

Een geval van reflectief denken in ontwikkeling met verhouding als paradigma

L. Streefland
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

1 Plaatsbepaling

Wie de huidige internationale publicaties over wiskundeonderwijs in kaart wil brengen zal de vage contouren van een tweestromenland ontwaren. Er verschijnen veel artikelen die - in algemene bewoordingen gesteld - kwesties van uiteenlopende aard aansnijden. Er zijn er ook die inhoudelijk diep graven en dichtbij de praktijk en haar bedrivers blijven. De eerste stroom zwelt aan, de tweede lijkt zo hier en daar zelfs al op te drogen, als we niet oppassen. E. Wittmann uit Dortmund, ook in Nederlandse kringen van het wiskundeonderwijs geen onbekende, zond in 1995 nog een duidelijk signaal uit, dat schrijven over wiskundeonderwijs zonder de inhoud, of, om muziek in deze als metafoor te gebruiken, verslag doen van een concert onder het voorbijgaan aan de muziek, het grootste euvel is dat onze discipline bedreigt. In 1996 herhaalde Wittmann zijn boodschap op de achtste Internationale Conferentie voor Wiskunde Onderwijs (ICME-8) in Sevilla, Spanje. De stroom algemene artikelen groeit gestaag en het moge tegenstrijdig klinken, het lijkt alsof de auteurs, overmand door watervrees voor het concrete, praktijknabije, het ruime sop van de algemeenheid kiezen.

Ter illustratie geef ik een recente ervaring: ik krijg een concept-artikel over algebraïsch redeneren bij kinderen van tien tot zestien jaar voorgelegd. Verwachtingsvol begin ik er aan, maar al ras slaat de twijfel toe en grijpt de teleurstelling om zich heen. Geen mooie creatieve ontwerpen, die kinderen aan het algebraïsch produceren en denken zetten tref ik er in aan, maar wat mij betreft slechts gemeenplaatsen over generaliseren langs deductieve weg, resulterend in logisch valide argumenten en - de tegenhanger kan niet uitblijven - generaliseren volgens inductief spoor, uitmondend in empirisch plausible argumenten. Tja... Geen echt slecht verhaal en op de bekende manier onderbouwd met statistisch onderzoek, maar iedere nuance in het mogelijke, algebraïsche redeneren van kinderen uit genoemde leeftijdsgroep, lijkt op voorhand weggegeneraliseerd te worden en wat rest is iets dat weinig bijdraagt aan wat we al wisten over generaliseren. Dit weinig productieve voorbeeld over generaliseren

staat ook model voor allerlei andere kwesties in verband met het leren van wiskunde, zoals reflectie bijvoorbeeld. In dat verband zou ik kunnen beginnen met wat Piaget en anderen erover gezegd hebben. Dat doe ik echter niet, omdat ik dan in de brede stroom zou vallen, terwijl ik vanwege mijn breedwatervrees beter kan proberen de kleine stroom wat gaande te houden. De algemeenheden bewaar ik dus maar voor later! Bovendien lijkt het van nabij bekijken van concrete situaties, waarin een kind echt iets leert en waarin reflectie zich (wellicht) voordoet of ontstaat, veelbelovender en productiever.

Ook Piaget begon dáár overigens zijn onderzoek naar de cognitieve ontwikkeling, namelijk met het observeren van kinderen, in de eerste plaats die van hemzelf. Freudenthal op wiens werk ik in dit en het komende artikel nog stevig zal steunen, volgde Piagets voorbeeld, al waren het in dat geval vooral zijn kleinkinderen die hij observeerde. (Zijn eigen kinderen moeten overigens in dit opzicht eveneens genoemd worden (zie Goffree, 1993)).

Een ander verschil tussen Piaget en Freudenthal is nog dat de laatste vooral geboeid was door kinderen die wiskunde leerden, terwijl Piaget veel meer de cognitieve ontwikkeling op het oog had. In hun belangstelling voor lerende en zich ontwikkelende kinderen staan zij niet alleen. Ik denk in dit verband bijvoorbeeld ook aan de prachtige observaties van Sander die A.C. Vuurmans over een reeks van jaren vastlegde (Vuurmans, 1995). Zij typeert zijn prille wiskundige groei treffend. Ook ik zal Piagets, Freudenthals en haar voorbeeld volgen. Ik gebruik dus observaties, die ik met name van mijn zoon Coen tussen 1975 en 1985 verzamelde. Volgens mij heeft dit materiaal nog niets aan (actualiteits)waarde ingeboet.

Hier is een voorbeeld:

'Coen (5;2) vraagt naar onze vakantiebestemming, terwijl wij op weg zijn naar Engeland. Wanneer hij deze bestemming hoort, vraagt hij: "Kunnen ze mij daar dan nog wel verstaan?"'

