

Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (4)

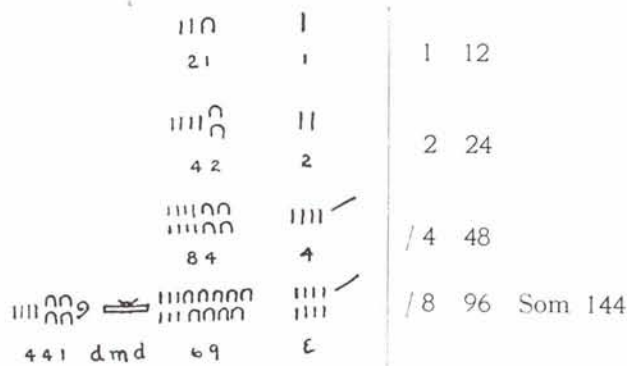
A. Treffers, E. de Moor en E. Feijs

Cijferen

Cijferen is rekenen-onder-elkaar volgens een standaardprocedure:

$$\begin{array}{r} 472 \\ 579 + \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 5213 \\ 3472 - \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 142 \\ 37 \times \\ \hline \end{array} \quad 14/1383 \backslash$$

Cijferen is zo oud als het rekenen zelf, het ligt als het ware in het geordende werken met getallen besloten. Op de bijna vierduizend jaar oude papyrus Rhind, handelend over de geheimen der getallen, staat een voorbeeld van cijferend vermenigvuldigen¹ (fig.1).



figuur 1: Egyptisch vermenigvuldigen 12×12

In bovenstaande figuur staan links de hiëroglfen (net andersom te lezen dan wij met getallen gewoon zijn). Rechts staat de uitwerking met de ons bekende symbolen. De berekening berust op de methode van het verdubbelen. Deze is altijd toereikend om een bepaald veelvoud samen te stellen. Ook werd wel met tien en vijf (halvering tien) vermenigvuldigd. In een ander 'rekenboekje' - de papyrus Kahun - werd 16×16 zo uitgerekend:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 10 \\ 3 \\ \hline 16 \end{array} \quad \begin{array}{r} 16 \\ 160 \\ 80 \\ \hline 256 \end{array}$$

Verdubbelen en tien keer zijn ook de pijlers waarop het delen rust. De opgave $1120 : 80$ ging als volgt:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 10 \\ 2 \\ 4 \\ \hline 14 \end{array} \quad \begin{array}{r} 80 \\ 800 / \\ 160 \\ 320 / \\ \hline 1120 \end{array}$$

Eigenlijk is dit makkelijker te voorzien dan onze standaardalgoritmen voor

vermenigvuldigen en delen binnen de bedding van het positiestelsel. Deze zijn weliswaar uiterst doelmatig en kort van opzet maar mede daardoor ook moeilijker te doorgronden. In dit opzicht zijn allerlei grappen over het cijferen veelzeggend. Een voorbeeld:

4/36\18	Controle:	Of:
4	18	18
32	4 x	18
32	32	18
0	4 +	18 +
	36	32
		4 +
		36

Was het maar een grap! We hebben hier echter met enkele veelvuldig waargenomen fouten te maken - enkele van de vele, want het cijferen eist zijn tol. Dat is ook één van de redenen waarom het bij voortduring onderwerp van discussie was en trouwens nog steeds is.

Is cijferen nuttig? Is cijferen nodig? Kan hoofdrekenen of handig rekenen het cijferen niet funderen of zelfs geheel vervangen? - dat zijn zo de kwesties die steeds weer in het geding komen.

Dat gebeurde honderd jaar geleden ook al bij de twee belangrijkste rekenmethoden, te weten Versluys en Van Pelt.² De laatste benadrukte in tegenstelling tot de eerste vooral het hoofdrekenen en meende dat het ook de grondslag van het cijferen diende te vormen.

Vijftig jaar terug was het niet anders bij de toen belangrijkste leerboekauteurs: Diels & Nauta accentueerden het hoofdrekenen en Bouman & Van Zelm het cijferen.³

Tot de dag van vandaag is dit onderscheid in het onderwijs blijven bestaan en onder invloed van de zakrekenmachine misschien zelfs nog wel wat verscherpt.

Echter niet alleen historisch maar ook geografisch gezien valt de onderscheiden aandacht voor hoofdrekenen en cijferen scherp waar te nemen.

In de Verenigde Staten bijvoorbeeld wordt meer dan in Engeland of hier te lande het cijferen op de voorgrond geplaatst. Neem bijvoorbeeld de volgend opgave:

'Sally heeft een boek met 223 bladzijden.

Ze heeft 158 pagina's gelezen.

Hoeveel bladzijden moet ze nog lezen?'

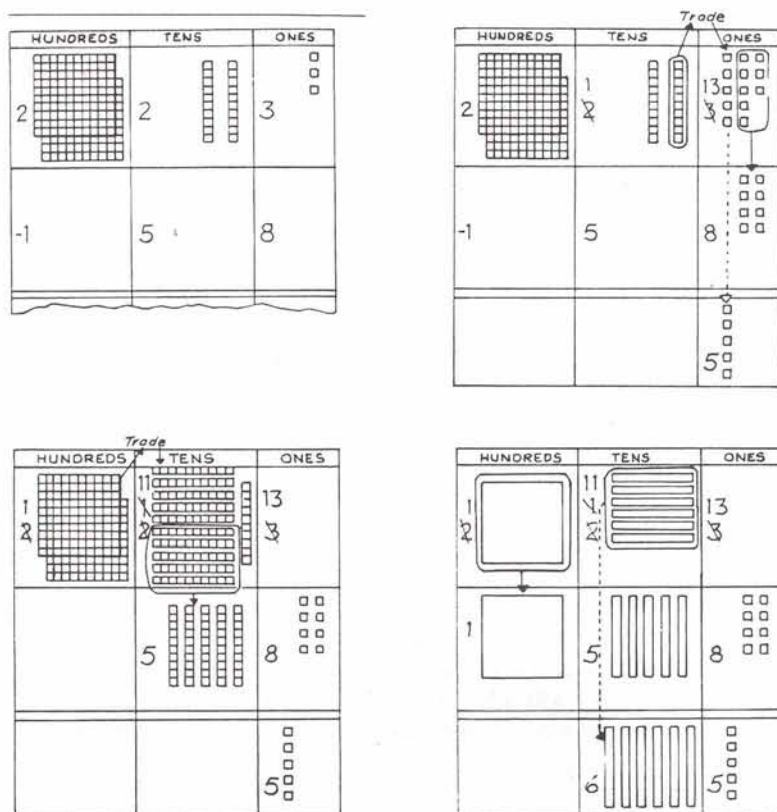
Als regel wordt zo'n probleem daar in de middenklassen cijfermatig aangepakt, vaak met ondersteuning van inwisselmateriaal, bijvoorbeeld MAB (zie de lossen, staven en plakken in fig.2). Eerst wordt dan 223 uitgelegd.⁴ Daarvan moet 158 worden afgehaald. Dat gaat zomaar niet. Dus moet er eerst ingewisseld worden: tien lossen voor één staaf, en tien staven voor één plak. Nu lukt het afnemen van 158 wel. De tussenstappen van het inwisselen en wegnemen worden steeds genoteerd en tenslotte ook het eindresultaat. Later geschiedt één en ander zonder hulp van materiaal of visuele voorstelling.

Ziehier hoe een belangrijk fragment uit het rekenen in de aanvangs- en middenklassen per traditie in de Verenigde Staten wordt uitgevoerd.⁵

De laatste jaren is daartegen echter nogal wat verzet gerezen. De bezwaren uit het hoofdrekenkamp tegen de cijfergerichte aanpak van Sally's leesprobleem kunnen kort als volgt worden samengevat.

Ten eerste lossen drie van de vier kinderen uit de middenklassen een dergelijk probleem niet op met aftrekken maar via aanvullend op-tellen (van 158 naar 223) - ze herkennen

er zelfs geen aftrekking in.⁶ Ten tweede komt daarbij dat het inpakken van pagina's in MAB toch wel erg kunstmatig is en vervreemdend werkt. Ten derde is de wijze van kolomsgewijs rekenen zo versnipperd dat de kinderen door de blokken het boek niet meer zien. Ten vierde is inherent aan de cijfermatige benadering dat niet met getallen maar met cijfers wordt gewerkt: de positiewaarden worden uit het oog verloren, net zoals de getallen als geheel, waardoor kinderen onvoldoende feeling voor getallen ontwikkelen. Ten vijfde is cijfermatig rekenen verkokerd. Het mist de soepelheid van het gevarieerde hoofdrekenen. Opgaven als $101 - 2$ of $111 - 98$ zijn cijferend uitermate lastig op te lossen, terwijl ze met hoofdrekenen heel eenvoudig gemaakt kunnen worden.



figuur 2: Eerste en laatste stap van $223 - 158$ via MAB-schema

De aftrekking ' $223 - 158$ ' in het genoemde contextprobleem kan ook betrekkelijk makkelijk worden opgelost, bijvoorbeeld via optellen:

- $(158) + 42$ (200) + 23 (223); $42 + 43 = 85$;
- $(158) + 70$ (228) - 5 (223); $70 - 5 = 65$;
- $(158) + 100$ (258) - 30 (228) - 5 (223); $100 - 30 - 5 = 65$.

Er zijn echter ook nog verschillende aftrekmethoden-uit-het-hoofd die niet zoals bij het cijferen van rechts naar links werken (dus vanaf de eenheden, dan de tientallen en tenslotte de honderdtallen) maar van links naar rechts. Allemaal natuurlijke werkwijzen die te prefereren zijn boven de standaard-procedure van het cijferen - aldus de hoofdrekenbeweging. Daar valt echter ook wel weer wat tegen in te brengen discussie.

