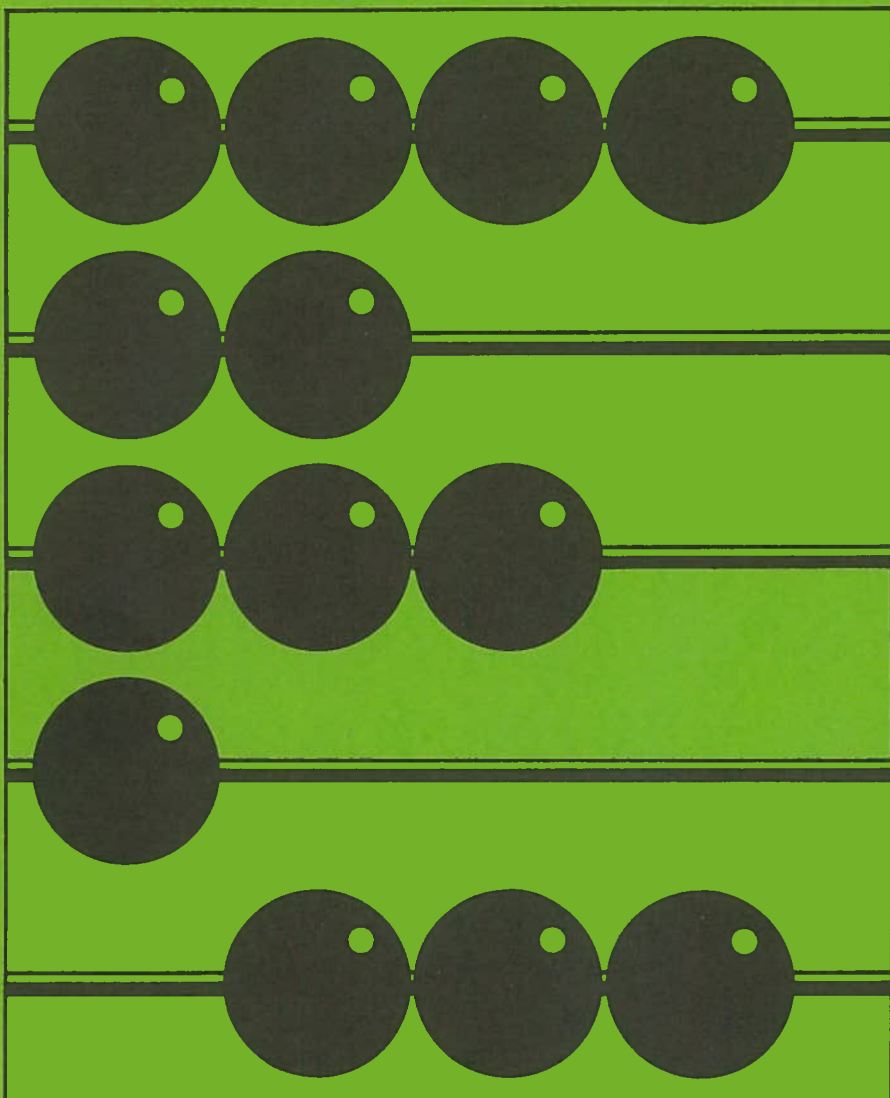
steunpunten voor het denken



rekenen wiskunde

Stichting voor de
Leerplanontwikkeling

AN 3.433.3007

Eindredactie: Fred Goffree
Typewerk : Afdeling tekstverwerking SLO
Lay-out : Afdeling vormgeving SLO
Drukwerk : Drukkerij Hassink

Te bestellen bij:

SLO-Winkel
Postbus 2041
7500 CA ENSCHEDE
053-840840

Onder vermelding van nr.: AN. 3.433.3007

steunpunten voor het denken

rekenen wiskunde

Jan van den Brink
Herman van Die
Fred Goffree
Hans ter Heege
Alda Kolste

Enschede
maart 1983

Stichting voor de
Leerplanontwikkeling

OW&OC

Inhoud

Modelmatig denken

Fred Goffree

Als leerlingen van de basisschool in het voortgezet onderwijs komen, is het met het rekenen gedaan. Beter gezegd: het is gedaan met het rekenonderwijs, want zo af en toe moeten ook brugklassers nog rekenen. Tijdens dat soort gelegenheden worden vaak vraagtekens gezet bij de kwaliteit van het rekenonderwijs op de basisschool of bij de capaciteiten van de betrokken leerling. Soms wordt geprobeerd om de ontbrekende vaardigheid even snel alsnog aan te praten. Over de wederzijdse fustraties, die hiermee gepaard gaan, willen we het hier niet hebben. Evenmin over de achterliggende problematiek, die in BOVO-projecten levensgroot naar voren wordt gebracht. Interessant voor onderwijsgevenden bij het basisonderwijs wordt het pas, als de brugklas (wiskunde) leraar met zijn leerlingen over rekenen gaat praten met de bedoeling om te weten te komen, hoe het rekenonderwijs is overgekomen. Eigenlijk moeten we zeggen: hoe de leerling het rekenonderwijs verwerkt heeft.