Is dit een voorbeeld van reflectie? Is het misschien reflectie door anticiperen of anticipatie door reflectie? Wat is dit eigenlijk? Volgens Freudenthal (1979) is dit geen reflectie. Hij zou het vooruitgrijpen van Coen echter wel als opmerkelijk hebben gekwalificeerd. En wat

te zeggen van de volgende observatie:

‘Coen (iets ouder dan vier jaar) wijst bij de slager naar een prijskaartje. “Wat staat erop?” Zijn moeder: “Eén-acht-en-vijftig.” Hij: “Waarom zeg je één-acht-en-vijftig? Op het kaartje staat één-vijf-acht!”’

Reflectie? Wie weet? Want stel dat het hem al eerder was opgevallen dat de notatie van getallen en hun uitspraak niet met elkaar in overeenstemming zijn en dat dit hem aan het denken heeft gezet. Misschien stelt hij daarom wel zijn inleidende vraag met de bedoeling antwoord te vinden op de vraag waarom het hem in feite te doen was, namelijk dit (cognitieve) conflict te beslissen. Maar... is dit niet te veel veronderstelling en interpretatie? Wellicht. Laat ik daarom een overtuigender voorbeeld geven:

‘Coen, veel ouder inmiddels (8;11) vraagt zijn vader zoals gewoonlijk in die tijd om een som. Het wordt dit keer de verkiezing van de voorzitter en de penningmeester van een jongensclub van vijf leden die ruzie dreigden te krijgen over de kas. Op hoeveel manieren kan dit gebeuren? Na een lichte aarzeling brandt hij los: Met iene-miene-mutte, door aftellen, met raad mijn getal, door lucifers trekken... Vader: Stel het gebeurt met iene-miene-mutte. Welke tweetalen kunnen dan winnen? Hij: Hoe heten die vijf jongens? Vader: Peter, Dirk, Henk, Jaap en Karel. Hierna begint hij tamelijk systematisch zijn oplossing te construeren.’ (Streefland, 1980).

Merk op dat Coen in eerste instantie in de gestelde kwestie geen combinatorisch telprobleem ziet. Terecht! Er was blijkbaar onvoldoende garantie dat zijn vaders context voor het probleem ook de zijne was. Waarom dan toch zulke dubbelzinnige vragen gesteld? Uit kortzichtigheid! Maar dit terzijde. Het is duidelijk dat Coen hier om de namen van de jongens vroeg, om de kwestie naar zijn uiteindelijke bedoeling aan te pakken en op te lossen. Hij moet voorzien hebben, dat hij een hulpmiddel nodig had om de oplossing die in hem opkwam handig te kunnen organiseren.

Ik zou dit - voorlopig - reflectie willen noemen. Maar beantwoordt dit aan de meer algemene theoretische trekken die erover te berde gebracht zijn, door Piaget en volgers? Dat moet ik nog in het midden laten, maar op voorhand zijn er met een beetje goede wil wel trekjes van overeenkomst aan te wijzen. Ik vind het echter verstandiger om eerst nog wat concreet materiaal te verzamelen, voordat ik me ga verliezen in definities en theoretische beschouwingen. Bovendien zou ik me niet zo zeer door Piaget als wel door Freudenthal terzijde laten staan. En ook over zijn denkbeelden aangaande reflectie heb ik nog nauwelijks iets gezegd.

Laten we het er voorlopig - met het gegeven voorbeeld in het achterhoofd - maar op houden dat het handelen, zowel materieel als mentaal in beschouwing genomen wordt, met het oog op het vaststellen van bepaalde kwaliteiten ervan en daarna worden déze weer in beschouwing genomen met het oog op de kwaliteiten dáárvan.

De observatie toont, dat ook op opkomend mentaal handelen kan worden vooruitgegrepen met het oog op het stroomlijnen ervan. We moeten hoe dan ook enig houvast hebben om te kunnen gaan letten op tekenen van reflectie in het gedrag van Coen en vooral ook op het ontstaan en de groei ervan. Dit lijkt me trouwens belangrijker dan reflectie precies en heel afstandelijk te kunnen definiëren. Dit geldt nog sterker voor de vraag of reflectie aangemoedigd kan worden, dat wil zeggen of er condities opgespoord kunnen worden waaronder reflectie ontstaat en zich ontwikkelt.

De analyse van het beschikbare materiaal staat dus voorop. Daarmee maken we in deze bijdrage een begin. Het betreft de ontwikkeling van het verhoudingsbegrip bij Coen. Enig inhoudelijk houvast lijkt in deze geen overbodige luxe. In de volgende bijdrage volgen we zijn ontwikkeling verder, tot we na zijn brugperiode in het voortgezet onderwijs het spoor bijster raken. Met een reflectie over reflectie, ook in meer algemene termen, wil ik deze bijdragen daarna afronden.

