

Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (1)

A. Treffers, E. de Moor en E. Feijs

1 Inleiding

In 1984 verscheen het werkboek '10 voor de basisvorming rekenen-wiskunde' met als ondertitel 'Op weg naar een nationaal plan voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool en het gebruik van de computer daarbinnen'.

Aan het einde van dat jaar reageerden ongeveer driehonderd respondenten op de inhoud van dat werkboek, en wel speciaal op het inhoudelijke deel ervan over 'basisvaardigheden', 'cijferen', 'verhoudingen', 'breuken', 'meten' en 'meetkunde'.

In 1986 verscheen een studie van Cadot en Vroegindeweyj getiteld '10 voor de basisvorming onderzocht'. Eén van hun conclusies luidt:

'Uit de gegevens van de kwantitatieve analyse blijkt dat '10 voor de basisvorming' uitermate positief is ontvangen.' (pag.180)

Er waren en zijn echter verschillende redenen waarom de werkboek-tekst in 1987 niet vlot tot 'nationaal plan' kon worden gepromoveerd.

Ten eerste is de tekst waarop gerespondeerd werd te gecompriëerd voor ruime verspreiding onder onderwijsmensen. Ze moet dus herschreven, uitgebreid en geïllustreerd worden, dat was van meet af aan duidelijk. Ook dienen bruikbare suggesties uit de respons daarin te worden verwerkt - dat is ook evident. En natuurlijk ligt het ook voor de hand dat verantwoord wordt waarom bepaalde voorstellen-tot-verandering eventueel niet werden opgevolgd. Geen eenvoudige klus....

Maar ten tweede werd einde 1986, begin 1987 zichtbaar dat er in Nederland zoiets als eindtermen voor de basisschool (en de basisvorming daarna) geformuleerd zouden moeten worden. De SLO en het Cito werden daarmee medio 1987 belast. Hoewel niet precies omschreven was (en is) hoe die eindtermen eruit zouden moeten zien, is wel duidelijk dat deze in nauwe verbinding met het nationale plan staan, of beter omgekeerd, dat zo'n plan op die eindtermen geënt moet zijn.

Geen eenvoudige klus dus, maar zelfs een onmogelijke opgave, omdat die eindtermen pas in het midden van 1988 geformuleerd en voorlopig vastgesteld worden. Daarom is uitstel geboden. Althans uitstel van het publiceren van het eindprodukt. En eerlijk gezegd komt dat ons niet zo slecht uit! Want aan het einde van 1986 was al duidelijk dat we de juiste vorm waarin het nationale plan moest worden gegoten nog niet hadden gevonden. Maar wat nog zeker zo zwaar woog: bij de concrete uitwerking bleek dat we op enkele onderdelen zoveel nieuwe elementen inbrachten dat we daarop de respons op het werkboek niet 'zonder meer' van toepassing kunnen verklaren - in de volgende paragraaf zal dat duidelijk worden. Daarmee zouden er gaten in de basis-van-overeenstemming komen waaraan dat plan nu juist z'n kwalificatie 'nationaal' zou kunnen ontleen - gaten die naar onze mening eigenlijk makkelijk zouden zijn op te vullen. Het genoemde noodzakelijke uitstel nu biedt ons inderdaad de gelegenheid om op die 'blinde vlekken' een tweede respons-ronde in te lassen. Tevens kan daarmee de door ons gekozen beschrijvingsvorm aan het forum van dit tijdschrift worden gepresenteerd. Dat forum is namelijk grotendeels de voorhoede-groep van onderwijsgeveenden, opleiders, begeleiders, ontwikkelaars, onderzoekers en andere deskundigen die eveneens

bij de eerste consultatie in 1984-'85 betrokken was.

In deze aflevering gaat het daarbij om 'basisvaardigheden', in het bijzonder 'tafels' - we komen daar zo op. Maar nu eerst nog wat opmerkingen over de 'Proeve van een nationaal programma ...' in het algemeen.

2 'Proeve ...': titel, indeling en beschrijvingsvorm

In het voorgaande is al te lezen dat we in plaats van 'nationaal plan' kiezen voor de titel 'Proeve van een nationaal programma ...'. Het woord 'proeve' drukt nauwkeurig uit wat we met het boek beogen: een probeersel. Die bescheidenheid past bij een zo ambitieus gesteld doel als dat van een 'nationaal plan', of juister nu 'een nationaal programma', ook al is er een hechte grondslag van overeenstemming in Nederland, zoals blijkt uit de respons op het werkboek en vooral ook uit de keuze voor nieuwe reken-wiskundeprogramma's die in de lijn van het werkboek liggen. De wijziging van 'plan' in 'programma' hangt direct samen met de gekozen beschrijvingsvorm en -inhoud. We menen namelijk dat door (1) de formulering van eind-doelstellingen (2) de uitgebreide didactische toelichting erop (3) het aanbod van enkele honderden voorbeelden van opgaven, de inhoud van het onderwijs zo duidelijk wordt beschreven, dat we van een 'programma' mogen spreken. Althans van een 'nationaal programma' dat op lokaal niveau op verschillende wijzen gedetailleerd kan worden uitgewerkt. Ook dit zal in het volgende duidelijk worden. De globale indeling van de 'Proeve van een nationaal programma ...' is als volgt.

In het eerste deel worden na een korte historisch-geografische verkenning de uitgangspunten van het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool beschreven en geïllustreerd. Daarna worden de algemene schooldoelen opgesomd aan de hand waarvan de criteria voor leerstofselectie worden opgesteld. Vervolgens worden de algemene onderwijs-leerdoelen voor rekenen-wiskunde opgesomd en toegelicht. Samen met de uitgangspunten en de criteria bieden de algemene doelstellingen een hechte grondslag waarop de einddoelstellingen, waaraan naast de gedragscomponent ook een leerstofdimensie is toegevoegd, kunnen worden geformuleerd en toegelicht met de derde dimensie van de didactische context.

De beschrijving van de einddoelstellingen geschiedt in deel II - de kern van het nationale programma. Het bevat na de inleiding vijf hoofdstukken die ieder ongeveer vijf hoofddoelstellingen bevatten die uitgebreid worden toegelicht. De titels daarvan luiden achtereenvolgens:

- I. Basisvaardigheden.
- II. Cijferen.
- III. Verhoudingen en procenten.
- IV. Breuken en kommagetallen.
- V. Meten en meetkunde.

Ten opzichte van het werkboek uit 1984 zijn de inhoudelijke terreinen weliswaar wat anders gegroepeerd maar niet wezenlijk veranderd. Wat wel anders is, dat betreft het aanvangsonderwijs. In het werkboek werd daaraan een apart hoofdstuk gewijd, maar dat is nu verdwenen. We hebben ons hier namelijk beperkt tot de einddoelstellingen. Derhalve komt het aanvangsonderwijs bij die onderdelen ter sprake waar het voor een goed begrip van de betreffende eindterm noodzakelijk is, maar niet als apart beschrijvingspunt los van einddoelstellingen.

In deel III wordt aandacht besteed aan de differentiatieproblematiek, de plaats van de zakrekenmachine en de computer, plus aan andere conditie-bepalingen. Kortom aan datgene wat in het werkboek in deel C (condities) werd beschreven. Alleen zullen sterk

tijd-gebonden en actie-gerichte onderwerpen (meer uren op de Pabo en dergelijke) met grote terughoudendheid worden besproken.

Deel IV zal bestaan uit een verzameling voorbeeld-opgaven. Tijdens de najaarsconferentie te Noordwijkerhout, maar ook daarbuiten, zal daarover het oordeel van enkele honderden deskundigen worden gevraagd - dit als aanvulling op de vroegere respons.

Deel V tenslotte bevat noten en literatuur.

Dit is de indeling van de 'Proeve van een nationaal programma ...' - uiteraard zijn wijzigingen voorbehouden.

3 Voorbeeld: basisvaardigheden, de procedure

Het hoofdstuk basisvaardigheden bevat vijf paragrafen waarvan we het nodig vinden dat de eerste twee integraal worden gepubliceerd.

Het eerste stuk over tafels van optellen en aftrekken bevat namelijk zoveel nieuws ten opzichte van het werkboek dat we daarom de lezers van dit tijdschrift willen consulteren. Hetzelfde geldt, zij het in wat mindere mate, voor de tafels van vermenigvuldigen en delen.

Hoofdrekenen, schatten en toepassingen die in de daarop volgende paragrafen worden besproken, behoeven geen aparte publikatie omdat de tekst daarvan behoorlijk aansluit bij de oorspronkelijke korte beschrijving in het werkboek plus de verwijzingen naar meer concrete uitwerkingen. We moeten hier trouwens een keuze maken, omdat nu eenmaal geen volledige publikatie van alle onderdelen mogelijk is in kort bestek, dus bepalen we ons tot het meest noodzakelijke - in dit geval de tafels.

Over het *rekenen onder de twintig* staat in het werkboek het volgende:

'Ook bij een beproefd rekenonderwerp uit het aanvangsonderwijs als 'aftrekken onder de twintig' onderscheidt zich het contextrijke-realistische reken-wiskundeonderwijs duidelijk van de traditionele rekenaanpak.

Volgens de traditionele methodiek moet een opgave als $17 - 9$ via splitsen bij 10 ($17 - 7 - 2$) worden opgelost. Stipsommen van het type $17 - 9 = 17 - 7 - \bullet$ dienen ter ondersteuning van de voorgeschreven werkwijze.

Een aanzienlijk percentage leerlingen blijkt echter grote moeilijkheden met deze opgaven te hebben: er moet teveel tegelijk gerekend en onthouden worden, het werkgeheugen wordt sterk belast. Daar komt nog bij dat de splits-methode nauwelijks of niet te hanteren is bij opgaven als $11 - 9$ en $14 - 13$ (probeert u het maar eens: eerst $14 - 4$; dan $13 - 4$, vervolgens $13 - 3$, ... en we zijn het spoor bijster), en in tal van toepassingssituaties absurd uitpakt. Met name als het om vergelijken van hoeveelheden of grootheden gaat, is de methode van het handige doortellen veel natuurlijker, en soms ook makkelijker ($11 - 9$; $14 - 13$).

