Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (2)

A. Treffers, E. de Moor en E. Feijs

Inleiding

In de eerste aflevering over de proeve van een nationaal programma zijn we ingegaan op het onderdeel basisvaardigheden.
Na de inleiding op dit gebied kwamen vijf doelstellingen aan de orde. Van de eerste twee doelstellingen, namelijk die betreffende de tafels van optellen en aftrekken en de tafels van vermenigvuldigen en delen, is de bijbehorende tekst integraal gepubliceerd. Wat betreft de overige doelstellingen werd volstaan met een samenvatting. Zoals we gehoopt hadden heeft dit een aantal reacties opgeroepen die elders in dit tijdschrift zijn opgenomen.
De reacties hebben ons gesterkt in het idee dat het zinvol is op onderdelen een tweede responsronde in te lassen. Vandaar dat we nu de didactische uitwerking van de derde doelstelling (betreffende hoofdrekenen) in zijn geheel opnemen. We roepen wederom onderwijsgevenden, opleiders, begeleiders, ontwikkelaars, onderzoekers en andere deskundigen op hun licht over de inhoud van de proeve van een nationaal programma te laten schijnen.

doelstelling 3

De leerling maakt elementaire hoofdrekenopgaven vlot, handig en inzichtelijk. Deze betreffen:

- **optellen en aftrekken onder de honderd (duizend);**
- **vermenigvuldigen en delen als uitbreiding van de tafels, waaronder het rekenen met 'nullen';**
- **en andere opgaven waarin handig gebruik kan worden gemaakt van elementaire eigenschappen zoals die van:**
  - **verwisselen ($23 \times 8 = 8 \times 23$);**
  - **verdelen ($8 \times 23 = 8 \times 20 + 8 \times 3$);**
  - **compenseren ($8 \times 23 = 4 \times 46 = 2 \times 92$);**
  - **transformeren ($8 \times 23 = 8 \times 25 - 8 \times 2$);**
  - **nullen rijgen ($20 \times 300 = 6000$).**

(en kan deze vaardigheid toepassen).

Hoofdrekenen staat in de vakdidactiek niet voor rekenen-uit-het-hoofd als tegenstelling tot rekenen-op-schrift, maar geldt van oudsher als de tegenvoeter van het cijferen, als flexibel rekenen versus rekenen volgens standaardmethoden. De hoofdrekenopgave 90×70 bijvoorbeeld zou niet cijferend uitgerekend moeten worden:

$$\begin{array}{r} 70 \\ 90 \\ \hline 00 \\ 630\,. \\ \hline 6300 \end{array} \times$$

Niet op het papier (schriftelijk) en niet op het plafond (uit het hoofd). In het laatste

geval rekent men weliswaar mentaal doch niet bij wijze van hoofdrekenen. Het is trouwens in dit geval onhandig. En hoofdrekenen is nu juist *handig* rekenen, en wel in die zin dat daarbij efficiënt gebruik wordt gemaakt van parate kennis, rekenwetten, bijzonderheden van getallen en relaties ertussen. In ons voorbeeld: $9 \times 7 = 63$, dus $90 \times 70 = 6300$, twee nullen erachter en klaar.
Maar blijkbaar is het toch niet zo simpel. Uit onderzoek in de Verenigde Staten bleek dat slecht 55 procent van de zeventienjarigen 90×70 uit het hoofd kon uitrekenen.[1] Het is maar de vraag of in Nederland de score veel hoger zal liggen, gelet op de geringe aandacht die er de laatste decennia ook hier aan hoofdrekenen werd besteed.
Er zijn echter drie redenen om het hoofdrekenen juist wel aan te prijzen. Ten eerste blijkt uit onderzoek dat het overgrote deel van het rekenwerk in het leven van alledag uit hoofdrekenen en schattend rekenen bestaat, waarbij geen standaardmethoden van het cijferen worden gebruikt.[2] Hoofdrekenen heeft dus praktische waarde. Ten tweede hanteren kinderen bij het oplossen van vraagstukjes vaak informele werkwijzen.[3] Handig rekenen sluit daar goed op aan en benut die 'natuurlijke' aanpak op doelmatige wijze. Hoofdrekenen is derhalve van persoonlijke waarde. Ten derde voegt hoofdrekenen een nieuwe dimensie aan het rekenen toe.[4] Namelijk die van het niet-mechanistische, inzichtelijke, flexibele, probleemgerichte opereren binnen het getalsysteem. Het heeft daarom ook wiskundige waarde. Ziehier de drie meest gebruikte argumenten voor het opnemen van het hoofdrekenen in de recente leerplannen van veel westerse landen. Onderzoeksresultaten staven in toenemende mate de argumentatie.[5]
Overigens wordt het gewicht van hoofdrekenen niet alleen door vakdidactici maar ook door ouders en leraren hoog ingeschat[6] - duidelijk hoger dan cijferen.
In het volgende lichten we eerst de inhoud van de genoemde onderdelen van het hoofdrekenen toe. Daarna worden de funderende onderwijsprincipes beschreven.

