

Het belang van social norms en socio-math norms voor realistisch reken-wiskundeonderwijs

K. Gravemeijer
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht
Vakgroep Onderwijsstudies, RU Leiden

1 Inleiding

Uitgangspunt voor het realistisch reken-wiskundeonderwijs is de idee van 'wiskunde als menselijke activiteit' (Freudenthal, 1973). Waar wiskunde in het algemeen wordt opgevat als een systeem van regels en procedures, benadrukt Freudenthal het proces dat tot het ontstaan van dit systeem heeft geleid (en tot verdere ontwikkeling van dit systeem leidt). Wiskundeonderwijs dat zich direct richt op het aanleren van het systeem als een kant-en-klaar produkt, beticht hij van een anti-didactische inverse. De historische ontwikkelingsgang van de wiskunde wordt gekenmerkt door een proces van voortgaande organisatie - met praktische problemen als beginpunt, en het formele wiskundige bouwwerk als eindpunt. Dit wordt in traditioneel reken-wiskundeonderwijs op zijn kop gezet door met het formele systeem te beginnen en met de toepassingen te eindigen. De problemen die deze anti-didactische inverse oplevert zijn genoegzaam bekend.

Het op gezag van anderen overnemen van wiskundige kennis acht Freudenthal bovendien geen wiskunde. Als alternatief stelt hij 'guided reinvention' voor: geleid heruitvinden. Door de leerlingen te begeleiden bij het heruitvinden van wat anderen eerder gevonden hebben kan het uitgangspunt van 'wiskunde als activiteit' worden gecombineerd met het doel van het bemeesteren van 'wiskunde als systeem'. Voorop staat hier de aard van het leerproces. Het belangrijkste is niet dat de leerlingen zelfstandig uitvindingen doen. Het gaat erom dat de leerlingen het reinvention proces zo ervaren, dat ze de uitkomsten van dit proces beschouwen als eigen kennis, als kennis die ze zelf voor hun verantwoording nemen.

De leerlingen moeten dan wel in de gelegenheid worden gesteld om deze kennis op eigen gezag te ontwikkelen. Een belangrijke voorwaarde ligt in het uitlijnen van een leergang. De ontwerper moet zorgen voor een uitgekende reeks van problemen, die als het ware een reinvention route voor de leerlingen uitzet. De geschiedenis van de wiskunde, kennis van informele oplossingsstrategieën en een (didactische) analyse van toepassingsproblemen, kunnen hier worden benut als waardevolle informatiebronnen (Gravemeijer, 1994; Streefland,

1988). De opgavenreeks moet zo in elkaar steken dat de leerlingen het beoogde doel via 'progressief mathematiseren' bereiken. Contextopgaven kunnen hier een belangrijke rol spelen; de context kan de leerlingen aangrijpingspunten bieden die benut kunnen worden voor een wiskundige oplossing van het probleem. Verder kan door de opgavenreeks zelf het verbeteren van de oplossingsstrategieën in wiskundige zin worden gestimuleerd. Herhaling en variatie van opgaven kunnen er aanleiding toe geven, oplossingsstrategieën te verkorten, te vereenvoudigen, te veralgemeniseren en/of te formaliseren.

Reflectie en discussie kunnen dit progressief mathematiseren bevorderen. Door oplossingsstrategieën met elkaar te vergelijken kunnen de leerlingen ontdekkingen doen en van elkaar leren. Daarvoor is dan wel nodig dat de opgave die aan de orde is ook aanleiding geeft tot een variëteit aan oplossingsstrategieën. Wanneer alle leerlingen komen met gelijksoortige oplossingen van eenzelfde niveau valt er weinig te discussiëren. Een leerkracht die in zo'n situatie toch verder wil komen is aangewezen op een combinatie van duwen en trekken om de leerlingen alsnog te laten zeggen wat ze spontaan niet bedacht hebben.

Geschikte opgavenreeksen zijn dus essentieel voor het welslagen van dit type onderwijs. Daar is in het verleden ook veel aandacht aan besteed. Inmiddels zijn er tal van prototypische leergangen die hun waarde wat dit betreft hebben bewezen, uitgewerkt in schoolboeken. Echter, geschikte leergangen vormen een noodzakelijke voorwaarde, maar geen voldoende voorwaarde.

