

Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (3)

A. Treffers, E. de Moor, E. Feijs

doelstelling 4

De leerling kan schattend rekenen, dat wil zeggen:

- kan de uitkomst van een berekening betrekkelijk eenvoudig ruwweg bepalen;
- is in staat de uitkomst van een berekening globaal te controleren qua juiste orde van grootte;
- opereert verstandig met niet-exact of quasi-exact bepaalde gegevens dan wel met ervaringsfeiten die niet zomaar zijn aangereikt maar zelf opgediept dienen te worden;
- of combinaties van deze elementen betreffende het passend omgaan met benaderingen, afrondingen en schattingen van getallen en bewerkingen in allerlei min of meer alledaagse toepassingssituaties.

Schatten is op zich natuurlijk niet beperkt tot het werken met natuurlijke en gehele getallen. Ook bij breuken, procenten, kommagetallen, meten en meetkunde wordt geschat.

In het volgende bepalen we ons echter voornamelijk tot de basisvaardigheid van het schattend opereren met natuurlijke getallen (aantallen en meetgetallen). Maar elementaire maten zoals die van lengte (afstand) en oppervlakte, welke nauw verbonden zijn met fundamentele rekenmodellen als de getallenlijn en de rechthoek, zullen niet geforceerd worden buitengesloten - dit als opmerking vooraf.

Wat is schatten? Het is niet zomaar raden en evenmin precies bepalen, maar het zit er tussen in. Bij raden heb je (vrijwel) geen aanwijzingen voor een verstandige vaststelling van de gezochte uitkomst - het moet zagezegd in het wilde weg gebeuren. Bij precies bepalen echter zijn alle benodigde gegevens voorhanden en is de rekenweg gebaad en bewijzerd. Schatten daarentegen doe je op grond van steunpunten die weliswaar niet volledig zijn, maar toch voldoende aanwijzingen bevatten voor weloverwogen rekenen.

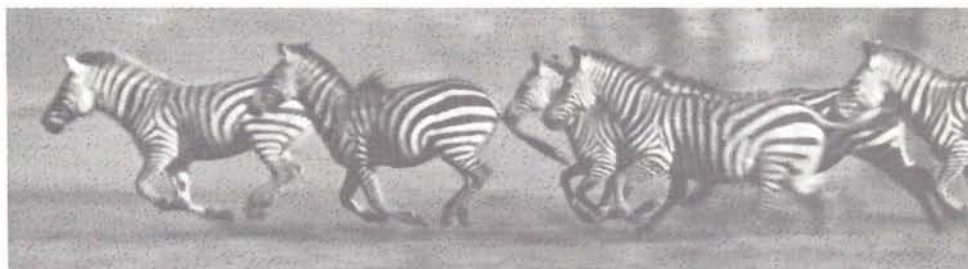
Schattend rekenen staat tussen blind gissen en exact berekenen, tussen de getalsmatige gok en de numerieke precisie. Vanwege dit manco aan nauwkeurigheid werd het in het rekenonderwijs van oudsher inferieur geacht aan het precieze rekenwerk. In de leerplannen en de leerboeken was dit duidelijk aanwijsbaar en trouwens ook in de toetsen en niet te vergeten in het onderzoek. Of beter, het was juist niet aanwijsbaar omdat schatactiviteiten in deze sectoren vrijwel geheel ontbraken.

Ten onrechte, want zowel in het leven van alledag als binnen het vakgebied bekleedt schatten een belangrijke positie:

- schatten moet nogal eens omdat nu eenmaal geen exacte berekening te maken is;
- schatten volstaat soms omdat een benaderde uitkomst voldoende is;
- schatten valt vaak zoveel makkelijker doelmatig uit te voeren en is daarbij goed te doorzien en te overzien en
- schatten is niet zelden zinvoller dan exact uitrekenen.

We kunnen hetzelfde ook op negatieve wijze zeggen: precies rekenen is soms niet mogelijk, voldoet soms niet, is niet doelmatig uit te voeren en minder betekenisvol of correct dan schatten. We zouden dit kunnen demonstreren met het eerder gegeven voorbeeld van de telling van de wereldbevolking die geen telling in strikte zin is. Maar we nemen een nieuw voorbeeld: de snelheid van dieren te land. Het lijkt voor de hand te

liggen deze snelheden in kilometers per uur af te ronden, althans voor de snellere zoogdieren. Metingen zijn hier immers tamelijk onnauwkeurig en de generalisatie naar topsnelheid is moeilijk te maken en er vindt een omrekening plaats van meter per seconde naar kilometer per uur. We zien echter in het boek 'Wonderen van de kam-pioenen in de dierenwereld' dat die afronding voor slechts de helft van de opgetekende snelheden is gemaakt (fig.1).¹



Van de twee-en-twintig opgesomde snelheden van landdieren is de helft afgerond op een tiental. De overige zijn bepaald op: 12(1), 16(2), 24(1), 45(1), 48(4), 55(1) en 144 km/uur.

figuur 1: Snelheden van dieren (verborgen) afgerond op tien- en vijftallen

Waarom gebeurt dit niet consequent? Nauwkeurigheden als bijvoorbeeld 48 kilometer per uur (vier maal voorkomend!) lijken toch ronduit misplaatst. Of met de woorden van straks: nauwkeurigheid is niet mogelijk, niet voldoende, niet doelmatig en minder correct.

Nu de verrassing: er blijkt een rekenkundige reden voor te zijn! Namelijk toch een afronding op tientallen maar dan nu met mijlen. Want tien mijl is grofweg 16 kilometer, dertig mijlen dus 48 kilometer en negentig mijlen 144 kilometer. En de rest van de snelheden valt in de categorie van de vijftallen (kilometers of mijlen) - ook een afronding.

Ziehier de verklaring voor een quasi-exacte meting en berekening.² Letterlijk en figuurlijk een schoolvoorbeeld van meten, afronden en rekenen, hoe het niet moet.

In ieder geval geeft de opvatting van rekenen als 'het met numerieke precisie bepalen van de uitkomst van een getalsmatige bewerking' een sterk vertekend beeld van het rekenen in het leven van alledag, de beroepswereld en het vakgebied. Want in deze kringen is gepast schattend rekenen juist aan de orde van de dag. Men beklaagt zich er daar dan ook over dat kinderen zo slecht kunnen schatten, en dat het onderwijs zo weinig aandacht aan het schattend rekenen besteedt.³

In het volgende schrijven we eerst wat over die prestaties van leerlingen aan het eind van de basisschool of later.

Daarna volgt een kleine schets van één van de schaarse onderwijsprogramma's waarin schatten en hoofdrekenen een dominerende positie innemen.

En vervolgens worden categorieën van opgaven besproken die het programma van schattend rekenen vullen en de onderwijsactiviteiten praktisch uitvoerbaar maken. Want aan dat laatste schortte het nu juist in het verleden: er was soms wel de wil, maar de weg naar schattend rekenen bleek niet begaanbaar.

Van de *prestaties* op het gebied van schattend rekenen worden in het volgende enkele sprekende voorbeelden gegeven.

De opgave 4×526 werd door ongeveer negentig procent van de dertienjarige leerlingen uit de Verenigde Staten goed opgelost. Maar als ze bij dezelfde opgave schattend moesten kiezen uit de antwoorden 2000, 2100, 2400 en 3000 ligt het percentage correcte

antwoorden op ... 33 procent!⁴

Slechts 54 procent van de zeventienjarigen bleek in staat de uitkomst van de volgende optelling 11.954.164 dollar + 1.126.005 dollar + 4.170.522 dollar + 750.572 dollar schattend op miljoenen af te ronden.

Algemeen geldt dat schattend rekenen in dat Amerikaanse onderzoek gemiddeld zo'n 25 procent lager scoort dan cijferend rekenen bij vergelijkbare opgaven.

Nu een voorbeeld dat te maken heeft met de orde van grootte van getallen (zie fig.2).

Hoeveel woorden bevat een boek van tweehonderd bladzijden?

Geef een antwoord dat het meest redelijk lijkt.

Verklaar je antwoord. Kies uit:

- a. ongeveer 1000 woorden;
- b. ongeveer 10.000 woorden;
- c. ongeveer 100.000 woorden;
- d. ongeveer 1.000.000 miljoen woorden.

figuur 2: Aantal woorden in een boek

Eén op de drie kinderen (bovenbouw basisschool) kiest antwoord c., de meest redelijke uitkomst. Meer dan de helft van de kinderen is niet in staat een gefundeerde verklaring voor een gekozen antwoord te geven.⁵

Hoe hoog is een gebouw van vier verdiepingen ongeveer? Ongeveer de helft van de leerlingen bovenbouw basisschool komt hier met een redelijke schatting (tussen tien en twintig meter). Het schatten van oppervlakte, inhoud en gewicht levert in het algemeen nog lagere scores op - dit is de trend in onderzoek uit verschillende landen.⁶

Nu iets van eigen bodem over hetzelfde aspect van schattend rekenen, waarbij ankerpunten van mentale metingen gebruikt moeten worden. Het gaat om een kranteknipstel met vier of zo men wil vijf grove fouten dat aan 312 tweedejaars Pabo-studenten werd voorgelegd als onderdeel van een uitgebreide toets (fig.3).