2 Greep krijgen op verhouding

Hoe het begint

In het algemeen is een kind al op heel jonge leeftijd in staat gelijkvormige objecten of situaties te herkennen, ongeacht de verschillende schalen waarop deze gemodelleerd of afgebeeld zijn. Zoals in de volgende paragrafen nog zal blijken, is het criterium om situaties verhoudingsgewijs te vergelijken het (niet-) gelijkwaardig zijn van de in het spel zijnde verhoudingen in (niet-) gelijkvormige situaties, waarin bedoelde objecten dan weer figureren. Met betrekking tot deze bekwaamheid, die, zoals gezegd, vroeg aanwezig is in kinderen, stelt Freudenthal (1984, pag.204):

‘Dat kinderen gelijkheid en het groter en kleiner zijn van objecten vroegtijdig herkennen, kan voor geen twijfel vatbaar zijn, evenmin dat ze gelijkvormigheid als een operationele equivalentie hanteren. Ik ga zelfs zover, te stellen dat congruenties en gelijkvormigheden ingebouwd zijn in dat deel van ons centrale zenuwstelsel, dat de optische percepties verwerkt. Het onverwijld kunnen heridentificeren van objecten na draaiing (van object of lichaam) en na afstandswijziging veronderstelt in het centraal zenuwstelsel als het ware een computerprogramma voor het elimineren van dit soort afbeeldingen - hoe zulk een programma eruit zou kunnen zien, is voor mij een groot raadsel, zijn existentie, waaraan ik niet twijfel, iets als een wonder.’

Ik ben er niet zeker van of andere auteurs op vergelijkbare manier door het zelfde verschijnsel worden getroffen en het dus ook kwalificeren als een wonder. Feit is in ieder geval wel dat Freudenthal in deze kwestie niet alleen staat. Zowel Dodwell als Bryant, om er twee te noemen, staan aan zijn kant, getuige:

'The main point is, that we have here an elaborate and refined system for coding contour elements which is present in its main essentials at birth and must therefore be built-in as a major feature in the visual system.' (Dodwell, 1971, pag.182).

'... it seems very likely, that young children can take in and remember size ratios.' (Bryant, 1974, pag.96)

Dit betekent dus, dat we kunnen beginnen met aan te nemen dat een jong kind modellen en tekeningen herkent als beelden van objecten zoals autootjes, boten, dieren enzovoort. De schaal doet er niet toe, net zo min als het gebruik van verschillende schalen naast elkaar, zolang ze de verhoudingen die in het spel zijn maar respecteren en niet verstoren. Helaas bezit ik geen observatiemateriaal van Coen om deze beweringen te staven. Het is echter wel voorhanden in de reeds genoemde bronnen, maar bijvoorbeeld ook in Fischbein (1970), Fuson (1978) en Martin (1978). Overigens valt het buiten de bedoelingen van dit artikel hierover verder in detail te treden. Bovendien wordt het tijd het leerproces voor verhoudingen dat ik op het oog heb nauwgezet met u te gaan volgen. Ik zal daarbij de beschrijving indelen naar observaties en annotaties (analyses) om zo nu en dan ruimte te maken voor een bereflecteerde tussenstand. Het gaat dus in eerste instantie - het zij nogmaals benadrukt - om symptomen van reflectie en de groei van dit fenomeen. Het voertuig van zowel Coens als mijn denken is echter verhouding.

Het meester worden van verhouding

Rijkdom

Volgens Joseph Schwartz (1993) gaat het in wetenschap om allerlei zaken, maar als het op de inhoud aankomt toch eerder om verhouding(en) dan om getallen bijvoorbeeld. Dit geldt wat mij betreft niet alleen de volwassen wetenschap, wat men hieronder ook moge verstaan. Verhouding kan ook de wetenschap doortrekken die een opgroeiend kind zich eigen maakt, terwijl het zijn wereld meester wordt. Een nagenoeg onbeperkte rijkdom aan gebeurtenissen, ervaringen en verschijnselen vraagt erom georganiseerd en gestructureerd te worden onder het hoofd verhouding (in wording!).

Op grond van de aanname dat een kind al op jonge leeftijd modellen en tekeningen herkent als afbeeldingen van objecten, ongeacht de toepassing van verschillende schalen, volgt dat verhouding bij gelijkvormigheden een belangrijk domein van ervaringen voor het jonge kind kan zijn, ja zelfs móét zijn. Echter, er is een lange weg te gaan van gevoel krijgen of oog hebben voor gelijkvormigheid naar het vormen van het mentale object verhouding, of - nog meer vooruitstrevend - naar het bevatten ervan als volwaardig operationeel, dat is toepasbaar, begrip.