Kortom, de traditionele splits-bij-tien-methode voor het aftrekken berust op de eenzijdige opvatting van aftrekken als wegnemen, is niet algemeen bruikbaar en staat los van de werkwijzen die kinderen bij toepassingsproblemen hanteren. Ze is daarnaast sterk voorschrijvend van aard, en staat in nauwe verbinding met moeilijk 'leesbare' stipsommen - de formele en algoritmische trend van het mechanistische rekenen begint zich hier dus al duidelijk af te tekenen.

De contextrijke-realistische aanpak daarentegen interpreteert aftrekken breder (als wegnemen, als vergelijken, als inverse van optellen), in relatie met tal van reële probleemsituaties, en laat verschillende (contextgebonden) aanpakken toe. Men gebruikt daarbij tal van materialen en visuele modellen ter ondersteuning van het denken en rekenen, stelt het feilloos kunnen rekenen 'onder de twintig' niet als voorwaarde om 'onder de honderd of duizend' te mogen rekenen, hanteert de eenvoudige pijlentaal als notatieschema, en laat het memoriseren en automatiseren van basiskennis volgens een geleidelijk proces van schematiseren en verkorten

verlopen - de vorming van een wiskundige attitude wordt van meet af aan gestimuleerd. Kortom, de contextrijke-realistische aanpak onderscheidt zich hier duidelijk van de formeel-mechanistische werkwijze.' (pag.36)

Enkele tientallen respondenten hebben hierop gereageerd (zie '10 voor de basisvorming onderzocht', pag.72 e.v.). De strekking van de reacties is dat de contextrijke-realistische benadering, zoals zojuist in het geciteerde stuk beschreven, risico's inhoudt voor kinderen met leerproblemen:

'Aan deze leerlingen moet enige structuur aangeboden worden bij de keuze van de toe te passen strategie. Gebeurt dit niet, dan begint voor deze leerlingen, die niet uit zichzelf vanuit hun ervaring tot synthese kunnen komen, de achterstand al in het aanvangsonderwijs.' (pag.75)

Wij onderschrijven dit standpunt volledig, toen en nu, en kunnen niet anders dan erkennen dat de descriptie te onduidelijk was in dit opzicht. Ook uit de literatuurverwijzing in het werkboek (op pag.84) naar het werk van onder meer Carpenter c.s. kan de lezer niet opmaken dat we hier met name de ideeën van Hatano op het oog hadden welke in de toelichting op doelstelling 1 straks uitgebreid zijn verwerkt - ideeën waarin het belang van steunpunten en houvast voor moeilijk lerende kinderen naar onze mening volledig tot gelding komen. Hoe het zij, de nieuwe toelichtende tekst wijkt zo sterk af van wat de respondenten in het werkboek-gedeelte daarover konden lezen en interpreteren, dat we menen hier de toelichting op de einddoelstelling integraal te moeten publiceren.

Voor het leren van *de tafels van vermenigvuldiging en deling* geldt iets dergelijks. Maar nu omdat de toenmalige tekst over dit onderwerp wellicht wat kort was:

'Zo is het memoriseren van de tafels het resultaat van een proces van verdergaande verkorting van handig rekenen (via tellen, verkort tellen, structureren op basis van gememoriseerde kennis en inzicht in de getallenstructuur, herhaald verdubbelen en halveren, efficiënt gebruiken van eigenschappen van bewerkingen e.d.) met als laatste stap het volledig inprenten van tafelovertellingen, -aftrekkingen, -vermenigvuldigingen en -delingen.' (pag.38)

De literatuurverwijzingen waren hier echter wel toereikend indien men een nadere uitwerking van de algemene gedachte wilde bestuderen.

Mede om een afgerond geheel van tafels te kunnen presenteren, geven we in het volgende - misschien ten overvloede - ook de volledige toelichtende tekst ter overweging.

Voor wat *hoofdrekenen, schatten en toepassingen* aangaat, volstaan we in het volgende met de formulering van de einddoelstellingen en een zeer globale indicatie van de toelichtende tekst. Daarbij wordt ook aangegeven hoe en waarom we de oorspronkelijke terminologie uit het werkboek soms wat hebben aangepast.

We presenteren aan het eind slechts de *noten* behorende bij de stukken die volledig zijn afgedrukt. Dus van de voorlopige teksten van de 'Proeve ...'. Hoe voorlopig die zijn zal voornamelijk afhangen van de ontvangst ervan door de lezers van dit tijdschrift.

4 Inhoud basisvaardigheden

Tot de basisvaardigheden worden gerekend: het kennen van de tafels, het vaardig hoofdrekenen en het schattend rekenen plus het kunnen maken van elementaire toepassingen ervan.

Over deze bekwaamheden is in de loop der tijden tamelijk verschillend gedacht. Zo werd tot omstreeks 1960 betrekkelijk veel zorg aan het inslijpen van de tafels besteed. De aandacht voor het hoofdrekenen wisselde weliswaar per methode maar was toch in het algemeen niet gering. Het schattend rekenen daarentegen kreeg bij benadering niet de aandacht die het verdiende en het toepassen evenmin.

B. Mondeling of rekendictee (no. 11—13)

11.	$70 : 10 =$	$100 \times 7 =$	$6 \times 100 =$
	$650 : 10 =$	$100 \times 13 =$	$12 \times 100 =$
	$430 : 10 =$	$100 \times 25 =$	$39 \times 100 =$
	$1\ 300 : 10 =$	$100 \times 140 =$	$114 \times 100 =$
	$2\ 890 : 10 =$	$100 \times 156 =$	$200 \times 100 =$
12.	$57 = . \times 8 + 1$	$35 = . \times 6 + .$	$.. = 7 \times 9$
	$68 = 7 \times 9 + .$	$43 = . \times 7 + .$	$.. = 8 \times 6$
	$54 = . \times 8 + 6$	$71 = . \times 8 + .$	$.. = 9 \times 9$
	$46 = 6 \times 7 + .$	$73 = . \times 9 + .$	$.. = 3 \times 11$
	$62 = . \times 9 + 8$	$85 = . \times 10 + .$	$.. = 5 \times 17$

figuur 1: Rekendictee

Na 1960 kwam het rekenen steeds meer in de greep van het individuele, schriftelijke werken. Dit voerde soms sterk naar solitaire sommenmakerij. Zowel het uit het hoofd leren van de tafels als het hoofdrekenen kregen daaronder te lijden, om over het schatten en toepassen maar te zwijgen. Klassikaal uitgevoerde klaagzangen werden bij de tafels steeds minder gehoord. Allengs verdween ook het rekendictee waarin de onderwijsgevende opgaven voorleest en de leerling (de opgaven en) antwoorden noteert (zie fig.1).¹

Met de schuchtere invoering van de zakrekenmachine aan het einde van de jaren zeventig werden zelfs de poten onder de rekentafels weggezaagd - zo meenden sommige onderwijsdeskundigen.

Britten schaffen tafels en staartdelingen in onderwijs af

Door onze correspondent

LONDEN, 25 april — De Britse minister van onderwijs stuurt volgend schooljaar 350 'wiskunde-zendingen' op pad die leerlingen en leerkrachten ervan moeten overtuigen dat tafels van vermenigvuldiging, staartdelingen en logaritmen begrippen uit het verleden zijn. De kinderen moeten leren werken met rekenmachientjes en computers.

Deze principiële keuze wordt gedaan door de inspectie van het Britse onderwijs in een rapport over het reken- en wiskunde-onderwijs voor 5- tot 16-jarigen. Minister Keith Joseph heeft de plannen toegejuicht als "opwindend". Hij heeft geld beschikbaar gesteld voor de verspreiders van het geloof. Niettegenstaande het feit dat ook vandaag weer vele duizenden schoolkinderen thuisblijven omdat hun onderwijzers staken voor het inlopen van de salaris-achterstand die zij hebben opgelopen.

Volgens het rapport van de inspectie hoeven kinderen alleen heel eenvoudige sommetjes zelf te kunnen maken. Logaritmen zijn toch al verouderd, maar ook staartdelingen blijven voor veel kinderen moeilijk en zonder enig verband met de werkelijkheid, en kunnen daarom beter worden afgeschaft.

De nadruk zal komen te liggen op het aanleren van praktische vaardigheden waar de kinderen later nog wat aan hebben, dit in tegenstelling tot wiskunde als academisch gerichte bezigheid.

Het schuiven met abstracte cijfers moet zoveel mogelijk worden vervangen door de analyse en communicatie van ideeën, aldus de inspectie. Het gebruik van microcomputers is in dat opzicht een fascinerende mogelijkheid. Daar moet dan ook nog meer nadruk op worden gelegd. Programmeren moet volgens de inspectie onderdeel van het gewone wiskunde-onderwijs worden.

figuur 2: Hoe we er in Nederland niet over denken

Waarom zouden de leerlingen al die rekenfeiten nog in het hoofd moeten stampen als zo'n rekenhulpje eenvoudig allerlei gecompliceerde berekeningen voor hen kan uitvoeren?

'Het schuiven met de abstracte cijfers moet zoveel mogelijk worden vervangen door de analyse en communicatie van ideeën ...', zo heet het in het knipsel van fig. 2.²

Buiten Brittannië denkt men daar in het algemeen toch wat anders over. Indien namelijk het 'domme' elementaire rekenwerk achterwege blijft, zullen niet alleen het hoofdrekenen en het schattend rekenen in het gedrang komen, maar ook het inzicht in de rekenoperaties en de toepassingen ervan, aldus luidt de opinie van de meeste vakdeskundigen.

In het volgende zullen de einddoelstellingen over de betreffende rekenvaardigheden en de toepassingen ervan geformuleerd en toegelicht worden. Eerst komen de tafels van optellen en aftrekken aan bod. Dan gebeurt hetzelfde met de tafels van vermenigvuldigen en delen. Daarna wordt het hoofdrekenen onder de loep genomen. Vervolgens bespreken we het schattend rekenen. En tenslotte de toepassingen van de vier basisbewerkingen.

doelstelling 1

De leerling kent de opteltafels en de daaruit afgeleide aftrektafels uit het hoofd (en kan deze kennis toepassen).