De aldus verkregen klassering heeft wel enige tijd als schaduwklassement gefunctioneerd, maar is nooit in de officiële tabellen opgenomen. Toch is het wel eens aardig naar de gelijkschakelingsformule te kijken. Het kost nogal wat rekenwerk, laten we ons dus beperken tot Nederland. Dat heeft zo'n 14 miljoen inwoners, tegen de VS ruim drie miljard, twee honderd keer zoveel. De oppervlakte van Nederland is pakweg 40.000 vierkante meter, tegen de VS 33.000 vierkante kilometer, bijna duizend keer zoveel. Dit tegen elkaar afgewogen is de bevolkingscoëfficiënt van Nederland een vijfde van die der V.S.

figuur 3: Een kranteknipstel met 1, 2, 3, ... foutjes

Aanzienlijk minder dan de helft bleek in staat tenminste één fout uit dit knipstel te halen: 33 procent sloeg het vraagstuk over en acht procent ontdekte één fout.⁷ De commentaren zijn veelzeggend.

Ongeveer tien procent merkt op dat drie miljard niet tweehonderd keer zoveel is als veertien miljard en dat je niet kunt stellen dan 33.000 vierkante kilometer bijna duizend keer zoveel is dan 40.000 vierkante meter. Daarentegen vindt vijf procent dat die berekeningen juist wel ongeveer kloppen. En drie procent noteert dat die 'bijna duizend keer' bij de vergelijkingen van de oppervlakten fout is en 'een miljoen keer' moet zijn. Of de Verenigde Staten wel miljoen keer zo groot als Nederland zou kunnen zijn, wordt

niet in overweging genomen.... Nederland een paar voetbalvelden groot, de Verenigde Staten op het formaat van Nederland met een inwonertal van meer dan de helft van de wereldbevolking - dat alles wordt volledig over het hoofd gezien. Met getallen moet je rekenen, zo is de gerichtheid. Wat ze betekenen....?

De resultaten van deze opgave - misschien wel één van de meest onthullende onderzoeksgegevens uit jaren - dragen in de vorm van één knipsel in feite alle onderzoeksberichten over de prestaties van het schattend rekenen en het traditionele onderwijs met zich mee. Want laten we duidelijk zijn: ze zeggen meer over het onderwijs dan over wat leerlingen (zouden) kunnen presteren. Het onderwijs is er debet aan dat getallen niet tot leven komen. Het onderwijs heeft de dwangmatige gerichtheid op de getalsmatige exactheid opgelegd. Het onderwijs liet het schattend rekenen liggen.

Thans wordt echter wel allerwegen het grote belang van dit onderwerp onderschreven. Alleen wordt steeds gesteld dat goede voorbeelden van programma's vrijwel ontbreken, internationaal bezien. Maar ook dat experimenten uitwijzen dat leerlingen reeds na vijf à tien lessen behoorlijke vooruitgang blijken te boeken.⁸

Ons is slechts één voorbeeld van een *programma* bekend waarvan de grondslag vrijwel volledig in *hoofdrekenen en schattend rekenen* wordt gelegd. Het stamt uit de jaren dertig en werd gerealiseerd in New Hampshire (Verenigde Staten) onder leiding van een onderwijsinspecteur, Benezet genaamd.⁹

Benezet merkte op hoezeer het rekenonderwijs de banden met de realiteit had doorsneden. Gaf hij kinderen een probleem in de trant van 'ik kan in één minuut ongeveer honderd yard lopen, hoeveel mijl loop ik in één uur?', dan was het antwoord steevast zesduizend mijl. In eerste instantie misschien een begrijpelijk antwoord, maar niet in tweede termijn. Er zou dan immers direct een correctie vanuit ervaringskennis moeten volgen, wat niet gebeurde.

Op grond van dergelijke ervaringen ontwikkelde Benezet een experimenteel programma dat zich in de eerste vier à vijf leerjaren volledig van het formele rekenen afkeerde en het betekenisvol omgaan met benoemde getallen en meetgetallen vooropstelde.

In het aanvangsonderwijs stond het vergelijken en schatten centraal. Getallen werden gebonden aan de kalender, aan klokkijken, aan paginanummers en munten; vakantiedagen, verjaardagen, weken, maanden, tijdrekening en geldrekening. Bewerkingen vonden in deze samenhang plaats via het omzetten en inwisselen van uren, minuten, seconden, en maanden, weken, dagen en verschillende muntstukken. Daarna werd lengtemeting aan de orde gesteld. Kinderen maakten ieder een schatting van hun eigen lengte, verrichtten dan een meting, bepaalden vervolgens de schatfout en deden dan hetzelfde met de lengte van hun medeleerlingen. De hoogte van een raam werd geschat en gemeten, idem de lengte, de breedte en de hoogte van het klaslokaal, en zo meer. Dan volgden oppervlaktematen en afstanden. Steeds schatten, meten en verschil bepalen, of alleen maar schatten en schattend rekenen als het om grotere getallen en maten gaat. Temperatuur, snelheid, inhoud, gewicht en vooral ook geldrekenen in de context van winkelen, dat alles kwam uitgebreid aan bod. Breuken als $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{10}$ en kommagetallen, beide gebonden aan meetgetallen, werden van meet af aan in een natuurlijke samenhang aan de orde gesteld. Onderwijs werden de tafels geleerd. En geleidelijk aan, zeg vanaf klas vijf, werkten de leerlingen ook wel wat uit rekenboekjes. Vooral onderwerpen van hoofdrekenen kregen de aandacht. Maar schatten, meten en afronden bleef ook dan als een rode draad door het rekenonderwijs lopen.

Dit is kort samengevat de kern van Benezets programma waarover hij in grote lijnen publiceerde - globaal naar inhoud maar gedetailleerd naar onderwijsvisie. Uit toetsen aan het einde van het zesde leerjaar bleek de experimentele groep wat rekenvaardigheid

aangaat ruimschoots op het peil van de controle-groep te zitten. Maar wat het toepassen betreft waren de leerlingen met het nieuwe programma de anderen verre de baas. Hoe-
ver blijkt uit een aardig probleem over de verplaatsing van de Niagara-waterval dat Benezet in een experimentele klas en een controle-klas aan de orde stelde:

'In 1680 bleek de waterval 2500 voet verder stroomafwaarts te liggen. Afbrokkeling vindt plaats door wegslijpen van de onderkant en instorten van de bovenkant van de rotsen. De waterval vond z'n oorsprong in Queenstown, tien mijl stroomafwaarts van de Niagara-rivier. Hoe lang zou dat ongeveer geleden zijn?'

Het probleem werd behandeld in een soort klasgesprek via een interactieve klas. De experimentele klas ging als volgt te werk. Het heeft de waterval ongeveer 250 jaar gekost (1680-1930) om een halve mijl te verschuiven. Dat is dus een snelheid van één mijl in vijfhonderd jaar. Dus zal het ongeveer vijfduizend jaar geleden zijn dat de waterval bij Queenstown lag. Op de vraag hoe lang het zal duren voor Buffalo bereikt wordt (op de kaart kun je zien dat die plaats ongeveer twee keer zover stroomopwaarts ligt als Queenstown stroomafwaarts van de waterval) kwam de groep via globale meting en vergelijking al snel op tienduizend jaar.

In een traditionele klas verliep de les totaal anders. De tijdspanne tussen 1680 en 1930 gaf al direct problemen. Schattingen liepen uiteen van 110 tot 450 jaar. Toen één kind voorstelde het nu maar eens precies uit te rekenen, kwam het volgende op het bord:

1680
1930 -
———

Het getal 1680 is in de tijd gezien het eerste, dus dat wordt bovenaan gezet.

De uitkomst leverde 350 op. Tweederde deel van de klas ging akkoord. Eén leerling bracht vervolgens de correctie aan dat negen niet van zes maar van zestien moest worden afgetrokken, dus dat het antwoord niet 350 maar 750 moest zijn. Vrijwel de hele klas kan zich hierin vinden. Eén leerling draagt tenslotte na heel veel heen en weer gepraat de goede oplossing aan: de getallen worden verwisseld, het antwoord is 250 jaar. Op de vraag naar de verschuiving stroomopwaarts per jaar kwamen diverse antwoorden, doch slechts één leerling had tien voet. De eerdere vraag over de hoogte van de Niagara-waterval en daaraan voorafgaand de hoogte van het klaslokaal had Benezet overigens al laten lopen omdat bleek dat de meeste kinderen geen enkel benul van maten als voet, yard en mijl hadden. En de laatste vraag, namelijk het hoeveelste deel van een mijl de waterval in de laatste 250 jaar verschoof, werd dan ook door geen enkele leerling goed beantwoord. Toen was het tijd....

