naar aflezen van meetresultaten. Bij deze laatste meethandeling kwamen meetinstrumenten in zicht van de kinderen. Bij lengtemeting werd zo op een gegeven ogenblik gewerkt met een natuurlijke maat. Omdat dit niet toereikend bleek een standaard geïntroduceerd, de centimeter. Op vergelijkbare wijze wordt later ook voor de grootheid inhoud en de grootheid gewicht standaardmaten geïntroduceerd. (Zie voor een uitgebreide beschrijving van het leren meten in de onderbouw: Van den Heuvel-Panhuizen, M. & K. Buijs (2004). *Jonge kinderen leren meten en meetkunde*. Wolters-Noordhoff)
In het dagelijkse leven kwamen de kinderen overigens met nog veel meer meetgetallen in aanraking. Bijvoorbeeld:
- de auto rijdt honderd, want de kilometerteller staat op ‘100’,
- op de verpakking van een tabletje kinderparacetamol staat 240 en soms 120,
- in de lift: maximaal 9 personen of 700 kg,
- op een bord bij een oude brug: max. 2 ton,
- op de voorpagina van de krant: vandaag wordt het 18 graden en de wind waait met kracht 4 uit het zuidwesten,
- achter op de bus: ‘pas op 18 meter, zwaait uit’,
- op een pakje drinken: inhoud 200 ml,
- op een blikje: inhoud 33 cl.

Wanneer we het nieuws volgen via krant en tv merken we snel dat er nog veel gemeten wordt. Wat te denken van:
- de oppervlaktewaterkwaliteit,
- het vertrouwen in de economie,
- de welvaart,
- de werkloosheid,
- drugsgebruik.

Het is belangrijk dat leerlingen in aanraking komen met veel meetsituaties, ook als die wat minder als schoolse meetsituaties herkenbaar zijn, juist omdat hier veelal de praktische waarde van het meten zit. Het gaat dan om het verwerven van algemene noties van wat meten is. Het gaat daarbij om het kiezen van een maat die kan worden gebruikt om een deel van de werkelijkheid te benoemen in een getal. Het gaat bij het meten verder om het gebruiken of ontwikkelen van een meetinstrument en het kennen van de betrouwbaarheid en nauwkeurigheid ervan. Kinderen moeten bijvoorbeeld ervaren dat een personenweegschaal in het algemeen geen geschikt instrument is om het gewicht van een velletje papier te wegen. Ze zullen ervaren dat het wegen van bijvoorbeeld 1000 blaadjes wel weer mogelijk is met de personenweegschaal en dat je dat een middel geeft om het gewicht van één blaadje redelijk nauwkeurig te schatten. Dit alles is in het onderwijs overigens slechts een enkele keer aan de orde. De nadruk ligt daar op het verkennen van metrische maten en van de grootheden gewicht, tijd, snelheid en temperatuur.

Natuurlijk grijpt het leren kennen van deze grootheden aan bij de ontwikkeling van concepten als ‘lengte’, ‘oppervlakte’, ‘inhoud’, ‘gewicht’, ‘tijd’, ‘snelheid’ en ‘temperatuur’. ‘Lengte’ is dat wat je meet in één richting. Je hebt zelf een lengte, namelijk de afstand van je tenen tot je kruin. De afstand tussen huis en school is een lengte. Een lengte is iets wat je in enkele minuten aflegt, maar ook veel grotere afstanden. Het concept ‘oppervlakte’ is moeilijker dan dat van ‘lengte’. Een oppervlakte is vaak plat, maar dat hoeft niet zo te zijn. Je huid vormt het oppervlak dat de grens is tussen jou en de rest van de wereld en heeft een oppervlakte. De vloer heeft een oppervlak en je merkt hoe groot dit oppervlak is als je het moet vegen. En ook een voetbalveld heeft een oppervlakte en dat maakt dat een tegenspeler je kan passeren.
‘Inhoud’ - dat wat erin gaat - en ‘gewicht’ - dat wat het weegt - zijn voor veel leerlingen gerelateerde concepten. Dit heeft onder meer te maken met de ontstaansgeschiedenis van de massamaat kilogram. Die werd aanvankelijk gedefinieerd als het gewicht van een liter water bij een temperatuur van iets minder dan 4 graden Celsius. De concepten inhoud en gewicht worden dan ook regelmatig verward. Allerlei (zuivel)dranken hebben ongeveer hetzelfde soortelijke gewicht als water en daarom geldt in de beleving van kinderen dat telkens weer een liter van iets een kilo weegt.
Het ervaren van ‘tijd’ heeft te maken met wat vooraf ging en wat komen gaat; tijd heeft te maken met hoe lang iets duurt. Bij het concept ‘snelheid’ gaat het om de weg die je in een bepaalde tijd aflegt; het gaat om de tijd die je nodig hebt voor een verplaatsing, al kennen kinderen ook snelheid op een bepaald ogenblik, namelijk als de stand van de kilometerteller. Bij ‘temperatuur’ gaat het om de warmte of kou.

Bij de ontwikkeling van genoemde concepten verwerven kinderen een eerste serie referenties rond het meten. Met dergelijke referentiematen worden meet-weetjes aangeduid, zoals het weten dat je eigen lengte ongeveer 1 meter en 40 centimeter is en dat je broertje van bijna 5 ongeveer een meter lang en ruim een kop kleiner is. Dergelijke referenties zijn voor ieder kind verschillend. Dat neemt niet weg dat veel leerlingen medio basisonderwijs enige referenties kennen bij kilometer, meter en centimeter, minuut en uur, gram en kilogram en liter. Ze kunnen in het algemeen eenvoudige relaties afleiden tussen deze maten en deze herleidingen en referenties gebruiken bij het oplossen van eenvoudige meetproblemen.

3 Schets van een meetprogramma

Nu zouden we er voor kunnen kiezen om in de bovenbouw de referenties en relaties tussen maten in te zetten om te komen tot formele relaties tussen alle maten die van ‘de meter’ zijn

afgeleid, zoals de oppervlaktematen mm^2, cm^2, dm^2, m^2, hm^2 en km^2 en de inhoudsmaten cm^3, dm^3 en m^3. Zoals eerder aangegeven, streven we dit doel evenwel niet na, omdat het voor veel leerlingen moeilijk is deze relaties betekenisvol te leren kennen en gebruiken. De nadrukkelijke aandacht in het verleden voor het verwerven van al deze relaties leidde er niet toe dat leerlingen deze kennis adequaat kunnen toepassen. We kiezen daarvoor voor een accentverschuiving van oefenen naar construeren van maten. We beperken ons tot het nauwkeurig in beeld krijgen van de voorvoegsels als ‘milli’, ‘centi’ enzovoorts en van de lengtematen. Wanneer leerlingen goed greep hebben verworven op de voorvoegsels, kunnen in voorkomende gevallen passende maten geconstrueerd worden. We brengen leerlingen daarom telkens in situaties die om dergelijke constructies vragen. Dit betekent niet dat leerlingen geen relaties meer paraat mogen hebben. Integendeel, het zo prachtig zijn als het regelmatig construeren van maten leidt tot deze parate kennis. Dat wil echter niet zeggen dat de leerlingen dan ook direct de systematiek in het volledige metrieke stelsel overzien. Voor enkele leerlingen komt dit overzicht er niet. Zij kunnen zich echter wel redden in veel toepassingssituaties, omdat ze na verloop van tijd redelijk wat ervaring hebben met het reconstrueren van maten en het construeren van relaties tussen maten.
Een dergelijke opzet is in onze ogen mogelijk, vanwege de eenvoud van het systeem. We willen leerlingen deze eenvoud graag laten ervaren en kiezen zo ook voor de intrinsieke waarde van het meten. Er werd vroeger namelijk gekozen voor een systeem dat het mogelijk maakte te volstaan met slechts één maat die als ijkmaat kon dienen voor al deze maten, de meter. We spreken dan ook metrische maten en van het metrieke stelsel. Vroeger werd dit stelsel onderwezen als verzameling rekenregels om maten in een schema met elkaar in verband te brengen, die neerkomen op het toevoegen van nullen of schuiven met de komma. Dit oefenen leidde net als het meer betekenisvol oefenen dat tegenwoordig nog gebeurt, tot een geringe opbrengst van het onderwijs.

4 Kerninzichten

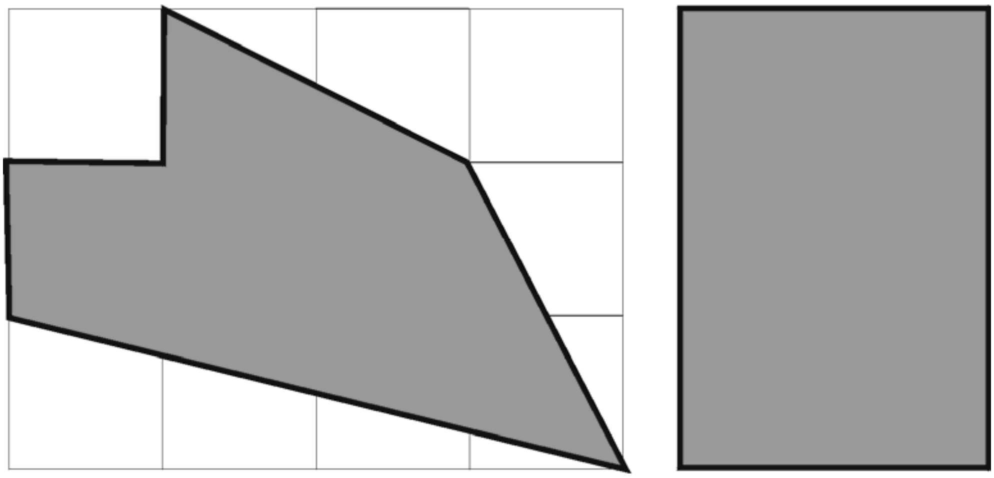
Een van de zaken die op deze manier essentieel is bij het meten is het construeren van een bruikbare maat, die vervolgens kan worden afgepast. Dit is een kerninzicht dat we bij leerlingen nastreven. Leerlingen moeten leren inzien dat je bij het meten altijd moet nadenken over welke maat je gaat gebruiken. Die maak je zonodig zelf of construeer je uit een andere maat en wel op zo’n manier dat die het meten makkelijk maakt.

Vaak zijn te gebruiken maten al gegeven en is er voor leerlingen weinig uit te zoeken. Met name wordt er in het algemeen weinig aandacht besteed aan de overstap van het afpassen van een lengtemaat naar de constructie of het ontstaan van een oppervlaktemaat of inhoudsmaat. Deze overstap en constructie van een passende maat vormt het belangrijkste kerninzicht, dat we kort kunnen samenvatten:

1. Leerlingen moeten zich realiseren dat maten geconstrueerd zijn of moeten worden en dat het bij het meten vervolgens gaat om vergelijken of herhaald afpassen van de maat die als eenheid is gekozen.

Andere kerninzichten betreffen in het algemeen toespitsingen van dit belangrijkste kerninzicht. We sommen ze hier op:

2. Leerlingen realiseren zich dat objecten met dezelfde maat niet altijd dezelfde vorm hoeven te hebben. De twee figuren hieronder hebben dezelfde oppervlakte.



3. Leerlingen doorzien dat metrische maten allen kunnen uit de lengtemaat meter (of centimeter, of decimeter, enzovoorts) worden afgeleid. Bijvoorbeeld een vierkante centimeter is een hokje van een centimeter bij een centimeter.

4. Leerlingen kennen de tiendelige structuur van metrische maten. Er passen 10 centimeter in een decimeter en 100 centimeter in een meter. Wanneer bij een grootheid van de ene maat een andere moet worden gemaakt, moet er altijd worden vermenigvuldigd met een macht van 10.

5. Leerlingen realiseren zich dat de maat bij metrische maten genomen kan worden door handig te tellen. In het bijzonder leidt dit handige tellen bij rechthoeken en blokken tot de bekende formules voor oppervlakte en inhoud: l x b en l x b x h.

6. Leerlingen realiseren zich dat in veel situaties meten kan leiden tot inzicht in de situatie en dat daarbij niet altijd metrische maten aan de orde zijn.

7. Leerlingen moeten inzien dat het bij meten altijd om een benadering gaat en dat in veel gevallen het goed is te overdenken wat de onnauwkeurigheid is en of die aanvaardbaar is.