Optellen en aftrekken onder de honderd kan cijferend:

	5
1	1
38	$\cancel{6}3$
25	38
— +	— -
63	25

Kenmerkend voor deze aanpak is dat met afzonderlijke getallen volgens bepaalde verkeersregels wordt gewerkt. Je kunt zodoende rekenen zonder het minste benul van de grootte van de getallen. In feite werk je per kolom en eigenlijk doet het aantal kolommen er niet toe, want je rekent steeds volgens dezelfde procedure. Dat automatische schakelen is juist de kracht van het cijferen, maar tegelijk ook de zwakte. Bij $51 - 49$ en $101 - 99$ blijkt bijvoorbeeld de zwakte: wat in de grond nogal simpel is wordt zo ineens lastig.
Nu is in Nederland die cijferende aanpak voor het rekenen onder de honderd, in tegenstelling tot bijvoorbeeld de Verenigde Staten, ook niet erg gebruikelijk. Gelukkig niet, zoals gezegd, want ze is ondoelmatig, ver van de alledaagse manier van rekenen, mechanistisch, en niet rechtstreeks op de ware grootte van de getallen gericht. Er zijn hier hoofdzakelijk twee andere onderwijsmethoden in gebruik.
De eerste lijkt op die van het cijferen maar rekent van voor-naar-achter:

38 + 25

1. tel tientallen op ($30 + 20 = 50$);
2. tel eenheden op ($8 + 5 = 13$);
3. tel twee uitkomsten op ($50 + 13 = 63$).

De tweede methode werkt met sprongen van tien vanaf het eerste getal:

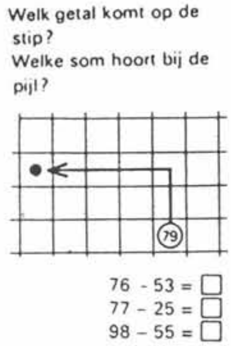
38+25

1. tel tientallen van het tweede getal bij het eerste (38 + 20 = 58);
2. tel de eenheden van het tweede getal bij eerste uitkomst (58 + 5 = 63).

(Naast deze 'vaste' methoden staan 'losse' werkwijzen van handig rekenen die zich aanpassen bij de specifieke gevallen, getallen en hun relaties.)