Om echt realistisch reken-wiskundeonderwijs te realiseren - wiskundeonderwijs dat enerzijds voldoet aan het uitgangspunt van wiskunde leren op eigen gezag en wat anderzijds resulteert in het zich eigen maken van de beoogde wiskunde - komt meer kijken. Hoe het onderwijsleerproces er in dit verband uit zou moeten zien vormt het thema van dit artikel.

2 Weerstand

Het onderzoek van Desforges & Cockburn (1987) is wat dit betreft onthullend. Zij deden in Groot Britannië on-

derzoek bij basisschoolleerkrachten die bekend stonden als goed en vernieuwingsgezind. Tot hun verbazing bleek er weinig terecht te komen van het beoogde probleem-georiënteerde onderwijs. In de praktijk bleek dat de leerlingen niet meewerkten. Door steeds om hulp en aanwijzingen te vragen probeerden de leerlingen de openheid van de opgaven zo veel mogelijk in te perken. Klaarblijkelijk voelden de leerlingen zich prettiger in een onderwijsleersituatie waar precies vaststond wat ze moesten doen dan in een situatie waar er veel aan hen zelf werd overgelaten. Bovendien bleek het moeilijker om orde te houden in klassen die met open problemen werkten dan in klassen die rijtjes standaardopgaven moesten afwerken. Los van de barrières voor open opgaven, is ook het bespreken van oplossingsstrategieën niet probleemloos. Leerlingen gaan er namelijk niet spontaan toe over hun antwoorden uit te leggen en te rechtvaardigen (Jaworski, 1994).

3 Didactisch contract

Beide typen problemen lijken voort te komen uit een miss-match tussen de verwachtingen van de leerkracht en die van de leerlingen. Men spreekt in dit verband van een verandering van het 'didactisch contract' tussen leerkracht en leerlingen (Brousseau, 1990; Elbers, 1988). Als regel worden de interacties tussen leerkracht en leerlingen in het onderwijsleerproces gedragen door impliciete 'afspraken' over de wijze waarop de communicatie verloopt. Beter gezegd, er is sprake van ingeslepen patronen, die de verwachtingen en verplichtingen over en weer bepalen. Hoezeer de interactie in de klas verschilt van communicatie in een alledaagse buitenschoolse situatie, wordt duidelijk als we het stereotype 'elicitation pattern' (Voigt, 1985) transponeren naar een buitenschoolse situatie. Het schoolse elicitation pattern kenmerkt zich door een patroon van vraag-antwoord-evaluatie. De leerkracht stelt een vraag, een leerling antwoordt en de leerkracht evalueert dit antwoord. Wanneer we dit patroon overbrengen naar de situatie waar iemand de weg vraagt krijgen we:

- Kunt u mij ook zeggen waar de Trompstraat is?
- De Trompstraat. Dat is de tweede links en daarna de eerste rechts.
- De tweede links en daarna de eerste rechts. Prima!

Een ander bekend verschijnsel, dat in dezelfde categorie valt, is de neiging van leerlingen hun antwoord te veranderen als de leerkracht de vraag herhaalt. Door ervaring wijs geworden weten de leerlingen dat een herhaling van de vraag als regel betekent dat het eerder gegeven antwoord fout was. Iets dergelijks kan zich ook voordoen bij vragen om toelichting op de oplossingsprocedure. Wanneer de leerkracht in het algemeen al-

leen om opheldering vraagt wanneer het antwoord fout is, zal de leerling eerder een ander antwoord geven dan een toelichting. De onderliggende premisse van dit 'contract' is, dat de leerkracht de juiste antwoorden weet en dat de leerlingen zich daarnaar moeten richten. De andere kant van dit contract is dat de leerlingen van de leerkracht mogen verwachten dat deze uitleg geeft wanneer ze iets niet begrijpen.

Realistisch reken-wiskundeonderwijs gaat net als andere vormen van onderzoeksgericht reken-wiskundeonderwijs uit van heel andere premissen. Dit betekent dat er ook een heel ander didactisch contract moet komen. Het onderzoek van Desforges & Cockburn (1987) laat in feite zien dat een didactisch contract niet eenzijdig door de leerkracht kan worden opgezegd. Cobb et al (1992) rapporteren dat de leerkrachten die op een nieuwe, onderzoeksgerichte, reken-wiskunde aanpak overstapten constateerden dat er expliciet aandacht moest worden besteed aan het wijzigen van het didactisch contract, of zoals Cobb c.s. het noemen aan het wijzigen van de social norms.