Kerninzichten vormen verschillende invalshoeken, die het leren meten vanuit verschillende perspectieven belichten. Het geeft daarmee geen ontwikkeling in het leren meten. Die schetsen we hier daarom ook, en beginnen daarbij in de onderbouw van de basisschool (zie voor een uitgebreide beschrijving: Van den Heuvel-Panhuizen, M. & K. Buijs (2004). *Jonge kinderen leren meten en meetkunde*. Wolters-Noordhoff).
Aanvankelijk is het meten in de onderbouw het vergelijken en ordenen. Al snel wordt bij het meten gebruik gemaakt van door leerlingen zelf bedachte natuurlijke maten. Naast deze natuurlijke maten worden kinderen ook al vroeg geconfronteerd met standaardmaten, als de meter, centimeter, kilogram en liter. In de middenbouw verwerven leerlingen al wat relaties tussen deze ‘alledaagse’ maten. In de bovenbouw van de basisschool wordt deze kennis verbreed en verdiept. Bij dit meten in de bovenbouw gaat het om het verder verdiepen van concepten. Daarbij wordt aangesloten bij wat er in de onder- en middenbouw gebeurde. Leerlingen hebben daar hun concept van lengte al redelijk verdiept. Daar ontstonden voor lengtematen ook al wat referenties en zelfs al enkele relaties werden gekend. Het concept van oppervlakte groeit later, omdat dat moeilijker is en omdat dit voortbouwt op het lengteconcept. Evenzo helpen referenties bij lengtematen bij het ontwikkelen van referenties bij oppervlaktematen. Wanneer je je iets wil voorstellen bij een vierkante centimeter ligt het voor de hand dat je je al een redelijke voorstelling kan maken van een centimeter.

Leerlingen verdiepen aldus naast elkaar en aan elkaar gerelateerde noties van wat grootheden als lengte, oppervlakte, inhoud en gewicht zijn. Het construeren van maten en de ontwikkelde referenties leiden op een bepaald ogenblik ook tot het ontdekken van relaties tussen maten, bijvoorbeeld als op een kilopak suiker ineens 1000 gram als gewicht staat aangegeven naast 1 kilogram. Het gaat hierbij in eerste instantie vooral om het leren kennen van voorvoegsels als bijvoorbeeld ‘kilo’, ‘centi’ en ‘milli’.

Slechts voor een klein deel van de leerlingen eindigen deze onderzoekingen aan maten en relaties tussen maten in het leren kennen van het metrieke stelsel als samenhangend systeem van maten met daarbij behorende formele relaties. Dit is dan ook geen doel voor alle leerlingen. Die kennen, door het regelmatig oplossen van meetproblemen, enkele van die relaties. Andere relaties zullen ze voorlopig nog moeten construeren en opnieuw construeren.

5 Inrichting van het onderwijs

Uit het voorafgaande komt al naar voren dat wij voorstellen het meetonderwijs niet te richten op het inoefenen van relaties tussen maten en het gebruik van deze maten (veelvuldig) oefenen. Dit leidt namelijk niet tot het begrijpen van waar maten kunnen worden gebruikt en hoe ze zijn geconstrueerd. In het meetonderwijs zullen de kinderen veel meer in situaties worden gebracht waar maten en relaties tussen maten moeten worden gemaakt. Het gebruiken van maten zal verder in veel gevallen gebeuren in situaties waarin voor de leerlingen werkelijk iets valt uit te zoeken. Deze nadruk op het zelf onderzoeken door leerlingen, omdat dat voorziet in het leren begrijpen van het meten, vraagt om een specifieke inrichting van het meetonderwijs. De leerlingen werken in voor hen betekenisvolle situaties, waarbij ze de mogelijkheid krijgen om op een zelf te kiezen niveau te werken. Hoewel in het dagelijkse leven veel maten voorkomen, is het niet gemakkelijk om dergelijke rijke en betekenisvolle situaties te creëren. Veel realistisch aandoende situaties, zijn voor leerlingen niet meer dan sommen waar de juiste procedure bij moet worden gezocht. Ze worden door de leerlingen aangepakt als traditionele redactiesommen, waar het louter ging om het toepassen van de juiste rekenregel en er van verkennen en onderzoeken van de situatie geen sprake was.

Daarmee willen we overigens niet stellen dat situaties uit het dagelijkse leven niet in het onderwijs passen. Integendeel. Dat is evenwel niet het belangrijkste. Het moet in het meetonderwijs gaan om het leren begrijpen van de constructie van maten en het meten. Daarvoor zijn – zoals aangegeven – betekenisvolle situaties nodig die aanleiding geven om onderzoek te gaan. Dat zijn vaak situaties uit de werkelijkheid, maar deze betekenisvolle situaties kunnen ook zo gekozen worden dat zij weinig met het alledaagse meten van doen hebben. Dit maakt het onderwijs dan niet minder realistisch. Ook formele meetrelaties kunnen voor leerlingen namelijk betekenis hebben, zolang de leerlingen de kans krijgen om zelf binnen de gegeven situatie op onderzoek uit te gaan en daarbij hun meetrepertoire kunnen inzetten.
Omdat de problemen in het algemeen een open karakter hebben en daarom veel oplossingen toelaten, krijgen leerlingen de mogelijkheid zelf te kiezen welke materialen en meetinstrumenten zij bij het oplossen willen gebruiken. Daarbij is het goed te bedenken dat de keuze van het te gebruiken materiaal afhangt van de leerling *en* van het gestelde probleem. Een leerling die bij het ene probleem kiest voor een schematische weergave van de situatie om het denken te ondersteunen, kan bij een ander probleem concreet materiaal nodig hebben.
Het gebruik van meetinstrumenten vormt een belangrijk element in het meetonderwijs. Het gaat hierbij om gebruik van bijvoorbeeld liniaal, meetlat, maatbeker, weeschaal en klok. Het

gebruik van deze instrumenten vormt regelmatig een van de gespreksonderwerpen bij het introduceren van de onderzoekssituaties. Dan is aan de orde wat de gegeven situatie betekent en hoe die - zonodig - getalsmatig kan worden beschreven. Juist deze vraag naar een meetgetal vraagt de leerlingen na te gaan welk meetinstrumenten kunnen worden gebruikt. Daarnaast wordt ook over andere aspecten van de problemen gediscussieerd en krijgen de leerlingen geregeld de tijd in groepjes aan de voor hen herkenbare problemen te werken. In deze rijke onderzoekssituaties ligt de nadruk op het meten, maar er zal in het algemeen ook aandacht zijn voor meetkundige redeneringen en het overdenken van getalrelaties.

6 Voorvoegsels

Bij het maken van verschillende lengtematen is gekozen voor een specifiek (decimaal) systeem van voorvoegsels. Die bieden de mogelijkheid om de maten een beetje hanteerbaar te houden. We geven de afstand tussen Amsterdam en Utrecht liever niet weer in meters. Daar gebruiken we de maat kilometer voor. ‘Kilo’ staat voor ‘1000’; een kilometer is 1000 meter. Bij het gebruiken van kilometer als maat nemen we telkens stappen van 1000 meter. Wanneer kinderen naast centimeter ook te maken krijgen met centiliter, komt naar voren dat de betekenis van het gebruikte voorvoegsel gelijk is. In beide gevallen staat het voorvoegsel voor ‘één honderdste’.
Bij voorvoegsels gaat het om woorden en betekenissen die leerlingen op een gegeven moment paraat moeten hebben. Die betekenissen van voorvoegsels worden daarom geoefend. Dit gebeurt in het algemeen aan de hand van de lengtematen, maar ook andere grootheden worden gebruikt om de voorvoegsels te verkennen.

Omdat er voortdurend aandacht is voor de betekenis van de voorvoegsels, leren de leerlingen in de loop van de bovenbouw veel van deze voorvoegsels in verschillende situaties kennen. We zetten de voorvoegsels hier op een rij, maar willen daarmee zeker niet suggereren dat dit ook zo in het onderwijs moet gebeuren. Daar komen de voorvoegsels stukje bij beetje naar voren, waarbij pas na verloop van tijd een overzicht als hier ontstaat. Op deze manier leren leerlingen hoe de naamgeving in de loop van de jaren is gegroeid. We proberen in het onderwijs met de voorvoegsels nieuwe maten te maken en gaan na in welke gevallen het handig zou zijn om deze maten te gebruiken. Daarbij liggen overigens wel wat valkuilen op de loer, die in het onderwijs nadrukkelijk aan de orde worden gesteld. Want een centimeter heet een centimeter, omdat het een honderdste deel van een meter is. Maar wat betekent een kubieke centimeter of cm^3 dan. Het ligt voor de hand om te beredeneren dat het hier om een honderdste deel van een kubieke meter gaat. Maar als we goed naar de woorden ‘kubieke centimeter’ kijken, zien we dat bedoeld wordt dat de centimeter in drie richtingen wordt afgepast om een maat te maken. Een honderdste deel van een kubieke meter zou een centi-kubieke meter zijn.

De voorvoegsels zijn:

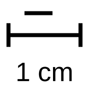
terra	biljoen	1 000 000 000 000
giga	miljard	1 000 000 000
mega	miljoen	1 000 000
kilo	duizend	1000
hecto	honderd	100
deca	tien	10
[geen voorvoegsel]	één	1
deci	tiende	0,1
centi	honderdste	0,01
milli	duizendste	0,001
micro	miljoenste	0,000 001
nano	miljardste	0,000 000 001
pico	biljoenste	0,000 000 000 001

De voorvoegsels in het kader zijn de voorvoegsels (kilo - milli) die in het onderwijs aan de orde komen en waarvan het de bedoeling is dat de leerlingen die – onder meer in samenhang met het leren lengtemeten – leren kennen. De voorvoegsels die - in combinatie met lengtematen - het meest voorkomen krijgen de meeste aandacht. Daarbij gaat het bijvoorbeeld om kilometer, meter, centimeter en millimeter. Deze laatste maat komt ook naar voren vanwege het gebruik ervan in de techniek en op bouwtekeningen.
De minder gebruikelijke voorvoegsels als mega, giga en terra worden wel met de leerlingen besproken, vooral in de context waarin ze die tegenkomen: de computer. Daarin ligt gelijk een probleem, omdat in de wereld van computerontwerpers is afgesproken dat alleen wordt gewerkt met machten van 2. Een megabyte is dus niet precies een miljoen bytes of computercodes, maar 1024 x 1024, ofwel 1048576 bytes. Bij een gigabyte gaat het aldus om ruim een miljard bytes (nl. 1024 x 1024 x 1024 = 1073741824 byte). Op dit moment wordt bijvoorbeeld de omvang van een harde schijf van een computer aangegeven in gigabyte. Die maat zal overigens binnenkort ontoereikend zijn voor het aangeven van de omvang van de schijf in de computer. Dan zal men spreken van een harde schijf met een opslagcapaciteit van 1,2 terrabyte. Dat is niets anders dan iets meer dan 1200 gigabyte of 1 200 000 megabyte (precies: 1228,8 gigabyte of 1258291,2 megabyte).
Overigens – zoals aangegeven – worden deze minder gebruikte voorvoegsels slechts kort aangestipt. Dit geldt ook voor de voorvoegsels micro, nano en pico, waarvan het aardige is dat ook hier de computer weer de context kan zijn waarin de voorvoegsels naar voren komen. De maten van de onderdelen van chips (transitoren) worden in het algemeen aangegeven in nanometer. Zo’n transistor is bijvoorbeeld 90 nanometer groot. Er wordt veel geïnvesteerd in het maken van telkens kleinere transitoren, omdat het zo bijvoorbeeld mogelijk wordt meer informatie op een chip te zetten.
Het zoeken naar maten met de voorvoegsels ‘micro’, ‘nano’ en ‘pico’, kan leerlingen helpen zich hierbij een voorstelling te maken. Bij de voorvoegsels milli, centi, …, kilo wordt ingezet op het kennen ervan. Daarmee wordt een begin gemaakt bij het verkennen van de systematiek van lengtematen. Dan worden de gevonden voorvoegsels in overleg met de leerlingen geschematiseerd en blijkt dat er voor enkele leerlingen nog wat vraagtekens zijn bij wat

minder courante maten. We benoemen dan de voor sommige wellicht nog onbekende maten: decimeter, decameter en hectometer en benoemen aldus de ontbrekende voorvoegsels. ‘deci’ staat voor tiende, ‘deca’ voor tien en ‘hecto’ voor honderd.

7 Lengtemeten – een nadere uitwerking

In de onder- en middenbouw maken leerlingen in het algemeen al kennis met de lengtematen centimeter en meter. Het weergeven van meetresultaten van metingen in de omgeving of aan het eigen lichaam, bracht al op verschillende momenten naar voren dat er 100 centimeter in een meter gaan. Als bij het rekenen met geld, gaat het hierbij overigens aanvankelijk over het gebruiken van een inwisselregel: 100 centimeters inwisselen voor 1 meter. Later vormt deze verkenning – zoals aangegeven – een middel om voorvoegsels bij maten nader te leren kennen en zo kennis te maken met andere lengtematen. In het onderwijs in de bovenbouw wordt deze kennis verder aangegrepen om de kennis rond lengtematen uit te breiden naar oppervlaktematen en inhoudsmaten. In dit opzicht vormt het lengtemeten de basis onder het leren kennen van alle metrische maten en relaties ertussen.