De eerste methodiek is, zoals gezegd, weliswaar vrijwel identiek met de cijferaanpak, maar heeft ten opzichte van deze het voordeel dat de orde van grootte van de uitkomst van meet af aan in zicht komt. Een schijnbaar futiel voordeel, dat echter met name bij het schattend rekenen van groot gewicht is. Maar voor het hoofdrekenen, waar het immers om de exacte uitkomst gaat, zitten aan deze methode toch ook wat nadelen. Ten eerste is de belasting van het werkgeheugen door het vooraf moeten uitvoeren van twee gescheiden deelbewerkingen tamelijk groot. En ten tweede gaat de methodiek voor het aftrekken helaas niet op (63 − 38 geeft problemen en leidt bij veel kinderen al gauw naar 35!).
De tweede methodiek heeft dezelfde voordelen als de eerste, maar niet de nadelen ervan. Het werkgeheugen wordt hier minder belast, omdat er geen twee gescheiden voorberekeningen gemaakt worden. En de werkwijze is ook voor aftrekken bruikbaar: 63 − 38 = 33 − 8 = 25. Of indien men aftrekken via de winkelmethode van optellen uitvoert: 38 + 20 + 5, een manier die eveneens spoort met het optellen volgens sprongen. Al met al lijkt deze aanpak dus efficiënter dan de splits-methode. Onderzoek bevestigt dit ook.[7]
Men kan bij het aanleren van de sprongmethodiek in eerste ronde uitstekend gebruik maken van het honderdveld. En vervolgens van een notatieschema dat naar het (gedachte) honderdveld verwijst, als tussenstap naar het volledig uit het hoofd rekenen (zie fig.1).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



figuur 1: Optellen en aftrekken met sprongen op het honderdveld

Datzelfde honderdveld kan overigens ook heel goed als ondergrond dienen om flexibele methoden (38 + 25 = 40 + 23 bijvoorbeeld) te leren hanteren, dus om de vaste sprongprocedure weer wat open te breken. Vooral de compensatiemethode van 'hier wat bij en daar wat af' (bij optellen) en de winkelmethode van het bijtellen of op-tellen (bij aftrekken) kunnen makkelijk op het honderdveld worden uitgelegd en uitgevoerd - eerst op het concrete vlak en dan al snel op het gedachte honderdveld.
Nu nog wat over *vermenigvuldigen* (en *delen* als op-vermenigvuldigen).
Neem bijvoorbeeld de opgave 8 × 74. Natuurlijk kan deze cijferend van achter-naarvoor uit het hoofd worden berekend: 8 × 4 = 32, 2 in gedachten noteren, 3 onthouden .... Op zich niet bezwaarlijk. Maar het kan bij niet-schriftelijk rekenen ook anders, en wel

van voor-naar-achter rekenend, net als straks bij het optellen dus.

8×74

1. vermenigvuldig de eerste factor met het tiental uit de tweede ($8 \times 70 = 560$);
2. vermenigvuldig de eerste factor met de eenheden uit de tweede ($8 \times 4 = 32$);
3. tel de uitkomsten op ($8 \times 74 = 592$).

En evenals bij het optellen geldt dat de uitkomst qua orde van grootte al snel binnen bereik komt, wat met name ook voor het goed leren schatten meetelt.

8×79

1. rond de tweede factor af op een tiental ($79 \rightarrow 80$);
2. vermenigvuldig de eerste factor met het tiental ($8 \times 80 = 640$);
3. vermenigvuldig de eerste factor met het verschil uit de afronding (8×1);
4. trek de uitkomsten van elkaar af ($640 - 8 = 632$).

48×25

1. deel de eerste factor door twee en vermenigvuldig de tweede ter compensatie met twee (24×50);
2. herhaal dit (12×100);
3. pas de nullen-regel toe of beter, reken redenerend met nullen (1200).

Deze opgave kan overigens ook met een combinatie van de eerste en tweede aanpak worden opgelost. In deze voorbeelden van de voornaamste vermenigvuldig-strategieën worden de eigenschappen van verwisselen, verdelen, compenseren, transformeren en nullen rijgen op passende wijze gebruikt. In dat 'passende' zoeken en vinden zit voor een belangrijk deel de handigheid van het hoofdrekenen, de rest is vooral een kwestie van vaardigheid. Hoe kunnen we kinderen helpen zowel het één als het ander doelmatig te verwerven?