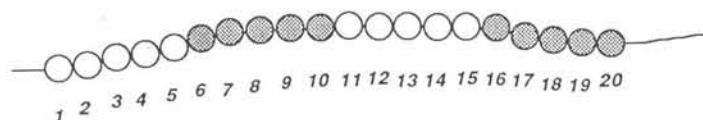
Dit doel dient grotendeels al in groep vier, hooguit vijf van de basisschool te worden bereikt. Tafelkennis vormt immers mede de grondslag van het hoofdrekenen en het cijferen, welke vanaf groep vijf op het onderwijsprogramma staan. Nu lukt dit voor twee van de drie jonge kinderen ook wel.³ Maar met name opgaven als $6 + 7$ en $13 - 7$, waarbij de tien gepasseerd wordt, blijken moeilijk te memoriseren. Nogal wat leerlingen blijven dan alsmat tellen. Aan het einde van de basisschool heeft het overgrote deel (meer dan tachtig procent) ook deze lastige tafels paraat.⁴ Er zijn echter onderzoeksgegevens waaruit blijkt dat het rendement sterk door de onderwijsmethode wordt bepaald.⁵ We noemen drie doelmatige werkwijzen, waarvan ook allerlei varianten bestaan, namelijk:

1. de rijgmethode van het splitsen bij vijf (en tien) in de telrij;
2. de inwisselmethode van het afsplitsen van vijf (en tien) in de getallen op zich;
3. de variamethode van het handige rekenen.

rijgen met vijven

De rijgmethode van splitsen bij vijf (en tien) in de telrij berust ten dele op het tellen. Tellen is belangrijk voor de ontwikkeling van het getalbegrip. Het sluit aan bij wat kinderen in de voorschoolse periode plegen te praktiseren. Het is ook een werkzame manier om aantallen te bepalen. En het weerspiegelt de werkwijzen die kinderen bij het ordenen, samenvoegen, splitsen en weghalen van hoeveelheden volgen. Om echter tot structureren, verkort rekenen en tenslotte memoriseren van elementaire optellingen en aftrekkingen te komen, kan niet louter met tellen worden volstaan. De getallenrij en de visualisering ervan in de getallenlijn zijn voor kinderen veelal te amorf om tot spontaan structureren te komen. Vandaar dat zodanig structuur moet worden aangebracht dat het in principe mogelijk is de getallen tot twintig vlug te overzien. Van oudsher is daarvoor in de rekendidactiek vooral de vijfstructuur gekozen, bijvoorbeeld in de vorm van een kralenketting (fig.3).⁶ De getallen tot vier zijn ook voor jonge kinderen in één oogopslag te vatten. De vijf vormt één geheel. De vijftallen (tien, vijftien, twintig) worden eveneens als totaliteit gezien. Er zijn dus voldoende ankerpunten om alle getallen snel

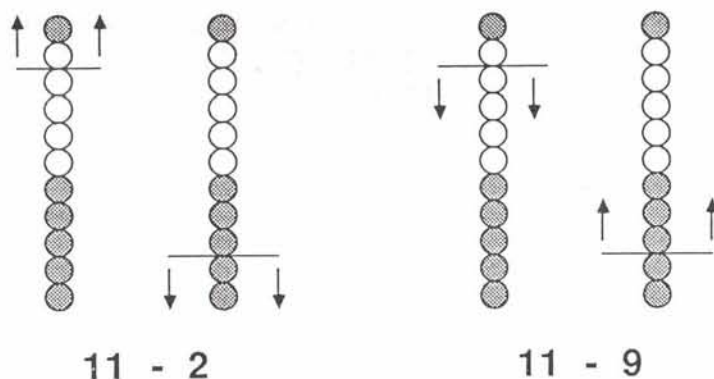
te kunnen plaatsen. Ook biedt dit patroon vervolgens voldoende visuele steun om de optellingen tot tien met bijbehorende aftrekkingen vlot uit te rekenen en al doende geleidelijk aan te memoriseren.



figuur 3: Kralenketting met vijfpatroon

Het vaardig optellen wordt bevorderd door het passende gebruik van de verwisselingschap ($2 + 7 = 7 + 2$).

Aftrekken kan in principe op twee manieren, namelijk door het benodigde aantal van de bovenkant of van de onderkant van de getallenketting weg te halen. Soms is het handig het eerste te doen, een andere keer het tweede. We nemen twee opgaven als voorbeeld: $11 - 2$ en $11 - 9$ (fig.4).



figuur 4: Twee aftrekstrategieën bij $11 - 2$ en $11 - 9$

Bij $11 - 2$ is het makkelijker om twee van bovenaf weg te halen en bij $11 - 9$ negen van de onderkant. In toepassingssituaties van 'erf' en 'verschil' heeft aftrekken ook die twee kanten. Aftrekken dus als 'af-tellen' en 'op-tellen'. De geschetste werkwijze verschilt van de gangbare traditionele aanpak waarin geen grondstructuur van vijf op de getallenlijn wordt aangebracht en die wel een strakke erf-methodiek voor het splitsen bij tien hanteert (fig.5).

$8 + 7 = 8 + 2 + \dots = \dots$	$16 - 6 - 2 = \dots$	$16 - 8 = \dots$
$5 + 8 = 5 + 5 + \dots = \dots$	$15 - 5 - 3 = \dots$	$14 - 7 = \dots$
$7 + 5 = 7 + 3 + \dots = \dots$	$17 - 7 - 2 = \dots$	$17 - 8 = \dots$
$8 + 4 = 8 + 2 + \dots = \dots$	$13 - 3 - 6 = \dots$	$15 - 7 = \dots$
$5 + 6 = 5 + 5 + \dots = \dots$	$14 - 4 - 4 = \dots$	$16 - 9 = \dots$

figuur 5: Eenzijdig splitsen bij tien

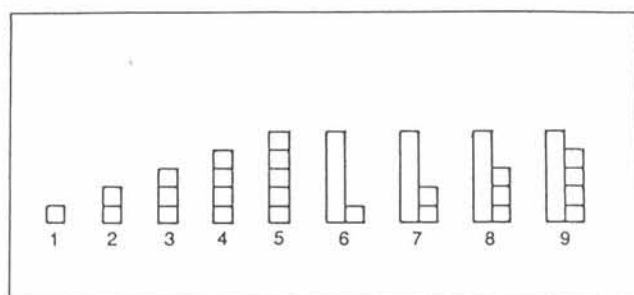
Dergelijke splitsingen zijn bij zowel optellen als aftrekken soms handig, maar lang niet altijd en soms zelfs ronduit omslachtig.

Afsluitend stellen we vast dat de vijfstructuur stevige steun biedt bij het plaatsen van getallen, maar soms wat minder bij het vervolgens uitvoeren van de bewerkingen daarop. Het patroon wordt dan immers ten dele doorbroken. Bij $6 + 7$ bijvoorbeeld is de zes wel direct te situeren maar de zeven daarachter geplaatst niet meer. Notoire

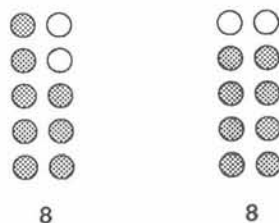
tellers zullen aanvankelijk ook bij rijg-met-vijf in moeilijke gevallen ten dele blijven tellen. Dit neemt echter niet weg dat het grondpatroon bij zowel op-tellen als af-tellen heel wat steunpunten biedt tot structureren, vooral onder de tien en dus ook voor het splitsen bij tien. Bovendien sluit het rijgen goed aan bij werkwijzen die kinderen aanvankelijk bij het oplossen van zowel kale sommen als toepassingsopgaven hanteren. Wil men echter de mogelijkheden van de vijfstructuur volledig benutten dan zal men naast het rijgen de volgende aanpak moeten hanteren.

afsplitsen van vijven

Bij de tweede methode, die van het afsplitsen van vijf (en tien) in de getallen zelf krijgt ieder getal ofwel één beeld binnen de vijfstructuur toegewezen, zoals in fig.6 het geval is,⁷ of twee gelijkwaardige dominerende beelden, zoals in fig.7. In het laatste geval staat naast de vijfstructuur dus de tweestructuur, de verdubbeling.⁸



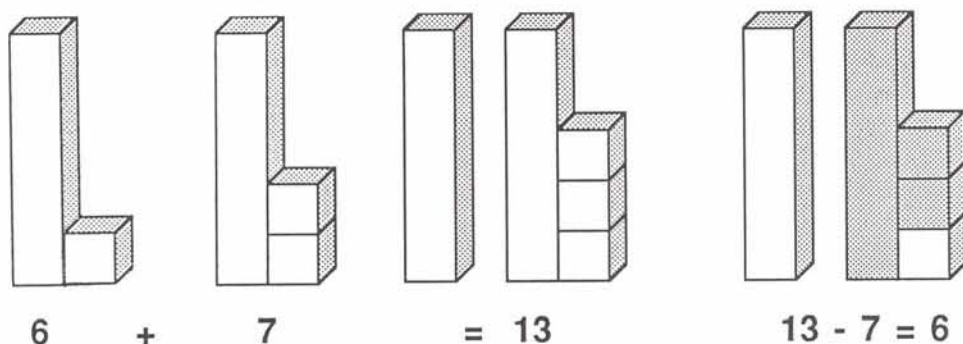
figuur 6: Getallenbeelden in vijfstructuur



figuur 7: Twee voorstellingen van 8 in vijf-frames

Het gaat bij de vaste vijfstructurering om eenzelfde visuele voorstelling ('Darstellung') als die van het turven. Men kan zich daarbij eenvoudig een mentaal beeld ('Vorstellung') van de onderscheiden getallen vormen. Net als bij de kralenketting dus. Alleen gaan de leerlingen nu bij opgaven als $6 + 7$ en $13 - 7$ niet rijgen maar herschikken, inwisselen en zonodig inruilen (fig.8). Bij $6 + 7$ worden als het ware eerst de vaste getalbeelden neergezet of opgeroepen, vervolgens de vijfstaafjes samengevoegd tot tien en de losse tot drie, en per slot zie je dan dertien. Aanvankelijk gebeurt dit met materiaal, vervolgens met plaatjes en tenslotte met gedachte-dingen. En zeven afhalen van dertien kan ook zo getrap, overzichtelijk en vlot gebeuren. Bij $11 - 9$ ziet het kind de twee overblijvende direct zitten, althans als de getalbeelden met vijf en in vijf helder voor ogen staan. Bij grotere getallen zou het herschikken, inwisselen en inruilen veel ingewikkelder worden. Maar daar werkt men niet meer met de semi-decimale vijf-methode. Deze is dan al geruisloos bij het decimale systeem ingepast. Dat wil zeggen, dat de vijfstaven in tweetallen gestapeld zijn en aldus veranderd in tienstaven - de weg

naar het tientallige positiesysteem ligt nu open. Bij het rekenen met grotere getallen kan dan de gememoriseerde basiskennis bij het hoofdrekenen en het cijferen 'onder elkaar' worden ingezet.