Dat Benezet de stand van zaken niet te zwart-wit voorstelde, blijkt wel uit de eerder opgesomde onderzoeksresultaten. Hij deed echter meer en toonde aan dat beter onderwijs mogelijk is. Alleen kan men uit zijn beschrijving niet alle *gedetailleerde 'technische' wetenswaardigheden* destilleren betreffende de volgende punten:

- een voorwaarde voor schattend rekenen is dat leerlingen de tafels beheersen, vaardigheid in hoofdrekenen hebben, goed kunnen afronden, kunnen rekenen met nullen en begrip hebben van schatfouten en onnauwkeurigheden; hoe brengen we ze deze vaardigheden bij?
- leren schattend rekenen wil vooral zeggen het leren gebruiken van passende strategieën, zoals het afronden op hanteerbare getallen, het herstructureren van de opgave en het passend bijstellen van de berekening met afgeronde getallen in een bepaalde context; hoe stel je ze in staat die strategieën te leren?
- schattend rekenen in de sfeer van het meten veronderstelt de beschikbaarheid van een groot arsenaal ankerpunten in de vorm van concreet voorstelbare maten in reële

situaties; hoe kunnen de kinderen zich die steunpunten verschaffen?

- en tenslotte een buitengewoon belangrijke conditie: hoe zorgen we ervoor dat kinderen niet de sluiptwegen van het precieze rekenen bewandelen en pas daarna gaan afronden?

Een aantal van deze vragen is reeds in deze paragraaf over schattend rekenen en de voorgaande over tafels en hoofdrekenen gedeeltelijk beantwoord. Nu zal vooral het laatstgenoemde punt aan de orde worden gesteld. Namelijk hoe we in het onderwijs direct op het schatten en schattend rekenen kunnen aansturen.

Welnu, er zijn vier categorieën opgaven waaraan vier onderwijsprincipes ten grondslag liggen die bij het schattend rekenen in het oog gehouden moeten worden.

Het eerste principe is: laat de leerlingen rekenen met afgeronde getallen in plaats van met gegeven getallen.

Het tweede: zorg ervoor dat schatten loont in vergelijking met cijferen.

Ten derde: dwing tot schatten door een tekort aan expliciete gegevens.

Tenslotte: stel de kinderen in staat tot het ontwerpen van eigen produkties.

We zullen ze nu stuk voor stuk kort bespreken, wat niet anders kort kan dan via een wat droge opsomming van voorbeelden uit de eerste rij waar men hele kolommen opgaven achter moet denken. Het rekenen met afgeronde getallen staat voorop, nadat de kinderen eerst het afronden op tientallen, honderdtallen, etc geleerd hebben.

voorbeeld 1: rekenen met afgeronde getallen (schriftelijk en mondeling):

- $382 + 828 \rightarrow 400 + 800 = \dots$
- $7 \times 39 \rightarrow 7 \times 40 = \dots$
- $32 \times 48 \rightarrow 30 \times 50 = \dots$
- $1491 \div 3 \rightarrow 1500 \div 3 = \dots$

voorbeeld 2: bepalen van de beste schatting (schriftelijk en mondeling):

- $5 \times 47 = \dots$ a) 5×40 b) 5×50 c) 5×60
- $32 \times 47 = \dots$ a) 30×50 b) 30×40 c) 40×50

voorbeeld 3: groter-kleiner, meer-minder (mondeling):

- $60 + 30 = 90$, dus $62 + 34$ is ... dan 90
- $60 - 30 = 30$, dus $60 - 36$ is ... dan 30
- $300 + 300 = 600$, dus
 - $312 + 315$ is ... dan 600
 - $288 + 294$ is ... dan 600
 - $300 + 295$ is ... dan 600
 - $301 + 298$ is ... dan 600
- $6 \times 70 = 420$, dus
 - 6×72 is ... dan 420
 - 6×67 is ... dan 420
 - 5×69 is ... dan 420
 - 5×79 is ... dan 420
- $4200 \div 7 = 600$, dus
 - $4235 \div 7$ is ... dan 600

voorbeeld 4: eerst rekenen met afgeronde getallen, dan met de strategie van voor-naar-achter met één getal en daarna met twee getallen (schriftelijk):

- 6×585
- $432 + 341 + 101$

voorbeeld 5: inklemmen tussen tientallen, honderdtallen, etc., dus 12×26 tussen 10×20 en 20×30 (schriftelijk):

- 32×47

- 24×36
- 101×113

Het tweede principe luidt: schattend rekenen moet lonen dus duidelijk effectiever zijn dan cijferen. We onderscheiden hier twee soorten opgaven.

voorbeeld 1: meerkeuze-vragen waarbij één van de alternatieven er duidelijk als het goede antwoord uitspringt (het gaat hierbij om grote series en snelle keuze):

- $44778 + 173 =$ a) 951 b) 4951 c) 4751
- $543 - 178 =$ a) 365 b) 165 c) 665
- $72 \times 504 =$ a) 36288 b) 3808 c) 396288
- $96.336 \div 12 = \text{ongeveer}$ a) 8000 b) 800 c) 80

voorbeeld 2: er is een oriëntatiepunt gegeven en de vraag is of we daaraan gemeten voldoende van iets hebben, plus variaties op dit thema:

- Henk wil zeven petjes kopen voor zijn verjaardagspartijtje die ieder fl. 1,95 kosten. Hij heeft fl. 15,-- bij zich, is dat genoeg?
- De bowlingscores van Adriaan zijn 125, 120 en 145, en die van Ada 135, 117 en 180. Wie heeft de meeste punten?

In feite omvatten deze twee voorbeelden een enorm arsenaal van opgaven, wat maakt dat 'schatten loont' door alle leerjaren heen kan worden toegepast.

Het derde onderwijsprincipe: we zorgen er soms voor dat slechts schattend rekenen mogelijk is omdat de gegevens voor exacte berekening ontbreken of incompleet, tamelijk onbepaald of impliciet zijn.

Ook hier zijn twee grote categorieën van opgaven te onderscheiden die door alle leerjaren heen bruikbaar zijn.

voorbeeld 1: vleksommen in meer-keuzevorm¹⁰ (fig.4):

1. $\begin{array}{r} 52 \\ + 5 \\ \hline \end{array}$	2. $\begin{array}{r} 7 \\ + 30 \\ \hline \end{array}$	3. $\begin{array}{r} 3 \\ \times 1 \\ \hline \end{array}$	
a. 10	a. 700	a. 3663	
b. 105	b. 400	b. 2336	
c. 150	c. 1090	c. 9999	
4. $\begin{array}{r} 2 \\ - 64 \\ \hline \end{array}$	5. $\begin{array}{r} 76 \\ - 3 \\ \hline \end{array}$	6. $\begin{array}{r} 73 \\ \times 60 \\ \hline \end{array}$	
a. 412	a. 417	a. 7	
b. 1412	b. 147	b. 43	
c. 2412	c. 4	c. 43,8	
7. $\begin{array}{r} 29 \\ 39 \\ + 11 \\ \hline \end{array}$	8. $\begin{array}{r} 58 \\ - 1234 \\ \hline \end{array}$	9. $\begin{array}{r} 8 \\ \times 49 \\ \hline \end{array}$	
a. 885	a. 4444	a. 507	
b. 186	b. 444	b. 421	
c. 366	c. 44	c. 321	

figuur 4: Vleksommen

voorbeeld 2: ankerpuntsommen:

In het voorgaande hebben we reeds voorbeelden van dit soort gezien: aantal bochten in de etappe van de Tour de France, de grootte van Nederland en de Verenigde Staten, aantal letters in een boek, de hoogte van een gebouw met vier verdiepingen. Er zouden vele, vele opgaven aan toe te voegen zijn. Steeds gaat het om getallen die op één of andere wijze via grootheden aan elkaar te binden zijn, voorstelbare getallen (vaak meetgetallen) uit de ervaringswereld. In de opgavenverzameling die bij de 'Proeve ...' wordt opgenomen zal men andere voorbeelden aantreffen. Wij volstaan hier slechts met één voorbeeld dat laat zien dat schattend rekenen loont, letterlijk en figuurlijk¹¹ (fig.5).

V: Waarom ging u naar Havana?

S: Voor de zon.

V: Hoe lang verbleef u daar?

S: Zo'n dag of twee.

V: Heeft Mr Fischetti u na aankomst in Havana aan Mr Charles Luciano voorgesteld?