Op een bepaald moment wordt leerlingen gevraagd lengtes kleiner dan een centimeter te meten. Dan heeft het afpassen met centimeters niet zo veel zin meer. Het lijntje boven de centimetermaat is kleiner en kan bijvoorbeeld worden beschreven in termen van breuken, ongeveer 1/3 centimeter. Er kan echter ook gekozen worden voor een andere verdere verfijning en dit wordt het onderwerp van een gesprek in de klas. In dit gesprek met de klas zal een deel van de leerlingen naar voren brengen dat zij al bekend zijn met de verfijning waar wij op naar op zoek zijn, namelijk een verfijning van de maat in millimeter. Andere leerlingen zullen toch een andere aanduiding kiezen: het lijntje is in hun ogen een halve of een kwart centimeter lang. Preciezer afpassen langs de centimeterlijn brengt zelfs aan het licht dat het lijntje ongeveer 1/3 centimeter lang is. De leerkracht bespreekt met de leerlingen wat in hun ogen geschikte manieren zijn om de maat te verfijnen. Is dat de lengte aangeven in millimeter of de dikte aan te geven met 1/2, 1/4 of 1/3 centimeter – of meer algemeen een aanduiding in breuken. Of is het in de ogen van de leerlingen nodig om een onderverdeling in tienen te gebruiken.
In de 15de eeuw is dit probleem door Stevin aangepakt. Die pleitte voor een tiendelige verfijning en vond zo in feite de kommagetallen uit. In de Tal-brochure over breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen (Tal-team (2005). *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen*. Groningen: Wolters-Noordhoff. Verschijnt maart 2006) gaan we hierop uitgebreid in en geven we ook voorbeelden van lessen die kinderen bewust kunnen maken van het belang van deze uitvinding. We laten ze het decimale verfijnen als het ware zelf uitvinden. Dit gebeurt uiteraard niet alleen voor de kommagetallen, maar ook om verder betekenis te geven aan voorvoegsels, ook al is dit voor de meeste kinderen niet echt meer een uitvinding. Zij brengen dan ook naar voren dat je kunt kiezen voor een verfijning in millimeter, omdat die gebruikelijk is. Een dergelijke reactie vraagt om doorvragen en de argumenten van Stevin kunnen daarbij helpen. Waarom zou men vroeger gekozen hebben voor een verfijning van de centimeter in tienden van een centimeter? Daarvoor zijn verschillende redenen te bedenken:
- je hoeft dan niet te rekenen in breuken en het rekenen is bijna hetzelfde als bij gehele getallen,
- je kunt een dergelijke aanduiding voor alle metingen gebruiken,
- je kunt in principe telkens verder verfijnen en daarmee een passende nauwkeurigheid kiezen, al zijn voor al deze verfijningen geen eigen voorvoegsels beschikbaar.

Door het aldus verkennen van het nut van de millimeter is ook de relatie tussen centimeter en millimeter verhelderd. In een centimeter gaat tien millimeter. Op een dergelijke manier worden ook andere relaties tussen maten verkend. Bijvoorbeeld na het passeren van 10 hectometerpaaltjes ben je een kilometer verder en dat is ook zo als je 1000 meter verder gaat. In gesprekken in de klas komen twee zaken telkens naar voren:
- de nieuwe maten verhouden zich tot reeds bekende als een tienmacht,
- bij de nieuwe maten worden voorvoegsels gebruikt die ook een eigen betekenis hebben, zoals ‘kilo’ dat staat voor 1000 en ‘centi’ dat staat voor een honderdste.

Dit maakt vervolgens de weg vrij om ook wat minder alledaagse maten te introduceren, om aldus de gaten in het ontstane systeem te dichten. Dit worden vervolgens geen maten die de leerlingen vaak zullen gebruiken. Er wordt dan ook niet veel aandacht besteed aan het ontwikkelen van referenties bij deze maten.

We hangen de betekenis van het lengtemeten vooral op aan de maten mm, cm, m en km. De betekenis van incourante maten als dm, dam en hm wordt vervolgens gevonden in de relatie met de eerstgenoemde maten. Het onderwijs richt zich dan op het vinden van samenhang binnen de systematiek tussen lengtematen.

8 Construeren van maten beoefenen

Wanneer leerlingen nieuwe maten tegenkomen of zelf construeren, wordt de betekenis van deze nieuwe maten gekoppeld aan de reeds bekende, meer courante maten. Dat betekent dat maten als decimeter, decameter en hectometer ook pas later aan de orde zijn in het onderwijs. Op het moment dat dit gebeurt hebben de meeste leerlingen een levendige voorstelling van maten als cm en m. Ze leren vervolgens een decameter kennen als 10 meter, een hectometer als 100 meter en een decimeter als 10 centimeter (of een tiende deel van een meter). We streven uiteindelijk naar beheersing van alle lengtematen en hun relaties, maar die relaties zijn gefundeerd op kennis van en referenties bij de maten mm, cm, m en km. Kennis van voorvoegsels en bekende referentiematen maken dat de nieuwe maten geconstrueerd kunnen worden. Het is dit proces van constructie dat geoefend wordt, waarbij de nadruk ligt op het leren redeneren over relaties tussen maten.

Zoals eerder aangegeven gaat het bij de regelmaat die leerlingen ontdekken feitelijk om de regelmaat die is vastgelegd in de voorvoegsels. Die hangen enige tijd als geheugensteun in de klas en biedt de leerlingen houvast. De lengtematen vormen een belangrijke bron om beter greep te krijgen op de voorvoegsels en daarom wordt het rijtje voorvoegsels af en toe vervangen door een trapje van van de lengtematen:

mm – cm – dm – m – dam – hm – km

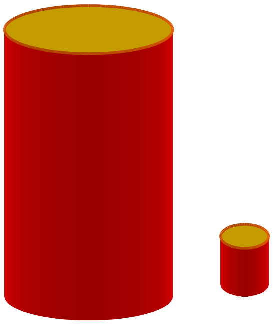
Naar dit trapje wordt verwezen als we relaties tussen maten willen gebruiken. Het zal dan echter niet gebruikt worden als ingeslepen rijtje, maar veel meer een houvast bij het telkens herleiden van benodigde relaties.

9 Oppervlaktematen en inhoudsmaten construeren

Het oefenen is zo gericht op het leren kennen van de lengtematen en alle relaties ertussen. Daarbij worden de maten en relaties niet zozeer ingeslepen, maar – zoals aangegeven – eigenlijk telkens als het ware opnieuw geconstrueerd. Wat geautomatiseerd wordt is deze (verkorte) constructie, zodat dit proces er uiteindelijk toe leidt dat veel leerlingen de relaties tussen lengtematen van buiten kennen. Dergelijke oefening is in onze ogen voor het verkennen van de relaties tussen andere (metrische) maten maar ten dele aan de orde. Daar grijpen we onder meer kennis van verbanden tussen lengtematen aan om andere relaties te construeren en af te leiden als dat nodig is. Bij deze maten is dan ook geen sprake van oefenen van relaties, maar veel meer van het greep krijgen op het constructieproces. Dit construeren moet dan ook regelmatig beoefend worden en in verschillende situaties.
Leerlingen die er bijvoorbeeld achter willen komen hoeveel vierkante centimeter in een vierkante meter passen, gaan eerst op zoek naar de betekenis van vierkante meter en vierkante centimeter. Een vierkante meter kan de vorm hebben van een vierkant van 1 meter bij 1 meter, dat zegt de uitdrukking ‘vierkante meter’ eigenlijk ook. Een vierkante centimeter kan - analoog - gezien worden als vierkant van een centimeter bij een centimeter. Omdat leerlingen in het algemeen weten dat 1 m ook 100 cm is, is de vraag dus hoeveel vierkantjes van een centimeter bij een centimeter in een vierkant van 100 cm bij 100 cm gaan. Het vierkant van een vierkante meter kunnen we zien als 100 rijen van 100 hokjes van een vierkante centimeter, samen 10 000 cm^2. We maken zo de overstap van de lengtemaat, die wordt afgepast langs de zijkant, naar het handig tellen van hokjes. We oefenen verder het construeren als het op passende wijze inzetten van gekende relaties tussen lengtematen. Het doel is evenwel niet dat dergelijke constructies verkort worden tot geautomatiseerde kennis als bij de lengtematen. We beogen hiermee dat leerlingen dit construeren beter leren kennen. Na deze situatie volgen dan ook verschillende andere, waarbij de maat vierkante centimeter weer wordt geconstrueerd.

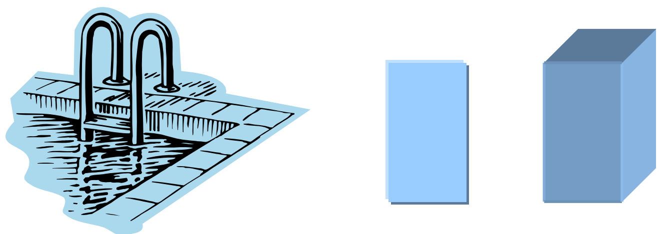
Een deel van de leerlingen zal dergelijke verbanden na verloop van tijd, net als bij de lengtematen, paraat hebben. Anderen zullen dit – uitgaande van de lengtematen – telkens opnieuw (kunnen) construeren. Met andere woorden: ze kunnen op een dergelijke constructie terugvallen, wanneer ze de maat nodig hebben, maar niet bij de hand hebben. De leerlingen krijgen daarbij de gelegenheid om zelf te onderzoeken, omdat dit leidt tot het begrijpen van het meten. We vragen de leerlingen dan feitelijk om de situatie zodanig te ordenen, dat het afleiden van nieuwe maten een zaak wordt van handig afpassen. Of anders gezegd, we ondersteunen hen in de situatie een multiplicatieve structuur te herkennen. Leerlingen leiden in specifieke gevallen een vermenigvuldiging af als rekenregel en veel leerlingen zullen na verloop van tijd inzien dat die voor alle rechthoeken de oppervlakte geeft. Deze vermenigvuldiging wordt nogal eens aangeduid als de formule voor het bepalen van de oppervlakte van een rechthoek. Dat is het ook. Het is de formule echter niet in meest abstracte, formele vorm. Die ontstaat pas na verschillende keren met succes de overstap gemaakt te hebben van lengtematen naar oppervlaktematen of hokjesmaten en na lang gebruik van de gevonden vermenigvuldigrelatie in daartoe passende gevallen.

In het voorbeeld hier boven ging het bij het afleiden van maten om standaardmaten. Dat is evenwel niet nodig om greep te krijgen op het afleiden. Sterker, het leren afleiden is erbij gebaat dit juist ook te doen in situaties waar geen sprake is van standaardmaten of precies passende vormen. In paragraaf 3 zagen we hiervan al een voorbeeld.



Hoeveel kleine drums uit de grote oliedrum?

Bij de oliedrum in de afbeelding hiernaast kan de vraag zijn hoeveel kleine drums daaruit gevuld kunnen worden. Daarbij is de kleine drum al als maat gegeven, maar omdat die niet zomaar valt af te passen, wordt de maat als het ware verder geconstrueerd. Dat gebeurt bijvoorbeeld door het afpassen van de onderkant van de klein drum op de bovenzijde van de grote oliedrum en de hoogte van de kleine drum op de zijkant van de grote.

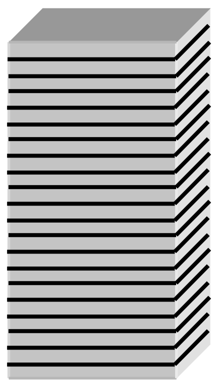


Tegeltjes gebruiken om een maat te construeren.

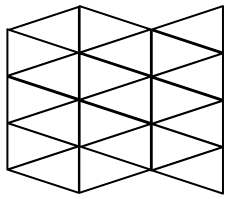
Wanneer we de inhoud van twee zwembaden willen vergelijken, zonder dat we de beschikking hebben over standaardmaten, kunnen we gebruik maken van de tegeltjes langs de zijkant van het bad. Die kunnen we gebruiken om een maat te ontwerpen. Een tegel van de aangegeven vorm geeft bijvoorbeeld aanleiding tot de maateenheid die ernaast is afgebeeld. Deze maat kan gebruikt worden om de inhoud van twee zwembaden te vergelijken, wanneer bij beide zwembaden dezelfde maat is gebruikt.
Wanneer een leerling de inhoud zoekt van een koker, waar de maten wel in standaardmaten zijn gegeven, moet die ook eerst een blokje als maateenheid bepalen. Wanneer de koker bijvoorbeeld een hoogte van 20 cm heeft en lengte en breedte van 10 en 7 cm, kan zo'n blokje een kubieke centimeter zijn. Omdat die maat niet is gegeven, is dit voor de meeste kinderen niet makkelijk in te zien. Om een begin te maken met het aanpakken van het probleem, wordt naar een ander - eenvoudiger - probleem gekeken, een blok van 10 bij 7 cm met een hoogte van 1 cm. Bij dit figuur kunnen verschillende maten ontwikkeld worden, die ontstaan door het verdelen van voor naar achter, door het verdelen van links naar rechts en door het verdelen in twee richtingen.

zeven staafjes, tien staafjes en 70 blokjes

Wanneer de leerling zo uiteindelijk een maat construeert van een centimeter bij een centimeter bij een centimeter, worden ook snel 70 blokjes zichtbaar.
Dit construeren van een maat om de inhoud van de koker te bepalen helpt bij het handig tellen van het aantal blokjes, om zo de inhoud te bepalen. Er passen 20 lagen van 70 cm^3 in de koker, samen 1400 cm^3 (zie figuur). En net als bij het vinden van de oppervlakteformule voor een rechthoek geldt hier dat veel leerlingen ervaren dat bij het bepalen van de inhoud van een blok de maatgetallen van de zijden vermenigvuldigd kunnen worden.