figuur 8: $6 + 7$ en $13 - 7$ met vijf-frames

Dit is trouwens ook het traject dat in de historische ontwikkeling van het rekenen is gevolgd. De Japanse, Chinese en Romeinse rekenramen beelden dit duidelijk uit: de vijf wordt daarin als apart steunpunt binnen het tientallige stelsel benut, zij het wat abstracter dan via de geschetste vijf-frames.⁹

Het sterke punt van de inwisselmethode, die overigens met gevarieerd structuurmateriaal (andere frames, geld, vingers) valt te realiseren, bestaat daarin dat de kracht van het in-één-oogopslag-zien volledig wordt benut. Het rappe rekenen wordt daardoor sterk bevorderd en derhalve ook het memoriseren. Tevens sluit de onderhavige aanpak precies aan bij de belangrijke informele werkwijzen van kinderen, te weten het rekenen met vijven (de vingers van een hand) en het verdubbelen (zie de voorstelling in fig.7).

Maar bij het maken van toepassingen kunnen problemen rijzen. Dan volgen kinderen namelijk vaak context-afhankelijke werkwijzen, zoals die van het tellen en rijgen. Maar deze verdragen moeilijk een omzetting naar het herschikken van getallen bij optellen en aftrekken op basis van vijf-frames. Althans vooral aanvankelijk, als de binding tussen getallen en materiaal nog sterk is, blijkt dat soms lastig.

Samengevat: voor het kale rekenen en het memoriseren biedt de inwisselmethode stevige steun, maar in toepassingssituaties die tot rijgen neigen, heeft ze aanvankelijk wat beperkingen.

handig rekenen

Tenslotte de variamethode van het handige rekenen. Voor heel wat kinderen van groep vier is de getallenwereld tot twintig (en verder) reeds dermate vertrouwd dat ze in staat zijn betekenisvol en flexibel met getallen te opereren. Voor hen is de getallenlijn reeds een goed geordend pad. Ze beschikken ook al over heel wat gememoriseerde rekenfeiten voor optellen en aftrekken. En wat heel belangrijk is: ze zetten deze kennis in om opgaven met behulp van passende procedures vlot uit te rekenen (zie fig.9).

Bijvoorbeeld: werken met de kennis van doubletten ($1 + 1$, $2 + 2$, $3 + 3$), bijna-doubletten ($5 + 6$, $7 + 8$), eerlijk verdelen ($5 + 7 = 6 + 6$), het gebruik maken van omkeringen ($2 + 7 = 7 + 2$), splitsen bij vijf of tien, handig aftrekken via 'afhalen' en 'op-tellen' ($13 - 7$, vanaf zeven doorrekenen naar dertien c.q. op-tellen) oftewel aftrekken via de winkelmethode van het bijtellen, benutten van tien als ankerpunt ($9 + 8 = 10 + 8 - 1$)

Het voordeel van deze varia-aanpak is dat allerlei informele strategieën nu volledig tot gelding komen. Dat de grote variatie erin goed aansluit bij de veelvormige context-afhankelijke rekenwijzen bij toepassingsproblemen. Dat geen onhandige rekenmanieren en rigide methodieken van bovenaf worden opgelegd. En zo valt er meer moois te memoreren.¹⁰

$6 + 6 + 1 = 13$	$(7) + 3 + 3 = 6$
$7 + 7 - 1 = 13$	$13 - 3 - 4 = 6$
$6 + 4 + 3 = 13$	$(7) + 7 - 1 = 6$
$6 + 10 - 3 = 13$	$14 - 7 - 1 = 6$
$6 + 7$	$13 - 7$

figuur 9: Handig rekenen ... of niet

Toch kleeft er ook één belangrijke beperking aan: zwakkere leerlingen zijn nu eenmaal vaak niet zo handig in het produceren en volgen van een potpourri van passende rekenstrategieën. Met als gevolg dat het rekenen niet wil vlotten en dus ook het memoriseren stukt.

driespan

Zo heeft ieder van de genoemde aanpakken - de rijgmethode, de inwisselmethode en de variamethode - dus zijn voors en tegens. Althans indien we ze op zichzelf nemen. *Combineren* we ze echter dan kunnen de nadelen van de één door de voordelen van de ander ondervangen worden. Het werken met de vijf-frames bijvoorbeeld, plus het verdubbelen (zie methode 2, fig.7) biedt zwakkere leerlingen houvast bij het handig rekenen. Omgekeerd geeft de gerichtheid op handig rekenen nieuwe mogelijkheden aan het opereren binnen de vijfstructuur, bijvoorbeeld bij de bijna doubletten ($6 + 7 = 6 + 6 + 1$). En bij het maken van toepassingsproblemen bieden handig rekenen en rijgen soelaas voor de beperkingen van het werken met frames.

Het driespan verzorgt alle belangrijke aspecten van het getal en het getalbegrip, te weten het tellen, het meten, het structureren en het opereren via herschikken (dat later ook bij het cijferend optellen en aftrekken plaatsvindt). Dus niet alleen tellen of meten (met staafjes), niet alleen maar rijgen of slechts werken met kale getallen, doch een veelzijdige benadering. Meer op de individuele leerling toegesneden werkwijzen worden nu mogelijk.

Memoriseren van de elementaire tafels is in deze opvatting niet alleen maar een kwestie van louter reproduceren. Maar het wordt primair beschouwd als het eindpunt van een langlopend reconstructieproces van een steeds verdergaande verkorting van rekenwijzen. Deze verkorting verloopt via strategieën die erop gericht zijn het tellen geleidelijk terug te dringen en te vervangen door handig rekenen. Gerichtheid op snelheid is bij het inprenten van kennis van belang, veelvuldige oefening evenzeer. Maar er is geen sprake van domme drill, doch veeleer van gestage structurering en geleidelijke kennisuitbreiding. Daarbij neemt structuurmateriaal met vijf, tien en twee als grondmotief een centrale positie in.

(... en kan deze kennis toepassen)

Tenslotte, vooruitlopend op doelstelling 5, nog enkele opmerkingen over de toepassingen van deze tafels. We nemen speciaal het aftrekken op de korrel - het optellen kan daaruit immers volledig worden begrepen.

In het voorgaande wezen we op twee kanten van aftrekken: afhalen en verschil bepalen.

Bij 'afhalen' is er sprake van het nemen van een deel van een getal, bij 'verschil' gaat het om vergelijken:

- *De groep bestaat uit dertien kinderen, namelijk zeven jongens en ... meisjes;*
- *In de klas zitten dertien jongens en zeven meisjes. Het aantal jongens is ... meer dan het aantal meisjes.*

Beide zijden zijn niet alleen belangrijk bij toepassingen maar ook voor het rekenen op zich, zo werd gesteld. Soms is 'afhalen' handig, maar soms ook gaat het rekenwerk veel vlotter via 'verschil bepalen' oftewel het op-tellen van het kleinste getal naar het grootste.

Nu toch nog wat meer over toepassingen, want de genoemde tweedeling in de *structuur* van het aftrekken is namelijk nog wat grof om iets van de grote rijkdom aan reële toepassingssituaties te tonen. Ook maken 'eraf' en 'verschil' nog onvoldoende duidelijk waarom kinderen zoveel problemen bij het toepassen ondervinden. Al zegt dit onderscheid natuurlijk wel wat. Namelijk dat 'eraf' een te schrale vulling van aftrekken is. En dat we derhalve niet moeten opkijken als blijkt dat kinderen, die eenzijdig in het onderwijs op aftrekken als afhalen gericht worden, niet in staat zijn een aftrekking in op-telproblemen of meer-dan-opgaven te herkennen:

- *Jan woont dertien kilometer van zijn vriend. Hij heeft op weg naar hem zeven kilometer afgelegd en moet dus nog ... kilometer fietsen.*

Nu komt de leerling ook met tellen wel uit zo'n opgave. Maar op den duur (bijvoorbeeld bij letterformules) is het een grote handicap als een basisbewerking zo beperkt van reikwijdte blijft.

Met dit fietsvoorbeeld is trouwens meteen een tweede belangrijke tweedeling in combinatie met de eerste aangegeven, namelijk naar het *soort getallen* waarmee gerekend wordt. Te weten: aantallen (jongens-meisjes) en meetgetallen (afstand in kilometers, of grootheden als lengte, gewicht, tijd, geld). Voorts kunnen getallen al dan niet 'gericht' zijn, zoals uit het volgende voorbeeld blijkt, in vergelijking met de voorgaande:

- *Jeanne ziet op het richtingbord, dat naar links wijst, staan 'Hilversum 13 km, Lage Vuursche 7km.'*

Ongeveer één op de drie kinderen van de bovenbouw basisschool ziet hierin een optelling in plaats van een aftrekking: de richting geeft een extra complicatie.¹¹ Het volgende vraagstukje vereist zelfs nog meer bewerking:

- *Wim woont dertien kilometer van school en Saskia zeven kilometer. Hoeveel wonen Wim en Saskia van elkaar?*

Uit beide opgaven blijkt tevens hoe belangrijk de *context* van de weliswaar globaal aangeduide maar niet precies geëxpliciteerde werkelijkheid is. In de laatste twee voorbeelden is dat de context van kaarten, wegwijzers, wegen, afstanden - een enorm arsenaal van begrippen en structuren.