4 Het wijzigen van de social norms

Het specifieke karakter van het didactisch contract maakt dat het niet voldoende is de leerlingen van de nieuwe sociale normen op de hoogte te stellen; de nieuwe normen moeten ook worden ingebed in dagelijkse ervaringen. Anders dan in de traditionele reken-wiskunde wordt er bij het realistische reken-wiskundeonderwijs van de leerlingen verwacht dat ze hun oplossingsstrategieën verantwoorden, dat ze naar andere luisteren, de aangedragen oplossingsstrategieën proberen te begrijpen en zo nodig om opheldering vragen of kritiek leveren. Juist bij dit type normen dreigt natuurlijk het gevaar dat je blijft steken in verbalismen. Daarom is het zo belangrijk dat het handelen van de leerkracht consistent is met deze nieuwe normen.

Bovendien, zo betogen Cobb, Wood, & Yackel (1993) moet de leerkracht de nieuwe normen in concrete situaties aan de orde stellen. Zij geven een voorbeeld van een leerling (Jack) die in verlegenheid wordt gebracht door een fout antwoord. Jack ervaart het uitleggen van zijn oplossingsstrategie hierdoor als een straf. Maar de leerkracht wil nu juist dat de leerlingen vertellen hoe ze denken, om zo de mogelijkheid te openen voor een praktijk van een wiskundige discours. Daarom maakt de leerkracht het maken van fouten nu tot onderwerp van gesprek.

- T: (Softly) Oh, okay. Is it okay to make a mistake?
Andew: Yes.
T: Is it okay to make a mistake, Jack?
Jack: Yes.
T: You bet it is. As long as you're in my class it is

okay to make a mistake. Because I make them all the time, and we learn from our mistakes, a lot. Jack already figured out, Oops, I didn't have the right answer the first time. (Jack turns and looks at the teacher and smiles) but he kept working at it and he got it. (Cobb, Wood & Yackel, 1993)

Op eenzelfde manier wordt het samenwerken aan de orde gesteld. Wanneer de leerkracht merkt dat een leerling de door zijn partner geproduceerde oplossingen niet begrijpt herinnert de leerkracht de leerlingen eraan dat ze geacht worden samen te werken.

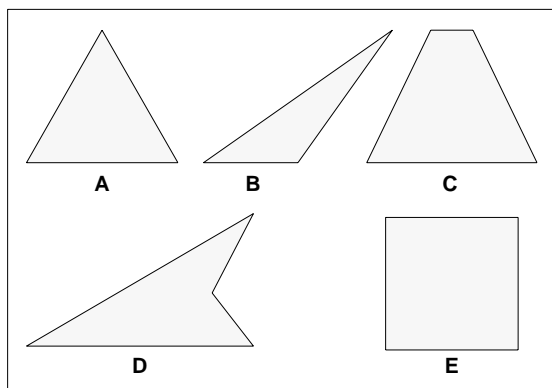
John: Adam kept putting them (the answers) down.
 Teacher: It is up to you to stop him and say, I don't understand this. Adam is going to be in trouble if you two can't give the answer because I'll know how he's done all the work and not let you have the fun of trying. Okay. You better double check right now and make sure everyone can answer. (Yackel, Cobb & Wood, 1991)

Naast deze expliciete interventies moet de leerkracht er ook voor zorgen dat gedrag dat past bij de gewenste sociale normen ook wordt beloond. Dit betekent:

- dat de leerkracht het honoreert als een leerling met een alternatieve oplossing komt en deze uitlegt;
- dat luisteren naar anderen positief wordt gewaardeerd;
- dat een goed antwoord zonder uitleg niet wordt geaccepteerd;
- dat de leerkracht het eigen oordeel over de juistheid van een antwoord opschort, enzovoort.

5 Sturing

Nu kan de terughoudende opstelling van de leerkracht ook te ver worden doorgevoerd. Zo rapporteren Lehrer & Jacobson (1995) over een klas waar de leerlingen het begrip driehoek bespreken. Op het bord staan verschillende drie- en vierhoeken (fig.1) en de leerlingen bediscussieren welke van deze figuren wel en welke geen driehoek zijn.



figuur 1: wel of geen driehoek?

Aan het eind van de les zijn de leerlingen het erover eens dat *D* ook een driehoek is. De leerkracht en de onderzoeker staan voor een dilemma: Moet je nu ingrijpen, of moet je het eigen oordeel van de leerlingen respecteren?