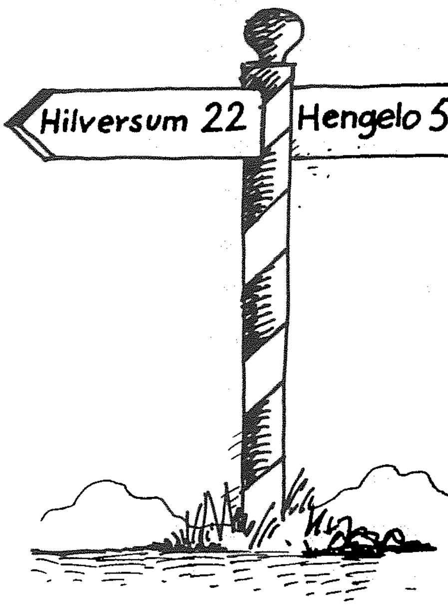
In het kader van de leerplanontwikkeling voor wiskunde is een aantal wiskundeleraren uit de regio Twente bereid gevonden, en enthousiast geraakt, om op de aangeduide wijze met hun eigen brugklassers aan het werk te gaan. Ze vonden inderdaad interessante aanpakken, opvattingen en denkwijzen, soms van onverwachte en ook onbekende aard.

> "Kun jij uitrekenen: 10 x 0,37?
> Herman denkt even na en schrijft dan op: 3,70.
> Hoe heb je dat gedaan?, is vanzelfsprekend de vraag dan. Herman: 0,37 is hetzelfde als 37 cent. Tienmaal 37 cent is 370 cent. En 370 cent = ƒ 3,70 (drie gulden zeventig). Dus 10 x 0,37 = 3,70."

Waar de wiskundeleraar had gedacht aan een paar formele regels (met 10 vermenigvuldigen is de komma één naar rechts schuiven), ging de brugklasser aan de slag met hem welbekende geldbedragen. Hij schiep zich even snel het wereldje van centen, dubbeltjes en guldens, gebruikte de daar geldende notatiewijze en loste het gestelde probleem op.

Een andere leerling Renate wordt door een andere leraar gevraagd: "Wat is de helft van 0,1?"
Renate begint met niets te zeggen, en ook als de leraar door vraagt, en uitlegt, en voorbeelden geeft, komt er weinig uit. Hij wil natuurlijk van 0,1 naar $\frac{1}{10}$, en dan naar $\frac{10}{100}$, waarvan je "gemakkelijk" de helft kunt nemen: $\frac{5}{10}$.
Maar Renate kan de draad niet volgen, ze raakt verstrikt in de veelheid van regels en eigenschappen.

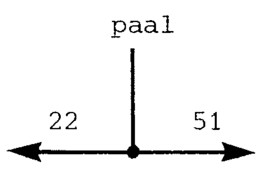
Interessant is, hoe Herman dit probleem zou hebben opgelost. We hebben het hem, helaas, niet gevraagd. Eigenlijk is het ook veel interessanter om te bedenken hoe de eerst genoemde leraar, na het gesprek met Herman, Renate had kunnen helpen. Wat vindt u daarvan?



"De volgende vraagstelling staat op schrift:
De richtingaanwijzer laat zien dat je 22 km naar het Westen moet als je naar Hilversum wilt, en 51 km naar het Oosten voor Hengelo.
Hoe reken je de afstand tussen Hengelo en Hilversum uit?

22 : 51	51 x 22
51 x 2	51 - 22
22 + 51	51 : 22
22 - 51	51 + 12

Miranda weifelt even. Ze leest de opgave nog eens opnieuw en schrijft dan op: 22 - 51. Waarom die getallen? Nou, het is 22 naar West en 51 naar Oost.
De leraar tekent dan nog eens de situatie schematisch aldus:



Modelmatig denken

Fred Goffree

Als leerlingen van de basisschool in het voortgezet onderwijs komen, is het met het rekenen gedaan. Beter gezegd: het is gedaan met het rekenonderwijs, want zo af en toe moeten ook brugklassers nog rekenen. Tijdens dat soort gelegenheden worden vaak vraagtekens gezet bij de kwaliteit van het rekenonderwijs op de basisschool of bij de capaciteiten van de betrokken leerling. Soms wordt geprobeerd om de ontbrekende vaardigheid even snel alsnog aan te praten. Over de wederzijdse fustraties, die hiermee gepaard gaan, willen we het hier niet hebben. Evenmin over de achterliggende problematiek, die in BOVO-projecten levensgroot naar voren wordt gebracht. Interessant voor onderwijsgevenden bij het basisonderwijs wordt het pas, als de brugklas (wiskunde) leraar met zijn leerlingen over rekenen gaat praten met de bedoeling om te weten te komen, hoe het rekenonderwijs is overgekomen. Eigenlijk moeten we zeggen: hoe de leerling het rekenonderwijs verwerkt heeft.