Ziehier enkele kenmerken en dimensies van aftreksituaties: structuur, aard en context. Er zouden er meer te noemen zijn. Maar het gaat hier slechts om een indicatie van de rijkdom aan mogelijke toepassingen. Niet dat deze van meet af aan allemaal in het onderwijs betrokken zouden moeten worden, maar wel geleidelijk aan steeds meer. Iets van dat 'meer' is hier op tafel gelegd.

doelstelling 2

De leerling kent de tafels van vermenigvuldiging en de daaruit afgeleide delingstafels uit het hoofd (en kan deze kennis toepassen).

Dit doel dient mede ten behoeve van het hoofdrekenen en het cijferen, eigenlijk al in groep vijf van de basisschool te worden bereikt.

Voor twee van de drie leerlingen gaat dit ook op. Ze hebben er dan wel vaak tientallen uren hoofdzakelijk schriftelijk oefenen op zitten. Aansluitend komt daar nog de indirecte training via het cijferen bij. Het resultaat is dat aan het einde van de basisschool het overgrote deel van de leerlingen (meer dan tachtig procent) de tafels volledig beheerst.¹

Scherp gesteld zijn er voor de tafels twee onderwijsmethoden: de reproductie- en de reconstructie-methode.² Uit onderzoek blijkt dat de laatstgenoemde in het algemeen genomen het meest doelmatig is. Doelmatig met het oog op het zojuist gestelde leerdoel, maar vooral ook bezien in het licht van de algemene doelen van het rekenwiskundeonderwijs. We zullen de reconstructie-didactiek nu nader beschouwen tegen de contrasterende achtergrond van de reproductie-methodiek.

De *reproductie-methodiek* is eerst en vooral gericht op het direct kunnen reproduceren van de tafels die achtereenvolgens aan de orde worden gesteld. Te weten die van tien, twee, vijf, drie, vier, zes, zeven, acht en negen. Per tafel is de werkwijze steeds dezelfde. Starten met herhaald optellen van het betreffende tafelgetal en het maaltteken daaraan verbinden. Samenstellen van de tafelryj via sprongen in de telrij of eventueel op de getallenlijn. Inprenten van de betreffende rij (fig.10).³

2	$1 \times 2 = 2$
$2 + 2 = ..$	$2 \times 2 = 4$
$2 + 2 + 2 = ..$	$3 \times 2 = 6$
$2 + 2 + 2 + 2 = ..$	$4 \times 2 = 8$
$2 + 2 + 2 + 2 + 2 = ..$	$5 \times 2 = 10$
$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = ..$	$6 \times 2 = 12$
$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = ..$	$7 \times 2 = 14$
$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = ..$	$8 \times 2 = 16$
$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = ..$	$9 \times 2 = 18$
$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = ..$	$10 \times 2 = 20$

Leer de tafel van 2 uit je hoofd.

figuur 10: Een traditioneel gedekte tafel

Inoefenen van de tafels 'door elkaar' via zelfinstructie en schriftelijk oefenen (en soms met tafeldictees en spelletjes). En onderhouden van de verworven tafelkennis door middel van het gedurig oefenen van de voorafgaande tafels.

Informele strategieën van handig rekenen worden niet gestimuleerd omdat deze het directe inprenten niet zouden bevorderen. Reële toepassingen komen hooguit later in het onderwijs-leerproces. Aan het inslijpen van de tafels gaat geen fase van begripsvorming van de bewerkingen vooraf.

Tegenover deze methodiek staat de *reconstructie-didactiek*. Deze stuurt niet uitsluitend en direct op reproductie van kennis aan, maar probeert dit doel mede via een proces van reconstructie, van kennisopbouw via vaardig rekenen te realiseren. Kennis van de tafels is hier het resultaat van een proces van steeds verdergaande verkorting van handig rekenen, met als laatste stap het volledig inprenten. Die verkorting geschiedt onder meer door: efficiënt gebruiken van eigenschappen, benutten van reeds gememoriseerde tafelkennis, uitbuiten van bepaalde structuren in het getalsysteem en ... gericht oefenen. Memoriseren zo bezien is het resultaat van een gefaseerd onderwijs-leerproces dat:

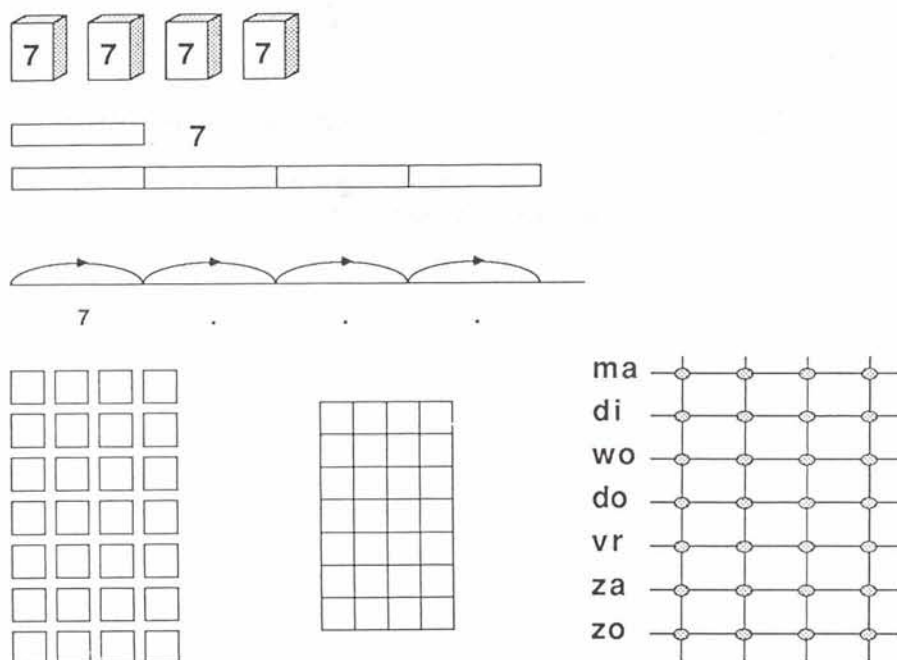
1. start met de begripsvorming van de bewerkingen, de introductiefase;
2. vervolgt met de fase van memoriseren via handig rekenen, de reconstructiefase;
3. voorlopig afsluit met het volledig inprenten van alle tafels, de reproductiefase;
4. en dan verder gaat met het consolideren van de kennis en het uitbreiden van de toepassingen.

Deze fasen zijn uiteraard niet nauwkeurig te scheiden: steeds worden toepassingen gemaakt en bij voortduring vindt handig rekenen en memoriseren plaats. We lichten ze toe.⁴

introductiefase

In de introductiefase van de begripsvorming komen de belangrijkste aspecten van de operaties aan bod. Voor vermenigvuldigen wil dit zeggen dat de bewerking dan kan worden uitgebeeld met een groepje (doosje), een getallenlijn (strook), een rechthoek (een rechthoekig patroon) of meerdere van deze modellen bij één situatie.

Neem bijvoorbeeld het volgende probleem: 'Hoeveel dagen zitten er in vier weken?' (fig.11)



figuur 11: Visualisering van 'Hoeveel dagen in vier weken?'

In de eerste verpakking ligt de nadruk op het herhaalde optellen. Er zijn vermenigvuldigproblemen waarin dit aspect vooral sterk naar voren komt.

Bij de stroken komt het verhoudingsaspect van vermenigvuldigen in beeld en bij de getallenlijn het sprongkarakter van zoveel keer. Ook dit zijn opvallende kanten van bepaalde vermenigvuldigproblemen.

Met het rechthoeksmodel wordt er weer iets specifiek toegevoegd: het herhaalde optellen komt wat op de achtergrond en het vermenigvuldigen krijgt nu een geheel eigen status. Een opgave als $4,2 \times 7,3$ in verband met oppervlakte weerspiegelt dit: hij is nog maar moeilijk als herhaald optellen te interpreteren. Tevens kan de verwisselbaarheid ($4 \times 7 = 7 \times 4$) wel direct vanuit het rechthoekspatroon begrepen worden maar niet met de voorgaande modellen.

Tenslotte de kalendervoorstelling van weken en dagen met het kruispuntenmodel. Dat is erg geschikt om bepaalde combinatorische problemen te verduidelijken. Bijvoorbeeld

hoeveel combinaties je in principe kunt maken van vier voorgerechten en zeven hoofdgerechten, van vier broeken en zeven bloesjes. Dit zijn problemen waarin één op de drie kinderen aan het einde van de basisschool geen vermenigvuldiging ziet zitten.⁵ Het kruispuntenmodel kan die structuur duidelijk blootleggen.

En dat is nu ook precies het belang van modellen: ze laten iets zien van de grondstructuur van problemen waarin een vermenigvuldiging vervat ligt, en ze maken bepaalde eigenschappen van de betreffende bewerking zichtbaar. Zodoende komen ze zowel het rekenen als het toepassen ten goede.

Natuurlijk moeten in de beginfase niet alle mogelijke uitbeeldingen aan de orde komen, dat zou alleen maar verwarring scheppen. Criterium voor de keuze is primair of ze de eigenschappen van vermenigvuldigen goed zichtbaar maken die bij het leren van de tafels en het maken van toepassingen ervan een sleutelrol vervullen.

Zoals daar zijn: de verdeelregel van het herhaalde optellen ($4 \times 7 = (3 \times 7) + 1$) en de verwisselregel ($4 \times 7 = 7 \times 4$). We komen zo allereerst bij de getallenlijn, de strook en het rechthoeksmodel terecht. Maar laten we vooral niet vergeten dat ook de elementaire contextopgaven zelf sterke zeggingskracht naar de genoemde eigenschappen kunnen hebben. We spreken in dit verband wel van situatiemodellen, een soort toepassingen-vooraf ten behoeve van de begripsvorming.