De meergenoemde modellen en tekeningen als afbeeldingen van objecten komen voort uit afbeeldingen (als meetkundige transformaties) die verhoudingen in hun

waarde laten. Freudenthal (1984, pag. 205-206) noemde enkele tussenniveaus op de zojuist geschetste leerweg, namelijk:

- verhoudingsgetrouwheid of -ongetrouwheid van afbeeldingen zien;
- verhoudingsgetrouwe afbeeldingen maken;
- naar aanleiding van conflicten bij het maken van verhoudingsgetrouwe afbeeldingen beslissingen nemen;
- criteria voor verhoudingsgetrouwheid, zoals:
 - behoud van lengtegelijkheid;
 - behoud van congruentie;
 - behoud van interne verhoudingen;
 - constantie van externe verhouding;
 - behoud van hoeken;
 - operatief hanteren;
 - formuleren;
 - in verband met elkaar brengen;
 - over het noodzakelijke en voldoende zijn van dergelijke criteria beslissen.

Dit is maar een fragment uit de didactische fenomenologie voor verhouding die Freudenthal ontwikkelde. Men kan zich daarbij afvragen hoe een kind ooit in staat kan zijn zijn werkelijkheid met behulp van verhouding te organiseren om de passende verschijnselen te gaan beheersen, wanneer de bron dermate overvloedig vloeit. Hoe zal het bovendien ooit mogelijk zijn het leerproces van een kind te beschrijven wanneer de materie zo complex is? Wat te doen - en dit is het overeenkomstige probleem op uw en mijn niveau - met een groot aantal observaties van verhoudingsgebeurtenissen in het leven van een kind, die zijn ontwikkeling in deze van een klein decennium omvatten? Daarbij gaat het vooral om spontane uitingen binnen die gebeurtenissen, die het verantwoord maken om te spreken van een écht leerproces en in geen geval van een *onderwijs* leerproces. (Zou hiermee trouwens het verband aangegeven zijn tussen ontwikkeling en (zuiver) leren?)

Het gaat dus om leren in zijn *puurste* vorm. Het spreekt vanzelf dat er keuzen gemaakt moeten worden en dat er gereedschap voor de organisatie ervan nodig is, om greep te kunnen krijgen op de essentiële trekken van het beoogde leerproces.

Waar het om verhouding gaat zal ik proberen de beschikbare observaties in te delen naar 'verhouding en gelijkvormigheid', dit houdt ook in 'vergroten en verkleinen' met de effecten ervan op oppervlakte en inhoud, en, bovendien, 'dichtheid' en 'lineariteit'. Wat het laatste domein aangaat bedoel ik zoiets als '(grafische) verhoudingsconstantie'. Binnen deze hoofdcategorieën wil ik dan accenten plaatsen bij 'meten', 'normeren of standaardiseren', 'schatten' en 'het gebruik maken van een bemiddelende verhoudingswaarde' en ten slotte 'het gebruik maken van toepasselijke taal' als ook bronnen voor 'onjuist, additief redeneren'. De lezer dient er zich echter van bewust te zijn - ik benadruk dit nog een keer - dat verhouding in alle genoemde facetten

lengte van de af te beelden menselijke figuur wordt toegepast. Hij beziet dus het resultaat van de toegepaste afbeelding kritisch.

Deze analyse laat zien welk een rijkdom de voorbeelden bevatten, maar tegelijk ook dat er heel wat kan omgaan in een lerend kind dat in interactie is met zijn omgeving. De varianten van shifting die in bovenstaande voorbeelden vervat zijn, heb ik eerder in navolging van Freudenthal (1991) in meer algemene zin beschreven, geïllustreerd en enigszins uitgebreid. Ik volsta hier met een verwijzing daarnaar (Streefland, 1992).

Ten slotte merk ik, wat dit gedeelte betreft nog op, dat de situaties die Coen ontmoette blijkbaar voldoende uitdagend voor hem waren ten aanzien van het voltrekken van de beschreven afbeeldingen dat hij hierop inging en, bovendien, dat dit kon gebeuren zonder dat de toegepaste methode (volledig) bewust was. (Ook de tussenliggende observaties die ik niet vermeldde, weerspiegelen dit). Door herhaalde ervaringen kan de toegepaste methode blijkbaar wel volledig tot het bewustzijn doordringen. Daardoor was dit lerende kind - in het geval van de Martinatoren - in staat de omslag te voltrekken van *na-beeld* naar *voor-beeld*, van *model van ...* naar *model voor ...* met betrekking tot het toepassen van gelijkvormigheid als operationele equivalentie.