De opbrengst van het sterk op cijferen gerichte rekenen onder relatieve verwaarlozing van hoofdrekenen is in de Verenigde Staten als volgt: één op de twee kinderen beheerst

volledig de staartdeling aan het einde van de basisschool, en twee van de drie de cijferalgoritmen voor aftrekken en vermenigvuldigen.⁷ Bij het hoofdrekenen scoren de Amerikaanse kinderen als opgetekend in fig.3.⁸

table 1

Type of problem	Time allowed (seconds)	Percentage correct by age		
		Nine	Thirteen	Seventeen
64 + 20	13	52		
40 + 50	11		81	96
6 + 47	12	47		
73 - 23	12	29		
700 - 600	11		92	97
49 - 16	11		77	86
1250 - 400	12		39	57
36 - 9	12	20		
2 x 34	12	25		
4 x 30	9		73	88
90 x 3	12	23		
60 x 70	9		46	55
20 ÷ 5	9		88	94
60 ÷ 15	12		32	58
3500 ÷ 35	14		39	63

table 2

Problem	Do in my head	Use paper and pencil	Use a calculator	No response
4 x 99	44	39	16	1
945 x 1000	38	31	31	
40 12800 r	31	45	23	1

figuur 3: Hoofdrekenen in de Verenigde Staten

Deze resultaten zullen zeker mede aanleiding zijn geweest tot de recente kentering in het denken over hoofdrekenen en cijferen aldaar. Er wordt thans veel meer nadruk gelegd op het hoofdrekenen - althans in rapporten, artikelen, 'agenda's for action' en op stapel staande eindtermen.

In een werkversie van 'Standards for school mathematics' (1987) - een soort proeve van een nationaal programma voor de Verenigde Staten - wordt tevens voorgesteld het leren van de cijferalgoritmen drastisch te beperken.⁹ De kinderen hoeven alleen nog maar optellingen- en aftrekkingen-onder-elkaar met getallen van hooguit drie cijfers te kunnen maken. Vermenigvuldigen-onder-elkaar kan beperkt blijven tot getallenparen van één bij drie of twee bij twee cijfers. En staartdelen wordt slechts met getallen van hooguit drie cijfers gedeeld door één-cijferige getallen beoefend. Voor het overige: 'Calculators should be used for more complex computations' (pag.37). De opgave van de papyrus Kahun 1120 ÷ 80 zou volgens dit voorstel dus met de zakrekenmachine moeten worden opgelost....

Achter deze 'Standards' zit een vanouds bekende gedachtengang over het cijferen, namelijk dat de algoritmen makkelijker zouden zijn te leren en uit te voeren naarmate men met kleinere getallen te maken heeft. Zo zijn de traditionele leergangen ook inderdaad opgezet: er wordt met eenvoudige, betrekkelijk 'kleine' opgaven gestart en voortgegaan met sommen die volgens opklimmende moeilijkheid zijn geordend. De mate van complexiteit wordt zoals gezegd vooral bepaald door de grootte van de getallen. Daarnaast tellen de benodigde inwissel- en leenhandelingen plus de aanwezigheid van 'storende' nullen in de gegeven getallen of de uitkomsten. Steeds leren de kinderen per

deelgeval de standaardalgoritme waarop ze dan in een volgend complexer geval kunnen voortbouwen. Men kan zich ongeveer voorstellen hoe bijvoorbeeld de complete leergang voor het staartdelen is opgebouwd. In ieder geval verschijnt een opgave als $1120 \div 80$ niet in het begin en $1128 \div 36$ pas tegen het eind. Wil men de leergang bekorten dan ligt het volgens deze opvatting voor de hand de meer complexe gevallen en getallen uit te sluiten. Dus valt $112 \div 8$ nog wel binnen de leergang, $1120 \div 80$ misschien net niet, maar $1128 \div 36$ zeker niet. Ziehier de logische gedachtengang achter het voorstel van de 'Standards'. Maar dan wel 'logisch' op basis van een bepaalde opvatting over het leren cijferen.

Er is echter ook een geheel andere kijk op het cijferen mogelijk, namelijk de visie die veel meer aansluit bij de Egyptische werkwijze waarmee we dit hoofdstuk begonnen. In deze opzet kan een opgave als $1128 \div 36$ al wel in het beginstuk van de leergang staan. Weliswaar niet als kale rekensom maar ingekleed in een probleem. Bijvoorbeeld:

'Er worden 1128 supporters vervoerd in bussen met 36 plaatsen.
Hoeveel bussen zijn nodig?'¹⁰

In tegenstelling tot de vorige cijferaanpak wordt nu niet direct naar de meest verkorte werkwijze volgens de standaardmethode toegewerkt maar ruimte geboden om deze procedure zelf geleidelijk te construeren. Dit voltrekt zich via gedurige verkorting van handig rekenen en afschatten zoals dat in feite ook in het papyrus-voorbeeld gebeurde. Het vervoersprobleem zal in groep zes of zeven aanvankelijk op grofweg de volgende drie manieren worden opgelost (fig.4).

36/1128\	36/1128\	36/1128\
<u>360</u> 10 bussen	<u>720</u> 20	<u>1080</u> 30
768	408	48
<u>360</u> 10 bussen	<u>360</u> 10	<u>36</u> 1
408	48	12
<u>360</u> 10 bussen	<u>36</u> 1	
48	12	
<u>36</u> 1 bus		
12		
(a)	(b)	(c)

figuur 4: Min of meer verkort staartdelen

In deze drie oplossingen tekent zich het *abc* van de leergang af. De leergang van de individuele leerling wel te verstaan. Het is namelijk de bedoeling dat alle leerlingen niveau *c* bereiken. Alleen komt de ene leerling sneller tot de gevraagde verkorting dan de andere. Maar ook als een kind bij *b* blijft steken kan niet beweerd worden dat deze geen (staart-)deling kan maken.

Overigens is het gestelde vervoersprobleem kenmerkend voor de aanpak van het cijferen die een geleidelijk voortschrijdende verkorting van het rekenen (cijferen) toelaat of beter stimuleert. Ten eerste biedt het een concrete ondergrond voor het rekenen: de leerlingen kunnen de getallen en de bewerkingen een reële betekenis verlenen. En ten tweede verbindt zo'n probleem vervolgens weer de uitkomst met de realiteit: men moet zich realiseren dat het antwoord niet 31 maar 32 is, want de 'rest' moet tenslotte ook mee (in bus 32 of je kiest een andere goed gemotiveerde oplossing). Het gebruik van de zakrekenmachine verandert de noodzaak tot dit herinterpreteren van de uitkomst uiteraard niet.

Het verschaffen van een concrete oriënteringsbasis (1) door middel van contextproblemen is dan ook een belangrijk kenmerk van de voorgestelde opzet van het cijferen - speciaal voor vermenigvuldigen en delen. De geleidelijke verkorting van de reken-

procedures (2) is dat evenzeer. De leerlingen worden zodoende in staat gesteld de standaardalgoritmen of varianten daarvan op den duur zelf te (re-)construeren.

De start van de leergang die naar deze verkorte rekenwijzen leidt, ligt bij het hoofdrekenen (3). Pas nadat de leerlingen het getallengebied tot honderd (duizend) goed beheersen - dus gevarieerd kunnen tellen en in staat zijn de basisbewerkingen via handig rekenen uit te voeren - wordt met het cijferend rekenen gestart. Cijferprocedures ontstaan zoveel mogelijk als natuurlijke verkortingen van gestileerd hoofdrekenen-onder-elkaar. Nadere analyse zal leren dat deze koppeling tussen hoofdrekenen en cijferen slechts tot stand kan komen indien de bestaande standaardalgoritmen hier en daar wat worden opengebroken (4). Een indicatie van hoe dat kan werd zojuist gegeven bij de bespreking van een staartdeling. Dit doende gaan we dus niet zover als vele leden van de Engelse NVORWO (ATM) die louter hoofdrekenen voorstaan, maar wel verder dan de Amerikanen (NCTM) die het cijferen willen laten zoals het is doch er alleen wat minder aandacht aan willen besteden.

In het volgende zal de genoemde aanpak van hoofdrekenen-naar-cijferen worden beschreven. Maar ook de methoden van het pure cijferen, dus cijferen naast en losstaand van hoofdrekenen, die thans nog veelvuldig dienst doen, zullen bij iedere doelstelling besproken worden. Eén en ander gebeurt achtereenvolgens bij optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Daarna belichten we nog enkele kwesties die tot dan toe terloops of in het geheel niet werden aangestipt: talstelsels, werken in groepsverband en de zakrekenmachine.

doelstelling 1

De leerling kan cijferend optellen-onder-elkaar volgens de standaardprocedure of een variant ervan en kan deze vaardigheid toepassen bij het oplossen van problemen.

Cijferend optellen is betrekkelijk makkelijk. Drie-kwart van de leerlingen beheerst de algoritme al aan het einde van de middenbouw en meer dan negentig procent bij het verlaten van de basisschool.¹¹

In de weg die tenslotte naar het cijferend optellen voert zijn drie etappes te onderscheiden, namelijk:

1. het gevarieerde optellen onder de honderd en duizend;
2. het hoofdrekenend optellen-onder-elkaar van getallen tot duizend en meer en van daaruit geleidelijk aan leren cijferend optellen - de combinatiemethode;
3. en het strikt cijferend optellen-onder-elkaar.