Deze elementaire modelopgaven plus de visualisering van markeren zodoende de introductiefase, en vormen de inleiding en aanleiding tot handig rekenen en memoriseren.

reconstructiefase

Hoe bijvoorbeeld de tafel van zeven in het algemeen *gereconstrueerd* en *gememoriseerd* wordt, is in fig.12 aangegeven.⁶

1×7	een weetje
2×7	wordt snel weetje via $7 + 7$
3×7	via $(2 \times 7) + 7$ - één maal meer
4×7	als verdubbeling van 2×7
5×7	halveren van 10×7 , de helft van 70
6×7	via $(5 \times 7) + 7$
7×7	gevarieerd, snel een weetje
8×7	$(7 \times 7) + 7$, lastigste van alle tafels
9×7	$(10 \times 7) - 7$ - één maal minder
10×7	een weetje
12×7	een onderzoeksprobleem

In alle gevallen is een toegang via andere tafels mogelijk langs de omkeerregel.

figuur 12: Reconstructie tafel van zeven

Uit de daar gegeven opsomming leiden we ook de belangrijkste algemene onderwijsregel voor de tafels af: *richt de leerling op de centrale steunpunten van tweemaal (verdubbelen), tien maal (nul erachter) en vijf maal (halveren tien maal)*. Van daaruit immers is via één-maal-meer en één-maal-minder het grootste deel van de betreffende getaltafel te bestrijken. Ook wordt de verwisselregel steeds doeltreffender naarmate de leerling meer tafelkennis bezit. Wat de volgorde van aanbieding van de getaltafels betreft kan de gangbare ordening min of meer worden aangehouden. Bijvoorbeeld die van tien, twee, vijf, drie, negen, vier, acht, zes en zeven. Voor de exacte volgorde van het leren is deze ordening uiteraard slechts betrekkelijk geldig. Door het handig rekenen, en wel speciaal de verwissel-eigenschap, wordt namelijk iedere tafel in feite steeds

opengebroken waardoor de leerlingen flarden van andere tafels van meet af aan mee memoriseren. En per tafel vervaagt ook de scheidslijn tussen weten, zien en rap rekenen steeds meer. Dit alles maakt het nodig dat er na deze fase nog een (voorlopige) afsluiting komt waarin gericht naar het volledige inprenten wordt toegewerkt.

reproductiefase

In de reproductiefase gaat het erom de nog bestaande hiaten in het kennisbestand op te vullen. Daartoe staan verschillende middelen ter beschikking: oefenspellen, gevarieerde oefenopdrachten, recht-toe-recht-aan sommen (eventueel met antwoorden voor zelfcontrole), tafeldictees in korte mondelinge lesjes en ... computerprogramma's waarin één en ander ligt opgeslagen.

Bij oefenspellen in de vorm van tafelvarianten van bingo, domino, kwartet e.d. gaat het om snelheid, handigheid en kennis van zaken. Ze zijn motiverend, soms functioneel maar vaak lastig in het onderwijs van alledag in te passen. In de gevarieerde oefenopdrachten wordt het maken van tafelsommen verbonden met een bepaalde opdracht waarin zelfcontrole besloten ligt. Bijvoorbeeld het verbinden van punten, zodat een mooie tekening ontstaat, het kleuren van gebieden, het ontcijferen van geheimschriften, het doorlopen van doolhoven. Dit kost veel tijd, is soms weinig doelgericht, maar verlevendigt het leren wel.

De sommenrijtjes (met antwoorden op vouwblaadje) zijn zeker doelgericht te maken via snelheid en directe zelfcontrole. Toch zijn er onvoldoende garanties voor volledig memoriseren ingebouwd: de snelle zijbaan naar rekenen blijft immers open.

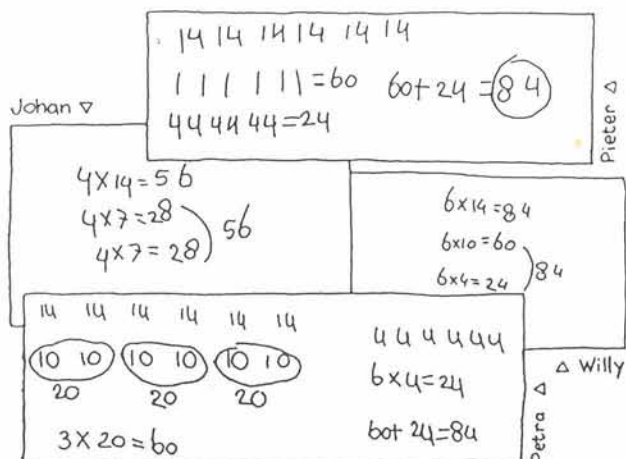
Bij het tafeldictee of bij andere vormen van mondelinge lesjes ligt dat anders. Daarin kunnen we het memoriseren juist sterk stimuleren. De onterechte vraag naar alsmaar meer oefenmateriaal kan ermee worden ondervangen. Deze komt vooral voort uit een eenzijdige opvatting over oefenen, namelijk die van louter schriftelijk trainen. Zeer ondoelmatig. We zouden er in het reken-wiskundeonderwijs een gewoonte van moeten maken *iedere les* vijf à tien minuten aan *hoofdrekenen* te besteden. En dat *door de hele basisschool heen!* In de beste reken-wiskundemethoden, internationaal gesproken, vindt men in de handleiding dan ook strikte aanwijzingen voor die korte dagelijkse sessies. Hier is dus het motto: meer mondeling memoriseren. Laat de kinderen daarin zelf ook hun inbreng hebben. Bijvoorbeeld door een tafeldictee samen te stellen. Laat ze elkaar helpen de hiaten op te sporen en vervolgens op te vullen.

Tenslotte de computer. De meest simpele vorm van een computerprogramma voor tafels is: genereren van tafels en registreren van antwoorden - een soort geautomatiseerd rekendictee dus. Er zijn echter ook programma's die niet louter op de correcte eindprestatie mikken, maar ruimte voor verkorte en inzichtelijke werkwijzen laten.⁷ Ze bieden desgewenst visuele modellen en schema's ter ondersteuning van handig rekenen. Ook geven ze geen uniforme respons op antwoorden maar reageren op aangepaste wijze. Ze communiceren als het ware met de leerling: ze zijn zogezegd interactief. Het is echter de vraag hoever men hiermee in de schoolsituatie *kan* gaan, onderwijspraktisch en financieel gezien. Maar ook hoever men *wenst* te gaan bij het laten overnemen of ondersteunen van het interactieve deel van het onderwijs door de computer.

Vooralsnog gaan we ervan uit dat de onderwijsgevende zelf de onderwijsteugels van het hoofdrekenen in handen houdt, en het onderwijs zoals gezegd vooral in korte mondelinge lesjes realiseert. Wat overigens niet wegneemt dat computerondersteund onderwijs daarbij zeker een plaats als hulponderwijzer kan verwerven.

fase van de consolidatie en uitbreiding

Het maken van toepassingen gebeurt in alle fasen. In de fase van *uitbreiding* gaat het echter speciaal om toepassingen die al wat buiten het besloten terrein van de tientafels liggen en in de richting van het hoofdrekenen en het cijferen gaan. In fig.12 werd de opgave 12×7 reeds als onderzoeksprobleem voorgesteld. De kracht van de werkwijze van het afsplitsen bij tien, dat bij het hoofdrekenen en later bij het cijferen zo'n belangrijke rol gaat spelen, kan hier reeds worden ontdekt. Het rechthoeksmodel beeldt mooi uit dat 12×7 makkelijk via 10×7 plus 2×7 kan worden uitgerekend, en 6×14 via 6×10 en 6×4 . Kinderen kunnen de kracht van tien-keer echter pas waarderen indien ze de gelegenheid krijgen ook hun eigen, soms minder efficiënte oplossingen te geven. Daarnaast moeten ze leren dat tafels tevens bij het uitrekenen van deeltkomsten goed kunnen functioneren. Elementaire contextopgaven vormen ook hier weer de concrete ondergrond. Hoe één en ander bij een contextopgave als 'zes vrachtauto's met ieder veertien bomen' uitpakt, staat in het knipsel van fig.13.¹



figuur 13: Vier oplossingen bij een contextopgave 6×14 (Steinvoorte)

In de nabespreking van dit werk (of nog wat later) zou de vraag naar de handigste werkwijze en het meest doelmatige gebruik van de tafelkennis aan de orde kunnen komen. Het rechtshoekspatroon duidt daar op.

Niet alleen echter de berekeningswijze maar ook de spanwijdte van de toepassingen wordt in deze fase weer vergroot. Dat wil zeggen dat de rijkdom van de verschijningsvormen van vermenigvuldigen en delen steeds ruimer aan bod komt. Wat dat inhoudt beschrijven we direct.

samenvatting

Ziehier een schets van de reconstructie-didactiek. De meerwaarde ervan ten opzichte van de reproductie-methodiek ligt kort samengevat:

- in de introductiefase van de begripsvorming;
- in de reconstructiefase waarin de kernpunten twee keer, tien keer en vijf keer worden gelegd bij het memoriseren, plus strategieën worden geleerd van één-maal-meer, één-maal-minder, verdubbelen en de omkeerregel, teneinde het handige rekenen en memoriseren te bevorderen;
- in het gericht en doelmatig oefenen in de reproductiefase via vooral ook korte, mondelinge lesjes (tafellectie);

- in het uitbreiden van de tafels boven de tien en het verbreden van de toepassingen van de basisoperaties vermenigvuldigen en delen;
- allemaal onderdelen die in de reproductie-methodiek weinig of geen aandacht krijgen, zeker niet volgens het reproduceren naar mechanistische opzet, zoals dat vanaf omstreeks 1960 in methoden gestalte heeft gekregen.