S: Nee, ik ben door een journalist uit Chicago, Nate Gross, aan Mr Luciano voorgesteld.

V: Er wordt verder beweerd dat u op die reis een bedrag van ongeveer twee miljoen dollar in een attaché-koffertje bij u had. Wat is uw antwoord op die bewering?

S: Als u een attaché-koffertje voor mij kunt vinden waarin twee miljoen dollar gaat, dan geef ik u die twee miljoen dollar.

figuur 5: Onderzoek naar Frank Sinatra's vermeende contacten met de Maffia.

Kan er voor twee miljoen aan 100-dollarbiljetten in een attaché-koffertje?

Met dit voorbeeld kunnen we ook iets meer van het oplossingsproces van schattend rekenen met behulp van ankerpunten laten zien.

Hoe groot is een attaché-koffertje? We moeten maar iets bij grove benadering aannemen. Hoe groot is een 100-dollarbiljet? Sommigen van ons weten dat uit ervaring wel zo ongeveer in verhouding tot een briefje van tien gulden. Anderen nemen maar aan dat het ongeveer zo groot is als een tientje, bijvoorbeeld. Hoe dik is een 100-dollarbiljet? We zouden kunnen aannemen zo dik als een blaadje papier. Een stapeltje dollarbiljetten kan dan geschat worden met behulp van een stapeltje papier of met het voorliggende tijdschrift! Nu kunnen we aan het rekenen slaan. Bijvoorbeeld door zo'n voorgesteld koffertje mooi passend te vullen met boeken: zoveel in de lengte en de breedte en de hoogte. En dan daarna ieder boek in geld uitdrukken. Of van meet af aan met geldstapeltjes werken. In ieder geval blijkt bij wat doorrekenen dat twee miljoen zo ongeveer in een koffertje moeten kunnen. Bij snel rekenen was er dus voor de onder-vrager heel wat te verdienen geweest.

Maar wat nu voor ons belangrijker is: uit dit voorbeeld blijkt vooral iets van wat vaardig schattend rekenen inhoudt. Door dingen aan te nemen en ze door te rekenen, kan iets in orde van grootte worden bepaald. Hulpmiddelen in de vorm van ankerpunten liggen vaak binnen bereik (dikte boek als hulp van stapeltje biljetten) maar we moeten ze dan wel zien en durven oppakken. Ervaringskennis (grootte biljet, grootte koffertje) speelt daarbij een niet te verwaarlozen rol. Het kunnen hoofdrekenen, en vooral het rekenen met nullen vormt ook een belangrijke voorwaarde. Zo van: twee miljoen wil zeggen twintigduizend biljetten van honderd dollar, en nu maar eens passen en meten. Bijvoorbeeld: tien bij vijf rijen biljetten op de bodem - dat moet makkelijk kunnen - en dan een stapel van tweeduizend - dat is wat veel - en dan zouden we er wel zijn. Nu wat herschikken....

Ziehier een soort handig knutselen met getallen, dat is het rekenen met ankerpunten eigenlijk. Iets van doe-het-zelf-werk.

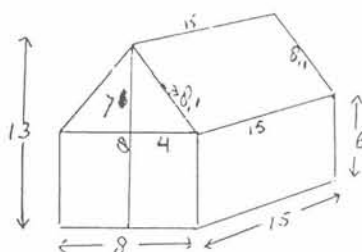
Dit brengt ons bij de vierde categorie, namelijk de eigen produkties van kinderen, dus doe-het-zelf in optima forma. Omdat die eigen produkties altijd binnen een bepaald

kader plaatsvinden, is deze categorie niet van de voorgaande over ankerpunten te scheiden, want daarin wordt immers ook veel eigen inbreng gevraagd, zoals we zojuist zagen. In het volgende voorbeeld ligt het werk dan ook in eerste ronde dicht bij het zojuist beschrevene, maar in het vervolg ervan komt de eigen produktie wat pregnanter naar voren. Het geciteerde fragment wil ook hier weer vooral voorbeeldig zijn voor het onderliggende proces van het schatten en rekenen en niet zozeer voor het inhoudelijke produkt. Want dat is net zomin als bij de ankerpunten met één voorbeeld te vangen - de mogelijkheden daarvan zijn zeer divers en liggen in feite door het hele rekenwiskundeonderwijs heen voor het oprapen.

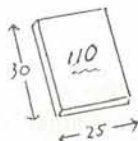
We laten nu mevrouw Querelle aan het woord.¹²

'Iedere week krijgt de derde klas een blad opdrachten als huiswerk. Ik probeer zoveel mogelijk daarop iets waar te maken van mijn bedoelingen met de wiskunde voor deze leerlingen. Dat betekent dat er wat te maken valt waarmee aangeleerde kennis wordt gerepeteerd en er staat een probleempje op, waarvan ik hoop dat het intrigerend genoeg is om over na te denken. Soms denk ik dat het aardig gelukt is en dan weer merk ik bij het nakijken van de resultaten, dat ik de plank weer behoorlijk misloeg.

Een van de laatste werkbladen heeft gezorgd dat ik nog eens nadacht over wat nu voor leerlingen een realistisch probleem is.

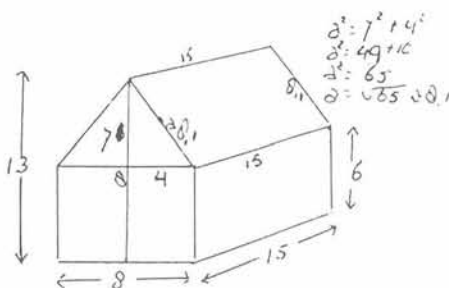


- Van dit huis zal het dak geïsoleerd worden. Hoeveel m^2 isolatiemateriaal is er nodig?
- Ook de dakpannen moeten vernieuwd worden. Men heeft gekozen voor deze. Hoeveel dakpannen zijn er nodig?



- Het isolatiemateriaal kost $\pm f 3,50$ per m^2 , de dakpannen $f 1,20$. Hoeveel materiaalkosten heeft dit karwei? Arbeidsloon $f 50,-$ per uur. Als ik het laat doen, wat zal het me dan gaan kosten?

Als ik nu al gedacht had dat het huisje met het verhaal erbij iets realistisch had, dan werd ik door de manier waarop Harald, Mark en Robert de 'sommen' gingen maken teruggebracht tot de realiteit.

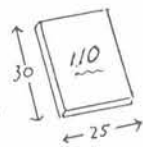


a. Van dit huis zal het dak geïsoleerd worden. Hoeveel m^2 is er nodig?

$$8,1 + 8,1 + 15 + 15 = 46,2 \times 2 = 92,4 m^2$$

92,4 is kennelijk groot genoeg om uitkomst te kunnen zijn, zo ze er al iets bij gedacht hebben.

b. Ook de dakpannen moet vernieuwd worden. Men heeft gekozen voor deze. Hoeveel dakpannen zijn er nodig?

$$92,4 : 1,10 = 84 \text{ dakpannen.}$$


Dat ze ook van de dakpan de omtrek berekenen ligt voor de hand. De uitkomst 48 roept geen vraagtekens op.

c. Het isolatiemateriaal kost $\pm f 3,50$ per m^2 . De dakpannen $f 1,20$. Hoeveel materiaal-kosten heeft dit karwei?

$$\begin{array}{r} 92,4 \times f 3,50 = f 323,40 \\ 84 \times f 1,20 = -100,80 \\ \hline f 424,20 \end{array}$$

Het berekenen van de materiaalkosten levert geen probleem.

Arbeidsloon $f 50,-$ per uur.

Als ik het laat doen, wat zal het me dan gaan kosten?

Enige discussie, hand omhoog.

'Dit kan je niet uitrekenen, je weet niet hoe lang ie erover doet.' Na mijn suggestie dat je dat misschien zou kunnen schatten, stond ik perplex. Als nieuw keken ze tegen de som aan. Waar ging het eigenlijk over? Een huis? Ja, hoe groot was zo'n dak en hoelang deed je erover om dat spul erop te leggen? Kortom het werd pas reëel toen ze zelf iets moesten invullen. Ze bedachten dat je het haast niet alleen kon doen en dat je er met z'n tweeën meer dan twee dagen mee bezig zou zijn. Dat de verhouding tussen het aantal dakpannen en de tijd nodig om ze te leggen wat vreemd is, zien ze helemaal niet; immers, dat stuk van de som is af, daar kijk je niet meer naar.

Arbeidsloon $f 50,-$ per uur.