De belangrijkste onderwijsprincipes van het hoofdrekenen

onderwijsprincipe 1

In het algemeen zal het dagelijkse hoofdrekenwerk kort moeten zijn. De lesjes zijn interactief, dat wil zeggen dat er geregeld uitwisseling van ideeën plaatsvindt. Oplossingsstrategieën worden nabesproken en gewogen. Wat zijn de handigste werkwijzen bij 24×25? Waarom is $20 \times 20 + 4 \times 5$ hier verkeerd? Wat te denken van $24 \times 100 \div 4$?

....

Het hoofdrekenwerk is verbonden met datgene wat in het betreffende leerjaar speciaal de aandacht krijgt. Procenten, meten, kommagetallen, dat alles kent een component van hoofdrekenen. Wij bepalen ons hier echter tot het deel dat in nauw verband staat met de basisbewerkingen van natuurlijke getallen, dus tot wat vooral in de onder- en middenbouw plaatsvindt - de getalvoorbeelden liggen dus voornamelijk op dat terrein.

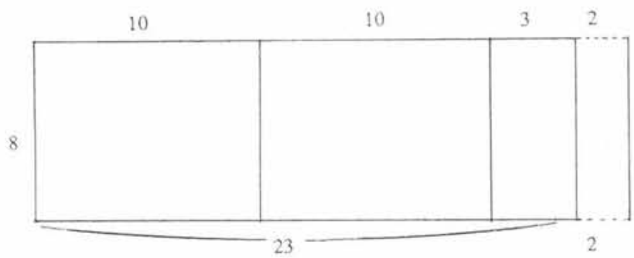
onderwijsprincipe 2

Het is noodzakelijk de verschillende methoden van het hoofdrekenen inzichtelijk te onderbouwen.

Op zich zijn deze ook niet zo lastig te demonstreren en in te zien.

De compensatieregel van het optellen (hier wat bij en daar wat af) is duidelijk te maken door twee latjes achter elkaar te leggen. De regel dat je bij het aftrekken van beide termen evenveel mag afhalen, is met twee latjes naast elkaar zo te zien. De winkelmethode van aftrekken via op-tellen kan op dezelfde manier gedemonstreerd worden.

Eigenschappen van vermenigvuldigen (en delen als op-vermenigvuldigen) zoals die van het verwisselen ($8 \times 23 = 23 \times 8$), verdelen ($8 \times 23 = 8 \times 20 + 8 \times 3$) en transformeren ($8 \times 23 = 8 \times 25 - 8 \times 2$) zijn overtuigend met behulp van het rechthoeksmodel aan te tonen (zie fig.2). Dat er met tien keer ... één nul bij komt, slordig gezegd, en met honderd keer ... twee extra nullen verschijnen, wordt ineens met de wisseltruc duidelijk: $10 \times 23 = 23 \times 10$, dat zijn 23 tienen dus 230 (eventueel met de abacus erbij). De regel van het nullen rijgen is natuurlijk snel geleerd. Blinde toepassing leidt echter makkelijk tot fouten. Bijvoorbeeld bij 50×80 (400). En later bij kommagetallen.



$23 \times 8 = 8 \times 23$
$8 \times 23 = 8 \times 20 + 8 \times 3$
$8 \times 23 = 8 \times 25 - 8 \times 2$

figuur 2: 23×8 via het rechthoeksmodel

Het is dus noodzakelijk om de bronnen van het inzicht niet alleen open te leggen, maar ze ook open te houden. De eerdergenoemde interactieve aanpak biedt daartoe ruimschoots mogelijkheden, met name bij het nabespreken van verschillende oplossingen en handigheidjes.