(... en kan deze kennis toepassen)

In het voorgaande lag de aandacht vooral bij vermenigvuldigen. Daarom zal nu het delen wat meer naar voren worden gehaald. Net als bij het optellen en aftrekken beschreven bij doelstelling 1, zal iets over de *structuur van de bewerkingen*, de *aard van de getallen* en de *context van de toepassinssituaties* worden opgemerkt.

1. *Er worden 24 mensen per auto vervoerd. In iedere auto kunnen er vier. Hoeveel auto's zijn er nodig?*
2. *Van een touw van 24 meter worden stukken van 4 meter geknipt. Hoeveel stukken kunnen eruit gehaald worden?*
3. *Er worden 24 bananen eerlijk verdeeld over 4 even grote groepen kinderen. Hoeveel bananen krijgt iedere groep?*
4. *Een wandelroute van 24 kilometer wordt in 4 gelijke etappes afgelegd. Hoe lang is ieder stuk?*
5. *Een rechthoekig patroon van 24 boompjes heeft 4 boompjes in iedere rij. Hoeveel rijen bevat de rechthoek?*
6. *Een rechthoekig terras heeft een oppervlakte van $24m^2$. De breedte is 4 meter. Hoe lang is het terras?*

Opgave één en twee hebben de zogenoemde *structuur* van de verhoudingsdeling. Daarbij gaat het om het bepalen van een aantal groepjes die ieder een bepaalde hoeveelheid in zich hebben - delen als opdelen dus.

Opgave drie en vier bevatten een verdelingsdeling. Hier gaat het om het bepalen van het aantal per groepje: er is sprake van een of andere vorm van eerlijk verdelen - delen als verdelen.

Dat deze klassieke tweedeling niet geheel bevredigend is, blijkt uit de opgaven vijf en zes. Op het eerste gezicht hebben we in opgave vijf met een verhoudingsdeling te doen (hoeveel groepjes van vier). De verdelingsdeling zou hier deze vorm hebben: 'Een rechthoekig patroon van 24 boompjes heeft vier rijen. Hoeveel bomen staan er in één rij?' Maar vanwege de 'symmetrie' van het rechthoekspatroon is dit eigenlijk precies hetzelfde probleem. Anders gezegd: je kunt de verhoudings- en verdelingsvormen verwisselen en in de ene de ander lezen. Kortom, het onderscheid valt weg. Er is eigenlijk geen sprake van verdelen of opdelen maar gewoon van delen als omgekeerd vermenigvuldigen - zie hier de drie grondstructuren van de delingsbewerking. Alle dienen in het onderwijs een plaats te krijgen in verband met de toepasbaarheid van de rekenvaardigheid.

Dan de *aard van de getallen*. In de opgaven één, drie en vijf hebben we met aantallen van doen en in twee, vier en zes met meetgetallen. In opgave zes wordt de oppervlakte-grootte 'vierkante meter' door de lengte-grootte 'meter' gedeeld, een operatie die begripsmatig specifieke moeilijkheden met zich meebrengt. Algemeen gesteld: wat betekent het als je afstand door tijd deelt, of afstand door benzinegebruik, of oppervlakte door aantal inwoners, etc.? Indien je de delingsoperatie uitgevoerd hebt, moet je je goed realiseren waar de uitkomst van de samengestelde grootte precies op slaat. In de vraag van de opgave ligt trouwens vaak het antwoord op de bedoelde grootte besloten. Hetzelfde geldt voor de aantallen en de benoemde getallen in de

andere opgaven. In het onderwijs moet de verschillende aard van de getallen tot uitdrukking komen ten behoeve van de toepasbaarheid.

De grote invloed van de *context* op het rekenen komt als een duveltje uit een doosje tevoorschijn als we in de gestelde opgaven het getal 24 vervangen door 26. We plaatsen deze nieuwe opgaven in de omlijsting van fig.14. De antwoorden zijn contextafhankelijk en hangen samen met de zojuist geschetste delingsstructuur en de aard van de getallen: 7 ; 6 ; $6\frac{1}{2}$; 6,5 ; 6 rest 2 (?) ; 6,5.

1. Er worden 26 mensen per auto vervoerd. In iedere auto kunnen er 4.
Hoeveel auto's zijn er nodig?
2. Van een touw van 26 meter worden stukken van 4 meter geknipt.
Hoeveel stukken kunnen eruit gehaald worden?
3. Er worden 26 bananen eerlijk verdeeld over 4 even grote groepen.
Hoeveel bananen krijgt iedere groep?
4. Een wandelroute van 26 kilometer wordt in 4 gelijke etappes afgelegd.
Hoe lang is ieder stuk?
5. Een rechthoekig patroon van 26 boompjes heeft 4 boompjes in iedere rij.
Hoeveel rijen heeft de rechthoek?
6. Een rechthoekig terras van 26 m^2 heeft een breedte van 4 meter.
Hoe lang is het terras?

figuur 14: Is $26 \div 4$ hier 7; 6; $6\frac{1}{2}$; 6,5; of 6 rest 2?

Laten we ons commentaar tot de eerste opgave over het autovervoer beperken.

Uit een uitgebreid Amerikaans onderzoek blijkt dat drie procent (!) van de negenjarigen die een zakrekenmachine ter beschikking hadden, deze opgave correct oplosten. Een soortgelijk probleem met wat grotere getallen ($1340 \div 24$) werd door zes procent van de dertienjarigen met een zakrekenmachine goed gemaakt en door 29 procent zonder rekenmachientje!² Naar aanleiding van deze gegevens merkt Whitney het volgende op:

'Ik vertelde Jonathan (5;6) een verhaal waarop ik later terugkom, over 26 kinderen die een dagje uit gingen. Ze zouden in verschillende auto's gaan. In iedere auto was plaats voor vier kinderen. Mijn vraag luidde: 'Hoeveel auto's zijn er nodig?' Eerst suggereerde ik kinderen voor te stellen met vingers. Hij begon met zijn vingers groepjes van vier te maken, maar er waren geen auto's bij de hand. Dus tekende ik een rechthoek die een auto moest voorstellen en plaatste er een cirkel (een kind) in. Hij plaatste er drie andere in en telde ze alle vier. Toen tekende hij nog een auto, deed er vier kinderen in en telde ze alle acht en zo ging hij door. Tenslotte deed hij twee kinderen in de laatste auto en telde ze alle 26.

Maar de auto's moeten kunnen rijden - dacht hij kennelijk - dus tekende hij vier wielen aan (een zijde van) elke auto, schakelde ze vervolgens aan elkaar en maakte er een trein van. Intussen was hij zijn oorspronkelijke vraag 'hoeveel auto's?' vergeten. Maar toen ik hem daarnaar vroeg, telde hij de auto's en vond als antwoord zeven.'

'Kunnen kinderen zelfstandig problemen oplossen? Natuurlijk, als ze daartoe in de gelegenheid worden gesteld en worden aangemoedigd, zoals Jonathan met de '26 kinderen, 4 per auto'. Maar als schoolprobleem is dit ver verwijderd van het normale van buiten leren in de hogere leerjaren.'

'Deze voorbeelden ondersteunen de stelling, dat al in de basisschool de attitude ontstaat dat wiskunde niets met het leven buiten de school te maken heeft.'³

Tot zover Whitney.

Hoe noodzakelijk het is aan de toepasbaarheid van de basisoperaties nadrukkelijk aandacht te besteden door de kinderen ook met een veelheid van situaties in aanraking te brengen, blijkt overigens ook uit de resultaten van het Nederlandse periodieke peilingsonderzoek van het Cito. Met memoriseren van tafels, of algemener, met louter rekenvaardigheid alleen zijn we er niet - de zojuist gegeven cijfers kunnen wat dat aangaat niet duidelijker spreken. De eerder beschreven reconstructiemethode dient dan ook mede vanuit de gestelde realistische doelen omtrent toepasbare rekenvaardigheden te worden begrepen.

Tot zover de integrale tekst van de eerste twee onderdelen van het hoofdstuk over basisvaardigheden. Van de resterende doelstellingen geven we slechts een hele korte samenvatting van de basistekst.

doelstelling 3

De leerling maakt elementaire hoofdrekenopgaven vlot, handig en inzichtelijk. Deze betreffen:

- optellen en aftrekken onder de honderd (duizend);
- vermenigvuldigen en delen als uitbreiding van de tafels, waaronder het rekenen met 'nullen';
- en andere opgaven waarin handig gebruik kan worden gemaakt van elementaire eigenschappen zoals die van:
 - verwisselen ($23 \times 8 = 8 \times 23$)
 - verdelen ($8 \times 23 = 8 \times 20 + 8 \times 3$)
 - compenseren ($8 \times 23 = 4 \times 46 = 2 \times 92$)
 - transformeren ($8 \times 23 = 8 \times 25 - 8 \times 2$)
 - nullen rijgen ($20 \times 300 = 6000$)

Wat in het werkboek onder B3 werd aangeduid als elementair hoofdrekenen en onder B5 onder hoofdrekenen-plus is, met uitzondering van het schattend rekenen, hier samengevat in één doelstelling. Schattend rekenen is in een aparte doelstelling gevat. In beide gevallen is het kunnen toepassen expliciet in de doelformulering opgenomen - dit in navolging van respons op het werkboek.

Met deze tweedeling wordt meer aangesloten op de internationaal gebruikelijke terminologie en trouwens ook op wat hier te lande van oudsher gangbaar is. Inhoudelijk gezien is de lijn van het werkboek echter gehandhaafd c.q. verder doorgetrokken. In de formulering van de doelstelling komen de verschillende aspecten van hoofdrekenen tot uiting.