20 lagen van 70 cm^3



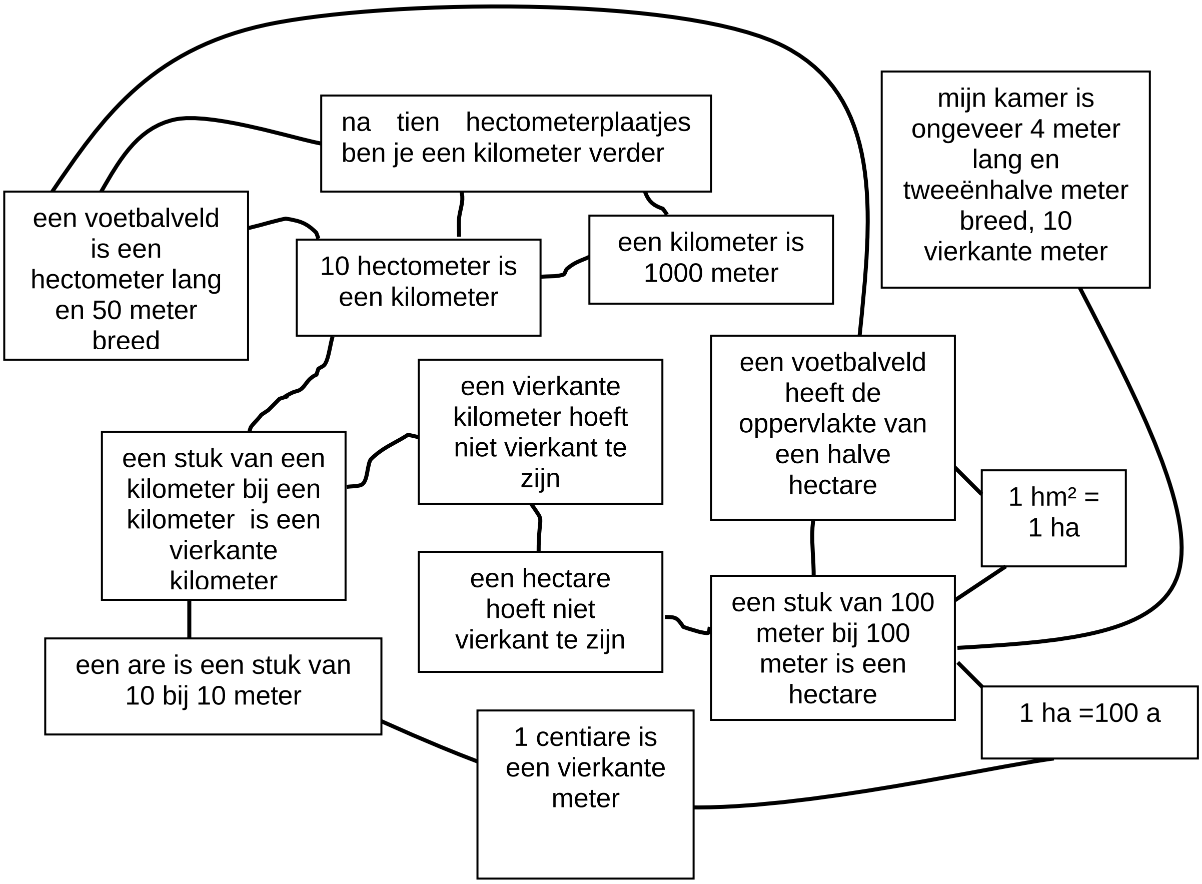
handig driehoekjes tellen

Een belangrijk gevaar bij het introduceren van formules is dat leerlingen die inzetten zonder goed te overzien of de situatie hier wel geschikt voor is. In het onderwijs ligt daarom de nadruk op het afleiden van deze formules, waarbij telkens de vraag is hoe de oppervlakte of inhoud handig bepaald (of geteld) kan worden. Bij andere figuren dan rechthoeken en blokken zullen de leerlingen andere manieren vinden om een maateenheid te bepalen en handig te tellen, want ook daar wordt de vraag gesteld om handig de inhoud of oppervlakte te bepalen. Daarbij vinden de leerlingen overigens in het algemeen geen formule voor oppervlakte of inhoud.

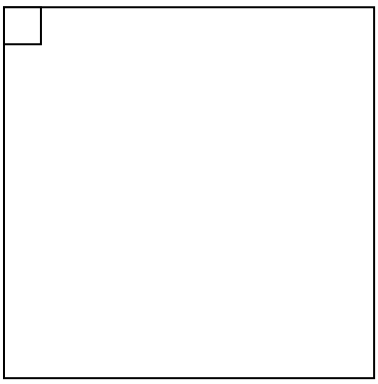
Leerlingen zetten de gevonden formules, al dan niet in meest abstracte vorm en als formalisering van het handige tellen, in bij het zoeken van relaties tussen verschillende oppervlaktematen of verschillende inhoudsmaten. Omdat de leerlingen goed bekend zijn met de lengtematen, kunnen ze een vierkant met zijden van een decimeter ook beschouwen als een vierkant met zijden van 10 centimeter. De oppervlakte van dit vierkant is dus een vierkante decimeter, want de lengte en breedte zijn één decimeter. Omdat het vierkant zijden heeft van 10 centimeter, kan de oppervlakte ook gezien worden als 10 rijen van 10 cm^2 of als l x b, 10 x 10 cm^2 of 100 cm^2. Wat we daarmee vaststellen is dat een vierkante decimeter even groot is als 100 vierkante centimeter.
Evenzo helpt de inhoudsformule bij het vaststellen dat er 1000 cm^3 in een kubus gaat van 10 cm bij 10 cm bij 10 cm. Ook deze formule komt naar voren via het construeren van de maat en het nagaan van het afpassen of stapelen van de maateenheid. Het gaat niet om een formule of rekenregel die van buiten moet worden geleerd, al zullen enkele leerlingen na het regelmatig herleiden van deze relatie deze kennen als een meetfeit.

Enkele leerlingen zullen ondanks deze nadruk op de betekenis en het telkens herleiden van handige, verkorte aanpakken op bepaalde momenten gaan goochelen met deze formules en ze gebruiken als betekenisloze rekenregels. In het algemeen zal dan met hen worden nagegaan hoe je de oppervlakte of inhoud (handig) tellend kan bepalen, om zo te achterhalen dat een bekende formule in de gegeven situatie niet past. Omdat het onderwijs zich telkens weer richt op het construeren van maten en relaties, is hiervoor regelmatig een gelegenheid. Soms echter zullen we de aanpak op een andere manier beschouwen. De vraag is dan wat de betekenis is van de berekende getallen, om leerlingen aldus te laten reflecteren op het afpassen en maatkeuze. Wanneer bijvoorbeeld een leerling de oppervlakte van een tafel uitrekent door de lengte in meter en de breedte in centimeter te vermenigvuldigen, is de uitkomst van de vermenigvuldiging zeker betekenisvol en dat doorzien leerlingen ook als deze oplossing met ze besproken wordt. De maat die hier gekozen is om af te passen is feitelijk een rechthoek van een meter bij een centimeter. Leerlingen kunnen deze maat - door vervormen - ook zien als vierkante decimeter.

10 Betekenis en relaties



Via verschillende onderzoekslessen vult iedere leerling stukje bij beetje zijn of haar netwerk van referentiematen en relaties tussen maten, waaronder de verschillende concepten en betekenissen voor resp. lengte, oppervlakte, inhoud en gewicht liggen. Dan ziet een stukje netwerk van relaties rond lengte en oppervlakte er bijvoorbeeld uit als boven aangegeven. We benadrukken daarbij dat het maar om een heel klein deel van het netwerk gaat, dat - door goed te luisteren naar wat leerlingen weten en kunnen - makkelijk uitgebreid en aangevuld kan worden. De leerling die we hier beschouwen ontdekte onder meer enkele relaties tussen kilometer, hectometer, vierkante kilometer en hectare (vierkante hectometer). Gesprekken in de klas leidde tot het vanuit de betekenis van de voorvoegsels kunnen beredeneren van de gelijkheden: $hm^2 = ha$; $dam^2 = a$; $m^2 = ca$. Toen werd besproken dat een vierkante hectometer – een stuk van 100 bij 100 meter – ook wel een hectare heet. Dit is kort voor 'hecto are' ofwel 100 are. Dat leidde vervolgens tot gesprekken over de betekenis van hm^2. Bij die maat gaat het niet om honderd (hecto) vierkante meter, maar om een oppervlakte die je bijvoorbeeld krijgt door een stuk grond te nemen van 100 meter bij 100 meter.



Een hectare is 10000 vierkante meter en dus is een are 100 vierkante meter, een stuk van 10 bij 10 meter. Wanneer we weer de overstap maken van lengtemaat naar oppervlaktemaat en de are intekenen in een vierkant van een hectare, is goed te zien dat de are 100 keer in de hectare past.
Verder kunnen we dit nog een keer doen en daarbij kan hetzelfde plaatje helpen. Een honderdste deel van een are heet een centiare, want 'centi' staat voor honderdste. Een centiare is

daarom een honderdste deel van 100 vierkante meter, ofwel 1 vierkante meter.

Een dergelijk relatienet voor de grootheid ‘gewicht’ is uiteraard ook omvangrijk, maar blijft voor de meeste leerlingen redelijk beperkt, omdat er feitelijk maar drie maten zijn die relevant zijn, namelijk de kilogram, de gram en de milligram. Voor inhoud is het netwerk van referenties en relaties tussen maten wel weer meer gevuld. In dit netwerk komt bijvoorbeeld naar voren dat er voor de grootheid inhoud twee concurrerende systemen de maten beschrijven. Het ene maatstelsel is afgeleid van de liter en komt al vroeg naar voren om de voorvoegsels te leren kennen. In dit maatstelsel is sprake van milliliters, centiliters, enzovoorts. Vanwege de nadruk die gelegd wordt op het kunnen gebruiken van voorvoegsels is het doorzien van de systematiek in deze inhoudsmaten voor de
meeste leerlingen niet moeilijk. Het andere stelsel is gebaseerd op de lengtematen. Hier kennen we de (gangbare) maten kubieke centimeter, kubieke decimeter en kubieke meter. De maten die zijn afgeleid van de lengtematen, zijn van belang wanneer de inhoud via een berekening wordt bepaald. De maataanduidingen die zijn afgeleid van het woord liter komen leerlingen regelmatig tegen op verpakkingen van dranken en andere levensmiddelen.
Juist onderzoekssituaties waar een gegeven inhoudsmaat (een aanduiding die is afgeleid van het woord liter) moet worden vergeleken met een inhoud die moet worden berekend, biedt allerlei mogelijkheden om referenties rond inhoudsmaten en relaties tussen inhoudsmaten te verwerven. En door metingen te verrichten aan objecten met verschillende maten, worden ook relaties tussen verschillende inhoudsmaten die zijn afgeleid van een meter verkend.

Verschillende onderzoeksopdrachten voor de leerlingen rond inhoud leiden bijvoorbeeld tot een netwerk van referenties en relaties tussen inhoudsmaten, waar het netwerk boven een onderdeel van is. Dit netwerk maakt zichtbaar dat referenties zijn gekoppeld aan van de liter afgeleide maten, maar ook die inhoudsmaten die van de meter zijn afgeleid, als kubieke centimeter en kubieke decimeter. De samenhang tussen formele relaties en betekenissen maakt dat de formele relaties reconstrueerbaar zijn en (daardoor) betekenis krijgen.

11 Andere maten

Het voorafgaande suggereert wellicht dat het in het basisonderwijs vooral gaat om het verkennen van metrische maten. Dat is niet het geval. We gaan hier kort in op andere grootheden dan lengte, oppervlakte en inhoud en doen daarmee niet volledig recht aan het belang van deze maten. In de uiteindelijke Tal-publicatie krijgen deze andere grootheden wel de plek die ze verdienen. Deze andere grootheden komen bijvoorbeeld in het onderwijs aan bod omdat ze mede betekenis geven aan (komma)getallen. Dit gebeurt bijvoorbeeld bij het gebruiken van en rekenen met geld. Het inwisselen van centen voor hele euro's vormt een van de essentiële inwisselregels voor het rekenen met kommagetallen.
Het meten van temperatuur met een (kwik)thermometer leidt tot het gebruiken van de (bekende) getallenlijn. De positie van het kwik op de thermometer geeft de temperatuur weer. Deze getallenlijn ondersteunt verder het rekenen met temperatuur, zoals het bepalen van temperatuurverschillen. Wanneer er bijvoorbeeld lichaamstemperatuur wordt gemeten, geeft de thermometer verder betekenis aan kommagetallen.
Een andere grootheid die in het onderwijs aan de orde komt, is tijd. In de middenbouw leren kinderen klokkijken – aflezen van zowel analoge als digitale klokken. Dit klokkijken wordt vooral geleerd aan de hand van het gebruiken van een echte lopende klok. Het onderwerp tijd blijft op de basisschool echter niet beperkt tot het leren klokkijken. Het leren omgaan met tijd betekent ook dat er aandacht is voor:
- dag en nacht en de stand van de zon;
- dagen van de week,
- weken, maanden, jaren,
- tiende en honderdste van een seconde
- tijdsverschillen op aarde.