Wanneer er niet op enigerlei wijze richting wordt gegeven aan het leerproces van de leerlingen wordt er weinig vooruitgang geboekt. Bovendien bestaat de kans dat de leerlingen op iets anders uitkomen dan de beoogde standaardbegrippen, notaties en procedures. Dit brengt ons op de vraag: Hoe stuur je wiskundeonderwijs dat ervan uitgaat dat de leerlingen zelf, op hun eigen gezag, wiskunde construeren?

Alvorens hierop in te gaan is het misschien goed even stil te staan bij een belangrijk verschil tussen het met de klas ontwikkelen van nieuwe normen en het met de klas ontwikkelen van wiskunde. In het eerste geval ligt de verantwoordelijkheid niet bij de leerlingen, maar bij de leerkracht. De leerkracht bepaalt de 'spelregels'. Daarmee kiest de leerkracht voor een bepaalde invulling van wat wiskunde is en hoe wiskunde wordt geleerd. Overigens moet dit 'bepalen' niet al te letterlijk worden genomen; ook hier is interactie tussen leerkracht en leerlingen nodig. Of, zoals de socio-constructivisten het uitdrukken 'the social norms are interactively constituted'. We zagen immers dat de sociale normen moeten worden ingebed in de praktijk. Dit betekent dat er een inbreng van de leerlingen nodig is. De leerkracht kan de normen niet aan de orde stellen als zich geen situatie voordoet die daar aanleiding toe geeft. Anders gezegd: als zich geen situatie voordoet waar een leerling blij geeft van een eigen opvatting over de onderlinge verwachtingen en verplichtingen, is er voor de leerkracht ook geen gelegenheid die opvatting ter discussie te stellen. De sociale normen kunnen bovendien pas functioneren als de opvattingen van de leerlingen er globaal mee overeenstemmen. Cobb, Boufi, McClain & Whitenack (in press) benadrukken in dit verband de reflexieve relatie tussen de groepsnormen en de individuele opvattingen: enerzijds gaat het om groepsnormen die van invloed zijn op de opvattingen van de individuele leerlingen, anderzijds zijn het de opvattingen van de individuele leerlingen en die van de leerkracht, die samen de groepsnormen bepalen.

Terug naar de vraag: Hoe kan de leerkracht het leerproces van de leerlingen op een indirecte manier sturen? In onderzoek dat in de Verenigde Staten wordt uitgevoerd naar, onder meer het 'rekenrek', de 'lege getallenlijn' en de 'Candy Factory' kwamen drie typen sturingsmechanismen naar voren: retro-actief, pro-actief en inter-actief.

Retro-actief

Retro-actieve sturing kan bijvoorbeeld plaats vinden als

de leerlingen een keuze voor een standaardisatie moeten maken. Nadat de leerlingen zelf verschillende mogelijkheden hebben ingebracht, kan de leerkracht de definitieve keuze in de richting van de conventie sturen.

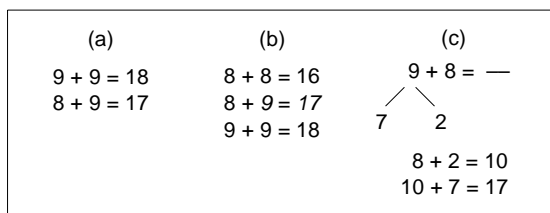
Iets dergelijks wordt in het bovengenoemde onderzoek gedaan bij de introductie van het tientallig stelsel. In de context van een 'Candy Factory' wordt besproken hoe je candies handig kunt verpakken. Groeperen op basis van tien is een van de mogelijkheden die in zo'n discussie naar voren zal komen. Dan laat de leerkracht de leerlingen niet zelf kiezen hoe ze verder gaan, maar deze vertelt de leerlingen dat ze het in deze fabriek zó doen: tien in een rol, tien rollen in een doos, enzovoort. Op deze manier kan recht worden gedaan aan de intellectuele autonomie van de leerlingen, terwijl er tegelijkertijd wordt gezorgd voor de noodzakelijke aansluiting met de gangbare reken-wiskundepraktijk.