De tekst van de 'Proeve van een nationaal programma' ziet er in grote lijnen als volgt uit. In de inleiding wordt de term hoofdrekenen nauwkeurig omschreven. Enkele onderzoeksgegevens worden verstrekt. In paragraaf 1 worden eerst verschillende methoden van cijferend optellen en aftrekken behandeld en gewogen. Daarna gebeurt hetzelfde met vermenigvuldigen en delen. In paragraaf 2 schetsen we de vijf belangrijkste onderwijsprincipes van hoofdrekenen. Daarin komen onder meer de meest bruikbare opgaven-typen voor mondelinge lesjes aan bod. In de afsluitende paragraaf wordt nog wat over toepassingen geschreven. De totale lengte van de toelichtende tekst is ongeveer even lang als die van doelstelling 2.

doelstelling 4

De leerling kan schattend rekenen, dat wil zeggen:

- kan de uitkomst van een berekening betrekkelijk eenvoudig ruwweg bepalen;

- is in staat de uitkomst van een berekening globaal te controleren qua juiste orde van grootte;
- opereert verstandig met niet-exact of quasi-exact bepaalde gegevens dan wel met ervaringsfeiten die niet zomaar zijn aangereikt maar zelf opgediept dienen te worden;
- of combinaties van deze elementen betreffende het passend omgaan met benaderingen, afrondingen en schattingen van getallen en bewerkingen in allerlei min of meer alledaagse toepassingssituaties.

Eerst volgt een analyse van wat schattend rekenen is, toegelicht met enkele sprekende voorbeelden. In paragraaf 1 komen de prestaties op dit terrein in de schijnwerpers. Opzienbarende onderzoeksgegevens passeren de revue. In paragraaf 2 wordt een samenvattende beschrijving gegeven van het (aan ons) enige bekende programma waarin hoofdrekenen en schattend rekenen een funderende plaats innemen - een programma uit de jaren dertig. In paragraaf 3 worden vier onderwijsprincipes en vier categorieën opgaven besproken. En in de slotparagraaf wordt de betekenis van schattend rekenen als didactisch middel (en niet alleen als doel) nog eens belicht - dit in aansluiting op wat daarover ook reeds in het werkboek werd opgemerkt.

De tekst die verluchtigd is met vele voorbeelden en enkele snapshots uit de klas, sluit zoals gezegd aan bij wat er in het werkboek over werd geschreven en is erop gericht het schatten praktisch realiseerbaar te maken. Want vooral op dat laatste werd in de respons nogal aangedrongen.

De tekst is ongeveer anderhalf keer zo lang als die van doelstelling 1. Geheel in de lijn van de geleverde respons en de hoge mate van instemming met de Werkboektekst wordt in de 'Proeve van een nationaal programma' groot gewicht aan zowel het hoofdrekenen als het schattend rekenen toegekend. We gaan er voorshands vanuit dat één en ander ook in de te formuleren eindtermen tot uitdrukking zal komen.

doelstelling 5

Tot de basisvaardigheden behoort ook het kunnen toepassen van de basisbewerkingen in elementaire contextsituaties waarbij de tafels, het hoofdrekenen en het schattend rekenen betrokken zijn. Het gaat daarbij zowel om enkelvoudige toepassingsproblemen waarin één basisoperatie vervat ligt als om samengestelde opgaven met verschillende bewerkingen van natuurlijke getallen.

In de inleiding van de toelichtende tekst wordt geschreven over de (relatieve) moeilijkheidsgraad van toepassingsproblemen waarin de verschillende basisbewerkingen vervat liggen. In paragraaf 1 schetsen we vorm, inhoud en functie van tekstopgaven. De tekst van B1 uit het werkboek wordt in grote lijnen gevolgd en hier en daar wat uitgebreid. In paragraaf 2 wordt de vorm van contextopgaven onder de loep genomen, in paragraaf 3 de inhoud, en in paragraaf 4 de functie. In paragraaf 5 wordt een uitbreiding aan de typen opgaven gegeven. Er wordt gepleit voor het opnemen van niet-stereotype vraagstukken en het maken van eigen produkties. Voorbeelden uit de onderwijspraktijk van de hand van J. van den Brink en N. Querelle illustreren één en ander. De totale tekst van doelstelling 5 is anderhalf keer zo lang als die van doelstelling 1.

Al met al omvat de gehele tekst van hoofdstuk 1 'Basisvaardigheden' in de 'Proeve ...' ongeveer veertig gedrukte pagina's, zo het er nu naar uitziet.

Maar... de respons in tweede ronde brengt daar misschien wel weer verandering in, wie weet. Wij zijn in ieder geval benieuwd naar uw reacties op zowel de vorm waarin we

de 'Proeve van een nationaal programma' willen gieten als de inhoud waarmee deze gevuld zal worden. Met name de inhoud van de onderdelen die nogal nieuw of behoorlijk bewerkt is, in dit geval het onderdeel tafels, zoals voorlopig neergelegd in doelstelling 1 en 2.

Noten

1. Diels, A.P.A., J. Nauta en E.H. Zandvoort: *Fundamenteel Rekenen*, deel 6, Wolters, Groningen 1951, pag.33.
2. Knipsel uit NRC-Handelsblad van 25 april 1985.
3. Carpenter, T.P. e.a.: *Results from the second Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress*, NCTM, Reston 1981, pag.20.
4. *ibid.*
5. Enkele voorbeelden van onderzoek:
Brownell, W.A. en C. Chazal: The effects of premature drill in third-grade arithmetic, in *Journal of Educational Research*, 29, 1935, pag.17-28.
Thornton, C.A.: Emphasizing thinking strategies in basic facts instruction, in *Journal for Research in Mathematics Education*, 9, 1978, pag.214-227.
6. Bekende didactici en psychologen als Kühnel, Wittmann, Brownell, Wertheimer en Karaschewski hebben de sleutelfunctie van de vijf-structuur beklemd. Onlangs heeft de bekende wiskundige Whitney nog eens op het belang ervan gewezen.
In Nederland zijn het recent D. van Eerde en W. van den Berg van het 'Kwantijzerproject' die op het belang van de vijf-structuur gewezen hebben. Men kan echter op verschillende manieren van die structuur gebruikmaken, zoals uit het vervolg zal blijken.
7. Hatano, G.: Learning to add and subtract: a Japanese perspective, in *Addition and Subtraction: a cognitive perspective*, (T.P. Carpenter, J.M. Moser en T.A. Romberg, eds.), Lawrence Erlbaum, Hillsdale 1982, pag.211-224.
Flexer, R.J.: The Power of Five: the Step before the Power of Ten, in *The Arithmetic Teacher*, 34, 1986, pag.5-10.
8. In de vorige eeuw gebruikte de Duitse didacticus Born dergelijke getallenbeelden reeds, en in de eerste helft van deze eeuw zag men ze bij Kühnel en Wittmann.
9. Zie:
Goffree, F.: *Wiskunde en didactiek* (deel 1), Wolters-Noordhoff, Groningen 1982, pag.76 e.v.
10. Zie voor informele werkwijzen:
Carpenter, T.P., J.M. Moser en T.A. Romberg (eds): *Addition and Subtraction: a cognitive perspective*, Lawrence Erlbaum, Hillsdale 1982.
Ginsburg, H.: *Children's Arithmetic: the learning process*. Van Nostrand, New York 1977.
Carraher, T.N., D.W. Carraher en A.D. Schliemann: Mathematics in the streets and in schools, in *British Journal of Developmental Psychology*, 3, 1985, pag.21-29.
11. Hart, K.M.: *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*, John Murray, London 1981, pag.25 e.v.
12. Foxman, D.: *Mathematical Development. Assessment of Performance Unit (APU)*, HMSO, London 1980.
Carpenter, T.P. e.a.: *Results from the Second Mathematics Assessment*, NCTM, Reston 1981.
13. De terminologie van de tweedeling is ontleend aan:
Baroody, A.J.: Mastery of Basic Number Combinations: Internalization of Relationships or Facts?, in *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 1985, pag.83-98.
14. Zie in dit verband:
Heege, H. ter: Tafels leren met 'naar zelfstandig rekenen', in *Willem Bartjens*, 3, 1983-'84, pag.115-124.
15. De indeling die in de tekst gevolgd wordt is een 'strakke' variant van wat in de volgende zeer informatieve vakliteratuur is beschreven. Daarin komt de nadruk soms sterk op begripsvorming en toepassingen te liggen, en wat minder op het inslijpen.
Rathmell, E.C.: Using Thinking Strategies to Teach the Basic Facts, in *Developing*

- Computational Skills*, (M.N. Suydam en R.E. Reijs eds.), NCTM, Reston 1978, pag.13-39.
- Heege, H. ter: Tafels leren: een kwestie van drillen?, in *Willem Bartjens*, 4, 1984-'85, pag.19-23.
- Een bespreking van het laatstgenoemde vindt men in het volgende artikel, waaruit overigens ook de opzet van de onderhavige toelichting op doelstelling 2 begrepen kan worden.
- Treffers, A.: Het leren van de tafels van vermenigvuldiging, in *Willem Bartjens*, 6, 1986-'87, pag.138-143.
16. Carpenter, T.P. e.a.: *Results from the Second Mathematics Assessment*, NCTM, Reston 1981, pag.100.
 17. De opzet is ontleend aan:
Heege, H. ter: The acquisition of basic multiplication skills, in *Educational Studies in Mathematics*, 16, 1985, pag.375-389.
 18. Zie als voorbeelden:
Klep, J.: Een wereld rond tafels, in *Willem Bartjens*, 6, 1986-'87, pag.145-152.
Galen, F. van: Hoofdrekenen op de computer, in *Willem Bartjens*, 6, 1986-'87, pag.173-181.
In eerdere jaargangen van *Willem Bartjens* staan nog meer bijdragen van de hand van Klep, Van Galen, Meeuwisse en Gilissen. Ze betreffen voornamelijk voorwerk van de hierboven gepresenteerde programma's.
 19. Steinvoorte, S.: Tafels een kwestie van drillen of ... kan het nog anders?, in *Jeugd, School en Wereld*, 71, 1986, pag.44-47.
 20. Carpenter, T.P.: *Results from the Second Mathematics Assessment*, NCTM, Reston 1981, pag.126.
 21. Whitney, H.: Verantwoord wiskundeonderwijs, in *Willem Bartjens*, 6, 1986-'87, pag.90 en 92.
Verschillende gegevens uit het interessante Cito-onderzoek betreffende de Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau in groep acht zullen in de definitieve versie van de 'Proeve van een nationaal programma' worden opgenomen, nadat ze in het najaar van 1987 voor publikatie worden vrijgegeven.