Als ik het laat doen, wat zal het me dan gaan kosten?

$$\begin{array}{r} 5 \text{ dagen} \times 8 \text{ uur} = 40 \text{ uur} \\ 40 \times f 50 = \\ f 2000 + f 424,20 = f 2424,20. \end{array}$$

Realistisch onderwijs krijg je blijkbaar niet door reële probleempjes te nemen. Voor een aantal leerlingen in ieder geval blijven het sommen, waar je niets mee te maken hebt. Bovendien leert de dagelijkse ervaring je, dat op school alles mogelijk is. Je iets afvragen bij uitkomsten doe je dan ook meestal niet. Het valt veel leerlingen waarschijnlijk niet eens op, dat de liter melk uit de opgave een prijs heeft uit de jaren dertig. Mede door dit werkblad weet ik, dat je ze moet dwingen wakker te worden. Voorlopig geef ik ze van tijd tot tijd een opgave, waarbij te weinig gegevens zijn om klakkeloos wat te gaan doen. Ik zorg ervoor dat dat aan het begin van de opgave ontdekt wordt, zodat ook de uitkomst 84 dakpannen als onmogelijk wordt herkend. Of ik ze er mee help weet ik niet, maar het valt te proberen.'

In het volgende werkblad geeft zij een plattegrond van een rechthoekige tuin. De kinderen mogen er nu zelf zinvolle maten bij verzinnen: hoe groot is een tuin eigenlijk?

Met die zelf gekozen maten maken ze vervolgens berekeningen over de oppervlakte van het grasgedeelte, aantal narcissen, etc. Deze zouden desgevraagd ook betrekking kunnen hebben op schattend rekenen.

Algemeen geldt dat door die eigen produkties de opgaven tot leven komen. Kinderen worden bij het ontwerpen gedwongen om zich te realiseren waar het bij het schattend rekenen om gaat; ze moeten als het ware vooraf reflecteren op zowel de realiteit als op het oplossingsproces. In die zin maken eigen produkties steeds onderdeel uit van het genoemde rekenen met afrondingen, van opgaven waarbij schatten loont, en van problemen waar de gegevens niet volledig worden verstrekt maar door schatten moeten worden opgediept, kortom van schattend rekenen als geheel.

In het voorgaande werden de *doelen van schattend rekenen* toegelicht. Maar wat vooral zichtbaar werd, was dat schatten ook een didactisch middel is om getallen tot leven te brengen en problemen te structureren zonder in precies rekenwerk opgesloten te raken. Waar het rekenen aanvangt houdt het denken op, is te zwaar aangezet. Maar beter zou zijn: waar het schatten begint wordt het anticiperen op de oplossingswijze of het reflecteren erop aangezet.¹³ In die zin deed Benezet een goede zet die navolging verdient. In ieder geval stemmen de behaalde resultaten op het gebied van schattend rekenen tot nadenken over de opzet van het formele rekenonderwijs als geheel en over de doelstellingen van schatten in het bijzonder. Of zijn we van mening dat $7,2 + 7,2$ in de sfeer van het meten inderdaad nooit 14,5 kan opleveren, zoals twee van de drie Pabo-studenten menen, dus dat het *rekenen met afrondingen niet tot het rekenonderwijs behoort*?¹⁴

Jan heeft een kilometerteller op zijn fiets.
Hij stelt hem in op nul en rijdt langs het kanaal naar zijn vriend.
Daar staat 7,2 km op de teller.
Hij rijdt precies dezelfde weg langs het kanaal terug.
Dan staat er 14,5 op de teller.
Hoe kan dit?

figuur 6: Rekenen met de kilometerteller

Mogen we niet zeggen dat we onze leerlingen kippig voor schatten hebben gemaakt, gelet op het feit dat minder dan een kwart van de tweedejaars Pabo-studenten geen getallengrap ziet in het kranteknipstel van figuur 7 over het precies rekenen met een afgerond getal?

25.999 kippen geroosterd

Van onze correspondent

Bij een brand op de boerderij van de familie K. in Hellendoorn zijn 25.999 kippen omgekomen. In de loodś waarin de brand woedde, bevonden zich 26.000 kippen. Eén kulkon kon aan de vlammen ontsnappen.

De brand ontstond in een leegstaande schuur, vermoedelijk ten gevolge van kortsluiting en sloeg door de harde wind over naar de loodsen, waarin zich de kippen bevonden. De schade bedraagt ruim een half miljoen gulden.

figuur 7: 26000 – 1 in Hellendoorn

Uit het vooronderzoek voor het Nationaal Programma blijkt 99 procent van de respondenten het grotendeels met het gestelde doel over het schattend rekenen eens te zijn. Alleen nu de praktische uitvoering nog! Duidelijk is in ieder geval dat we ook hier weer niet met louter schriftelijk rekenen zullen kunnen volstaan. Wel kan de methode natuurlijk mooie voorzetten geven. Maar we zullen die als onderwijsgevende dan toch zelf in interactief onderwijs met de hele groep moeten afronden.

doelstelling 5

Tot de basisvaardigheden behoort ook het kunnen toepassen van de basisbewerkingen in elementaire contextsituaties waarbij de tafels, het hoofdrekenen en het schattend rekenen betrokken zijn. Het gaat daarbij zowel om enkelvoudige toepassingsproblemen waarin één basisoperatie vervat ligt als om samengestelde opgaven met verschillende bewerkingen van natuurlijke getallen.

Alle leergangen van het traditionele rekenonderwijs in de periode van 1950-1975 worden gemarkeerd door 'kale' rekensommen. Hooguit pas in de laatste fase van iedere leergang vindt men daar wat toepassingen van het formeel geleerde in de vorm van aangeklede rekenopgaven en redactiesommen. Maar niet zelden is de verzameling toepassingen miniem.

Men gaat er in het mechanistisch opgezette onderwijs van uit dat het toepassen ofwel geen problemen geeft of dat het zich in de loop van de jaren vanzelf zal ontwikkelen. Ook in de eindtoetsen lag tot voor kort het percentage toepassingen ver beneden de vijftig procent van het totaal aantal opgaven. De laatste jaren echter zien we in de leerboeken en de toetsen meer toepassingsproblemen opduiken. Blijkbaar breekt het inzicht door dat toepassen niet vanzelf gaat. Onderzoeksgegevens wijzen dit trouwens ook duidelijk uit. Kijken we eerst naar de prestaties van elf- à twaalfjarigen om bij kale sommen passende verhaaltjes te verzinnen (fig.8).¹⁵

De invloed van de grootte van de getallen is onmiskenbaar. Ook valt er verschil tussen de moeilijkheidsgraad van enerzijds optellen en aftrekken, en anderzijds vermenigvuldigen en delen waar te nemen. Maar vooral ook is interessant wat er achter de getallen schuilgaat, namelijk de structuur van de bewerking die door de kinderen in de verhaaltjes is neergelegd.

Uitdrukking	Percentage goed-scores
$84 - 28$	77
$9 + 3$	60
$84 \div 28$	42
9×3	45
84×28	31

figuur 8: Verhaaltjes bij sommen

Het blijkt in dit en ander onderzoek ruwweg zo te zijn, dat optelopgaven tot 'erbij-verhaaltjes' leiden, aftrekken tot 'eraf', vermenigvuldigen tot 'keer' en delen tot 'eerlijk verdelen'. Dat zijn ook precies de aspecten van de bewerkingen die het eenvoudigst in toepassingsopgaven geïdentificeerd worden.

Neem bijvoorbeeld het vermenigvuldigen. Een opgave als 'vier kinderen hebben ieder drie auto's, hoeveel auto's hebben ze samen?', wordt door het overgrote deel van de kinderen aan het eind van de basisschool goed opgelost. Maar het vraagstuk 'een speelgoedauto is in drie verschillende groottes en vier verschillende kleuren verkrijgbaar, hoeveel verschillende autootjes van één bepaald merk kun je kopen?' is voor meer dan de helft van de leerlingen te moeilijk.¹⁶ Bij verhoudingsproblemen ziet één op de drie leerlingen een optelling in plaats van een vermenigvuldiging.¹⁷

Het is moeilijk om tot een strakke indeling naar moeilijkheidsgraad van bewerkingen te komen, omdat er tenminste drie belangrijke variabelen in het geding zijn, namelijk: (1) de structuur van de betreffende bewerkingen, (2) de aard van de betrokken getallen en (3) de invloed van de context - we noemden ze eerder.

Dit maakt dat we van betrekkelijk eenvoudige bewerkingen als optellen en aftrekken toch een lastige opgave kunnen samenstellen door op alle drie de genoemde punten complexe gegevens te kiezen. Bijvoorbeeld als volgt:

'Iemand koopt een pen voor één gulden, verkoopt hem vervolgens voor twee gulden, koopt dezelfde pen terug voor drie gulden om hem tenslotte weer van de hand te doen voor vier gulden. Hoeveel is de winst?'