In principe gaat het hier om een arbitraire keuze - hoe goed deze ook te verdedigen is. In het verleden heeft men immers ook andere keuzes gemaakt; de Babyloniërs gebruikten twaalf en zestig als groeperingsgrondslag, de Mayas ontwikkelden een tweetallig stelsel, en bij computers gebruikt men een hexadecimale notatie. Het begrip 'driehoek' ligt in dezelfde sfeer. Zo heeft het geen zin de leerlingen zelf het begrip driehoek te laten uitvinden. Wel kan er naar een situatie worden gezocht waarin het zinvol is driehoeken en vierhoeken te onderscheiden. Als de leerlingen dan tot de conclusie zijn gekomen dat het handig is driehoeken een eigen naam te geven dan kan de leerkracht vertellen dat zo'n ding gewoonlijk driehoek wordt genoemd.

Pro-actief

Conventionele werkwijzen en notatiewijzen kunnen ook op een impliciete manier door de leerkracht in het leerproces worden ingebracht. Deze strategie, die je pro-actief kunt noemen, wordt in het eerder genoemde onderzoek rond het rekenrek spontaan door de leerkracht gebruikt. Een belangrijk onderdeel van de rekenreklussen bestaat uit het bespreken van de oplossingsstrategieën. In het algemeen is het zo dat de leerkracht de beschrijvingen van de leerlingen herhaalt om de hele klas bij het gesprek te betrekken. Om de communicatie te vergemakkelijken noteert ze de oplossingsmethoden op haar eigen wijze op het bord.

Bij de opgave 'acht erbij negen' komen de volgende notaties op het bord (fig.2, Whitenack, 1995).



figuur 2: acht erbij negen

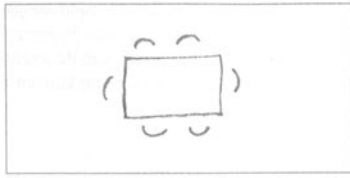
De eerste leerling (Ann) heeft de dubbele 'negen erbij negen' als referentie gebruikt. Lori weet dat het antwoord tussen 'acht erbij acht' en 'negen erbij negen' in ligt. John ten slotte, splitst negen om 'twee' te krijgen die je bij de 'acht' kunt doen.

Na verloop van tijd blijkt dat de leerlingen deze notatie hebben overgenomen en deze gebruiken om de eigen oplossingen te registreren. Het kan echter ook gebeuren dat leerlingen zo'n notatie niet overnemen - zoals in het hierna te bespreken voorbeeld van de tafels en stoelen het geval is. In feite is dat wat we (ook) willen, het besluit om een impliciet gesuggereerde notatie wel of niet te gebruiken dient immers de eigen beslissing van de leerling te zijn. Het zal echter duidelijk zijn dat de scheidslijnen hier dun zijn. Wanneer is een suggestie nog vrijblijvend en wanneer ontstaat de situatie die we willen vermijden: waar de leerling zich verplicht voelt deze suggesties over te nemen. Of de wiskunde in de onderwijsleersituatie werkelijk een bottom-up, of juist een top-down karakter heeft wordt bepaald door hoe de leerling het ervaart. Een nauwgezette monitoring is daarom noodzakelijk.

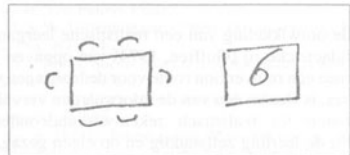
Het op het gezag van de leerkracht of juist op eigen gezag overnemen van door de leerkracht 'spontaan' gebruikte notaties en dergelijke, kan een onderdeel gaan vormen van het didactisch contract. Wanneer de leerlingen op een gegeven moment tot de conclusie komen dat er blijkbaar van ze wordt verwacht dat ze deze zaken van de leerkracht overnemen, is er een nieuwe norm ontstaan die het beoogde vrijblijvende karakter van de suggesties teniet doet. De leerkracht zal zich juist tot doel moeten stellen de norm te laten ontstaan dat de leerling alleen dingen overneemt die hij of zij zelf zinvol en handig vindt.

Pro-actief handelen is niet alleen van betekenis voor het introduceren van conventies. Het kan ook gaan om het ondersteunen van het reinvention proces. Een bekende manier om het leerproces pro-actief te beïnvloeden ligt in het kiezen van de opgaven. In die zin valt ook de opzet van een leergang hieronder. Via een reeks van opgaven kunnen de leerlingen op het spoor worden gebracht van specifieke oplossingsstrategieën.