Indien het laatste los van hoofdrekenen wordt geleerd spreken we van puur cijferen. Ook hieraan besteden we aandacht.

gevarieerd optellen

Over het gevarieerde optellen onder de honderd (duizend) kunnen we na het voorgaande deel over de basisvaardigheden kort zijn.

Een opgave als ' $47 + 38 = \dots$ ' wordt door de leerlingen op grofweg de volgende manieren opgelost:

- $47 + 38 = (40 + 30) + (7 + 8)$;
- $47 + 38 = (47 + 30) + 8$;
- $47 + 38 = (50 + 38) - 3$;
- $47 + 38 = (47 + 40) - 2$.

In elk van deze rekenwijzen kan het oplossingsproces sterk variëren: ieder van de deelopgaven kan tellend met sprongen van tien of één worden uitgerekend of direct via de somtafels en aftrektabels of uitbreidingen ervan, of al dan niet met hulp van ondersteunend rekenmateriaal, zoals inwisselmateriaal, het honderdveld of de getallenlijn.

De variatie aan oplossingsmethoden wordt niet ingedamd, al kan het wel zo zijn dat men één van de aangeduide werkwijzen als regel aanprijst om met name de onzekere leerlingen wat houvast te geven. Maar juist omdat iedere standaardmethode zijn beperkingen heeft zullen andere gevarieerde aanpakken ook voortdurend naar voren worden gebracht.

Neem bijvoorbeeld de eerste werkwijze van het 'kolomsgewijze' rekenen met eenheden, tientallen, honderdtallen. Bij een opgave als ' $147 + 298 = \dots$ ' kan deze methode ook toegepast worden. Maar de handige rekenwijze van $147 + 298 = (300 + 147) - 2$ is hier uiteraard veel meer op zijn plaats. Steeds zal in het onderwijs deze opgave- en getalafhankelijke aanpak, waarbij bepaalde eigenschappen worden benut, aan bod dienen te komen. Want zo ontwikkelen de kinderen feeling voor getallen.

combinatiemethode hoofdrekenen-cijferen

Noteren we de eerder genoemde opgave als volgt:

$$\begin{array}{r} 147 \\ 298 + \\ \hline \end{array}$$

dan markeren we daarmee in Nederland per traditie de overgang van hoofdrekenen naar cijferen. De cijfers die kolomsgewijs onder elkaar staan met eenheden, tientallen, etc. laten namelijk toe dat er verticaal wordt 'gecijferd', dus gerekend onafhankelijk van de positiewaarden die ze vertegenwoordigen. Het is echter ook zeer wel mogelijk de band met het hoofdrekenen niet te verbreken, althans niet met één van de genoemde hoofdrekenmethoden.

Deze gestileerde vorm van hoofdrekenen ziet er als volgt uit:

$$\begin{array}{r} 147 \\ 298 + \\ \hline 300 + 130 + 15 = \end{array}$$

De leerlingen werken eerst uitsluitend van links naar rechts. Niet omdat het zo moet, maar omdat deze werkwijze het snelste in de richting van de uitkomst voert. Ze rekenen met benoemde getallen in casu positiewaarden van honderdtallen, tientallen en eenheden. En wat ook essentieel is: ze werken 'horizontaal', dat wil zeggen, berekenen stap-voor-stap de som van de deeluikomsten van de honderdtallen, tientallen en eenheden. Dat gebeurt ook nog als de termen onder elkaar genoteerd worden:

$$\begin{array}{r} 147 \\ 298 + \\ \hline \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 300 \\ 130 \\ 15 + \end{array} \right\} 430 \\ \left. \begin{array}{l} 130 \\ 15 + \end{array} \right\} 445 \\ \hline 445 \end{array} \end{array}$$

Maar op een gegeven moment gaat deze staps-gewijze 'horizontale' berekening van de deeluikomsten over in verticaal kolomsgewijs rekenen. Aanvankelijk worden de positiegetallen daarbij nog nadrukkelijk 'benoemd' naar hun waarden. Later echter opereren de kinderen louter met positiegetallen zonder ze nog te benoemen. In ieder geval komt er een moment dat de kinderen de uitkomst direct (moeten) noteren afgezien van het feit of ze daarbij nu denken in plaatswaarden of positiegetallen. Er worden dan grofweg drie methoden gevolgd.¹²

- optellen per kolom, werkend van links naar rechts, en met terugwerkende kracht correcties aanbrengen;
- per kolom optellen maar vooraleer de uitkomst te noteren eerst kijken of er niet nog één moet worden bijgeteld, afkomstig van de buuroptelling ter rechterzijde;
- eerst kijken welke kolommen een bijkomende één afscheiden, maar dan toch weer vanaf links naar rechts rekenen.

Voor hoofdrekenen en schattend reken is deze 'natuurlijke' aanpak volgens de leesrichting waardevol, maar voor cijferen werkt ze op den duur belemmerend - denk aan optellingen met meerdere termen en vermenigvuldigingen waarin met meer dan één moet worden ingewisseld. Daarom wordt tenslotte overgestapt op de werkwijze van rechts naar links: de inwisselingen worden dan immers mooi vooruitgeschoven in de kolommen. We zetten de verschillende fasen van hoofdrekenen naar cijferen nog eens globaal op een rij:

$\begin{array}{r} 147 \\ 298 + \\ \hline 300 \\ \leftarrow \quad \quad \rightarrow \\ 130 \\ \leftarrow \quad \quad \rightarrow \\ 15 + \\ \hline 445 \end{array}$ (a)	$\begin{array}{r} 147 \\ 298 + \\ \hline 300 \\ 130 \\ 15 + \\ \hline 445 \end{array}$ (b)	$\begin{array}{r} 147 \\ 298 + \\ \hline 445 \\ \rightarrow \end{array}$ (c)	$\begin{array}{r} 147 \\ 298 + \\ \hline 445 \\ \leftarrow \end{array}$ (d)
---	---	---	--

Bij zowel (c) als (d) hoort de aantekening dat er nog verschillende tussenvormen mogelijk zijn vooraleer tot directe optekening van de uitkomst kan worden overgegaan. Bijvoorbeeld bij (c) en (d) deze notatievormen:

$\begin{array}{r} 147 \\ 298 + \\ \hline \cancel{300} \\ 445 \end{array}$ →	$\begin{array}{r} 11 \\ 147 \\ 298 + \\ \hline 445 \end{array}$
--	---

Maar de hoofdfasen zijn duidelijk:

- verticaal noteren maar 'horizontaal' hoofdrekenen;
- 'verticaal' hoofdrekenen al dan niet met 'benoemde' plaatswaardegetallen in gedachten (honderdtallen, tientallen, eenheden);
- cijferend optellen in de leesrichting al dan niet met 'benoemde' getallen;
- cijferend optellen volgens de standaardprocedure, rekenend met positiegetallen of plaatswaardegetallen.

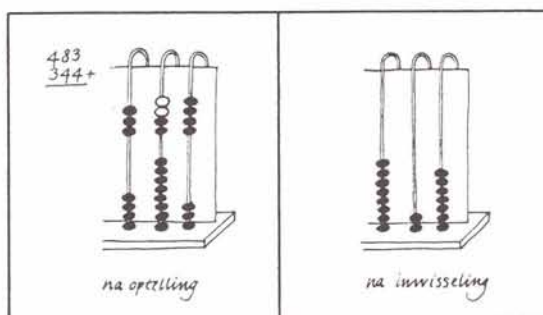
puur cijferen

In het voorgaande werden positiematerialen niet in de beschouwing betrokken. Maar het zal duidelijk zijn, ook al vanuit het rekenen onder de honderd, dat bij het optellen steeds inwisselmateriaal in de vorm van MAB of geld als concrete ondersteuning kan worden benut.

Maar als optellen-onder-elkaar op verkorte wijze dient te worden uitgevoerd valt de volle aandacht op de positiegetallen en dan is de abacus bijzonder doelmatig.¹³

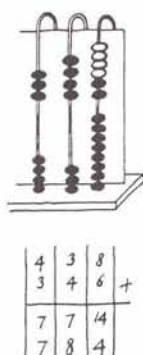
Men kan de abacus inzetten in de laatste fase van hoofdrekenen-naar-cijferen die zojuist werd beschreven.

Maar hij kan ook gebruikt worden voor het *pure cijferen* leren. Omdat we zoals eerder gesteld ook steeds aan dit cijferen aandacht willen besteden zal in het volgende de fase-ring van deze aanpak kort worden beschreven. In plaats van de abacus zou men overigens ook inpak- of inwisselmateriaal kunnen gebruiken, zoals MAB (zie fig.2). In de *eerste fase* rekenen de kinderen de optellingen uit op de abacus. Eerst worden de aantallen bij elkaar gevoegd en pas daarna ingewisseld (fig.5).¹⁴



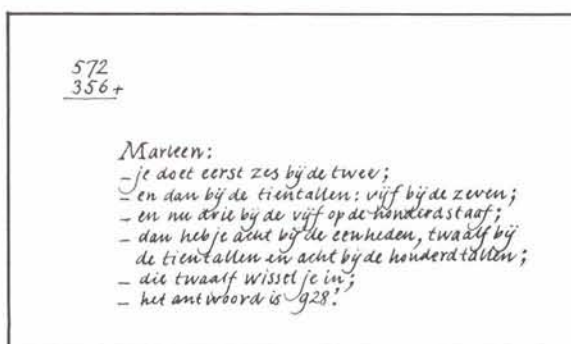
figuur 5: Optellen met behulp van de abacus

In de *tweede fase* werken de leerlingen met de abacus en noteren de opgave met behulp van positiestrepen. Het verband tussen één en ander kan nadrukkelijk worden gelegd door de abacus boven de kolommen te houden (fig.6).



figuur 6: Abacus en positiestrepen

Steeds verwoorden de kinderen wat ze doen (fig.7).



figuur 7: Verwoorden van rekenhandelingen

In de *derde fase* noteren de leerlingen de opgave op de positiekaart zonder tussenkomst van de abacus. Er komen nu ook grotere getallen aan bod. Het inwisselen gebeurt nog maar met één tussenstap (fig.8).

$$426 + 119 =$$

4	2	6	
1	1	9	+
5	3	15	
5	4	5	

$$23464 + 5674 =$$

2	3	4	6	4	
	5	6	7	4	+
2	8	10	13	8	
2	9	1	3	8	

figuur 8: Rekenen binnen positiestrepen

In de *vierde fase* verdwijnen de positiestrepen en wordt het antwoord zonder tussennotaties opgetekend. De standaardalgoritme is nu binnen bereik en kan verder ingeoeft worden bij het maken van kale sommen en toegepast bij het oplossen van elementaire contextproblemen. Enkele voorbeelden van zulke opgaven:

- *balpennen*

Alle kinderen uit de derde klas moeten drie balpennen hebben. In de doos zitten er nog tweehonderd.