Dit kan zich blijkbaar op een (nagenoeg) zuiver kwalitatieve manier voltrekken. (In dit opzicht kan de duizend meter als hoogte voor de toren niet al te serieus genomen worden als precieze maat. Deze lijkt eerder te fungeren als referentiemaat voor de communicatie dan dat hij echt letterlijk zo bedoeld is).

Zoals uit de observaties tot nu toe blijkt, wordt de vorming van verhouding dus gegrondvest op het vergelijken van lengten en op het omgaan met afbeeldingen die deze verhoudingen in hun waarde laten. Een volgende stap ligt in de constructie van afbeeldingen tussen situaties en het beslissen over het al dan niet verhoudingsgetrouw zijn ervan. En, voor het geval ze niet verhoudingsgetrouw zijn, komt daar het vaststellen van een cognitief conflict en (eventueel) het beslechten daarvan nog bij. Er volgen nu enkele observaties die dit laten zien. Ik vat ze kort samen omdat ze al eerder werden gepubliceerd (Van den Brink & Streefland, 1979).

Observaties

Scheepsschroef

Coen (7;4) heeft het over scheepsschroeven. Hij vraagt ten slotte:

C: Hoe groot is de schroef van een zeeschip?

Vader: Hij past niet in je kamer (Deze meet ongeveer drie bij vier meter).

C (na enig stilzwijgen): Dat klopt, want in mijn energieboek was een boot met zo'n schroef (hij geeft ongeveer drie cm aan tussen duim en wijsvinger) en een man zó (nu geeft hij ongeveer één cm aan).

Orca the killer whale

Episode 1:

Coen (6;2) bezoekt het dolfinarium in Windsor Park (Engeland) en geniet van de show met een orca van ongeveer 6 meter.

Episode 2:

Coen (8;0) heeft desgevraagd kritiek op de filmposter van *Orca the killer whale*.

C: Die walvis moet kleiner! Toen we in Engeland waren hebben we een orca gezien die maar zo groot was als drie mannen.

Episode 3 (4 dagen later):

Opnieuw bezoekt Coen een dolfinarium met een orca (Harderwijk). Desgevraagd vindt hij de Windsor-orca het grootst, omdat de laatste volgens hem maar zo'n drie-een-halve meter was.

Vader: Herinner je je nog hoe groot die in Engeland was?

C (beslist): Die was zo groot als drie à vier mannen. (Hij weigert om nog over zijn vorige schatting van drie mannen te praten).

Annotaties

In het geval 'scheepsschroef' heeft Coen bewust een verhoudingsgetrouwe afbeelding toegepast. Het is echter een kwestie van *constructie* van de (meetkundige) afbeelding, want origineel en beeld zijn beide voorhanden, hoewel het beeld eerst nog door het geheugen moet worden opgeroepen. De afbeelding is gebaseerd op de *vergelijking* van de (voorgestelde) afmeting van de schroef van een zeeschip (met de grootte van de kamer als *referentiemaat*) met de grootte van een man (zijn vader) en het beeld van een herinnerde illustratie in een boek op veel kleinere schaal. Een mens bemiddelde hier dus eveneens als maat. Voor de constructie van de afbeelding was het nodig dat de *gelijkheid* van de beschreven verhoudingen als zodanig werd herkend. Uitgedrukt in termen van shifting komt deze observatie neer op: het verplaatsen van ware afmetingen naar sterk verkleinde (of omgekeerd!), daarbij de verhouding scheepsschroef-man meenemend, met het oog op het nagaan van het antwoord op zijn vraag en met als bijkomstigheid het vaststellen van de juistheid van de bewering van zijn vader.

Bij dit alles dient echter een niet onbelangrijke kanttekening gemaakt te worden, namelijk dat Coen vertrouwd was met het begrip scheepsschroef. Hij had eerder met belangstelling diverse voorbeelden aanschouwd, echt en op plaatjes. Bovendien bezat hij zelf een bootje (30 centimeter) compleet met elektromotor en schroef. Daardoor was het begrip scheepsschroef voor hem voldoende gespecificeerd om de kwestie van de schroef van een zeeschip onder ogen te kunnen zien en deze in zijn ervaringen te integreren. Blijkbaar is dit een *nodige voorwaarde* om een verhoudingsgetrouwe afbeelding als beschreven te kunnen voltrekken.

Twee maanden later bleef hij het echter houden op een krielhaantje toen hem naar de afmetingen van een torenhaan werd gevraagd. Hij toonde zich heel verrast over de ware grootte van bijvoorbeeld, één meter. Wellicht was zijn mentale object 'haan' niet toereikend om over

deze kwestie te beslissen. Bovendien betrof het een zuiver gedachten experiment zonder dat toren met haan nabij waren. Tenslotte werkte de term 'torenhantje' nog als afleider. Er waren dus genoeg storende elementen aanwezig om de schatting van de grootte van een torenhaan te doen mislukken. Wat deze voorbeelden in ieder geval duidelijk maken is, dat de wiskunde van verhouding en evenredigheid de kijkwereld van het kind helpt organiseren. Dus hoe rijker en diverser de ervaringen daarin zijn, des te rijker zal het wordende inzicht op zo'n voedingsbodem groeien en bloeien.