De leerkracht kan daar echter nog wel het een en ander aan toevoegen door de wijze waarop de opgave wordt gepresenteerd of door de wijze waarop met de antwoorden wordt omgegaan. Een dergelijke pro-actieve rol van de leerkracht valt bijvoorbeeld te zien op de beeldplaat 'Basisvaardigheden rekenen-wiskunde' (Dolk & Uittenboogaard, 1989). Hier vertelt de leerkracht over de komende ouderavond. Hij weet dat er 81 ouders zullen komen en vraagt zich af hoeveel tafels hij moet klaar zetten. Aan elke tafel passen zes stoelen. De leerkracht laat dit zien met een plaatje (fig.3a). Daarna komt er nog een tafel bij, en de leerkracht zegt: Ik teken het maar even zo (fig. 3b).



figuur 3a: een tafel met zes stoelen



figuur 3b: nog meer tafels

Met de tekeningen zet de leerkracht de leerlingen op een vrijblijvende manier op het spoor van een oplossingsstrategie. Sommige leerlingen tekenen alle tafels met de stoelen, precies zoals de eerste tafel. Anderen gebruiken de kalere schematisering van een vierkantje met een zes erin. Weer anderen schrijven alleen maar zessen, of gebruiken een nog abstractere aanpak. Het tekenen van de tafels door de leerkracht nu, kunnen we labelen als proactief: de leerkracht intervenueert met de bedoeling het toekomstige handelen van de leerlingen te beïnvloeden. Het gevaar dat de leerlingen gaan denken dat het overnemen van impliciet gesuggereerde notaties en dergelijke de norm is, is in dit geval veel minder groot dan in het eerder getoonde geval van de conventionele somnotaties. De tafel-tekeningen zijn om verschillende redenen vrijblijvender: (a) omdat het probleem ook goed zonder deze symbolisering is op te lossen - hetgeen uit de antwoorden van de leerlingen blijkt, en (b) omdat deze symbolisering slechts een lokale functie hebben; ze vervullen geen rol in het aansluitende onderwijs.

Interactief

De derde manier om het verloop van het reinvention-proces te beïnvloeden is zoals gezegd via de interactie. Wat vanuit het perspectief van de ontwikkelaar (vanuit een observer's point of view) reinvention wordt genoemd zou vanuit het standpunt van de leerling (actor's point of view) progressief mathematiseren moeten zijn. Progressief mathematiseren veronderstelt dat de leerling verschillende oplossingsstrategieën tegen elkaar afweegt. Die afweging zou idealiter moeten sporen met een hiërarchie in oplossingsstrategieën die past bij het

beoogde heruitvinden. Dit betekent dat de leerling over passende criteria moet beschikken om de oplossingen met elkaar te kunnen vergelijken. In het algemeen worden dergelijke criteria niet geëxpliciteerd, maar om aan te duiden waar het om gaat kunnen we verwijzen naar kenmerken van de wiskunde als algemeenheid, exactheid, beknoptheid en zekerheid.

In realistisch reken-wiskundeonderwijs kan de context van de opgave vaak worden gebruikt als een referentiekader voor het beoordelen van oplossingen. Zaken als zekerheid, algemeenheid en efficiëntie kunnen hier op een natuurlijke wijze aan de orde komen. Er zijn echter ook situaties waar het niet zo vanzelfsprekend is welke de wiskundig meest waardevolle oplossingen zijn. Deze situatie doet zich bijvoorbeeld voor bij eenvoudige rekentaken die kunnen worden opgelost via uitputtend tellen.

Zeker in constructivistisch georiënteerd onderwijs waar veel nadruk ligt op een 'mathematical discourse', zijn er voor de leerlingen goede redenen om voor uitputtend tellen te kiezen. Het idee van een mathematical discourse is geënt op de discourse in de wetenschappelijke gemeenschap van zuiver wiskundigen, die volgens Lakatos (1976) wordt gekenmerkt door: 'conjecturing', 'justifying' en 'challenging'. Een 'mathematical discourse' in de klas veronderstelt dat de leerlingen hun eigen antwoorden in feite als te verdedigen hypothesen beschouwen en de 'hypothesen' van anderen, zo nodig ter discussie stellen. Simpele telstrategieën kunnen in zo'n discourse heel effectief zijn, omdat het strategieën zijn die je goed kunt verdedigen. Het argument van efficiëntie hoeft voor deze leerlingen niet doorslaggevend te zijn. Voor vlotte tellers is tellen een zeer efficiënte strategie. Toch zullen we willen bewerkstelligen dat deze leerlingen de uitgebreide telstrategieën loslaten en overgaan op meer perspectief biedende strategieën. Dit kan via het ontwikkelen van normen, waarin de ene strategie een hogere status wordt gegeven dan de andere.