In de ene klas zitten 34 kinderen en in de andere derde klas 32.

Zijn er genoeg pennen?

- *benzine*

Meneer Klaassen hield in zijn boekje een lijstje bij van de benzine die hij getankt had. In de vakantie gebruikte hij heel wat benzine. Hoeveel?

1 juli 38 liter	18 juli 32 liter
1 juli 36 liter	24 juli 40 liter
2 juli 34 liter	25 juli 39 liter
2 juli 41 liter	26 juli 34 liter
8 juli 35 liter	26 juli 41 liter

- *kilometers*

De vader van Jolanda is vrachtwagenchauffeur. Hij moet heel wat rijden in een week. Vorige week reed hij:

maandag: velp - groningen - velp	382 km
dinsdag: velp - utrecht - nijmegen - velp	153 km
woensdag: velp - apeldoorn - velp	67 km
donderdag: velp - parijs	467 km
vrijdag: parijs - maastricht - velp	538 km

Hoeveel heeft Jolanda's vader vorige week gereden?

- *museum*

In die hele week was het erg druk in het openluchtmuseum.

op dinsdag kwamen er 12.078 bezoekers

op woensdag 7.209

op donderdag 3.462

op vrijdag 8.477

op zaterdag 13.940

op zondag 10.943

- *afstanden*

Gebruik een afstandentabel uit een agenda. Ik reed in één dag van Arnhem via Utrecht naar Den haag. Van Den Haag reed ik naar Alkmaar en weer naar Arnhem.

Zoek op in je tabel en reken uit hoeveel kilometer dat is.

De mogelijkheid om dergelijke opgaven ook via hoofdrekenen op te lossen moet niet alleen worden opengelaten maar zelfs gestimuleerd.

(... en kan deze vaardigheid toepassen bij het oplossen van problemen.)

Het herkennen van optellingen in toepassingssituaties gaat kinderen in het algemeen goed af. De meest voorkomende *structuurkenmerken* van optellen komen kernachtig tot uitdrukking in de woorden 'samen', 'erbij' en 'meer dan'. Ze duiden op samenvoegen, op-tellen en vergelijken, waarvan de vergelijkingsproblemen aanvankelijk het moeilijkst geïdentificeerd worden. Maar aan het einde van de basisschool is ongeveer negentig procent van de leerlingen in staat al deze structuuraspecten van optellen te doorzien.¹⁵

Maar er zijn natuurlijk moeilijke gevallen te construeren. Bijvoorbeeld door de *aard* van de getallen erin te betrekken, en bijvoorbeeld gerichte getallen te nemen:

De Mount Everest in de Himalaya is 8848 meter hoog.

De Dode Zee in Israël ligt 392 meter onder het zeoppervlak.

Hoe groot is het hoogteverschil tussen de Mount Everest en de Dode Zee?

Er is sprake van verschil en toch moeten de getallen worden opgeteld. Trouwens ook de *context* is lastig. Wat is 'zeoppervlak'?

Naast het toepassen in contextopgaven is er ook het toepassen in kale optelsommen. We denken hierbij allereerst aan de *eigen produkties*. Men kan kinderen tijdens het leren cijferend optellen de opdracht geven zelf sommen te maken: makkelijke, middelmoelijke en moeilijke opgaven-onder-elkaar. Zijn er ook bij die makkelijker via hoofdrekenen opgelost kunnen worden ($999 + 2, \dots$)? Of juist niet, zoals bij lange optelopgaven? Ook de zogenoemde *vleksommen* kunnen daarbij te pas komen, of sommen met open plekken (fig.9).

1. $\begin{array}{r} 52 \\ + 5 \\ \hline \end{array}$	2. $\begin{array}{r} 7 \\ + 30 \\ \hline \end{array}$
a. 10	a. 700
b. 105	b. 400
c. 150	c. 1090
4. $\begin{array}{r} 2 \\ - 64 \\ \hline \end{array}$	5. $\begin{array}{r} 76 \\ - 3 \\ \hline \end{array}$
a. 412	a. 417
b. 1412	b. 147
c. 2412	c. 4

figuur 9: Vleksommen

Of in deze vorm:

$\begin{array}{r} . 2 8 \\ 2 9 . + \\ \hline 9 . 5 \end{array}$	$\begin{array}{r} . . . \\ 1 7 6 + \\ \hline 6 3 4 \end{array}$	$\longleftrightarrow$	$\begin{array}{r} 6 3 4 \\ 1 7 6 - \\ \hline . . . \end{array}$
---	---	-----------------------	---

Met de laatste opgave zijn we in feite bij het cijferende aftrekken beland. Lossen we hem via optellen op dan ontdekken we een aftrekalgoritme dat tot de tweede wereldoorlog in verschillende landen gangbaar was.

doelstelling 2

De leerling kan cijferend aftrekken-onder-elkaar volgens de standaard-procedure of volgens een alternatieve procedure die verbonden is met hoofdrekenen, en kan deze vaardigheid toepassen bij het oplossen van problemen.

De traditionele aftrekkingsalgoritme bezorgt kinderen veel problemen: in de middenbouw beheerst één van de twee kinderen de standaard-procedure en in de bovenbouw zijn dat er twee van de drie.¹⁶ De twee meest voorkomende categorieën fouten zijn:

- per kolom, ongeacht de volgorde, het kleinste getal van het grootste aftrekken:

$$\begin{array}{r} 542 \\ 389 - \\ \hline \end{array}$$

$$247$$

- bij het aftrekken van nul consequent een verkeerde handeling verrichten:

$$\begin{array}{r} 91 \\ 602 \\ 436 - \quad \text{of} \quad 602 \\ \hline 266 \quad \quad 135 \end{array}$$

Maar er zijn nog tientallen andere systematische fouten opgespoord in het vele onderzoek dat in de loop van de jaren is gedaan.¹⁷

Uiteraard is men ook voortdurend op zoek geweest naar de meest waardevolle en effectieve onderwijsmethode. In het volgende zullen enkele methoden worden beschreven.

Net als bij het optellen beginnen we met een beschouwing over gevarieerd rekenen onder de honderd en de duizend. We geven vervolgens aan hoe men van daaruit via (gestileerd) hoofdrekenen-onder-elkaar geleidelijk aan tot een alternatieve procedure van cijferend aftrekken kan komen.

Daarna worden twee leergangen van puur cijferen geschetst. Eerst een strak gestuurde cijferaanpak met behulp van de abacus. Daarna een onderwijsimpressie van een pure standaard-leergang met behulp van MAB-materiaal (zie fig.2) waarin de leerlingen wat vrijer worden gelaten. De verschillende oplossingsmethoden van kinderen worden nu wat nauwkeuriger onder de loop genomen waarbij een verrassende overeenkomst met de eerder geschetste alternatieve procedure naar voren blijkt te komen.

gevarieerd aftrekken

In het hoofdstuk over basisvaardigheden werd een gevarieerde aanpak van het hoofdrekenen onder de honderd (duizend) bepleit, waarbij verschillende materialen en modellen te pas komen.

In het volgende zal het belang van die variatie aan methoden, materialen en modellen duidelijk gemaakt worden aan de hand van drie kleine observaties waarin de complicaties van een eenzijdige en opgelegde onderwijsaanpak naar voren komen.¹⁸ Het gaat om een werkwijze die van meet af aan sterk cijfermatig is georiënteerd - het tegengestelde van de gevarieerde aanpak.

Sara (groep drie)

Sara kan bundels van tien en lossen die als objecten voorhanden zijn of in een plaatje staan afgebeeld op een positiekaart of in een schema noteren. Ook is ze in staat om bijvoorbeeld in het getal 45 de vier tien en vijf eenheden aan te wijzen. Kortom ze kan de opgaven uit het leerboek moeiteloos oplossen. Sara snapt volgens welk systeem getallen (onder de honderd) worden genoteerd....

Er wordt haar gevraagd het aantal fiches in een glazen potje te schatten. Haar schatting is dertien. Vervolgens vraagt men haar de fiches uit het potje te halen en te ordenen in groepjes van tien. Het resultaat is: drie groepen van tien plus één losse.

'Hoeveel fiches zijn het dus?'

Sara: 'Ik denk twaalf.'

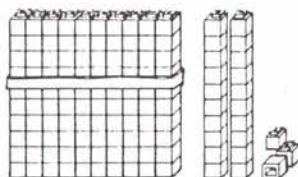
'Hoe kunnen we nagaan of twaalf klopt?'