Het verkennen van de relatie tussen de beweging van de aarde om z'n as en door de ruimte is aanleiding te praten over tijdverschillen op aarde. Aan de hand van een globe en een lamp wordt bijvoorbeeld besproken hoe je kunt verklaren dat het in de Verenigde Staten enkele uren vroeger is dan in Europa en in China en Japan enkele uren later.

Tot slot komen ook samengestelde maten aan de orde in de bovenbouw van de basisschool. Er is vooral aandacht voor de betekenis van de grootheid snelheid en de daarbij gebruikelijke maten kilometer per uur en meter per seconde. In dit kader maken leerlingen ook kennis met interne en externe verhoudingen. We beginnen bij het redeneren met interne verhoudingen, verhoudingen tussen gelijke grootheden. Wanneer we 16 kilometer in een uur rijden, dan rijden we 8 kilometer in 30 minuten en 4 kilometer in 15 minuten. We zorgen telkens dat de verhouding tussen de afstanden gelijk is aan de verhouding tussen de tijden. Wanneer we ons een voorstelling proberen te maken van 15 kilometer per uur als vaste verhouding tussen afstand en tijd, dan kunnen we de overstap maken naar externe verhoudingen. We kunnen dan bijvoorbeeld vaststellen dat in dit geval vier minuten doet over iedere kilometer.
Kinderen zijn in het algemeen minder bekend met snelheden die zijn aangegeven in meter per seconde. Ze kunnen zich er echter, als bij afstanden in kilometer per uur, wel wat bij voorstellen. Wanneer je 10 meter per seconde gaat, ben je in een seconde van de ene wand van de gymzaal aan de overzijde. Dat houd je dus zeker niet lopend of rennend bij.

We kunnen een verhoudingstabel of een dubbele getallenlijn gebruiken om verder betekenis te geven aan een snelheid van 10 m/s.

afgelegd	10 m	600	6 km	36 km
tijd	1 sec	1 minuut	10 minuten	1 uur

We zien zo dat 10 meter per seconde staat voor een snelheid van 36 kilometer per uur. Dat is veel sneller dan 15 kilometer per uur. Dat houd je zelfs op de fiets niet of nauwelijks bij.

Het vreemde aan de samengestelde maat snelheid is dat het om een soort denkbeeldige situatie gaat. Wanneer je op de fiets 15 kilometer per uur rijdt, zou je 15 kilometer afleggen, wanneer je een uur met deze snelheid doorrijdt. Je hoeft echter helemaal geen uur te rijden om 15 km/u te rijden. Wanneer de snelheidsmeter op een gegeven moment op 15 staat rijdt je zelfs op een bepaald moment een bepaalde snelheid. Dit vreemde karaker van snelheid en andere samengestelde maten zo moeilijk te grijpen voor leerlingen. Hieraan moet dan ook nadrukkelijk aandacht worden besteed in de klas.

12 Meten als systeem

Nog maar 200 jaar geleden waren de maten die we nu kennen nauwelijks in gebruik. Ze werden geïntroduceerd door Franse overheersers, die aldus poogden eenheid te scheppen in vele lokale maten en relaties tussen deze maten. Gekozen is voor een systematiek die (goeddeels) een structuur van 10-machten heeft. (Alleen bij tijdmeting is hiervan afgeweken.) Er gaan 10 centimeter in een decimeter, 10 decimeter in een meter, enzovoorts. Gevolg van deze keuze is dat er bijvoorbeeld 100 vierkante centimeter in een vierkante decimeter gaan en 1000 kubieke decimeter in een kubieke meter.
Leerlingen maken stukje bij beetje kennis met deze systematiek. Het komt op een aantal momenten aan de orde in het onderwijs:
- bij het zoeken of kiezen voor een alternatieve maat, wanneer getallen te groot of te klein worden, zoals bijvoorbeeld het meten in meter vervangen door het meten in centimeter om de maat preciezer aan te geven,
- bij reflectie op voorvoegsels,
- bij het afleiden van nieuwe maten, bijvoorbeeld voor oppervlakte en inhoud.

Het afleiden van nieuwe oppervlaktematen vormt een specifieke toepassing van de formule voor het bepalen van de oppervlakte. Hiermee wordt bedoeld, zoals in het voorafgaande is aangegeven, dat het herkennen van de vermenigvuldigrelatie gebruikt wordt om de nieuwe maten te verkennen. Een vierkant met zijden van 10 cm heeft een oppervlakte van 10 x 10 vierkante centimeter, ofwel 100 cm^2. We gaven aan dat we de nadruk leggen op het herleiden van dit soort relaties. Dat neemt evenwel niet weg dat dit voor een aantal leerlingen op een bepaald moment een meetfeitje wordt. Enkele leerlingen zullen verdere regelmaat herkennen. Zij zien dat de stappen die je onderneemt om te laten zien dat er 100 cm^2 in een vierkante decimeter gaan, analoog zijn aan dat wat je moet doen om te laten zien dat er 100 vierkante meter in een vierkante decameter gaan. Deze regelmaat geeft feitelijk de kern van de relaties tussen de oppervlaktematen.

Evenzo kunnen leerlingen relaties ontdekken en generaliseren tussen metrische inhoudsmaten als kubieke decimeter en kubieke meter. Daar zullen enkele leerlingen - aan de hand van het regelmatig herleiden van de inhoudsmaten - herkennen dat er telkens een factor 1000 zit tussen twee opeenvolgende metrische inhoudsmaten.

Dit betekent evenwel niet dat deze relaties door alle leerlingen beheerst moeten gaan worden. Wel wordt het onderwijs zo ingericht dat we leerlingen die dit relatief makkelijk kunnen bereiken, de kans geven deze relaties te verwerven. Dat wil zeggen dat enkele leerlingen niet verder zullen komen dan – met behulp van gekende voorvoegsels en in eenvoudige meetsituaties – andere metrische maten telkens weer af te leiden op een manier die zinvol is in de gegeven context. Andere leerlingen zullen in dergelijke situaties meer formele relaties tussen maten kunnen inzetten, terwijl een enkeling het gehele systeem doorziet en dit gebruikt bij het aanpakken van meetsituaties.

13 Afsluiting

De kerndoelen (2005) geven voor het leerstofonderdeel meten aan dat ‘de leerlingen leren meten en leren te rekenen met eenheden en maten, zoals bij tijd, geld, lengte, omtrek, oppervlakte, inhoud, gewicht, snelheid en temperatuur’. Deze doelomschrijving vraagt precisering en nadere uitwerking. In dit hoofdstuk doen we daarvoor een voorstel.
In het meetonderwijs komen alle grootheden en maten naar voren. Leerlingen verkennen de grootheden en maten daarbij in verschillende uitdagende onderzoekssituaties. In reflecties op het oplossen van aangeboden problemen gaat de aandacht met name uit naar het reconstrueren of afleiden van relaties tussen gegeven maten. Verder worden door te werken aan meetproblemen zgn. referentiematen verworven; meetweetjes, die helpen bij het verwerven van andere maten en die betekenis geven aan het meten.
Om de opbouw van het netwerk van referenties en relaties tussen maten van de grond te krijgen, is het van belang dat leerlingen op een bepaald ogenblik goed thuis zijn in de lengtematen en de relaties daartussen. Dit geeft namelijk betekenis aan de voorvoegsels (als ‘kilo’, ‘hecto’, ‘deca’, enzovoorts), maar maakt ook de overstap naar oppervlaktematen en inhoudsmaten mogelijk.
Omdat bij de maten tijd, geld en temperatuur minder gemakkelijk relaties worden gelegd met metrische maten, kiezen we hier voor een andere weg. Het rekenen met geld gebeurt in het verlengde van het verkennen van kommagetallen en het meten van temperatuur wordt gekoppeld aan het rekenen tot 100 of het rekenen met kommagetallen langs de getallenlijn, omdat (traditionele) thermometers nadrukkelijk de structuur van een getallenlijn hebben. Verder is het klokkijken een verhaal apart. Leerlingen moeten hierin goed thuis zijn om in deze maatschappij te functioneren. Hier zal dan ook gestreefd worden naar beheersing.

Waar vroeger de meettrapjes het meetonderwijs domineerden, gaat het nu om het ontwikkelen van een netwerk van referenties en relaties tussen maten. Daarbij vormt het telkens weer construeren van maten de kern van het onderwijs en bij het oefenen gaat het in het algemeen om het beoefenen van dit afleiden van maten. De meeste leerlingen zullen op deze wijze enkele formele relaties tussen maten leren kennen. In het verlengde van het leren kennen van voorvoegsels als ‘milli’, centi’, enzovoorts, streven we dit voor de lengtematen we dit ook nadrukkelijk na. Bij slechts een enkeling zal het hele systeem van de (metrische) maten binnen deze relaties naar voren komen. Zij reconstrueren zo de trapjes, die dan geworden zijn tot betekenisvolle relaties tussen maten. Veel leerlingen zullen einde basisschool tot ergens halverwege dit reconstructieproces komen.

Domeinbeschrijving meetkunde in de bovenbouw

1 Inleiding

Meetkunde is het greep krijgen om de ruimte om ons heen. Het leren van meetkunde kan vanuit verschillende gezichtshoeken heel waardevol zijn. Het kind komt veel eerder met meetkunde in aanraking dan met getallen. De ruimte om het kind heen, de vormen van allerlei speelgoed, bekers, borden, een bal: kinderen groeien vanaf de prilste dagen met meetkunde op. Meetkunde heeft een praktische waarde: een bal rolt, een kubus niet. Meetkunde heeft een voorbereidende waarde: het komt in andere leergebieden op de basisschool en in latere opleidingen (vaak wat formeler) terug. Tenslotte kan meetkunde als vak een grote aantrekkingskracht hebben: de intrinsieke waarde. Als voorbeeld noemen we de wiskundige schoonheid en regelmaat van een bepaald tegelpatroon.

Ondanks dit gegeven is de aandacht die op de basisschool aan meetkunde gegeven wordt aan de magere kant. Wiskunde op de basisschool wordt in de volksmond vaak geïdentificeerd met “rekenen” en de populaire media bevestigen dit beeld regelmatig. Ook besteden leerkrachten in de praktijk vaak weinig aandacht aan meetkunde, onder andere omdat de “einddoelen” veel vager lijken te zijn dan bij het rekenen, omdat het vaak nogal wat “gedoe”met zich meebrengt, en omdat ze zich bij hun onderwijs in het algemeen laten leiden door hun methode, waarin slechts geringe ruimte voor meetkunde is ingeruimd. De waarde van meetkunde wordt wel ingezien, maar hoe het onderwijs ingericht moet worden en welke structuren daarbij houvast kunnen bieden is niet zo helder.

Om meetkunde wat transparanter te maken hebben we een structuur gemaakt, een indeling in zogenoemde “clusters”. Als eerste noemen we Oriëntatie in de Ruimte. Vervolgens is er een cluster waarin de nadruk ligt op vormen van objecten, met als titel: Vlakke en Ruimtelijke Figuren. Ten slotte ontkomen we er niet aan dat de “ruimte” en het “vlak” voorstelbaar gemaakt moeten worden. En ook de wisselwerking tussen deze representaties verdient aandacht: hoe ga je van driedimensionaal naar tweedimensionaal en vice versa? Dit derde cluster heeft als titel: Visualisatie en Representatie. Het kan met enig recht een instrumenteel cluster genoemd worden in dienst van de meetkunde in de clusters 1 en 2.

2 Uitgangspunten, legitimering en karakterisering

Voortbouwen op de meetkunde in de onderbouw

In de onderbouw van de basisschool gaat het bij meetkunde voornamelijk om het verkennen, waarnemen en beleven van de omgeving waarin kinderen leven en bewegen. De ruimte doet zich aan hen voor als de kamer en het huis waarin ze leven. Er wordt een groot begrip op het oriënteringsvermogen van kinderen gedaan, vooral ook als zij naar buiten gaan. Oriënteren is een cruciaal begrip. Maar daarnaast zien en spelen kinderen met allerlei figuren en vormen en kunnen ze het niet laten om te gaan construeren: met blokjes, met lucifers, met vouwblaadjes, met verpakkingen, enzovoort. Tenslotte gaan ze ook schuiven met figuren, zien ze symmetrieën (spiegelen!), draaien ze figuren en ontstaat er een fascinatie voor schaduwen ofwel projecties. Door het opdoen van concrete ervaringen krijgen kinderen greep op de ruimte en groeit hun ruimtelijk inzicht.