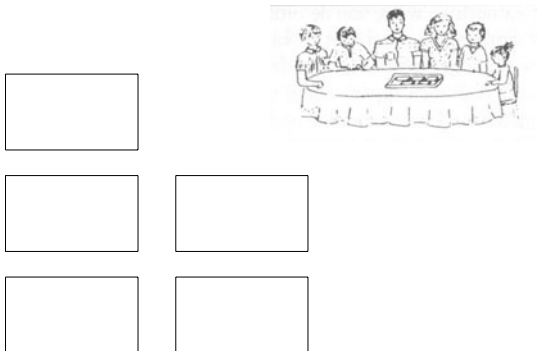
6 Socio-math norms

Dergelijke normen worden door Yackel en Cobb (in press) 'socio-math norms' genoemd. Onder socio-math norms worden normen verstaan die betrekking hebben op het vak, op opvattingen over wat wiskunde is. Net als ten aanzien van de sociale normen die betrekking hebben op de interactie, ontstaan er in een klas ook impliciete normen over hoe je opgaven interpreteert, aan welke criteria een goed antwoord moet voldoen, enzovoort (zie ook Gravemeijer, 1992)

Socio-math norms spelen in het realistisch reken-wiskundeonderwijs bijvoorbeeld een rol in de wijze waarop met contextopgaven wordt omgegaan. Van de leerlin-

gen wordt verwacht dat ze de context tot op zekere hoogte serieus nemen, maar er wordt tevens van ze verwacht dat ze een wiskundige bril opzetten. De leerlingen weten dat in het algemeen ook. Bij een opgave als die van figuur 4, is er niemand die zegt: 'Ga er maar snel eentje bijkopen' of 'Laat Mark en zijn vriendje maar samen delen'.

Marco vraagt of zijn vriendje Pim mag blijven eten. Moeder vindt het goed, maar dan is er wel één kaassoufflé te weinig. Hoe verdeel je vijf kaassoufflés over zes personen?



Marco's zusje, Nicolette, vindt het niet leuk dat Pim blijft eten. Zij is namelijk dol op kaassoufflés. 'Nu krijg ik maar $\frac{3}{4}$ deel van een kaassoufflé', zegt ze. Klopt dat wel?
Ja/Nee, want

figuur 4: kaassoufflés voor zes personen

Dergelijke socio-math norms kunnen ook betrekking hebben op wiskundig waardevolle en minder waardevolle oplossingen. Dit kan worden verduidelijkt aan de hand van het volgende voorbeeld, ontleend aan hetzelfde onderzoek (zie McClain, Cobb, Whitenack, 1995). In een activiteit die aan de introductie van het rekenrek vooraf gaat wordt een klein aantal stippen kort getoond via de overhead projector. De leerlingen moeten daarna vertellen hoeveel stippen ze hebben gezien en hoe ze dit aantal hebben vastgesteld. In deze context maakt de leerkracht na verloop van tijd onderscheid tussen verschillende oplossingsniveaus door expliciet te gaan vragen naar niet-tel-strategieën. Dit komt in de lessen op een heel natuurlijke manier naar voren, omdat de leerlingen om verschillende oplossingen wordt gevraagd. De leerkracht geeft op een gegeven moment aan alle telstrategieën als één strategie te beschouwen. Hierdoor krijgen de niet-tel-strategieën, als groeperingsstrategieën, een meerwaarde boven de tel-strategieën. Deze groeperingsstrategieën zijn didactisch weer belangrijk omdat ze de aandacht richten op getalrelaties, en daarmee niveauverhoging bevorderen.

Een interessant kenmerk van de socio-math norms is dat ze net als de social norms op een gegeven moment door de leerlingen zelf worden overgenomen. Idealiter ontwikkelt een leerling na verloop van tijd eigen normen over wat mathematisch waardevolle oplossingen zijn. Zelfs zulke ongrijpbare zaken als een elegante oplossing kunnen dan binnen het bereik van de leerling komen. Wanneer de leerlingen zo ver zijn kunnen ze hun eigen reinvention-proces sturen.