In een zaal met honderden onderwijsdeskundigen was de ene helft van mening dat de winst één gulden was, en de andere dat die twee gulden moest zijn. Schijnbaar een simpel rekensommetje onder de tien, maar door de context toch ineens een moeilijk vraagstuk.¹⁸

Aan de andere kant kan een betrekkelijk lastige bewerking als die van het delen zo eenvoudig worden voorgesteld via 'eerlijk verdelen' zonder rest, dat opgaven daarover reeds in het aanvangsonderwijs, zelfs voorafgaande aan optellen en aftrekken, kunnen worden geplaatst.

Daarom is het, zoals gezegd, ondoenlijk een algemeen geldige indeling naar moeilijkheidsgraad te maken, als we het over toepassingen hebben. Nemen we echter de meest gangbare zijden van de basisoperaties, dan is de volgorde van moeilijkheid die van respectievelijk optellen, aftrekken, delen en vermenigvuldigen - dus net zoals die van figuur 8. We hebben het dan bij 'gangbaar' over optellen als 'erbij' en 'meer' in vergelijkingssituaties, idem aftrekken als 'eraf' en 'minder', delen als 'eerlijk verdelen' of 'opdelen' en vermenigvuldigen als 'keer zoveel' en 'herhaald optellen'.

Daarbij dient echter nog wel aangetekend te worden dat kinderen vooral in de onder- en middenbouw, maar ook nog wel in de bovenbouw van de basisschool, informele methoden gebruiken om toepassingsproblemen op te lossen. Dat wil zeggen dat ze niet de standaard-aanpak gebruiken - we komen hier nog op terug.

In ieder geval blijkt de aanname dat de toepasbaarheid van de vier rekenoperaties geen speciale verzorging zou behoeven, volstrekt onjuist. Anders gezegd: in het traditionele, formeel getinte rekenonderwijs is de doelstelling van de toepasbaarheid onvoldoende te gelding gebracht. En zover dat nog wel enigszins gebeurde, werd het met context-arme opgaventypen gedaan.

Over deze traditionele opgaven zal in het volgende allereerst worden geschreven.

Daarna voeren we de zogenoemde contextopgaven op en bespreken deze dan achtereenvolgens naar vorm, inhoud en functie. Enkele van de zojuist aangestipte kwesties zullen daar dan nog wat verder worden uitgediept.

Om de beschrijving van het bedoelde contextrijke onderwijs wat meer reliëf te geven, maken we nu eerst een korte kenschets van de vorm, de inhoud en de functie van de verschillende *opgaventypen binnen het traditionele rekenonderwijs*. Dit rekenonderwijs omvat grofweg de volgende drie vormen van opgaven:

1. Kale rekensommen als $5 \times 7 = ..$
2. Aangeklede rekenopgaven van het type 'Anita koopt zeven filmkaartjes à fl. 7,50. Zij betaalt dus ...'.
3. Redactievraagstukken als 'Willem van Oranje stierf in 1584. Hij werd 51 jaar. Wanneer werd hij geboren?'

Naar hun inhoud bezien zijn ze nogal schraal. De kale rekensommen laten zich eenvoudig in het gelid van uniforme rijtjes opstellen. De aangeklede rekenopgaven

bevatten open termen ('filmkaartjes') die simpel door andere vervangen kunnen worden zonder dat de aard van de opgave wezenlijk verandert. En de redactie-vraagstukken zijn zo duidelijk in een vooropgezet rekenkundig kader geplaatst dat er geen ruimte meer overblijft voor reële overwegingen bij het vertalen van de uitkomst van de berekening naar de werkelijke oplossing.

Zo staat bij het genoemde probleem over Willem van Oranje in het antwoordenboek van de betreffende methode kortweg ' $1584 - 51 = 1533$ '. Dat het ook 1532 geweest zou kunnen zijn is een reële overweging die niet wordt gemaakt. In feite is de redactiesom dus ook een aangeklede rekenopgave: het gaat per slot om het sommetje $1584 - 51$ en niet om het probleem als zodanig.

Dit brengt ons bij de functie van redactiesommen en aangeklede rekenopgaven. Beide vervullen voorzover aanwezig in het traditionele rekenonderwijs de functie van toepassingen-achteraf van hetgeen allereerst (meestal na een korte concrete instap) via kale sommen binnen het formele rekensysteem is aangeleerd. Niet alleen is het toepassingsgehalte ervan, zoals we zojuist vaststelden, nogal beperkt - de opgaven zijn geïjkt, het oplossings-schema is pasklaar en het schoolse karakter ervan laat geen ruimte voor redeneringen vanuit de (vaak zwakke) context van de betreffende opgaven - maar ook als geheel beschouwd is de verzameling stereotype toepassingen van het traditionele rekenonderwijs ontoereikend. De veelzijdigheid van de verschijningsvormen van de basisoperaties (of ruimer van wiskundige begrippen en structuren) komt er niet voldoende in tot uitdrukking. Of anders gezegd: de brede toepasbaarheid wordt er onvoldoende in verzorgd.

Met het zojuist gestelde willen we de drie typen opgaven echter geenszins diskwalificeren. Want ze vervullen in contextrijk onderwijs als oefenopgaven en elementaire toepassingsproblemen een niet onbelangrijke functie. De opgavenverzameling die bij de 'Proeve ...' wordt opgenomen zal daar trouwens ook van getuigen. Doch bij het oplossen is het hier wel uitdrukkelijk de bedoeling dat de kinderen hun ervaringskennis nu niet nadrukkelijk buitenspel zetten.

Maar wat we hier wel gezegd willen hebben is dat rekenonderwijs dat uitsluitend uit dit drietal opgaventypen met de genoemde beperkte functie bestaat, te weinig gericht is op toepasbaarheid, niet motiverend werkt en aan een ontstellende betekenisarmoede lijdt.

Contextrijk onderwijs bevat naast de eerdergenoemde opgaventypen ook zogenoemde contextproblemen die zich qua vorm, inhoud en functie van deze traditionele sommen onderscheiden. De hier geformuleerde doelstelling van de toepasbaarheid is met name ook op deze contextopgaven gericht. Nu eerst iets *over de vorm ervan*. Qua vorm kan een contextopgave overeenkomen met een tekstopgave of redactiesom. Maar dat hoeft niet per se, want hij kan evenzeer worden uitgebeeld met een (toneel-)spel, beschreven in een verhaal, aangeboden in een knipsel, voorgesteld door een grafiek of een model of een andere informatiedrager en geclusterd in een thema of project. De term 'context' duidt aan:

- dat men bij een geïsoleerde, op zichzelf staande opgave met een 'omgeving' van de tekst of uitbeelding te maken krijgt die niet expliciet geformuleerd of uitgebeeld is (of kan worden) maar die tot de achtergrond-assumpties wordt gerekend, dus als het door kennis en ervaring bekend veronderstelde referentiekader;
- dat men bij een niet op zichzelf staande opgave te maken krijgt met de expliciet opgeroepen 'omgeving' van het betreffende verhaal, thema of project, die overigens ook weer ieder hun eigen impliciete achtergrond-assumpties meebrengen.

In ieder geval sluipt met de context een variabel element in de probleemstelling. Dat kan een zwakke of een sterkere variabele zijn, al naar gelang de aard van het probleem. Zo is de contextvariabele in een probleem als 'verdeel 250 objecten eerlijk onder tien

personen' zeer zwak. Toch is zij niet helemaal afwezig want er zit een aanname van gelijkwaardigheid in, namelijk ten aanzien van bijvoorbeeld een baby en een volwassene. Bij 234 objecten verdelen, gaat de context al wat sterker meespreken. Het hangt dan onder meer van de aard van de objecten af wat er met de rest van vier gebeurt. En de context telt nog zwaarder in 'onze auto rijdt één op tien, dat wil zeggen gebruikt één liter benzine op tien kilometer rijden; hoeveel liter gebruikt hij voor een tocht van 234 kilometer?' Qua vorm verschilt deze opgave niet van een klassieke redactiesom. Wat hem tot contextopgave maakt is de wijze waarop hij in het onderwijs wordt gebruikt. Wordt namelijk bij de oplossing de reële context betrokken of niet, dat is de kwestie - net als bij het eerdergenoemde probleem van Willem van Oranje dus.

Of nog wat algemener gesteld: in contextrijk onderwijs worden de antwoorden bij problemen waarin $234 + 10$ vervat ligt, nauwkeurig op de context-afhankelijkheid getoetst. De uitkomst daarvan kan ongeveer 23 zijn of 20 tot 25; of 23,4 of 23; of 24; of 23 rest 4, al naar gelang de reële situatie vraagt. In contextarm onderwijs daarentegen luidt het antwoord in de middenbouw stevast 23 rest 4, en in de bovenbouw 23,4. Het rekenstelsel bepaalt dan zogezegd de uitkomst: het is de enige 'context' die telt. Sterker: de opgave is daarop juist geselecteerd. Het is een aangeklede rekensom, en om die rekensom gaat het in feite. Of anders gezegd: de toepassing is hier ondergeschikt aan de wiskunde.