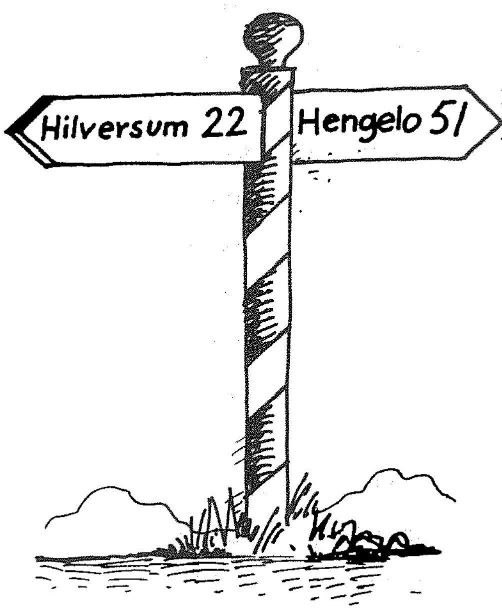
In het kader van de leerplanontwikkeling voor wiskunde is een aantal wiskundeleraren uit de regio Twente bereid gevonden, en enthousiast geraakt, om op de aangeduide wijze met hun eigen brugklassers aan het werk te gaan. Ze vonden inderdaad interessante aanpakken, opvattingen en denkwijzen, soms van onverwachte en ook onbekende aard.

"Kun jij uitrekenen: 10 x 0,37?
Herman denkt even na en schrijft dan op: 3,70.
Hoe heb je dat gedaan?, is vanzelfsprekend de vraag dan. Herman: 0,37 is hetzelfde als 37 cent. Tienmaal 37 cent is 370 cent. En 370 cent = ƒ 3,70 (drie gulden zeventig). Dus 10 x 0,37 = 3,70."

Waar de wiskundeleraar had gedacht aan een paar formele regels (met 10 vermenigvuldigen is de komma één naar rechts schuiven), ging de brugklasser aan de slag met hem welbekende geldbedragen. Hij schiep zich even snel het wereldje van centen, dubbeltjes en guldens,gebruikte de daar geldende notatiewijze en loste het gestelde probleem op.

Een andere leerling Renate wordt door een andere leraar gevraagd: "Wat is de helft van 0,1?"
Renate begint met niets te zeggen, en ook als de leraar door vraagt, en uitlegt, en voorbeelden geeft, komt er weinig uit. Hij wil natuurlijk van 0,1 naar $\frac{1}{10}$, en dan naar $\frac{10}{100}$, waarvan je "gemakkelijk" de helft kunt nemen: $\frac{5}{10}$.
Maar Renate kan de draad niet volgen, ze raakt verstrikt in de veelheid van regels en eigenschappen.

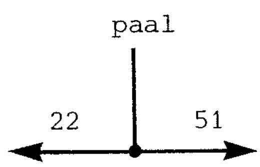
Interessant is, hoe Herman dit probleem zou hebben opgelost. We hebben het hem, helaas, niet gevraagd. Eigenlijk is het ook veel interessanter om te bedenken hoe de eerst genoemde leraar, na het gesprek met Herman, Renate had kunnen helpen. Wat vindt u daarvan?



"De volgende vraagstelling staat op schrift:
De richtingaanwijzer laat zien dat je 22 km naar het Westen moet als je naar Hilversum wilt, en 51 km naar het Oosten voor Hengelo.
Hoe reken je de afstand tussen Hengelo en Hilversum uit?

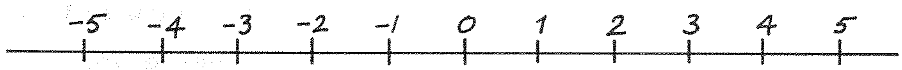
22 : 51	51 x 22
51 x 2	51 - 22
22 + 51	51 : 22
22 - 51	51 + 12

Miranda weifelt even. Ze leest de opgave nog eens opnieuw en schrijft dan op: 22 - 51. Waarom die getallen? Nou, het is 22 naar West en 51 naar Oost.
De leraar tekent dan nog eens de situatie schematisch aldus:



maar ook dat "werkt" niet. Dan stelt de leraar voor om op reis te gaan met Miranda. Waar zullen we beginnen? Even staat "de paal" nog (psychologisch) in de weg, maar als de keuze voor vertrekpunt Hengelo gemaakt is, is ook het probleem uit de wereld: 51 + 22."