Brousseau (1976, 1990) gebruikt 'milieu' in plaats van 'context' als belangrijk kernbegrip in zijn theorie over (leer) situaties. In het geval van de torenhaan bijvoorbeeld, blokkeerden Coens banden met het milieu zijn verdere ontwikkeling op het gebied van verhoudingsgetrouwe afbeeldingen en wat je ermee kunt doen. Dit laat zien wat Brousseau (1976) in deze benadrukte:

'The interactions of the student with the milieu are fundamental.'

Tot dusver waren alle vergelijkingen die Coen voltrok puur kwalitatief. Daarop was ook het ordenen van (grove) afmetingen gebaseerd (onrecht, vissen). In de orca-observaties wordt opnieuw de lengte van een mens als bemiddelende, natuurlijke referentiemaat gebruikt om te kunnen vergelijken, maar dit keer wordt het schatten of meten bekroond met een numeriek resultaat: '... maar zo groot als drie mannen.' Deze geconstrueerde *verhoudingswaarde* ondersteunt de constructie van de afbeelding tussen de situatie als ervaren in Windsor en de situatie als afgebeeld op de filmposter. De *ongelijkheid* van de verhoudingen wordt herkend en daarom wordt de afbeelding tussen beide scènes als *niet-verhoudingsgetrouw* beoordeeld. Het ontstane cognitieve conflict wordt echter bezworen en een correctie van de filmposter voorgesteld als oplossing daarvoor ('*Die walvis moet kleiner*'). Na de derde ervaring (Harderwijk) dienen de zaken mentaal gereorganiseerd te worden en dus doet Coen dat. Op grond van de laatste verhoudings(waarde) (orca-man twee tot één) *stelt* hij zijn oordeel over de verhouding orca-man voor Windsor bij: '*de orca was drie à vier mannen*'.

Dit is een onthullend rijtje van observaties, nietwaar? Zij laten zien dat de wiskundige theorie voor verhoudingen zoals deze zich in Coen ontwikkelt, wordt bijgesteld en nader gespecificeerd *in actie*, of anders gesteld, dat deze (persoonlijke) theorie gedefinieerd wordt:

'... by the set of conceptions, previous choices that this knowledge rejects, the errors that it helps to avoid ... the economy it allows for, the formulations it puts into question.' (Brousseau, 1976; geciteerd uit Sierpinska, 1995, pag.7)

Het lijkt erop dat, zolang zich geen nieuwe ervaringen hebben voorgedaan, de verhouding orca-man vaststaat,

als het ware geeneraliseerd is over slechts één ervaring. Dit houdt bijna twee jaar stand, voordat aanpassing ervan plaatsvindt. Bovendien blijkt, dat dankzij de gevarieerde ervaringen de jongen in staat is de afmetingen van de Windsor-orca met meer precisie te vatten dan na slechts die ene ervaring. Dit getuigt van de ontwikkeling van een wiskundige attitude waarin plaats wordt ingeruimd voor een dergelijke kwaliteit of strategie. Er zijn trouwens meer van dergelijke kwaliteiten die de moeite van het herkennen en onderscheiden (voor het wiskundeonderwijs) waard zijn (zie bijvoorbeeld Freudenthal, 1991).

Ten slotte nog de kwestie van de 'shifting'. Daarmee kan het orca-verhaal als volgt gekwalificeerd worden: van poster naar door het geheugen gereproduceerd mentaal beeld, terwijl wordt omgezien naar de poster en de relevante verhoudingen in beschouwing worden genomen, terwijl de bemiddelende verhoudingswaarde orca-man (is drie), van het mentale beeld naar de poster wordt meegenomen.

In het tweede deel gaat het om shifting van de ervaring in Harderwijk naar die in Windsor, waarbij de nieuw ervaren verhoudingswaarde orca-man (is twee) wordt overgedragen. Dit gebeurt om de Windsor-situatie te heroverwegen en om hierbinnen de precisie van de verhouding orca-man te verhogen van drie naar drie à vier. Dit is dus een nogal complex proces gelet op de leeftijd van de jongen toen.

De gebeurtenissen zoals tot dusver geanalyseerd laten zien dat verhouding machtig gereedschap is om situaties te vergelijken binnen de context van gelijkvormige afbeeldingen, in eerste instantie zonder dat er een (geëxpliciteerd) getal aan te pas komt. Later gaan zulke verhoudingen op basis van meten en schatten hun bemiddelende rol met toenemende precisie spelen. Er dient, tenslotte, onderscheid gemaakt te worden tussen *interne* en *externe* verhoudingen.