Bij contextproblemen is het echter juist andersom. Het probleem is primair en de wiskunde wordt dienstbaar gemaakt aan het oplossen ervan. De realiteit staat voorop en de wiskunde is daarvan de afgeleide. In ieder geval zit er zoals gezegd in een contextopgave altijd een variabel element wat aanleiding kan geven tot reële overwegingen bij het terugvertalen van het rekenantwoord naar de werkelijke oplossing. Soms speelt de context een bijrolletje, soms een hoofdrol.

Het al of niet afzien van bepaalde contextfactoren maakt dan ook een niet weg te cijferen onderdeel van het wiskundige oplossingsproces uit. Natuurlijk is het niet zo dat iedere opgave altijd een sterk context-afhankelijke lading zou moeten hebben of in een groter thematisch verband zou moeten passen. Soms is één en ander zelfs ongewenst - we komen daar zo nog op.

Samenvattend: de vorm van contextproblemen is in feite niet bepalend, maar het is vooral de inhoud van de vraagstelling en de wijze waarop aan de al dan niet sterke context bij de oplossing recht kan worden gedaan, welke bepalen of we van een contextprobleem kunnen spreken of veeleer van een vooropgestelde, aangeklede rekenopgave waarbij de kinderen geacht worden hun ervaringskennis, als ze daar al op worden aangesproken, tussen haakjes te zetten.

Het is daarom dat het voorgaande niet alleen over de vorm maar ook al voor een deel over de *inhoud* van contextopgaven ging. Al was het dan wel de 'kleine' inhoud van de opgaven op zich en niet van het geheel van toepassingsproblemen in een leergang. Naar dat laatste zal nu onze aandacht uitgaan.

In de inleiding van deze paragraaf en vooral ook in de uitleidingen van beide vorige paragrafen werd reeds het één en ander over de verschillende verschijningsvormen van de basisoperaties in toepassingssituaties geschreven.

Naast de onderliggende structuur werden als andere bepalende variabelen nog de aard van de getallen genoemd - aantallen, meetgetallen, gerichte getallen - en de invloed van de context waarin het probleem wordt geplaatst.

Als algemeen onderwijsprincipe werd in in de vorige aflevering van dit tijdschrift gesteld dat niet alle aspecten van meet af aan in het onderwijs betrokken zouden moeten worden, maar dat de reikwijdte van de toepassingen geleidelijk aan over de leerjaren heen zou moeten worden uitgebreid.

Dat wil bijvoorbeeld voor vermenigvuldigen zeggen dat begonnen kan worden met herhaald optellen op de getallenlijn en in het rechthoeksmodel, en pas later met bijvoorbeeld combinatieproblemen. Criterium voor de keuze is of een bepaald soort problemen de leerling gezwind binnen het rekensysteem verder kan helpen en tegelijkertijd het toepassingsbereik aanzienlijk vergroten.

Maar vanuit de einddoelen bezien is vooral bepalend of het totale gebied van de reële verschijningsvormen van de betreffende operaties voldoende wordt bestreken, lettend op de structuur van de bewerkingen, de aard van de getallen en de invloed van de contextsituaties.

Uit wat er in het voorgaande reeds geschreven is en wat in de uiteindelijke 'Proeve ...' wordt gepresenteerd plus hetgeen in de opgavenverzameling bij de 'Proeve ...' wordt verstrekt, kan men vrij nauwkeurig zicht krijgen op wat die veelzijdigheid van reële toepassingen inhoudt.

We dienen speciaal probleemsituaties in het oog te houden die zo veelzijdig zijn dat ze meerdere *functies* tegelijk kunnen vervullen. Dergelijke modelproblemen, in zowel letterlijke als figuurlijke zin, staan in het hart van het realistische reken-wiskundeonderwijs omdat ze zowel de voortgang binnen het systeem als de toepasbaarheid erbuiten kunnen bewerkstelligen - we spraken er reeds over bij de tafels van vermenigvuldiging.

Situatiemodellen of contextmodellen noemden we die voorbeeldige problemen. Eerst zijn ze voorwerp van onderzoek. Later dienen ze als model ter ondersteuning van het rekenen en het toepassen. Eerst hebben ze een functie bij de begripsvorming omdat ze de leerlingen een natuurlijke en aansprekende toegang tot de wiskunde verschaffen. Later fungeren ze als model en bieden houvast bij het uitvoeren van de bewerkingen en het identificeren of produceren van toepassingsmogelijkheden in contextsituaties.

Meer algemeen geldt dat contextproblemen de realiteit als toepassingsgebied blootleggen, of juist omgekeerd dat de rekenoperaties dienstbaar kunnen zijn om probleemsituaties te helpen oplossen. Ook dienen contextproblemen om specifieke vaardigheden in toepassingsituaties te oefenen - in dit geval rekenvaardigheden.

Al met al kunnen dus vier functies aan contextproblemen worden toegekend, namelijk die van:

- begripsvorming;
- modelvorming;
- toepasbaarheid;
- oefening.

Geïllustreerd met het voorbeeld van het delen: een elementaire delingsopgave kan als start dienen om meer complexe delingsopgaven die boven de tien-keer uitgaan te helpen oplossen. Omgekeerd kan hij als houvast worden gebruikt bij het opsporen van bepaalde eigenschappen, zoals die van het verdelen ($84 \div 7 = (70 \div 7) + 14 \div 7$) en dus ook bij het berekenen van een kale opgave. Tevens kan zo'n probleem als toepassing-achteraf dienst doen en als oefenopgave fungeren.

We vatten het voorgaande samen: de grondstelling van realistisch reken-wiskundeonderwijs is dat toepasbaarheid de kern van de doelstelling van het reken-wiskundeonderwijs uitmaakt. Dit houdt voor ons in dat toepassingen in casu contextproblemen een veel belangrijker rol zouden moeten spelen: je leert immers toepassen door het te doen. 'Belangrijker' niet alleen in de zin van méér toepassingen of meer aansprekende problemen, maar vooral van anders. Toepassingen op andere plaatsen in de leergang: niet alleen toepassingen-achteraf maar ook vooraf. Daarmee wordt namelijk een concrete basis voor het reken-wiskundeonderwijs gelegd, wat de toepasbaarheid ten goede kan komen.

In het voorgaande werd veel aandacht besteed aan enkelvoudige opgaven waarin één van de basisbewerkingen besloten ligt. Toch is het niet zo dat het identificeren of het toepassen van de passende basisoperatie het hart van het rekenonderwijs zou uitmaken. Waar dat wel het geval is, leidt het ertoe dat de kinderen vaak de juiste operatie gaan 'raden'. Van meet af aan zou het reken-wiskundeonderwijs op drie onderdelen een *uitbreiding* aan de bekende opgaven-verzameling moeten geven:

1. Ook niet-stereotype vraagstukken komen aan bod.
2. Eigen produkties van (toepassings-)opgaven door de kinderen zelf krijgen een plaats.
3. Minder verkorte, informele oplossingsstrategieën worden niet alleen toegestaan, maar vormen de grondslag voor de meer verkorte standaard-methoden.

We bespreken ze tot slot.

ad 1

Voorbeelden van niet-stereotype opgaven liggen al in het aanvangsonderwijs voor het grijpen:

- Welke stapel boeken achter dit scherm is het hoogst: die met vier boeken of die met vijf boeken?
- Welk boek heeft meer bladzijden: dit of het andere dat iets dunner is?
- Karin is geboren in 1980 en Diederik in 1981. Hoe oud zijn ze nu? Wie is het grootst?
- Twee vrienden vierten samen hun verjaardag. Ze nodigen zonder met elkaar te overleggen hun vrienden uit. De ene schrijft vijf kaartjes en de andere zes. Hoeveel vrienden zijn er uitgenodigd?
-

Zogezegd wordt er bij de onvermijdelijke knikkersommen dus niet alleen gevraagd hoeveel knikkers Carla nu na zoveel winst heeft; of hoeveel zij er meer heeft dan Jan; of hoeveel ze samen hebben; maar ook hoeveel Jan (met twaalf knikker) er moet winnen van Carla (met achttien) om er evenveel te hebben als zij, of nog lastiger, als Carla negentien knikkers heeft. De oplossingen van dit type opgaven zijn onbepaald, of minder bepaald, of begrensd, of onmogelijk, wat tot discussies leidt of zelfs tot conflict-situaties. Ook raadselachtige opgaven of groepen behoren ertoe:

'Drie personen betalen ieder een tientje voor consumpties. De prijs is echter geen fl. 30,-- maar fl. 25,--. De ober deed echter alsof het fl. 27,-- was. Hij gaf ieder fl. 1,-- terug en stak fl. 2,-- in eigen zak. Van het drietal had ieder fl. 9,-- betaald, samen dus fl. 27,--. De ober hield fl. 2,-- zelf. Dat is samen fl. 29,--. Waar is die ene gulden gebleven?'