Vooral in groep 3 en 4 komen aspecten van analyseren en verklaren steeds meer in beeld, maar dat blijft vooralsnog beperkt. Er is sprake van meer gecompliceerde meetkundige activiteiten en het taalgebruik is wat formeler. Verder wordt het karakter iets minder spontaan: er zit meer systematiek in de opzet. Dit resulteert ook in meer samenhang.

In de bovenbouw wordt de nadruk juist op de aspecten vergelijken en verklaren gelegd. Leerlingen worden steeds meer gestimuleerd om te beschrijven, verbanden te leggen, te verklaren en te voorspellen. Ze leren de ruimte te modelleren en aan de hand van die modellen meetkundige fenomenen steeds preciezer en diepgaander te begrijpen. Verder ontwikkelen ze zodoende steeds meer inzicht in allerlei meetkundige begrippen en instrumenten, zoals hoek, lijn, of aanzicht. Kortom, in de bovenbouw gaat het steeds meer om het verwiskundigen van de ruimte, zowel in structurele als in formele zin.

Dit betekent echter niet dat leerlingen niet meer concreet hoeven te manipuleren en dat de opdrachten uitsluitend op papier of mentaal uitgevoerd worden. Realistische meetkunde begint bij empirische waarnemingen en dus blijft het actief en concreet handelen heel belangrijk. Het gaat er in de bovenbouw om dat leerlingen op die ervaringen reflecteren, dat ze die waarnemingen steeds meer proberen te beschrijven, verklaren en relateren aan andere waarnemingen. Zo ontdekken ze relaties en patronen en proberen ze meer beredeneerde antwoorden te vinden op hun vragen en verwondering.
Het handelen heeft als het ware niet meer een voornamelijk verkennend karakter, zoals in de onderbouw, maar dient als basis voor het redeneren, het construeren van eenvoudige modellen en voor reflectie. Zo leren leerlingen systematischer te handelen om hun veronderstellingen te toetsen. Ze kunnen op die manier bijvoorbeeld bewijzen dat ze alle mogelijke uitslagen van de kubus hebben gevonden, of dat ze alle mogelijke bouwsels hebben gevonden die bij de gegeven aanzichten horen. Tegelijkertijd vindt ook steeds meer een verschuiving plaats naar het handelen met mentale beelden.

Daarnaast vindt er in de bovenbouw steeds meer een verschuiving plaats naar het preciezer en systematischer beschrijven, begrijpen en verklaren van meetkundige fenomenen. Zo gaan leerlingen aanzichten en kijklijnen op een gegeven moment gebruiken om te verklaren en precies aan te geven wat je wel of niet kunt zien vanaf een bepaalde plaats. Ze ontwikkelen inzicht in het begrip schaal en maken daar gebruik van bij het tekenen van bijvoorbeeld plattegronden. Dit betekent dat veel van de activiteiten die in de onderbouw plaatsvonden opnieuw aan de orde kunnen komen. Denk aan activiteiten als het tekenen van plattegronden, het werken met spiegels, het werken met mozaïeken en tangramfiguren, het maken van symmetrische figuren of uitslagen en het bouwen met blokken aan de hand van plattegronden met hoogtegetallen of aanzichten. In de bovenbouw gaat het echter om moeilijker problemen en onderzoeksactiviteiten waarin deze zaken meer diepte krijgen. Er worden meer eisen gesteld aan de soort beschrijvingen en verklaringen. De activiteiten vragen meer om reflectie en het leggen van verbanden.

Gelijktijdig en gekoppeld aan het ontwikkelen van preciezere beschrijvingen en verklaringen ontwikkelen leerlingen meetkundetaal die dat mogelijk maakt. Zo kunnen kinderen termen als parallellogram of ruit gaan gebruiken om te benoemen wat er als een andere vorm dan een rechthoek of vierkant wordt gezien. Door onderzoekjes te richten op de verschillen en overeenkomsten tussen vierhoeken die je bijvoorbeeld kunt afknippen van een gevouwen stuk papier kunnen kinderen de behoefte krijgen om die verschillende nieuwe vormen te benoemen. Zo zijn er talloze termen die steeds meer door de leerlingen gebruikt worden ten behoeve van het communiceren en het ontwikkelen van een duidelijke gezamenlijke taal.

Denk aan termen als hoek, rechte lijn en kromme lijn, parallel, loodrecht, richting en spiegelsymmetrisch.

Terugblikkend kan gesteld worden dat het meetkundeonderwijs in de bovenbouw aansluit bij de meetkunde in de onderbouw. De meetkundeontwikkeling van leerlingen in de basisschool begint heel dicht bij de leerlingen met eigen ervaringen en belevingen, vooral intuïtief, waarnemend, kwalitatief en globaal. Geleidelijk aan wordt het perspectief wat afstandelijker, minder kindnabij, kwantitatiever en nauwkeuriger. Daarbij is er meer aandacht voor het beschrijven, het ontwikkelen van wiskundetaal en het modelleren. Steeds meer wordt er op basis van reflectie en mentale voorstellingen gewerkt aan het verklaren met behulp van tekeningen, constructies en formeler begrippen. Het voorspellen, generaliseren en verbanden leggen gaan geleidelijk aan een steeds belangrijker plaats innemen.

Waardevolle meetkunde

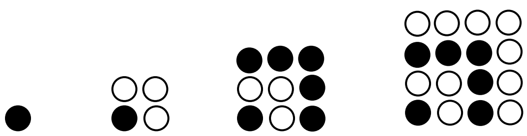
Het belang van het leren van meetkunde op de basisschool is de laatste jaren steeds meer benadrukt door verschillende didactici. Over het algemeen worden er drie hoofdwaarden aan de meetkunde toegekend, die we willen aanduiden als de algemeen praktische en vormende waarde, de voorbereidende waarde, en de intrinsieke waarde. In vrijwel alle onderdelen van de meetkunde kunnen we deze drie soorten waarden herkennen. Zo leer je een plattegrond interpreteren niet alleen omdat het nuttig is in het leven van alledag, maar ook omdat je dit soort kennis in het voortgezet onderwijs nodig hebt om op voort te bouwen: coördinaten, richtingen, schaal, enzovoort. Verder is het ook goed voor het leren begrijpen en waarderen van de meetkunde als discipline en heeft het dus een intrinsieke waarde. Bij kaarten kunnen we daarbij denken aan de verschillende projectiemethoden die kaartenmakers door de eeuwen heen ontwikkeld hebben en die samen een boeiend aspect van de meetkunde vormen.

Meetkunde in het basisonderwijs heeft een algemeen praktische en vormende waarde. Ieder mens (vandaar “algemeen”) heeft meetkundige kennis nodig om te kunnen functioneren als burger in deze maatschappij. Het gaat hier dus om de waarde van de meetkunde bij het ontwikkelen van een bepaalde wiskundige geletterdheid. Iedere mens heeft heel praktische meetkundige kennis nodig die misschien niet eens bewust als meetkunde herkend wordt. Te denken valt aan het opzoeken van iets op een plattegrond, het uitstippelen van een route op een kaart, iemand de weg wijzen, het uitzoeken hoeveel vloerbedekking of verf je nodig hebt, kledingpatronen gebruiken, of een kast in elkaar zetten met behulp van een handleiding.
Verder heeft iedere burger meetkundige kennis en vaardigheden nodig die te maken hebben met de persoonlijk vormende waarde. Meetkunde bevordert namelijk het nadenken, redeneren en probleemoplossend vermogen en de kritische houding die je nodig hebt om goed te kunnen functioneren in de maatschappij. Denk bijvoorbeeld aan het ordenen en organiseren van ruimtelijke situaties bij het maken van modellen, grafieken en diagrammen.

Ook onderscheiden we wat de meetkunde betreft een voorbereidende waarde, voorbereidend op de meetkunde die in het voortgezet onderwijs aan de orde komt, maar ook op andere onderwerpen binnen het rekenwiskundeonderwijs en op stof die in andere vakken aan de orde komt.
Op de basisschool wordt de basis gelegd voor in de eerste plaats de meetkunde die in het voortgezet onderwijs aan de orde komt. Zo zullen leerlingen in het voortgezet onderwijs op een formeel niveau werken met begrippen als hoek, kijklijn, lijn- en draaisymmetrie, coördinaten, loodrechte en evenwijdige lijnen, en met vormen en figuren zoals balk, kubus,

piramide, bol en kegel. In het basisonderwijs wordt hiervoor het fundament gelegd, door deze begrippen en hun achterliggende ideeën op een intuïtieve en informele manier te verkennen.
Maar de basisschoolmeetkunde legt niet alleen een fundament voor de vervolgmeetkunde. De meetkunde heeft ook een voorbereidende waarde voor andere reken-wiskundige onderwerpen die in en na de basisschool aan de orde komen, zoals het meten, getalbegrip en bewerkingen. Zo wordt er bij het meten gewerkt met ruimtelijk inzicht, meetkundige modellen (plattegronden, kaarten, technische tekeningen, schema's, enzovoort) en begrippen (hoek, rechte lijn, parallelliteit, vormen en figuren, enzovoort). Verder worden allerlei meetkundige modellen als het rechthoek- en strookmodel ook gebruikt bij het ontwikkelen van getalbegrip en inzicht in rekenkundige bewerkingen.
Ook zijn er verbindingen met de algebra, bijvoorbeeld bij groeiende tegelpatronen.
Ten slotte is het leren van meetkunde ook belangrijk bij andere vakken als aardrijkskunde of natuur en techniek.

Als laatste noemen we de intrinsieke waarde van de meetkunde. Afhankelijk van de talenten, interessen of behoeften kunnen leerlingen ook een fascinatie voor de meetkunde om de meetkunde ontwikkelen en het gaan zien als een mooi vak. Ze ontdekken dat ze het leuk vinden om met meetkunde bezig te zijn en dat ze zich daarin verder willen bekwamen. Te denken valt aan het esthetische aspect van de meetkunde dat je tegenkomt in de kunst en architectuur. Zowel spiegelingen en andere meetkundige transformaties, maar ook vormen en figuren in allerlei patronen worden daarin bijvoorbeeld uitvoerig gebruikt.
Mede doordat je bepaalde samenhangen gaat zien kan de meetkunde verwondering en waardering oproepen. Bijvoorbeeld, zowel bij het lokaliseren op de aardebol als bij het lokaliseren op een kaart of plattegrond gaat het om het lokaliseren op het vlak, en dan heb je maar twee coördinaten nodig. Om dezelfde reden geldt dat een punt op een lijngrafiek aangegeven moet worden met twee getallen, meestal aangeduid als x en y.
Bovendien kun je interesse voor het vak meetkunde ontwikkelen omdat je de kracht ervan ziet om verschijnselen in de ruimte te beschrijven, verklaren en voorspellen. Te denken valt aan het gebruik van meetkunde om het verschijnsel zonsverduistering te verklaren of om te begrijpen hoe het komt dat dingen die verder weg zijn ook kleiner lijken.
Ten slotte kun je met behulp van meetkunde ook mooie problemen of bepaalde problemen op een fraaie, elegante en/of aanschouwelijke manier oplossen.
Een voorbeeld hiervan is het probleem van de som van de eerste 100 oneven getallen:
1 + 3 + 5 + … + 197 + 199 = ? Het één voor één optellen van de getallen leidt wel tot een oplossing maar is nogal tijdrovend; het is ook geen mooie oplossingstrategie. Door de getallen handig bij elkaar op te tellen kan het probleem veel sneller en eleganter opgelost worden: (1 + 199 + 3 + 197 + … = 50 x 200 = 10 000). Toch biedt het doorzien van een bepaalde meetkundige structuur in deze optelling een misschien nog fraaier en eleganter oplossingsmanier. Kunt u in het volgende groeiende meetkundige patroon deze optelling zien?



1 1 + 3 1 + 3 + 5 1 + 3 + 5 + 7

Als u ziet dat de som van de eerste n oneven getallen n x n is, is de oplossing snel gevonden: de som van de eerste 100 oneven getallen is 100 x 100 = 10 000.

Het karakter van het meetkundeonderwijs in de bovenbouw

Het meetkundeonderwijs in de onderbouw werd reeds gekenmerkt door een hoog gehalte aan onderzoeksactiviteiten. De grotere nadruk die in het meetkundeonderwijs in de bovenbouw ligt op het redeneren, vergelijken, begrijpen en verklaren vraagt om nog rijkere onderzoeksactiviteiten, die ook een grotere complexiteit zullen hebben. De basis die in de onderbouw is gelegd maakt het ook mogelijk de complexiteit en rijkheid van onderzoeksopdrachten op te voeren.
Het is echter duidelijk dat er een grote verantwoordelijkheid rust op de schouders van de leerkracht. Immers, rijke en meer complexe onderzoeksactiviteiten hebben per definitie vaak een open karakter en dit geeft gelegenheid tot afdwalen naar ongewenste territoria.