Laten we eerst constante snelheid als voorbeeld nemen: *intern*: de afstanden verhouden zich als de tijden, *extern*: de verhouding van afstand en tijd is constant.

Dit onderscheid vindt onder andere grond in de strategie van vergelijken van verschillende objecten (en hun afmetingen) binnen of tussen de context-situaties waarin ze zich voordoen. Het vergelijken van orca's met mannen bijvoorbeeld, verwijst naar extern, hoewel het voor beide om dezelfde grootte, namelijk lengte gaat. Dit betekent dus blijkbaar dat het wiskundige onderscheid tussen intern en extern zich (waarschijnlijk) uit zo'n contextuele bron kan ontwikkelen in de lerende zelf (zie ook Van den Brink en Streefland, 1979).

Dergelijke zuivere en onbewerkte contexten kunnen dus blijkbaar de blauwdrukken in zich dragen van stukjes wiskunde die daaruit kunnen worden ontwikkeld. Bovendien kunnen dergelijke contextbronnen kinderen voor uitdagingen plaatsen en hen inspireren tot gedrag

zoals beschreven, namelijk op een duidelijke, het gezonde verstand aansprekende manier.

Tussenstand

Gelet op de inhoud van het tot nu toe beschreven leerproces gaat het om:

- de (bewuste) toepassing van gelijkvormigheid als operationele equivalentie, wat betekent
- gelijkvormigheid als een verhoudingsgetrouwe afbeelding behandelen.

Dit proces wordt ondersteund door:

- kwalitatief meten (van lengten en afstanden) en schatten;
- gebruik maken van bemiddelende referentiematen;
- verhoudingen samenstellen en vergelijken;
- beslissen over de (on)gelijkheid van verhoudingen op basis van (niet-) gelijkvormigheid en (niet-) congruentie;
- verhoudingswaarden vaststellen en deze bij het vergelijken van situaties als bemiddelaars toepassen.

Veel, zo niet alle aspecten als geciteerd uit Freudenthals didactische fenomenologie van verhoudingsgetrouwe afbeeldingen doen zich op de een of andere manier voor. In dit opzicht grijpt zijn analyse op leerprocessen vooruit. Op zichzelf is dat niet verrassend, omdat het analyseren van leerprocessen op zijn beurt tot de bronnen van de didactische fenomenologie behoort, dan wel het anticiperen op hoe dergelijke leerprocessen zich zouden kunnen voltrekken.

Bovendien is er ook nog het meta-cognitieve perspectief naar blijkt uit de beschrijving van de zich voordoende mentale operaties (onder andere de bewuste vormen van 'shifting'). Deze waren als het ware werkzaam op de elementen uit het inhoudelijke (conceptuele) domein, dat wil zeggen de wiskunde in wording van de afbeeldingen en verhoudingen. Er is sprake van een geleidelijke overgang van een puur kwalitatieve benadering naar een kwantitatieve en ook van groeiend bewustzijn met betrekking tot de verschijnselen en de wiskunde waarmee deze georganiseerd en beheerst kunnen worden. Coen kon - en dit was een buitenkansje - zelfs betrappt worden op de omslag van een 'model van'- naar een 'model voor'-benadering. Behalve bij de kwestie van de orca op de filmposter ging het steeds om spontaan gedrag. Dit betekent overigens niet dat de omgeving niet af en toe ingreep in Coens leerproces. Integendeel! Er waren bijvoorbeeld nogal wat kwesties - overigens op verzoek van Coen te berde gebracht door zijn vader - die de constructie van verhoudingen op twee manieren behelsden, namelijk door (de afmeting van) elk van beide objecten als natuurlijke maat te nemen voor het over-en-weer bepalen van de verhoudingswaarden. Dit veroorzaakte naar u zich kunt voorstellen nogal wat problemen, doordat er zich breuken in de ver-

houdingswaarden gingen voordoen.

Een voorbeeld:

Nadat Coen (7;1) had beslist dat er twee van 'zulke bomen' nodig zijn om de hoogte van een lantaarnpaal te krijgen, flapte hij er 'Nul!' uit op de vraag: 'En hoeveel lantaarnpalen zijn dan net zo hoog als zo'n boom?' Enigszins beschaamd verbeterde hij zich tot 'Een halve' toen hem de hoogte van nul lantaarnpalen getoond werd. (Streefland, 1979)

Deze observatie laat zien dat het conflict ter plekke kon worden beslist en zo iets gebeurde vaker op soortgelijke wijze. Overigens is deze activiteit van het over-en-weer meten om verhoudingswaarden vast te stellen blijkbaar nodig om ook op schaal (door vergroting) te kunnen afbeelden in plaats van door verkleining. Het opblazen gebeurt dan omwille van het accentueren van verschillen. Coen deed dit bijvoorbeeld eens, toen hij commentaar had op een observatie van een vogel door zijn vriend. Hij verschilde met hem van mening over welke het was. Hij (bijna tien) liet al gebarend vergrote afmetingen zien, om het verschil in lengte van de staarten van beide vogels te benadrukken. Overigens tekende zijn vader hierbij nadrukkelijk bezwaar aan tegen zijn demonstratieve gedrag.