Sara: 'Door te tellen.'

Ze telt alle fiches te beginnen met de losse en komt tot de slotsom dat het er 31 zijn....

Lee (groep vier)

De groep van Lee houdt zich bezig met aftrekken. Aan de orde is de opgave '34 - 17'. Er wordt met Unifix-blokken gewerkt (zie fig.10).



figuur 10: Inpakmateriaal - Unifix-blokken

Unifix lijkt op MAB maar de staven kunnen samengesteld worden met of uiteengelegd in blokjes, wat met MAB niet kan. Het getal 34 wordt gerepresenteerd door drie staven en vier lossen. Daarvan moeten één staaf en zeven lossen worden afgehaald.

Vraag van de onderwijsgevende: 'Zijn er genoeg lossen?' Lee zegt 'nee' en begint een staaf van tien te demonteren. 'Hoeveel tien en hoeveel enen hebben we nu?' Lee: 'Twee tien en veertien enen.' De onderwijsgevende die ziet dat enkele kinderen wat in verwarring raken wil er op attenderen dat er nog niet afgetrokken is maar dat nu alles wel klaar ligt om daarmee te kunnen beginnen. Dus vraagt ze: 'Hoeveel blokjes hebben we nu?' Lee is weer snel met haar antwoord: '44.' De onderwijsgevende vraagt om dit eens te controleren. Lee komt uit op 34 en vraagt op haar beurt verrast: 'Hoe hebt u dat gedaan, ik heb er tien lossen bij gedaan en toch zijn het er nog steeds 34....'

Peter (groep vijf)

De kinderen in de groep van Peter krijgen de opgave:

$$\begin{array}{r} 43 \\ 26 - \\ \hline \end{array}$$

Peter en vele groepsgenoten krijgen als antwoord 23. Er wordt MAB-materiaal bijgehaald en nu blijken Peter en de zijnen er zeventien over te houden. Hoe kan dat?

Voor Peter en nog enkele groepsgenoten is dat geen verrassing: Gewoon, als je 't met cijfers doet komt er 23 uit en werk je met blokken dan is het antwoord zeventien!

Eerder gebeurde in zijn groep hetzelfde met de optelling:

$$\begin{array}{r} 43 \\ 26 + \\ \hline \end{array}$$

Alleen deed nu bijna iedereen het met cijfers goed, maar toen er blokken bij te pas kwamen kregen sommigen 51 als uitkomst (43 plus 8 blokken (2 en 6) dat is 51!).

Positiemateriaal biedt weliswaar steun bij het kolomsgewijs rekenen-onder-elkaar maar het gebruik ervan sluit niet goed aan bij het tellen, het *volgorde-aspect* van de getallen en de getalrij - zie het geval van Sara. In het deel over basisvaardigheden werden dan ook belangrijke andere modellen en materialen genoemd naast het inpakmateriaal op tien-basis, namelijk de kralenketting, de getallenlijn en het honderdveld, waarin het volgorde-element wel duidelijk vervat ligt. Ze verkokeren het elementaire rekenen veel

minder tot kolomsgewijs opereren bij wijze van cijferen dan positiemateriaal dat doet en ondersteunen derhalve beter het soepele gevarieerde hoofdrekenen. Opgaven als '101 – 2' maar ook '51 – 2' zijn cijfermatig bezien nogal lastig maar kunnen via hoofdrekenen juist betrekkelijk eenvoudig (bijvoorbeeld via terugtellen) worden opgelost.

Positiemateriaal kan echter ook minder opgelegd, regelgeleid worden ingezet. Dan blijkt dat kinderen er anders mee werken dan via de standaard-manier van inwisselen en lenen, zoals bij de lessen van Lee en Peter gebeurde.

Zoals gezegd, blijken de kinderen nooit de inwisselmanier van de standaard-procedure te gebruiken! - we komen daarop direct nog terug.

Kortom, het genoemde positiemateriaal of beter inpakmateriaal heeft ten eerste zijn beperkingen, ten tweede gebruiken de kinderen het op een andere wijze dan het cijferen vergt, en ten derde kan een vroegtijdige introductie ervan tot tal van problemen aanleiding geven (zie Peter en Lee).

Ook vanuit de *toepassingen* bezien is het van belang dat het rekenen handig, gevarieerd en flexibel geleerd wordt omdat het oplossen van contextproblemen dat nu eenmaal vergt. In de inleiding van dit hoofdstuk wezen we er bij het probleem van Sally al op dat bepaalde aftrekopgaven via op-tellen worden opgelost; de leerlingen herkennen er niet eens een aftrekking in. Welnu, voor dat op-tellen moet men passende c.q. handige rekenstrategieën hanteren. Wordt de nadruk in het onderwijs voornamelijk gericht op het aftrekken-onder-elkaar dan schiet het in dit opzicht tekort, het is dan namelijk te weinig toegesneden op het oplossen van problemen. Het gevolg van deze eenzijdigheid is dat het een andere eenzijdigheid uitlokt, namelijk om in problemen de passende operatie te leren identificeren: men probeert dan inzicht te forceren dat zich slechts geleidelijk kan ontwikkelen. De beperkte rekenwijze van het cijferen-onder-elkaar vergt nu eenmaal zo'n herkenning. Het is dan ook geen wonder dat in het Amerikaanse onderwijs die identificatie van de passende operatie zo'n centrale plaats inneemt.

Het *gevarieerde hoofdrekenen* dient dus om allerlei redenen aan het cijferen vooraf te gaan. Pas indien kinderen goed vertrouwd zijn met handig rekenen in het getallengebied tot honderd (duizend) wordt met cijferen gestart, zo is in Nederland de (goede) gewoonte. Dit betekent echter wel dat bij het cijferen zo goed mogelijk op dit kennisbestand moet worden aangesloten wil het cijferen niet te zeer van het overige rekenen worden geïsoleerd (wat naar de inzichten van de kinderen overigens juist wel gebeurt en volgens de voorstanders van het pure cijferen geen bezwaar is).¹⁹

De vraag is nu of hoofdrekenen inderdaad zodanig via kolomsgewijs rekenen gestileerd kan worden dat het geleidelijk overgaat in cijferen. Nadere analyse van de kinderlijke werkwijzen zal straks leren dat de koppeling tussen hoofdrekenen en cijferen niet of in ieder geval heel moeilijk tot stand kan komen indien de bestaande standaard-algoritme niet wordt opgebroken.

combinatiemethode hoofdrekenen-cijferen

Cijferen vanuit hoofdrekenen of juist cijferen als een gestileerde vorm van hoofdrekenen aansluitend bij het gevarieerde rekenen onder de honderd.

Op de Village Community School in New York construeren de kinderen hun eigen algoritmen, ook voor het aftrekken.²⁰ Ze hebben de beschikking over MAB-materiaal. De meest opvallende punten van de 'natuurlijke' methoden zijn:

- a. De kinderen rekenen in de leesrichting (gedeeltelijk) kolomsgewijs van links naar rechts.
- b. De kinderen rekenen met positiewaarden en niet louter met positiegetallen.
- c. De standaard-methode van het lenen wordt niet gevolgd, maar er wordt ofwel gewerkt met tekorten of geleend van tien.
- d. Hun methoden ontwikkelen zich volgens voortschrijdende verkorting.

Aanvankelijk worden, zoals ook al eerder aangegeven, de volgende oplossingen bedacht bij een opgave als:

$$\begin{array}{r} 53 \\ 24 - \\ \hline \end{array}$$

....

- 52 min 20 is 33, dan 4 eraf 32, 31, 30, 29;
- 50 min 20 is 30, 30 plus 3 is 33, 33 min 4 is 29;
- 50 min 20 is 30, 30 min 4 is 26, 26 plus 3 is 29;
- 50 min 20 is 30, 3 eraf 4 dan moet er nog één van de 30 af, 30 min 1 is 29.

Indien met MAB wordt gemanipuleerd, voltrekken zich de rekenhandelingen op analoge wijze met blokken.

Speciaal de laatste werkwijze leent zich voor kolomsgewijs rekenen. Sterker: de kiem van een alternatief algoritme, namelijk van kolomsgewijs hoofdrekenen, ligt erin besloten. Voor wat grotere getallen gaat dat zo:

(a)
$$\begin{array}{r} 8371 \\ 3754 - \\ \hline \end{array}$$

$$5000 - 400 + 20 - 3 = 4617$$

Maar het kan ook als volgt worden genoteerd:

(b)
$$\begin{array}{r} 8371 \\ 3754 - \\ \hline 5000 \\ 400 - \\ 20 + \\ 3 - \\ \hline \end{array}$$

$\left. \begin{array}{l} 5000 \\ 400 - \\ 20 + \\ 3 - \end{array} \right\}$

4600
 4620
 4617

4617

Kortom, er wordt (1) van links naar rechts gewerkt (2) met positiewaarden en (3) tekorten volgens een 'natuurlijke' methode. Alleen wordt (4) de voortschrijdende verkorting bij deze notatiewijzen nog niet volledig uitgebuit - we komen daarop direct terug.

In de onderzoeksliteratuur duidt men deze alternatieve procedure, die voortkomt uit het gevarieerde rekenen onder de honderd, vaak aan met de naam van de kinderen die hem hebben ontdekt: men spreekt dan van de methode van Kye, of van Mark, of van Danny, of van Stephen,²¹

Maar ook leraren, onderwijsontwikkelaars en onderzoekers hebben herhaaldelijk op deze natuurlijke combinatie-methode van hoofdrekenen en cijferen gewezen.