onderwijsprincipe 3

Bij de dagelijkse oefeningen dienen de opgaven zowel schriftelijk als mondeling gevarieerd te worden aangeboden. In de moderne methoden treft men dan ook een staalkaart van alle mogelijke schriftelijke opdrachtvormen aan: sommenrijtjes, pijldiagrammen, tabellen, machientjes, getallenmolens, getallenblokken, doolhoven, geheimschriften - te veel om te tonen. En dan spelletjes natuurlijk en ook toepassingen - we komen daar zo op. We beperken ons nu tot voorbeelden die laten zien hoe gewone sommenrijtjes snel en effectief in korte mondelinge sessies kunnen worden gebruikt. Vlugge beantwoording, controle en correctie staan daarin voorop:

- completeren tot honderd (duizend):
  - 71
  - 36
  - 84
- kettingsommen, waarvan de uitkomsten met elkaar verbonden zijn:
  - $8 \times 15 = 120$; $16 \times 15 =$
  - $4 \times 27 = 108$; $40 \times 27 =$
  - $30 \times 40 = 1200$; $1200 \div 40 =$
- goed-fout sommen, waarvan de leerling via een afgesproken teken te kennen geeft of ze al dan niet juist zijn:
  - $700 + 320 = 820$
  - $462 + 209 = 661$
  - $50 \times 800 = 4000$
- grenssommen, waarin bepaald wordt of uitkomsten al dan niet binnen bepaalde grenzen vallen (100 – 200 bijvoorbeeld) - geef aan ja of nee:
  - $7 \times 14 =$
  - $7 \times 24 =$
  - $201 - 2 =$

- is-er-een-rest, ja of nee?
  - $450 \div 9 =$
  - $450 \div 90 =$
  - $910 \div 9 =$
- hoeveel cijfers heeft de uitkomst?
  - $27 \times 5 =$
  - $1146 - 293 =$
  - $236 + 686 =$
- welke manier vind je de beste en waarom?
  - $8 \times 29 = 8 \times 20 + 8 \times 9 = 160 + 72 = 232$
  - $8 \times 29 = 4 \times 58 = 2 \times 116 = 232$
  - $8 \times 29 = 8 \times 30 - 8 \times 1 = 240 - 8 = 232$
- vleksommen, kies het goede antwoord:

73	7'
60	3
---- x	--- +
a) 7	a) 700
b) 43	b) 400
c) 4	c) 1090

Enkele van de voorgaande vraagstukken zijn ook bij het schattend rekenen in te delen. Qua rekentechniek komt schatten dan ook sterk met hoofdrekenen overeen. Dat zie je bijvoorbeeld aan de van-voor-naar-achter werkwijze bij het hoofdrekenen die een snelle schatindicatie biedt. Qua begripsmatige achtergrond verschillen beide rekenvormen echter aanzienlijk.
Hoe het ook zij, uit het voorgaande is duidelijk dat hoofdrekenen en schatten door tal van vraag- en oefenvormen gestimuleerd kunnen worden. Vormen die eenvoudige notatie, controle en correctie mogelijk maken en dus makkelijk groepsgewijs te hanteren zijn. Als onderwijsgevenden kunnen we zelf een arsenaal van dergelijk oefenmateriaal ten behoeve van de korte mondelinge sessies opbouwen. De gebruikte methode plus de handleiding kunnen dit werk weliswaar ondersteunen maar zeker niet overnemen. Het gaat immers om interactief onderwijs en niet louter schriftelijke instructie.

onderwijsprincipe 4
Spelletjes verlevendigen het hoofdrekenen en dienen daarom in het onderwijs betrokken te worden. We geven daarvan één sprekend voorbeeld dat in vrijwel alle leerjaren vanaf groep vijf kan worden gebruikt. Namelijk 'Cijfers en letters', om de naam van het bekende TV-spelletje maar aan te houden. Het gaat als volgt.
Er worden twee getallen gekozen (getrokken) uit de verzameling 0-5, en twee uit 6-10. Bijvoorbeeld 3, 1, 6 en 6. Kies vervolgens een doelgetal onder de honderd, zeg 21. De opgave luidt: probeer nu 21 met de vier getrokken getallen te maken. Je mag de hoofdbewerkingen op de getallen en de verkregen deeluitkomsten toepassen. Ieder getrokken getal dient hooguit één keer te worden gebruikt. Mogelijke oplossingen:

- $\underline{6} + \underline{1} = 7 \qquad 7 \times \underline{3} = 21$
- $\underline{6} - \underline{1} = 5 \qquad 5 \times \underline{3} = 15 \qquad 15 + \underline{6} = 21$

Andere opgave bij dezelfde gegevens: welke getallen van één tot duizend kun je met die vier gekozen getallen maken?
Nu een moeilijker vorm van 'Cijfers en letters': kies zes getallen onder de honderd en één doelgetal onder de duizend. Probeer op de geschetste wijze in enkele minuten het

doelgetal te bereiken of er zo dicht mogelijk bij te komen. (Het blijkt bijna altijd min of meer te lukken, maar waarom dat zo is valt moeilijk met hoofdrekenen te verklaren, en is zelfs voor de computer een heel karwei om uit te rekenen.)
Het gaat bij dit spelletje dus om vlug combineren, afschatten, oftewel handig rekenen-op-papier, maar toch zeker ook rekenen-uit-het-hoofd. 'Cijfers en letters' is één spelletje uit vele, maar wel één dat praktisch goed hanteerbaar is en werkzaam voor het beoogde doel.

onderwijsprincipe 5
We dienen bij het hoofdrekenen individuele verschillen te accepteren en zelfs te benutten bij het bespreken van mogelijke strategieën.
Maar wat te doen als bepaalde leerlingen bij het groepswerk steeds achterblijven? Het adagium is dan: *indien het precieze berekenen niet lukt, accepteer dan (aanvankelijk) schattingen.* Deze zijn namelijk vaak vrij eenvoudig via de voor-naar-achter manier van rekenen en het nullen rijgen te verkrijgen.
We moeten de kinderen bij het lange termijn-doel van het hoofdrekenen sterk stimuleren en er vooral voor waken dat de oefensfeer en de groepsgerichte werkvormen niet tot stress-toestanden leiden. Vandaar ook: lukt het niet exact, kies dan aanvankelijk voor de benadering van de uitkomst en juist niet voor de zekere cijfermatige aanpak - althans niet bij hoofdrekenen.
Dit is dus een wat andere werkwijze dan het 'verfijnde' hoofdrekenen in de vroegere opleidingsscholen waar kinderen vele snufjes en trucs leerden. Met dit soort hoofdrekengymnastiek zouden we het hier gestelde doel van het hoofdrekenen volledig voorbij schieten. Dat doel is niet meer dan het leren van elementair handig rekenen, het aankweken van feeling voor getallen en te berekenen uitkomsten, en het verwerven van inzicht in het alledaagse woon-werkverkeer van getallen.... Niet meer, maar ook niet minder.

(... en kan deze vaardigheid toepassen)
Aan de vuist vol onderwijsprincipes dient, gelet op het laatste deel van de doelstelling, uiteraard nog één stelregel te worden toegevoegd, namelijk dat het aan te bevelen is om het hoofdrekenen voortdurend mede in de context van praktische toepassingssituaties te plaatsen.

Bevolking van de aarde komt binnenkort op vijf miljard

Het duurde ruim een eeuw voordat — in 1925 — de wereldbevolking van één op twee miljard kwam. 35 jaar later, in 1960, waren er drie miljard mensen en veertien jaar later, ten tijde van de eerste Wereldbevolkingsconferentie, telde UNFPA de vier miljardste aardbewoner. De vijfmiljardste is binnen dertien jaar bereikt.

UNFPA rekent voor dat nog voor het eind van de eeuw de aarde zes miljard bewoners zal tellen en zeven miljard nog geen elf jaar later, in het jaar 2010. Aan de explosieve groei komt dus voorlopig geen einde. Pas over een eeuw zal de wereldbevolking stabiel blijven rond de tien miljard, wanneer de huidige trend zich voortzet.