Als we spreken over “rijke” onderzoeksactiviteiten bedoelen we niet alleen rijk wat betreft de wiskundige inhoud maar ook qua vorm waarin deze aan de orde komt, en wat betreft mogelijke leeropbrengsten. Vanuit het realistisch perspectief zien we een verschuiving van informeel naar formeel, nadruk op de ontwikkeling van wiskundige modellen, en het belang van interactie.

Een rijke onderzoeksactiviteit biedt leerlingen de mogelijkheid om op min of meer eigen niveau een probleem te onderzoeken, dan wel een probleem op te lossen. Vaak zal dit van de leerkracht een goede voorbereiding en planning eisen. De leerlingen moeten op een interactieve manier met elkaar samenwerken: het werk kan verdeeld worden, er vindt reflectie plaats, er worden strategieën ontwikkeld, enzovoort.
Zowel horizontale interactie (tussen leerlingen onderling) als verticale interactie (tussen leerlingen en leerkracht) zijn van groot belang.

Ook zal er rekening mee moeten worden gehouden dat de leerlingen “oplossingen” op verschillend formeel of wiskundig niveau kunnen aanleveren. Sterker nog, deze situatie zou met het oog op het leerproces zeer gewenst zijn. Zo kunnen leerlingen aankomen met wiskunde die wellicht niet op het leerplan voorkomt, maar die zij wel kennen van één of ander praktische situatie thuis of elders. Te denken valt aan het gebruik van graden bij het aanduiden van richtingen: de meeste leerlingen kunnen in het kader van een bepaalde activiteit uit de voeten met de hoofdrichtingen noord, oost, zuid en west, en de tussenrichtingen noordwest, noordoost, zuidwest en zuidoost, maar een leerkracht moet erop voorbereid zijn dat er een leerling graden gebruikt. Dit kan onder omstandigheden juist heel gewenst zijn: het komt uit de leerlingen zelf en het voorziet in een reële behoefte om richtingen preciezer aan te duiden. Zo wordt een rijke activiteit nog rijker.

Ten slotte kenmerkt het meetkundeonderwijs in de bovenbouw zich door samenhang: verbindingen van concepten die ontwikkeld zijn door rijke activiteiten met wiskundige inzichten die ontstaan zijn binnen andere contexten en leerstofdomeinen als het rekenen met getallen en het meten.

3 Inhoud van de meetkunde in de bovenbouw

Inleiding

De inhoud van de meetkunde in de Tal-brochure voor de onderbouw is in drie aspecten ingedeeld, namelijk oriënteren, construeren en opereren. Onder oriënteren wordt verstaan het bepalen van de eigen positie en die van andere objecten in de ruimte met behulp van elementaire ruimtelijke oriëntatiebegrippen als richting, hoek, afstand of coördinaten, of het kunnen interpreteren van een visueel model van een ruimtelijke situatie die vanuit een bepaald standpunt wordt waargenomen. Onder construeren vallen activiteiten waarbij leerlingen vormen en figuren construeren, terwijl het bij opereren meer gaat om het doen en denken met die vormen en figuren (schuiven, spiegelen, draaien en projecteren). Deze indeling betekent niet dat een meetkundige activiteit altijd onder te brengen is bij één van deze aspecten. Vaak komen er bij een activiteit meerdere aspecten aan de orde, afhankelijk van de aard van de activiteit op dat moment. De indeling waarvoor men koos is dus gericht op wat leerlingen in een meetkundige activiteit doen, hetgeen houvast geeft bij het inrichten van het onderwijs in de onderbouw. In feite gaat het bij het meetkundeonderwijs in deze leerjaren inderdaad voor een groot deel om het opdoen van concrete ervaringen en het verkennen van de ruimte in rijke doe-activiteiten. Aspecten als reflectie, vergelijken, verklaren en (mentaal) voorstellen en voorspellen beginnen voorzichtig in groep 3 en 4, maar het is in de bovenbouw dat deze zaken meer nadruk krijgen. Zij kenmerken in hoge mate de aard van de meetkundige activiteit in de bovenbouw.

Voor de meetkunde in de onderbouw was de driedeling oriënteren, construeren en opereren er één die aangeeft wat leerlingen moeten doen, voor de meetkunde in de bovenbouw kiezen we meer voor een driedeling die meer aangeeft wat de leerlingen moeten weten en kunnen. Meetkundige verschijnselen waarmee leerlingen in de basisschool in aanraking dienen te komen kunnen we globaal in twee clusters indelen, die we “Oriëntatie in de Ruimte” en “Vlakke en Ruimtelijke Figuren” noemen. De eerste, die mooi aansluit bij één van de drie gebieden van de onderbouw, betreft het greep krijgen op de ruimte om je heen. Het tweede betreft het classificeren, beschrijven, en ontdekken van eigenschappen van meetkundige vormen en figuren, hetzij in twee dan wel in drie dimensies.
Bij de studie van de ruimte en de figuren daarin hebben we technieken nodig die het mogelijk maken de weerbarstige driedimensionale werkelijkheid te visualiseren in twee dimensies, en omgekeerd. Maar ook moeten we de werkelijkheid soms, of beter heel vaak, eerst modelleren om enig overzicht te krijgen: een kaart is een model van een werkelijkheid. De werkelijkheid wordt gerepresenteerd door een schets of een buitengewoon gedetailleerde (soms zelfs driedimensionale) kaart; het blijft echter een representatie. De vaardigheden visualiseren en representeren worden gedurende het gehele leertraject ontwikkeld en vormen op den duur een belangrijke leeropbrengst. Vandaar dat “Visualisatie en Representatie” als een derde cluster voor het meetkundeonderwijs in de bovenbouw wordt beschouwd.
Samenvattend kiezen we in de bovenbouw voor een indeling in drie clusters, te weten “Oriëntatie in de Ruimte”, “Vlakke en Ruimtelijke Figuren” en “Visualisatie en Representatie”.

Dit verschil in naamgeving betekent niet dat er in de bovenbouw sprake is van een heel andere meetkundestof dan in de onderbouw, maar wel dat er een omslag plaatsvindt in de aard van de meetkundige activiteit. Mede hierdoor biedt de gekozen indeling meer houvast bij het inrichten van het onderwijs in de bovenbouw dan een indeling als voor de onderbouw gekozen werd. Natuurlijk blijft het belangrijk dat kinderen allerlei meetkundige constructies maken en dat ze ook concreet opereren met vormen en figuren. Echter, het primaire doel van deze activiteiten is niet meer zozeer het construeren en opereren zelf (die in de onderbouw voornamelijk een verkennend karakter hadden), maar wel het leggen van verbanden, het vergelijken en reflecteren op allerlei kwesties, en het verklaren en voorspellen. We zullen dat binnen de beschrijving van elk van de drie clusters duidelijker maken en verder uitwerken.

De drie clusters

De eerste cluster waar we op ingaan noemen we “Oriëntatie in de Ruimte”. Het betreft meetkundige aspecten en verschijnselen die te maken hebben met lokaliseren, het innemen van een standpunt en navigatie. Voorbeelden hiervan zijn het lokaliseren of navigeren in de ruimte aan de hand van kaarten, plattegronden en de windroos, het gebruik van kijkmeetkunde om te redeneren over hoe dingen gezien worden vanuit verschillende standpunten en waarom, enzovoort.

Op de ontdekkingsreis door de ruimte worden de leerlingen met veel vormen en figuren geconfronteerd, eerst heel informeel, later “ontstaat” de behoefte om enige structuur en classificatie aan te brengen. Er zijn ronde en puntige objecten, platte en bolle, en zo meer. De studie van “Vlakke en Ruimtelijke Figuren” vormt daarom een tweede cluster. In deze cluster redeneren leerlingen over de eigenschappen van figuren, en over hoe deze gecombineerd, omgevormd of gedeeld kunnen worden tot het maken van nieuwe figuren en patronen.

Het is mooi als je greep op de ruimte kunt krijgen, als je de weg weet te vinden in de stad, als je je de wereld als een bol kunt voorstellen, als je weet waar je in de bioscoop moet gaan zitten om het doek goed te zien, als je de relatie tussen vierkant en rechthoek kunt beschrijven, maar het is ook heel belangrijk om al deze zaken te kunnen “Visualiseren en Representeren” (de derde cluster). En dat geldt uiteraard voor veel aspecten van de wiskunde, maar nergens meer dan bij meetkunde: sommige technieken zijn niet alleen een instrument (het meten van hoeken en afstanden) maar zijn uitgegroeid tot een relatief zelfstandig onderdeel van de meetkunde, zoals de eerdere genoemde studie van projecties.

Cluster 1 Oriëntatie in de Ruimte

algemene beschrijving
In groep 1 en 2 staan de volgende twee vormen van oriënteren centraal: het lokaliseren en het innemen van een standpunt. Bij het lokaliseren gaat het dan om het kunnen aangeven waar iets of iemand zich bevindt. Daarnaast houdt het ook in dat de lokaliseergegevens gebruikt kunnen worden om iets of iemand op te sporen. Bij het innemen van een standpunt kan gedacht worden aan het vanuit verschillende posities naar hetzelfde object kijken.

In groep 3 en 4 wordt aan deze twee componenten een derde toegevoegd: draaiingen en richtingen. In de praktijk betekent dit natuurlijk dat de eerste twee zaken nu op een wat hoger niveau ter sprake komen: de lokalisering gaat de school uit, naar buiten; leerlingen kunnen gevraagd worden een maquette op schaal te maken, en ontwerpen een kaart van hun wijk. Ook zullen ze geconfronteerd worden met schematische kaarten zoals kaarten die routes weergeven van bussen en trams.
Verder moeten de activiteiten voor deze groepen voorbereiden op “hogere” kaartvaardigheden. Hieronder vallen coördinaten, richtingen die verder gaan dan de vier hoofdrichtingen noord, oost, zuid en west, schaalbegrip, en het inzien van de verschillen en het leggen van verbanden tussen verschillende kaarten van hetzelfde gebied, de verschillende projecties. Deze projecties horen natuurlijk ook bij het bestuderen van ruimtelijke objecten als kubus en blok, daar ook hier wezenlijk verschillende plaatjes getekend kunnen worden. Deze zaken zullen dus in de bovenbouw aan bod moeten komen.

Het innemen van een standpunt wordt in de bovenbouw op een hoger niveau gebracht door vanuit verschillende posities naar hetzelfde voorwerp te kijken. Het wordt als vanzelfsprekend gezien dat een bal een bal blijft vanuit wel punt ook gezien, maar een balk kan zomaar in een kubus veranderen, en een cirkel in een lijnstuk. Voor-, boven- en zijaanzichten zijn in groep 3 en 4 zeer goed aan de orde te stellen. Daarop kan voortgebouwd worden door meer complexe problemen aan te bieden en meer precieze analyses te maken.

Kijklijnen spelen een grote rol in de meetkunde van wat we zien en hoe we het zien. Ook in de bovenbouw spelen kijklijnen een grote rol. Kijklijnen hangen nauw samen met lichtstralen: schaduwen en “blinde vlekken” (waarmee hier bedoeld wordt het gebied dat je niet kunt zien) zijn conceptueel zeer nauw verwant. En als ons oog zich verplaatst (het innemen van een ander standpunt) heeft dat op de blinde vlek (dat gedeelte wat door een object aan het oog onttrokken wordt) dezelfde uitwerking als het verplaatsen van een lichtpunt op de schaduw. En met schaduwen en blinde vlekken kan hoogwaardige meetkunde bedreven worden, zeker als we de relaties in beschouwing nemen die zich vrijwel automatisch voordoen.

De derde component van de cluster “Oriëntatie in de Ruimte”, draaiingen en richtingen, benadrukt vooral de rol van draaien en hoeken. Zowel de draai die je maakt als de richting waarin je beweegt, en de knik in het pad dat daarbij gevormd wordt, worden allemaal uitgedrukt in hoeken. In groep 3 en 4 worden daarbij uitdrukkingen als kwart draai, halve draai en hele draai besproken. De samenhang met de hoeken van 90 graden (rechte hoeken) kan in de bovenbouw ter sprake komen.
Maar ook het verschil tussen een relatieve draai en een “absolute” komen in de bovenbouw aan bod. Je kunt vanuit je eigen positie zeggen: recht vooruit en dan de tweede straat links, of “de vijand bevindt zich op 10 uur”, maar deze zaken zijn beredeneerd van uit de sprekerspositie dan wel neusrichting (met de neus in de richting van 12 uur) dus 10 uur is wat naar links vooruit.
Er zijn echter ook “absolute” richtingen: noord is noord, en zuid is zuid. En noord kan recht vooruit zijn, maar net zo makkelijk linksaf. Waarbij zich nog het probleem voordoet dat als je naar het noorden blijft gaan je altijd op hetzelfde punt uitkomt (de noordpool), maar als we altijd maar in westelijke richting gaan is het einde zoek.
Draaiingen spelen ook een rol bij zuiver wiskundige zaken zoals rotaties en het verband met symmetrieën.