'Waarom vertel je het niet wat preciezer dan alleen met gebaren? Je kent toch getallen en je kunt toch meten! Coen: Oh, eh, ..., nou, als de staart van een merel een halve meter is (hij gebaart nog steeds) dan is die van een spreeuw maar een kwart meter.'

In publicaties over leren is al vaker gesteld, dat het handelen in het denken wordt voortgezet. Ik ben ervan overtuigd, dat dit ook omgekeerd werkt, namelijk dat het denken noodzakelijkerwijs het handelen ondersteunt. Het laatste voorbeeld weerspiegelt dit en ook dat ingrijpen van buitenaf soms nodig is voor de verhoging van het gebezigde (taal)niveau.

Literatuur

- Bauersfeld, H. (1983). Subjective Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In: H. Bauersfeld, H. Bussmann, G. Krummheuer, J.H. Lorentz & J. Voigt (Eds.). *Lernen und Lehren von Mathematik. IDM - Series Untersuchungen zum Mathematikunterricht*, Vol. 6, Köln: Aulis Verlag Deubner, 1-56.
- Bauersfeld, H. (1994). Theoretical Perspectives on Interaction in the Mathematics Classroom. In: R. Biehler, R.W. Scholz, R. Strässer & B. Winkelmann (eds.). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 133-147.
- Brink, F.J. van den & L. Streefland (1970). Young children (6-8) Ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics*, 10, 403-420.
- Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Comptes Rendus de la Rencontre de la C.I.E.A.E.M.*, Louvain-la-Neuve, Aôut.
- Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 309-336.
- Bryant, P. (1974). *Perception and Understanding in Young*

- Children*. London.
- Dodwell, P. (1971). *Childrens perception and their understanding of geometrical ideas, Piagetian Cognitive Development Research and Mathematical Education*. NCTM: USA.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In: D. Tall (ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Fischbein, E., I. Pampu, & I. Manzat (1970). Comparison of ratio and the chance concept in children. *Child Development*, 41, 377-388.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China lectures*. Dordrecht: Kluwer.
- Fuson, K.S. (1978). *An analysis of research needs in projective, affine and similarity geometries, including an evaluation of Piagets results in these areas. Recent research concerning the development of spatial and geometric concepts*. Columbus Ohio.
- Goffree, F. (1993). HF: Working on Mathematics Education. In: L. Streefland (ed.). *The Legacy of Hans Freudenthal*. Reprinted from *Educational Studies in Mathematics* 25 (1-2), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 21-51.
- Karplus, R., E. Karplus, M. Formisano & A.C. Paulsen (1979). Proportional reasoning and control of variables in seven countries. In: J. Lockhead & J. Clement (eds.). *Cognitive process instruction*, Philadelphia, Pennsylvania, 47-105.
- Martin, J.L. (1978). *The childs concept of ratio and distances. Recent research concerning the development of spatial and geometric concepts*. Columbus Ohio.
- Piaget, J. (1972a). *The Principles of Genetic Epistemology* (W. Mays transl.). London: Routledge & Kegan Paul (original published in 1970).
- Piaget, J. (1972b). Comments on Mathematical Education. In: A.J. Howson (ed.). *Developments in Mathematical Education. Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education*. Cambridge: University Press.
- Sierpinska, A. (1995). Mathematics: in context, pure, or with applications. *For the learning of mathematics*, 15(1), 2-16.
- Streefland, L. (1978). Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction. *Educational Studies in Mathematics*, 9, 51-73.
- Streefland, L. (1984). Search for the roots of ratio. Some thoughts on the long term learning process (Towards a theory). Part I: Reflections on a teaching experiment. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 75 - 94.
- Streefland, L. (1985). Search for the roots of ratio. Some thoughts on the long term learning process (Towards a theory). Part II: The outline of the long term learning process. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 327 - 348.
- Streefland, L., (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education. A paradigm of developmental research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Streefland, L. (1992). Het ontwerpen van een wiskundeleerang. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 10(4), 3-15.
- Vergnaud, G., (1983). Multiplicative Structures. In: Lesh, R. & M. Landau (eds.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press.
- Vuurmans, A.C. (1995). Mijn glijbaan is kwart over negen. *Willem Bartjens*, 14(5), 34-40.