7 Besluit

Met de ontwikkeling van een realistische leergang die een didactische rij (Goffree, 1974) van opgaven bevat waarmee een reinvention route voor de leerlingen wordt uitgezet, is slechts één van de voorwaarden vervuld om te komen tot realistisch reken-wiskundeonderwijs, waarbij de leerling zelfstandig en op eigen gezag, wiskunde construeert. Om de gewenste interactie in de klas te kunnen realiseren is het noodzakelijk dat het didactisch contract van dien aard is dat de social norms in de klas passen bij de interactie die realistisch reken-wiskundeonderwijs veronderstelt. In het algemeen vraagt dit om een herziening van de geldende normen. Aan de invoering van nieuwe normen dient de leerkracht expliciet aandacht te besteden in concrete situaties. Bovendien moet de leerkracht ervoor zorgen, dat de leerlingen in de praktijk ervaren dat de nieuwe normen werkelijk gelden.

Naast de sociale normen die de interactie betreffen, zijn ook de zogeheten 'socio-math norms' in dit type onderwijs van belang. Gemeenschappelijke opvattingen over wat wiskundig gezien, elegantere of efficiëntere oplossingen zijn, vormen namelijk een krachtig instrument om de voortgang in een dergelijk open leerproces te ondersteunen op een manier die strookt met het adagium van het leren van wiskunde op eigen gezag. Met 'pro-actief' ingrijpen kan de leerkracht het progressief mathematiseren verder ondersteunen. Terwijl bovendien via pro-actief en retro-actief op zodanige wijze richting kan worden gegeven aan het onderwijsleerproces, dat de aansluiting met de gangbare wiskunde is verzekerd.

Noot

- 1 Dit artikel is een bewerking van een paper dat eerder werd gepresenteerd op het Symposium Leerkenmerken, didactisch handelen en (realistisch) rekenen, op de Onderwijs Research dagen 1995 te Groningen. Dit artikel is mede mogelijk gemaakt door subsidie van de National Science Foundation (grant nr. RED-9353587). De in het artikel verkondigde standpunten zijn echter geheel voor rekening van de auteur.

Literatuur

- Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, 9(3), 308-336.
- Cobb, P., E. Yackel & T. Wood (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(1), 2-33.
- Cobb, P., T. Wood & E. Yackel (1993). Discourse, Mathematical Thinking, and Classroom Practice. In: N. Minick, E. Forman, and A. Stone (Eds.). *Contexts for Learning: Social Dynamics in Childrens Development*. Oxford: Oxford University Press, 91-119.
- Cobb, P., A. Boufi, K. McClain & J. Whitenack (in press). Reflective discourse and collective reflection. *Educational Studies in Mathematics*.
- Desforges, Ch. & A. Cockburn (1987). *Understanding the Mathematics Teacher, A Study of Practice in First School*. London: The Falmer Press.
- Dolk, M. & W. Uittenbogaard (1989). De ouderavond. *Willem Bartjens*, 9(1), 14-20.
- Elbers, E. (1988). *Social context and the child's construction of knowledge*. Utrecht.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.
- Jaworski, B. (1994). *Investigating Mathematics Teaching: A Constructivist Enquiry*. Basingstoke: Falmer Press.
- Gravemeijer, K. (1992). Socio-constructivisme en realistisch reken-wiskundeonderwijs. *Panama Cursusboek 10*, Utrecht: Freudenthal instituut, 50-59.
- Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: Cdß Press.
- Goffree, F. (1974). Doorkijkspiegelingen. *Wiskobasbulletin*, 3, 474-495.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lehrer, R. & C. Jacobson (1995). *Classical and Classroom views of Development of Spatial Thinking*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association in San Francisco.
- McClain, K., P. Cobb & J.W. Whitenack (1995). *An Analysis of the Teachers Proactive Role in Initiating and Guiding the Development of Productive Mathematical Discourse*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association in San Francisco.
- Streefland, L. (1988). *Realistisch breukenonderwijs*. Utrecht: OW&OC.
- Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6, 69-118.
- Whitenack, J. W. (1995). *Modeling, mathematizing, and mathematical learning as it is situated in the classroom microculture*. Vanderbilt University (unpublished doctoral dissertation).
- Yackel, E., P. Cobb & T. Wood (1991). Small Group Interaction as a Source of Learning Opportunities in Second Grade Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 390-408.
- Yackel, E. & P. Cobb (in press). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Atonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*.