We citeren uit de meest recente bijdrage, namelijk een ingezonden brief in 'The Arithmetic Teacher' (december 1987) van de hand van Stanley Becker:

'De aftrekking van voor-naar-achter kan aan een derdeklasser op de volgende manier worden uitgelegd:

		634
		368 -
		\hline 300
600 - 30 = 300	→	300
30 - 60 = (30)	→	(30)
4 - 8 = (4)	→	(4)
		\hline
300 - 30 - 4 = 270 - 4 =		266

Het voorbeeld geeft het eindresultaat van het proces van aftrekken-van-voor-naar-achter.²² Wij zouden dit echter niet als eindresultaat willen beschouwen, net zo min als de eerder aangeduide schrijfwijzen in (a) en (b) bij het voorbeeld '8371 - 3754'. Het volgende willen we als verkorting van (b) toevoegen als eindnotatie in gewone berekening in twee stappen.

$$\begin{array}{r}
 8371 \\
 3754 - \\
 \hline
 5000 \\
 400 - \\
 20 + \\
 3 - \\
 \hline
 4617
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{r}
 8371 \\
 3754 - \\
 \hline
 5\textcircled{4}2\textcircled{3} \\
 4617
 \end{array}$$

(b) (c)

Enkele opmerkingen over zowel de notatiewijze: $5\textcircled{4}2\textcircled{3}$ als over de manier waarop men vandaar tot de uitkomst 4617 geraakt.

Men zou de tekorten op de twee betreffende positieplaatsen met haakjes kunnen noteren: $5(4)2(3)$ zoals de zojuist geciteerde Becker met de positiewaarden doet, maar dan als verkorting daarvan of van de notatiewijzen (a) of (b).

Of kunnen aanduiden met min-strepen boven de getallen: $5\bar{4}2\bar{3}$ als verkorte schrijfwijze - een notatievorm die Wiskobas voorstond.²³

Ook is het zeer wel mogelijk de tekorten met rood te schrijven, zoals een Nederlandse onderwijsgevende met zijn groep deed - en dat ook weer als verkorting van de uitgebreide notatievorm van (a) of (b).²⁴

We kiezen echter voor de 'rondjes', zodat uit de schrijfwijze kan worden gelezen dat er nul op die positie over is en er zelfs nog wat weggenomen moet worden, namelijk het getal dat in het rondje staat.

Men kan ook een punt of een klein rondje boven de tekort-getallen plaatsen om aan te geven dat men onder nul werkt.²⁵ Maar in principe is ieder van de notatiewijzen toereikend om de tekorten op de betreffende positie aan te duiden. Het is ook aan te bevelen de kinderen zelf een passende vorm te laten bedenken of kiezen uit enkele van de genoemde mogelijkheden.

Hoe kan men van $5\textcircled{4}2\textcircled{3}$ tot 4617 komen?

Allereerst is het van belang dat de positiewaarden goed worden opgevat. Men kan daartoe eventueel geld als betekenisvol positiemateriaal benutten en het aftrekprobleem als een betaalprobleem interpreteren.

In deze context betekent $5\textcircled{4}2\textcircled{3}$ 5duizend in bezit, 4 honderd tekort (betalen), 2 tientjes in bezit en 3 gulden tekort (betalen) - een werkwijze die spoort met de berekeningen in (a) en (b) waaruit (c) immers voortkomt. Let wel, *dit gebeurt bij wijze van hoofdrekennen en niet cijfermatig via inwisselen*. En we zouden dat ook graag zo willen houden.

Natuurlijk is het verleidelijk om $5\textcircled{4}2\textcircled{3}$ om te zetten in 4617 via het inwisselen van respectievelijk 1 duizendje en 1 tientje. Maar men moet dan wel bedenken dat we dan met een tussenuitkomst als bijvoorbeeld $400\textcircled{7}$ dezelfde problemen krijgen als bij het 'pure' cijferen, terwijl langs de weg van het hoofdrekennen $4000 - 7$ niet veel problemen hoeft op te leveren, tenminste als de kinderen flexibel kunnen optellen en aftrekken met machten van tien.

Kortom, met hoofdrekennen blijft het aftrekken betekenisvol en toch betrekkelijk eenvoudig uit te voeren, mits uiteraard de leerlingen flexibel kunnen tellen met eenheden en machten van tien en behoorlijk kunnen hoofdrekennen. Bij enkele proefjes die we met

leerlingen gedaan hebben bleek zich eigenlijk maar één (klein) probleem voor te doen bij één leerling, namelijk bij de notatiewijze:

$$\begin{array}{r} 3028 \\ 1363 - \\ \hline 2\textcircled{3}45 \\ 1665 \end{array}$$

en wel bij ③ in de kolom met 0 en 3. Daaraan moet aandacht worden besteed. Het lijkt erop alsof de kinderen niet op gang komen in dit geval, wat bij 2 – 6 wel het geval is.

In de opeenvolgende notatiewijzen van (a), (b) en (c) tekent zich een leergang van de combinatie hoofdrekenen-cijferen af die grote overeenkomst vertoont met die van het kolomsgewijs optellen via hoofdrekenen. Gestileerd aftrekken als spiegelbeeld van gestileerd optellen: in plaats van een mogelijke verhoging met één per kolom kan een verlaging met één optreden en er wordt nu niet van rechts-naar-links maar omgekeerd in de leesrichting gerekend. Beide basisoperaties kunnen derhalve symmetrisch via kolomsgewijs hoofdrekenen worden aangeleerd. Positiemateriaal in de vorm van geld en contextproblemen betreffende geld kunnen daarbij de nodige steun verschaffen.

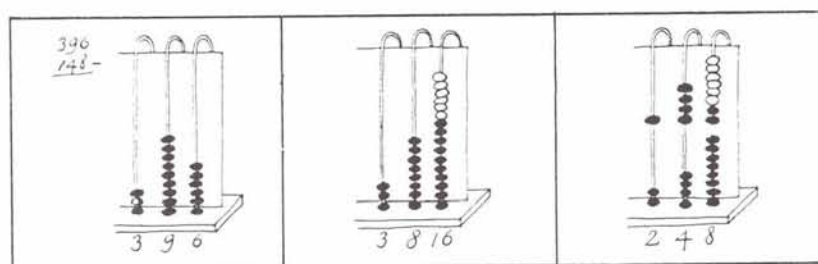
Met geld en in betaalsituaties krijgen de getallen en de operaties van optellen en aftrekken werkelijk betekenis, wat met MAB en het manipuleren ermee lang niet altijd het geval blijkt te zijn - zie de voorbeelden van Peter en Lee. Met blokken kost verkeerd inwisselen tenslotte niks.

Ook behoedt de geldcontext kinderen voor een overstilering van het kolomsgewijs hoofdrekenen: er doen zich namelijk heel wat gevallen voor waar op-tellen (doortellen volgens de winkelmethode) efficiënter is dan het hier aangeduide gestileerde aftrekken-onder-elkaar met tekorten, om maar te zwijgen over het 'pure' cijferen. Anders gezegd: gestileerd hoofdrekenen als hier beschreven dient nadrukkelijk gekoppeld te blijven aan andere vormen van hoofdrekenen. Dat wil zeggen dat steeds gevraagd dient te worden of deze methode in dit geval wel het handigst is. Vandaar ook dat de combinatiemethode van hoofdrekenen en cijferen niet sterk geautomatiseerd en geformaliseerd hoeft te worden, naar ons idee. Dit in tegenstelling tot het 'pure' cijferen wat daar juist op gericht is.

puur cijferen

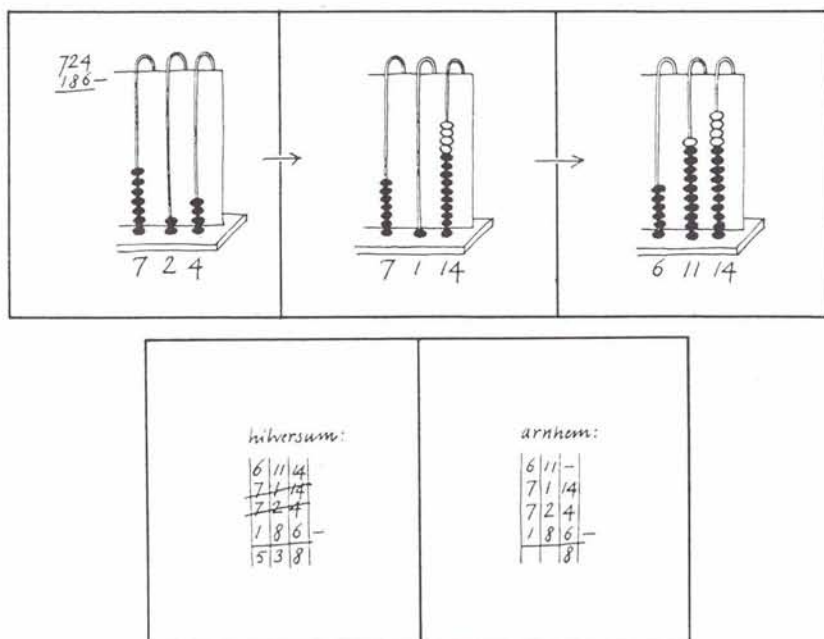
Een voorbeeld van puur cijferen met behulp van de abacus via een betrekkelijk strak gestuurde aanpak.²⁶

In de *eerste fase* wordt uitsluitend op de abacus gerekend, dus zonder notatie op papier. Opgaven met hooguit één inwisseling. Afspraak: rechts beginnen, dus bij de eenheden (fig.11).