Niet dat het onderwijs van dit soort niet-stereotype problemen zou moeten wemelen. Maar alleen eenduidige, enkelvoudige opgaven wekken star en stereotype oplossingsgedrag op en zoals gezegd een neiging tot raden in plaats van reflecteren en rekenen.

ad 2

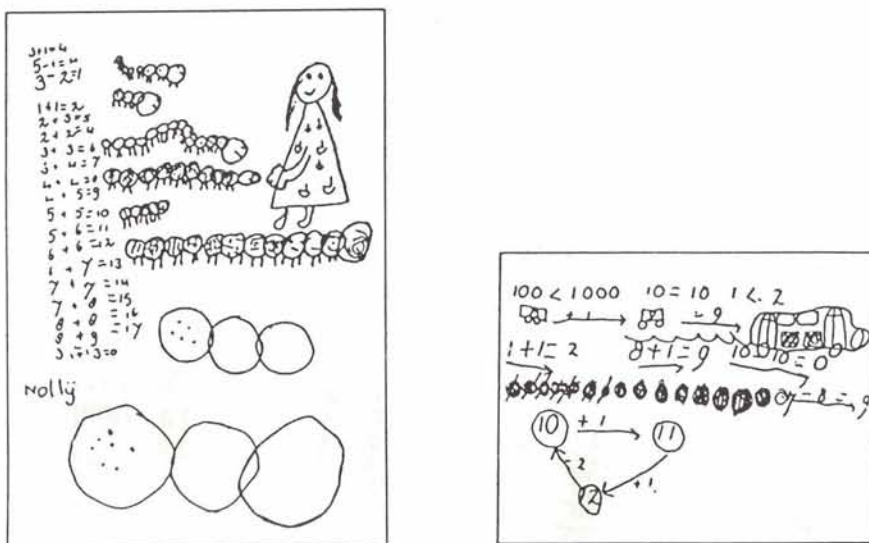
Ook zouden kinderen regelmatig moeten worden opgewekt tot het zelf produceren van (context-)problemen. Of bescheidener, om binnen een aangegeven kader zelf zinvolle gegevens aan te dragen en die vervolgens in de oplossing te verwerken. Hier kan evenzeer gelden 'jong geleerd, oud gedaan' zoals Van den Brink laat zien met leerlingen van groep drie.¹⁹

'Het maken van eigen produkties in de oefenfase (het zelfstandig bedenken van opgaven en dergelijke) wordt door de kinderen zeer gewaardeerd. Deze activiteit kan in een ruimer kader worden geplaatst door de kinderen een rekenboek te laten ontwerpen voor de kinderen die het volgend jaar naar groep 3 gaan. Hierdoor komen de eigen produkties in een ander licht te

staan: je maakt ze ten behoeve van anderen die ze ook gaan gebruiken. 'De kinderen van volgend jaar' werken hier als een zingevende en daardoor stimulerende context.'

'In de bovengenoemde zingevende onderwijssituaties kwamen de contexten op de eerste plaats en waren de rekeninhouden voor de kinderen slechts hulpmiddelen. Die contexten geven zin aan het mathematiseren, in tegenstelling tot bijvoorbeeld 'het bedenken van een verhaal of context bij een gegeven som'.'

Vaardigheden aan de basis (fig.9).²⁰



figuur 9: Eigen producties: twee voorbeelden

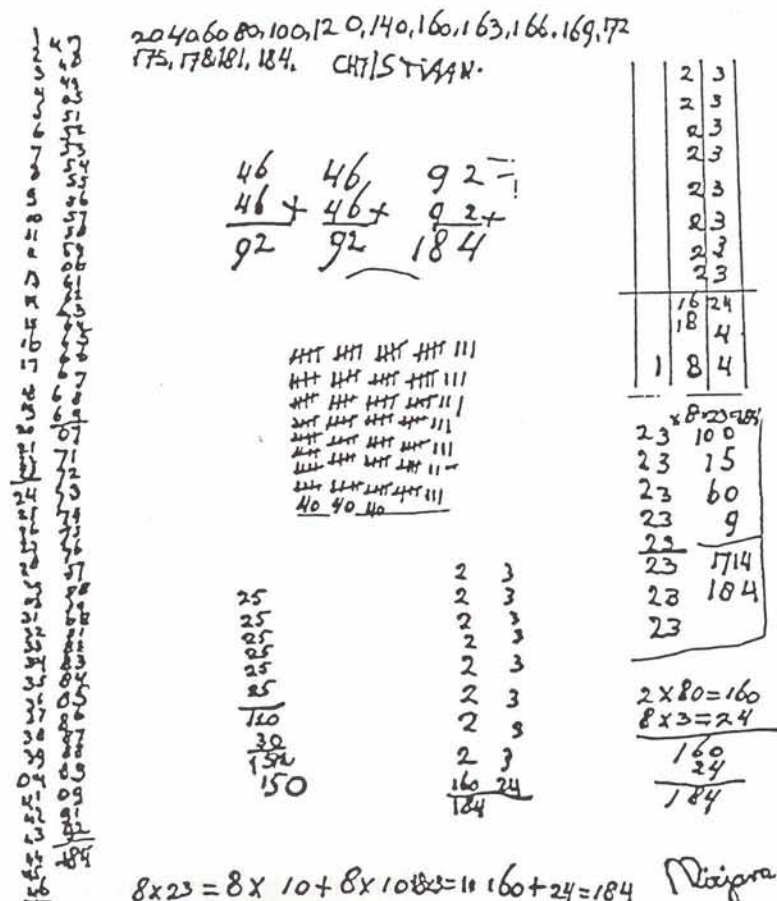
ad 3

We moeten toelaten dat kinderen niet noodzakelijkerwijs de meest verkorte operatie verrichten, doch in staat worden gesteld informele, minder verkorte werkwijzen uit te voeren - we wezen er al op. Voorbeelden daarvan zijn: aftrekken via optellen, vermenigvuldigen als herhaald optellen, delen als herhaald aftrekken of als op-vermenigvuldigen. Indien dit proces van verkorting niet doorlopen kan worden, lopen we het gevaar dat de hogere bewerkingen niet eerst in de lagere verankerd worden om vervolgens een eigen status te kunnen verwerven.

Figuur 10 geeft een tussenstand van zo'n gedifferentieerd verkortingsproces in groep vijf op het moment dat de leerlingen de tafels al wel kennen maar nog niet altijd toepassen.

Het 'Sinterklaas-probleem' markeert de afsluiting van dit hoofdstuk. Tevens dient het als introductie op de volgende aflevering die over cijferen gaat. De kern daarvan wordt namelijk door zo'n verkortingsproces gevormd. Verkorting op basis van vaardigheden betreffende tafels, hoofdrekenen, schattend rekenen en toepassen.

Sinterklaas laat door acht Pieten pakken rondbrengen in het dorp.
Iedere Piet heeft 23 pakjes in z'n zak. Hoeveel hebben ze samen uit te delen?



9. Benezet, L.P.: The story of an experiment. *Journal of the National Education Association*, 24, 1935 en 25, 1936, pag.241-244, 301-303, pag.7-9.
10. Willoughby S.S., C. Bereiter, P. Hilton en J.H. Rubinstein: *Real Math*, V, Open Court, La Salle, pag.34.
11. Uit een biografie over Frank Sinatra.
Kelly, K.: *Sinatra 'his way'*, Sijthoff, Amsterdam, pag.463.
12. Querelle, W.M.G.: Realistisch? Welnee, *Nieuwe Wiskrant* 6(3), 1987, pag.10-13.
13. Zie bijvoorbeeld:
Teule-Sensacq, P. en G. Vinrich: Resolution de problèmes de division au cycle élémentaire dans deux types de situations didactiques, *Educational Studies in Mathematics* 13, 1982, pag.177-203.
14. Zie noot 7.
15. Dickson, L., M. Brown en O. Gibson: *Children Learning Mathematics: A Teacher's Guide to Recent Research*, Holt, Rinehart en Wiston, Eastborne 1984, pag.232.
16. idem pag.235.
17. idem pag.231-232.
18. We doelen hier op een conferentie in de stadsschouwburg van Hilversum over basisvorming, georganiseerd door Cito, SLO en SVO op 31 maart en 1 april 1987.
Zie: Kuijk, J.J. van: *Basisvorming in de basisschool*, Tilburg 1987.
19. Brink, J. van den: Zingevende en zinontnemende contexten, *Willem Bartjens*, 6(3), 1987, pag.135.
20. Brink, J. van den: Children as Arithmetic Book Authors, *For the Learning of Mathematics*, 7(2), 1987, pag.44-48.