Het zal na het bovenstaande niet als een verrassing komen dat we, in aansluiting op de onderwerpclusters zoals die eerder geformuleerd zijn voor de onderbouw (te weten lokaliseren, het innemen van een standpunt en draaiingen en richtingen) een zeer analoge clusterindeling voor de bovenbouw voorstellen. Deze is: lokaliseren, het innemen van een standpunt en verplaatsing in de ruimte (navigatie). Het enige ‘echte’ verschil is dat de draaiingen en richtingen in de wat bredere context van navigatie geplaatst worden.

legitimering
“Oriëntatie in de Ruimte” heeft een grote algemeen praktische en vormende waarde. De vaardigheden die in dit kader ontwikkeld worden stellen ons in staat te functioneren in een maatschappij waarin we ons snel en efficiënt moeten verplaatsen en waarin iedere burger geacht wordt een bepaalde mate van inzicht te hebben in verschijnselen die zich aan ons voordoen. Zo is kaartlezen een haast onmisbare vaardigheid, wordt je geacht richtingen en afstanden te kunnen gebruiken om iemand de weg te wijzen, zou ieder mens moeten begrijpen hoe het komt dat schaduwen van lengte veranderen in de loop van de dag, en ga zo maar door.
Het voortgezet onderwijs bouwt, zo blijkt uit de wiskundemethoden, voort op ruimtelijk inzicht en vaardigheden ontwikkeld in het basisonderwijs. Enkele belangrijke onderwerpen

zijn bijvoorbeeld: hoek, coördinaten, verhoudingen, projecties en kijklijnen Deze cluster heeft dus ook een sterk voorbereidende waarde.
Tenslotte heeft “Oriëntatie in de Ruimte” ook een intrinsieke waarde. We denken met name aan kijkmeetkundige kwesties zoals we die in kunst weerspiegeld zien en die vaak gerelateerd zijn aan projectiemethoden.

Cluster 2 Vlakke en Ruimtelijke figuren

algemene beschrijving
Het gaat in deze cluster om relaties en eigenschappen van vlakke en ruimtefiguren. Door te redeneren over en met figuren in allerlei onderzoeksactiviteiten worden leerlingen zich steeds bewuster van de eigenschappen van figuren en hun relaties. Ze leren figuren te herkenen en langzamerhand en tot zekere hoogte te benoemen aan de hand van hun eigenschappen en niet louter aan de hand van hun uiterlijk.
In de onderbouw is daar al het een en ander aan gedaan, bijvoorbeeld bij “construeren”. Dit behelst het maken van ruimtelijke en vlakke objecten, waarbij het “maken” aansluit op de titel: construeren. Alhoewel er bij de activiteiten voor leerlingen in de onderbouw veel nadruk op het spelen wordt gelegd valt er niet aan te ontkomen dat woorden als vierkant en rond een belangrijke rol spelen, maar ook blokken en cilinders (wc-rol). Ook elementaire kenmerken van deze figuren kunnen al in groep 1 en 2 aan bod komen. Maar bij de derde component van de meetkunde in de groepen 1 en 2, het “opereren”, komen figuren sterk aan bod. Het betreft hier “het opereren met vormen en figuren”. Via activiteiten komen leerlingen in aanraking met symmetrieën en afbeeldingen van vormen en figuren. Dus bij het drietal componenten van de meetkunde in groep 1 en 2 (oriënteren, construeren en opereren) kan de bovenbouwcluster 2 voortbouwen op wat in de onderbouw aan construeren en opereren is gedaan.

Maar ook levert de beschrijving van meetkunde in groep 3 en 4 ons veel houvast. Dezelfde driedeling als in de groepen 1 en 2 wordt vastgehouden, maar er is sprake van een duidelijke ontwikkeling. Deze laat zich vooral kenschetsen door: van het concrete naar het mentale. Door na te denken over (ruimtelijke) objecten die leerlingen in het echt gaan maken en zich voor te stellen hoe deze eruit gaan zien ontwikkelen zij hun ruimtelijk voorstellingsvermogen. Door het handelen nog steeds een duidelijke plaats te geven beklijft het ontstane inzicht.

Een tweede nieuw aspect in de overgang van groep 1/2 naar groep 3/4 is de aanvulling met meetkundige constructies: hoe maak je een vierkant? Het construeren in groep 3 en 4 kan geschetst worden door: construeren met blokken, met papier, op papier en op de computer. Vormen en figuren die aan bod komen zijn: vierkant, rechthoek, driehoek, cirkel, kubus, blok, cilinder en kegel.

Bij opereren moeten we denken aan spiegelingen, mozaïeken en schaduwen. De leerlingen moeten hun kennis van vormen verdiepen door spiegelbeelden te bepalen, mozaïeken te leggen en tangram te spelen.

In de bovenbouw is de centrale inhoud voor deze cluster 2: de relaties tussen en de eigenschappen van vormen en figuren. Daarbij zullen de beschrijvingen steeds formeler worden.We kunnen er niet om heen om een vierkant alleen maar te “herkennen” en te weten “hoe je het tekent”. De figuren dienen nu benoemd te worden aan de hand van eigenschappen: door reflectie, vergelijking, verklaring en het leggen van verbanden ontstaat meetkundig inzicht in de classificatie van ruimtelijke figuren.

Het gaat in de bovenbouw niet om het leren van wiskundige termen en definities van begrippen zoals gelijkbenige driehoek, parallellogram of symmetrieas. Dat is iets voor het voortgezet onderwijs. Het gaat nu om het ontwikkelen van informele kennis en inzichten die leerlingen bijvoorbeeld in staat stellen om deze begrippen in het voortgezet onderwijs te kunnen formaliseren en begrijpen. Dat neemt niet weg dat meetkundige terminologie op beperkte schaal op een natuurlijke manier dient te worden gebruikt. Als een bepaalde meetkundige term wordt geïntroduceerd komt dat direct voort uit de behoefte om te benoemen, om de communicatie te vergemakkelijk. Een term als parallellogram kan bijvoorbeeld naar voren komen omdat leerlingen ontdekken dat deze figuur anders is dan een rechthoek en er behoefte aan hebben om er een naam aan te geven. Belangrijker is echter dat leerlingen veelhoeken verkennen en enkele verschillen weten te herkennen en benoemen, om zo enkele eigenschappen van eenvoudige figuren zoals rechthoeken te kunnen gebruiken zodat ze bijvoorbeeld vast kunnen stellen wanneer ze een rechthoek hebben geknipt of getekend.

legitimering
Activiteiten in deze cluster hebben duidelijk een voorbereidende waarde. In het voortgezet onderwijs wordt een aantal begrippen geformaliseerd. Er wordt over het algemeen verondersteld dat leerlingen al informele kennis hebben ontwikkeld over bijvoorbeeld spiegel- en draaisymmetrie, of bijzondere drie- en vierhoeken. Vlakke figuren worden gedefinieerd aan de hand van hun zijden en hoeken of van hun symmetrische eigenschappen. Het is dus belangrijk dat leerlingen in het basisonderwijs enigszins vertrouwd raken met deze figuren en hun “basis” kenmerken en dat ze dus, bijvoorbeeld, bijzondere driehoeken en vierhoeken als zodanig kunnen herkennen en classificeren.
Deze cluster heeft ook een intrinsieke waarde. Vormen en figuren komen we overal tegen in patronen en afbeeldingen. Zij hebben met esthetische aspecten te maken die we tegenkomen in de architectuur en de kunst.
In het gebied van “Vlakke en Ruimtelijke Figuren” valt veel te onderzoeken. Leerlingen leren zodoende te redeneren, reflecteren, vergelijken, bewijzen, enzovoort. Het bevordert dus het probleemoplossend vermogen en het ontwikkelt een wiskundige houding. Verder levert het kennis op die heel nuttig is bijvoorbeeld bij het interpreteren van bouwplaten en bouwtekeningen. Deze cluster heeft dus ook een sterke algemeen praktische en vormende waarde.

Cluster 3 Visualisatie en Representatie

algemene beschrijving
Deze cluster van meetkundige inhouden betreft activiteiten en problemen die te maken hebben met twee- en driedimensionale weergaven van de twee- en driedimensionale werkelijkheid. Leerlingen doen kennis op over diverse tweedimensionale weergaven van de werkelijkheid: hoe maak je ze, wat is het verschil tussen de verschillende weergaven, welke informatie geven ze, hoe moeten ze geïnterpreteerd worden, enzovoort. Te denken valt aan het leren hoe je een kaart of plattegrond leest, of hoe je een plattegrond van de omgeving of een uitslag van een kubus maakt. Maar ook hoe je een kubus of balk moet tekenen, hoe de figuur samenhangt met de drie aanzichten, wat betere manieren van tekenen zijn gezien het probleem, hoeveel aanzichten je nodig hebt om zeker te zijn van de vorm van een figuur.

Het visualiseren en representeren komt in de leerlijnbeschrijving meetkunde voor de onderbouw wel aan de orde, maar wordt niet als zodanig apart beschreven. In de bovenbouw krijgen aspecten die te maken hebben met meetkundige representatie echter een steeds grotere nadruk. Voortbouwend op de explorerende activiteiten die in de onderbouw aan de orde zijn geweest ontwikkelen leerlingen in de bovenbouw op een meer systematische wijze instrumenten die hen tot representatie in staat stellen. Er wordt meer en meer aandacht geschonken aan de wiskundetaal, en aan modellen die leerlingen beter in staat stellen dingen te verklaren, voorspellen en generaliseren.

Uiteraard heeft deze cluster van inhouden sterke verbanden met de andere twee clusters. Meetkundige representaties van de werkelijkheid spelen een belangrijke rol bij Oriëntatie in de Ruimte. Zo moet je een kaart kunnen interpreteren om een route uit te stippelen van de ene naar de andere locatie. De nadruk ligt binnen deze cluster echter vooral op het weergeven zelf: het interpreteren en het zelf maken van representaties, het ontwikkelen van de meetkundige instrumenten die je nodig hebt om ruimtelijke oriëntatieproblemen op te lossen.
En ook met de tweede cluster, die van Vlakke en Ruimtelijke Figuren, zijn vele verbanden aan te wijzen. Als je bijvoorbeeld aan de hand van aanzichten een ruimtelijke figuur nabouwt ben je enerzijds bezig met een meetkundige figuur, maar anderzijds ook met kennis en inzichten die te maken hebben met hoe de driedimensionale werkelijkheid op papier kan worden vastgelegd.
Je zou kunnen zeggen dat deze derde cluster instrumenteel van aard is in dienst van de meetkunde binnen de andere twee clusters. Het gaat binnen deze cluster om het ontwikkelen van instrumenten die leerlingen in staat stellen zowel de grillige werkelijkheid van de wereld om hen heen als de wiskundige werkelijkheid van regelmatige vlakke en ruimtelijke figuren meetkundig te representeren.

legitimering
De meetkundige activiteiten die binnen deze cluster plaatsvinden hebben een algemeen praktische en vormende waarde. Het hanteren van meetkundige technieken, zoals het tekenen van een route op een kaart op schaal, stelt ons in staat een praktisch probleem als het vergelijken van de lengtes van verschillende routes op te lossen. Zo kun je ook de inrichting van je nieuwe huis alvast plannen. Het helpt vaak om een verschijnsel in de werkelijkheid te “vermeetkundigen”, weer te geven met een schets, of een heel precieze weergave op schaal, of een doorsnede, om een verklaring te kunnen geven van het verschijnsel in kwestie. Zo kan het tekenen van een kijklijn in een zijaanzicht van een bepaalde situatie uitsluitsel geven of iemand een bepaald object wel of niet kan zien vanuit een bepaald standpunt. En als je dergelijke meetkundige tekeningen ook als bewijsvoering wilt kunnen gebruiken zul je heel nauwkeurig moeten leren representeren en ook heel goed moeten begrijpen welke informatie in een representatie is vervat: Wat zie je in een bovenaanzicht en wat kun je er niet uit afleiden en hoe zit dat met een zijaanzicht? En: Hoeveel aanzichten heb je eigenlijk nodig om met zekerheid vast te stellen hoe iets eruit ziet? En: Wanneer moet je tekening op schaal zijn en wanneer is dat niet nodig?
Het ontwikkelen van een instrumentarium om meetkundige representaties te maken heeft ook een voorbereidende waarde. In de meetkunde van het voortgezet onderwijs worden leerlingen geacht een aantal basisprincipes en vaardigheden te beheersen. Zo wordt ervan uitgegaan de leerlingen zich een ruimtelijke voorstelling kunnen maken van een blokkenbouwsel op basis van tekeningen van aanzichten en dat ze zelf in staat zijn relevante aspecten van een ruimtelijk object op meetkundige wijze op papier vast te leggen.
Representatie en Visualisatie stimuleren de ruimtelijke denkontwikkeling en hebben in die zin een intrinsieke waarde. Zij stellen de leerling in staat oog te krijgen voor geometrische elementen in kunst, vormgeving en architectuur. En de projectieve meetkunde is een discipline op zich. Net zo goed als cartografie een kunst op zich is.