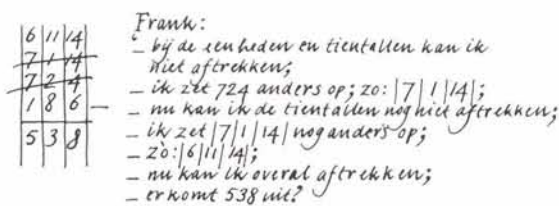
figuur 11: Aftrekken op de abacus

In de *tweede fase* wordt zowel op de abacus gewerkt als op papier gerekend. Ook opgaven met opeenvolgende inwisselingen worden aangeboden. Twee werkwijzen zijn nu mogelijk, namelijk ten eerste ervoor zorgen dat alle kolommen kloppen voor de aftrekking-ineens (de methode van een Hilversumse school) en ten tweede per kolom inwisselen en afrekenen (de Arnhemse methode) - (fig.12).



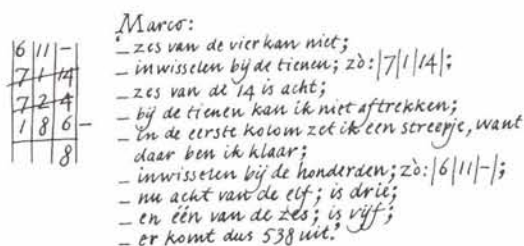
figuur 12: Aftrekken op abacus en met positiestrepen

In de *derde fase* rekenen de leerlingen alleen op papier binnen het schema van de positiestrepen, dus zonder gebruik te maken van de abacus. In deze fase is het verwoorden van de rekenhandelingen van bijzonder belang. In Hilversum verloopt dit dan als volgt (fig.13).



figuur 13: Verwoorden van aftrekking - methode één

En in Arnhem gaat het aldus (fig.14).



figuur 14: Verwoorden van aftrekking - methode twee

In het volgende wordt een moment-opname gemaakt van cijferend aftrekken aan de hand van de opgave '312 - 187'. De leerlingen volgen een leergang waarin ze vrijelijk over MAB-materiaal kunnen beschikken.²⁷

In de *eerste fase* wordt alleen met MAB gewerkt. De aftrekking '312 - 187' wordt dan opgelost door 312 uit te leggen met drie plakken, één staaf en twee blokjes. Daarvan moeten één plak, acht staven en zeven blokjes worden afgehaald. Dat kan alleen maar als er eerst geleend en ingewisseld wordt, dus net als zojuist beschreven bij de abacus (zie ook fig.2) - de werkwijze van rechts naar links wordt min of meer voorgeschreven.

In de *tweede fase* worden MAB en notatie gecombineerd.

En in de *derde en vierde fase* voeren de kinderen de aftrekking uitsluitend op papier uit, of met positiestrepen of in de conventionele notatievorm.

De volgende onderwijsimpressie betreft de laatste fase van de leergang: de kinderen gebruiken geen MAB meer (al mag dat best) en noteren de opgaven op de standaardmanier. Oppervlakkig bezien werken ze allemaal op dezelfde wijze. Maar dat is slechts schijn, zo zal uit de interviews van Birgitte Bennedbek blijken. Want juist het feit dat de kinderen niet precies wordt voorgeschreven hoe ze moeten 'handelen' (lenen, inwisselen) heeft tot gevolg dat er vele subtiele verschillen in oplossingsmethoden zijn ontstaan. Tom, Christien, Morten en Dorthé worden hier als uitvinders van de verschillende strategieën opgevoerd.

Tom

Tom tekent het volgende bij zijn oplossing aan:

'9 van 2, dat gaat niet, dus moet ik lenen,
dan heb ik 12
dat is 3
8 van 0
dan moet ik lenen
en dan is daar 2 over
en dan 8 van 10, dat is 2
en 1 van 2 dat is 1.'

$$\begin{array}{r} 2 \\ 312 \\ - 187 \\ \hline 123 \end{array}$$

Christien

Het commentaar van Christien:

'Ik heb 2 en 9 en dat kan niet
dus neem ik een van die en dan krijg ik 3,
dan heb ik 0 en 8 en dat kan ik niet
dus neem ik 1 en wissel in
dan krijg ik 2 en 2 en 1 geeft 1.'

Je zei 'en dan krijg ik drie', hoe deed je dat?

'Wel, ik nam hier een tien, dan heb ik tien van die andere (wijst op de eenheden) en tien en negen, dan heb ik er één over, en met die twee is dat drie.'

$$\begin{array}{r} 312 \\ - 187 \\ \hline 123 \end{array}$$

Morten

Morten geeft de volgende motivering:

'9 van de 2 kan niet
dus nam ik er daar 10
en dan nam ik 2 van de 9
en dan werd het 7 van 10 en werd het 3
en dan werd dat 2 (wijst op de tien-kolom)
en dan werd het 223.'

Hoe kwam je aan twee honderden?
1 van 3 is 2, wel, nee... ik heb er één
van gebruikt, zie, dus wordt het 1.'

$$\begin{array}{r} 312 \\ - 187 \\ \hline 223 \end{array}$$

Dorthe

Dorthe licht haar werkwijze glashelder toe:

'De 2 en de 9 betekent dat er nog 7 zijn die weggenomen worden dus pak ik een 10 en dan blijven er 3 over.
0 en 8 betekent dat er nog 8 weggehaald moeten worden dus neem ik er een honderd, dan heb ik 2 over.
8 van 10 tien is 2
1 van 2 is 1.'

$$\begin{array}{r} 2 \\ - 312 \\ \hline 189 \\ \hline 123 \end{array}$$

Tom volgt de klassieke oplossing, Christien benut de makkelijke aftrekking van tien, en Dorthe en Morten werken met tekorten. Met name de werkwijzen van Christien, Dorthe en Morten blijken 'natuurlijk' te zijn, dus veel door kinderen zelf gehanteerd te worden indien men ze vrij laat. Dat blijkt ook uit ander onderzoek in een onderwijssituatie waarin kinderen nog vrijer waren en niet eens de aanwijzing kregen om van rechts naar links te werken, dus bij de eenheden te beginnen, zoals zojuist hiervoor werd beschreven. Die natuurlijke werkwijzen, met name de rekenwijzen met tekorten (Dorthe en Morten) blijken mooie toegangen naar alternatieve procedures te bieden die cijferen en hoofdrekken verbinden. En daarmee zijn we weer terug bij de alternatieve combinatiemethode van hoofdrekken en cijferen waarmee we straks begonnen.

... en kan deze vaardigheid toepassen bij het oplossen van problemen.

Eerder schreven we over *contextproblemen* van aftrekken die naar structuur, aard en context kunnen verschillen. We gaan hier nog wat nader op de structuurkwestie in. Aftrekken kan de gedaanten aannemen van (1) wegnemen (2) vergelijken en (3) aanvullend optellen. Het blijkt voor kinderen niet moeilijk om in een afhaal- of wegneemprobleem een aftrekking te herkennen. Bij vergelijken en aanvullend optellen ligt dat echter anders. Enkele voorbeelden:

- George heeft 65 postzegels en Suzanne 102. Hoeveel postzegels heeft Suzanne meer dan George?
- Het gezin Dekker maakte een autotocht van 261 kilometer naar vrienden. Na 87 kilometer waren ze even gestopt. Hoeveel hadden ze na de stop nog gereden?
- Mijn leesboek is heel dik. Het bevat 243 bladzijden. Ik heb 76 bladzijden gelezen. Hoeveel pagina's moet ik nog?

Aan het einde van de basisschool lossen twee van de drie kinderen dergelijke problemen op via doortellen of op-tellen.²⁸ Dat gaat bij de laatste opgave grofweg op de volgende manieren:

- $(76) + 10 + 10 + 4$ (100) + 143 (243)
 $24 + 143 = 167$
- $(76) + 4 + 10 + 10$ (100) etc.
- $(76) + 100$ (176) etc.
- mengvormen van optellen en aftrekken: $(243) - 100$ (143) - 43 (100)
 $(76) + 24$
-

Slechts één op de drie leerlingen hanteert hier de cijferalgoritme:

$$\begin{array}{r} 343 \\ 76 - \\ \hline \end{array}$$

.....

Bij een grootscheeps onderzoek merken Britse onderzoekers naar aanleiding van deze bevindingen het volgende op: 'Kinderen beschouwen het oplossen van problemen en algoritmen als twee gescheiden gebieden.' En dat komt weer doordat het pure cijferen volledig van het overige rekenwerk geïsoleerd wordt. Een reden temeer om te

overwegen om in de toekomst het cijferen via het handig tellen en het hoofdrekenen-onder-elkaar met het andere rekenwerk te verbinden. En dat alles van meet af aan in een nauwe samenhang met elementaire contextopgaven, naast kale sommen.

Overigens zijn er ook vele aftrekproblemen die door de leerlingen wel direct als zodanig herkend en cijferend opgelost worden. Trouwens ook het kunnen maken van delingsopgaven vereist een redelijke handigheid in het aftrekken-onder-elkaar. Er is dus geen reden om dit soort rekenwerk-onder-elkaar zomaar te schrappen.