Per minuut komen er 150 zielen bij, dat wil zeggen 220.000 per dag of 80 miljoen per jaar; cijfers waarvan niet alleen demografen duizelen. Verantwoordelijk voor de indrukwekkende toename is het sterk verbeterde peil van voeding en gezondheidszorg, wereldwijd.

figuur 3: Knipsel NRC

Hoeveel kost het? Heb ik genoeg geld bij me? Kan die rekening kloppen? Wat is het voordeligst? Hoe kan ik eerlijk delen? Hoe ver is het? - zijn vragen die dan in wisselende situaties opduiken.
We hebben over toepassingen nu verder niets anders dan de volgende persoonlijke noot uit het logboek van 11.7.1987 toe te voegen.

> 'Het is op de dag dat deze hoofdrekenparagraaf geschreven wordt 11 juli 1987 'De Dag van Vijf Miljard'.
> In de krant lezen we dat de wereldbevolking met honderdvijftig zielen per minuut toeneemt, dat wil zeggen 220.000 per dag of tachtig miljoen per jaar.
> En ook: voor het jaar tweeduizend zal de wereldbevolking zes miljard bedragen (zie fig.3).
>
> Vandaag staat in de nieuwe VPRO-gids dat een onderzoek heeft uitgewezen dat in een bepaalde jaargang van Vrij Nederland 23 foto's van vrouwen stonden tegenover 109 van mannen, dus van één vrouw op zes mannen, zo luidde de conclusie.
> Vandaag wordt de elfde etappe van de Tour de France gereden van Poitiers naar Chaumeil over een afstand van 250 kilometer. Het parcours schijnt nogal slingerend te zijn. Onze TV-commentatoren houden ons tenminste tot tweemaal toe serieus voor dat het zo'n tienduizend bochten telt....'

Ziehier hoofdrekenen in de actualiteit van de media. In medias res zogezegd - oftewel midden in het onderwerp. Want het plaatst niet alleen het hoofdrekenen in de actualiteit, maar ook de actualiteit van het hoofdrekenen nog eens in het venster.

Noten

1. Hope, J.A.: Mental Calculation: Anachronism or Basic Skill?, *Estimation and Mental Computation,* H.L. Schoen en M.J. Zweng (eds.), NCTM, Reston 1986, pag.47.
2. ibid.
3. Reys, B.J. en R.E. Reys: Mental Computation and Computational Estimation - their time has come, *The Arithmetic Teacher,* 33, maart 1986, pag.4-6.
4. Foxman, D.: *Mathematical Development. Assessment of Performance Unit (APU),* HMSO, London 1980, pag.95.
5. Zie:
   Trafton, P.R.: Estimation and Mental Arithmetic: Important Components of Computation, *Developing Computational Skills,* M.R. Suydam en R.E. Reys (eds.), NCTM, Reston 1978, pag.196-214.
   Reys, R.E.: Evaluating Computational Estimation, *Estimation and Mental Computation,* H.L. Schoen en M.J. Zweng (eds.), NCTM, Reston 1986, pag.225-239.
   Hatano, G.: Learning to add and subtract: a Japanese perspective, *Addition and Subtraction: a cognitive perspective,* T.P. Carpenter, J.M. Moser en Th.A. Romberg (eds.), Lawrence Erlbaum, Hillsdale 1982, pag.211-234.
6. Zie *School,* april 1987, pag.8, met enquêtegegevens van M. de Hondt over mening ouders en leraren over het belang van verschillende onderdelen van het rekenen.
7. Zie in dit verband:
   Beishuizen, M. en F. van Mulken: Rekenleermiddelen en hoofdrekenen, *Panama-Post,* 4(4), 1986, pag.15-29.
8. Zie de NOT-serie 'Rekenwerk' - een schooltelevisieproject hoofdrekenen voor de groepen zes en zeven in de basisschool (P. Scholten e.a.).
   Zie ook het artikel van M. Beishuizen in dit nummer.