Voor het maken van toepassingen kan ook hier weer gebruik gemaakt worden van *vleksommen* en opgaven met open plaatsen. Voor het inoefenen (lees verkorten) van het aftrekken-onder-elkaar kunnen *eigen produkties* van opgaven door de leerlingen zelf een belangrijke functie vervullen. Produkties van zowel kale sommen-onder-elkaar (fig.15), maar ook van elementaire contextopgaven, opdat de kinderen het oplossen van problemen en het cijferend aftrekken niet als twee volkomen gescheiden gebieden zullen zien, net zo min trouwens als cijferen en hoofdrekenen.

$$\begin{array}{r} 934 \\ 759 \\ \hline 1915 = 105 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 200 - 20 - 5 = 175 \end{array}$$

$$443 = 357$$

$$443 = 363$$

$$\begin{array}{r} 5031 \\ 4946 \\ \hline 1915 \end{array}$$

$$1000 - 900 - 10 - 5 = 85$$

zelf gemaakt

$$\begin{array}{r} 57 \\ 38 \\ \hline 27 \\ 19 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 76 \\ 49 \\ \hline 33 \\ 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 700 \\ 700 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 746 \\ 523 \\ \hline 223 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 688 \\ 324 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 226 \\ 343 \\ \hline 423 \\ 383 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6823 \\ 3936 \\ \hline 3713 \\ 2887 \end{array}$$

Annemarie
Sander

figuur 15: Eigen produkties van Annemarie en Sander met de combinatie-methode van hoofdrekenen en cijferen

In dit verband verdient, zoals gezegd, de alternatieve methode van gecombineerd hoofdrekenen en cijferen op wat langere termijn speciale aandacht - een methode naast het pure cijferen of in de plaats daarvan.

En in relatie met contextopgaven zouden we naast het gestileerde kolomsgewijze hoofdrekenen de methoden van het handig op-tellen (de winkelmethode) en af-tellen voor het aftrekken willen aanbevelen, dus bijvoorbeeld $212 - 78 = 22 + 112 = 134$ of $212 - 78 = 200 - 66 = 134$.

Met deze methoden kan de operatie van het aftrekken doelmatig in al zijn vormen worden verricht. Zodoende hebben we drie scharniermethoden waar aftrekken om draait:

- I. $512 - 248 = 52 + 212 = 264$.
- II. $512 - 248 = 312 - 48 = 300 - 36 = 264$.
- III.
$$\begin{array}{r} 512 \\ 248 - \\ \hline 00 \\ 336 \\ 264 \end{array}$$

Oplossen van contextproblemen, hoofdrekenen en cijferen zijn alle betrokken in de analyse die tot deze aanbeveling voert.

Noten

1. Zie voor het rekenen van de Egyptenaren hoofdstuk I van het volgende standaardwerk: Waerden, B.L. van der: *Ontwakende wetenschap. Egyptische, Babylonische en Griekse wetenschap*, Noordhoff, Groningen 1950.
2. Zie:
Versluys, J.: *Rekenboek voor de Lagere School 1-8*, Amsterdam 1876.
Pelt, D. van: *Even of oneven*, Harlingen 1880.
Bij Versluys vinden we de bekende scheiding tussen cijferen en hoofdrekenen. In zijn 'De methodiek van het rekenen. Ten dienste van Kweekelingen' (Amsterdam 1889) schrijft hij:
'Ongetwijfeld is het hoofdrekenen met het oog op het dagelijksch leven van groot gewicht, maar even zeker is, dat het cijferen veel praktische waarde bezit. Is dit zoo, dan verdienen beide onderdeelen ieder volgens zijn aard behandeld te worden.' (pag.87)
En wat verder:
'Als ik cijfer, is dat slechts hulpmiddel en heb ik wel wat anders te doen dan mij daarvan een levendige voorstelling te vormen; en den leerling zal het later ook in 't dagelijksch leven niet anders gaan.' (pag.89-90)
Van Pelt gebruikt voor het cijferen meer de Egyptische aanpak die op hoofdrekenen gestoeld is, namelijk het werken met vijfvoud, tienvoud en tweevoud.
3. Bouman, P.J. en J.C. van Zelm: *De rekenkundige denkbaarheden in logischen samenhang met - als proeve van toegepaste logica - een rekenmethode voor de lagere school*, Versluys, Amsterdam 1918. (De vernieuwde serie stamt uit de jaren dertig.)
Diels, P.A. en J. Nauta: *Fundamenteel Rekenen* (nieuwe uitgave), Wolters, Groningen 1939.
De zesde didactische richtlijn van Diels en Nauta (zie hun 'Richtlijnen', 1939) luidt:
'Het hoofdrekenen neme in het rekenonderwijs een belangrijke plaats in.' (pag.15)
In hun boeken is na elke drie paragrafen er één bestemd voor hoofdrekenen met als onderdeel daarvan het rekendictie ('de onderwijzer(es) zegt de opgave, de leerlingen schrijven het antwoord op').
4. Zie voor dit voorbeeld:
Labinowicz, E.: *Learning from children. New beginnings for teaching numerical thinking*, Addison Wesley, Amsterdam 1985.
5. Zie het belangrijke handboek met artikelen van B.J. Reys, R.E. Reys, Trafton en anderen: Schoen, H.L. en M.J. Zweng: *Estimation and mental computation*, NCTM, Reston 1986.
6. Zie twee belangrijke evaluatie-studies uit respectievelijk het Verenigd Koninkrijk en de Verenigde Staten die vergelijkbaar zijn met de PPON-studie van het Cito (Periodieke Peiling van het OnderwijsNiveau):
APU: *Mathematical development. Primary Survey Report no.1*, HMSO, London 1980.
Carpenter, T.P. e.a.: *Results from the second mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress*, NCTM, Reston 1981.
7. Zie noot 6.
8. Reys, R.E.: Testing mental-computation skills, *The Arithmetic Teacher*, 33, 3, 1985, pag.15.
9. NCTM: *Standards for School Mathematics*. (Working draft), NCTM, Reston 1987.
10. Dit is een item uit het derde 'National Assessment of Educational Progress' (Verenigde Staten 1983). Minder dan de helft van de kinderen (einde basisschool) had het goede antwoord. In het tweede NAEP-onderzoek werd bij een soortgelijk probleem naar de rest gevraagd: één van de drie leerlingen had het goede antwoord - althans indien geen zakrekenmachine ter beschikking staat; met een zakrekenmachine is het percentage goede antwoorden ... 6!
11. Zie noot 6.
12. Madell, R.: Children's natural processes, *The Arithmetic Teacher*, 32, 7, 1985, pag.20-22.
13. Wij gebruiken in onze voorbeelden de lusabacus met twintig kralen in twee groepen van tien met verschillende kleuren. Ook heel goed bruikbaar is de lusabacus waarin de vijf-structuur pregnant in de kleuren tot uitdrukking komt.
14. De schets van de leergang is ontleend aan de volgende Wiskobas-publikatie:
Jong, R. de: *De abacus*, IOWO, Utrecht 1977.
15. Carpenter, T.P., J.M. Moser en T.A. Romberg (eds.): *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*, Erlbaum, Hillsdale N.J. 1982.

- Brown, M.: Number operations, *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*, (K.H. Hart ed.), John Murray, London 1981.
16. Zie noot 6.
 17. Bekend onderzoek in verband met systematische fouten bij het cijferen, waaronder aftrekken: Schonell, F.J. en F.E. Schonell: *Diagnosis and remedial teaching in arithmetic*, Oliver & Boyd, Edinburgh 1957.
Cox, L.S.: Diagnosing and remediating systematic errors in addition and subtraction, *The Arithmetic Teacher*, 1975, pag.151-158.
Radatz, H.: *Fehleranalysen im Mathematikunterricht*, Vieweg, Braunschweig 1980.
Brown, J.S. en K. van Lehn: Towards a generative theory of 'bugs', *Addition and Subtraction. A Cognitive perspective*, (T.P. Carpenter, J.M. Moser en T.A. Romberg eds.), Erlbaum, Hillsdale 1982, pag.117-135.
Maurer, S.B.: New knowledge about Errors and New Views about Learners, *Cognitive Science and Mathematics Education*, (A.H. Schoenfeld ed.), Erlbaum, Hillsdale N.J. 1987, pag.165-189.
 18. De voorbeelden van Sara en Lee zijn ontleend aan:
Richardson, K.: Assessing understanding, *The Arithmetic Teacher*, 35, 6, 1988, pag.39-42.
Het voorbeeld van Peter aan:
Labinowicz, E.: *Learning from children. New beginnings for teaching numerical thinking*, Addison-Wesley, Amsterdam 1985, pag.348.
 19. Zie het commentaar van de testafnemers uit het APU-onderzoek (noot 6).
 20. Zie noot 12.
 21. Over Kye:
Cochran, B., A. Barson en R. Davis: Childcreated Mathematics, *The Arithmetic Teacher*, 17,1970, pag.211-215.
Over Mark:
Davies, H.B.: A second grader's subtraction techniques, *Mathematics Teaching*, 83, 1978, pag.15-16.
Over Danny:
Carnihan, H.: Danny's method of subtraction, *Mathematics Teaching*, 89, 1979, pag.6-7.
Over Stephen:
Nuttael, T.: Readers' Dialogue, *The Arithmetic Teacher*, 28, 2, 1980, pag.55.
 22. Becker, S.: Readers' Dialogue, *The Arithmetic Teacher*, 35, 4, 1987, pag.5.
 23. Zie:
Dekker, A., H. ter Heege en A. Treffers: *Cijferend vermenigvuldigen en delen*, OW & OC, Utrecht 1981, pag.220.
 24. Persoonlijke mededeling van Ger Jansen (uitgeverij Zwijsen, Tilburg).
 25. Suggestie van Hessel Pot.
 26. We volgen een Wiskobas-leergang (zie noot 14).
 27. Zie:
Bennedbek, B.: Is self taught well taught?, *Mathematics Teaching*, 95, 1981, pag.11-14.
 28. Zie het APU-onderzoek uit noot 6.