Wat, zo moet je je nu afvragen, was er met Miranda aan de hand? Kunt u het raden als u weet dat in de brugklas de getallenlijn en de negatieve (gehele) getallen een niet onaanzienlijke rol spelen?



Naast het (wellicht) blokkerende model van de getallenlijn liet Miranda ook zien, dat ze, door zich er iets anders bij voor te stellen (namelijk het reisje), de problematiek eenvoudig de baas kon.

Herman, Renate en Miranda. Drie brugklassers die iets hebben prijsgegeven van hun denken, van hun denkwijze bij het rekenen.
Dat deden ook de kinderen in een grootscheeps opgezet onderzoek, dat in Engeland werd verricht. Ook hier betrof het kinderen uit het voortgezet onderwijs, die gevraagd werden om rekenproblemen op te lossen. Ze mochten bovendien erbij vertellen, hoe ze tot de oplossingen waren gekomen.
Het resultaat was onthullend, zowel voor de onderzoekers als voor de onderwijsgevenden in het basisonderwijs. Kinderen, waarvan iedereen meende dat ze bijvoorbeeld het cijferen beheersten, maakten vermenigvuldigingen (als 18 x 24) als herhaalde optellingen, en staartdelingen via een herhaalde aftrekprocedure. Achteraf kan men zeggen dat het wellicht de context was geweest (bijvoorbeeld 18 doosjes met 24 snoepjes), die de kinderen tot dit soort primitieve aanpakken verleidde. Allerlei persoonlijke strategietjes bleken de overhand te hebben over de geijkte oplossingen (algoritmen, standaardaanpakken), die jarenlang in de school onderwezen waren.
De kinderen hadden een soort informele rekenkunst overgehouden van de formele rekenlessen. Wie in de Nederlandse

school goed observeert, weet, dat dit niet zo verwonderlijk is. Vraag zo maar eens om je heen hoe kinderen de tafels kennen.

> "7 x 8? Tommy moet er diep over nadenken. Hij weet het blijkbaar niet direct uit zijn hoofd. Dan zegt hij: 56. Hoe deed je dat?
> Tommy: eerst 8 x 7. Dan: ik weet 4 x 7 = 28, dus 56!"

> "7 x 8? Annemarie weet het ook niet direct. Maar ze kan het antwoord vinden, al schaamt ze zich er wel een beetje voor. Ze zit namelijk al in de tweede klas van de mavo.
> Ik weet 5 x 8, dat is de helft van 80, dus 40.
> Dan doe ik 40 + 7 = 47 en 47 + 7 = 54. Dus 54.

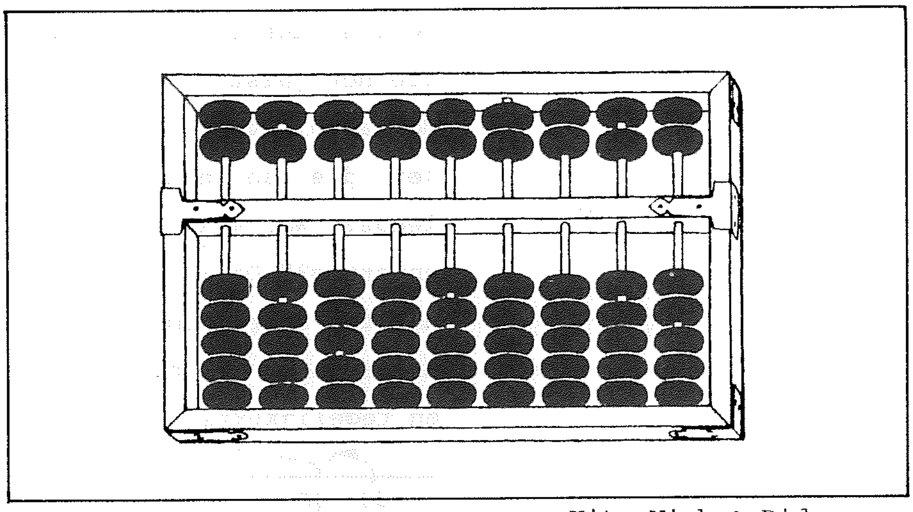
Voor wie wiskunde als een menselijke activiteit ziet, zijn dit prachtige voorbeelden van flexibel rekenen en werken op eigen denkkracht. Jammer, zullen ze erbij denken, dat Annemarie's denkkracht zo verspild wordt op een gebied, waar parate kennis eerder gewenst is.
Wat leren we uit het voorgaande? In het kader van deze publikatie willen we een keuze maken. De kinderen hebben laten zien dat ze (soms, vaak) op een zeer persoonlijke manier van het onderwijs hebben geleerd. Bovendien is duidelijk geworden, dat hun denkactiviteit, ook in dat geval, zeer geholpen kan worden door bepaalde steunpunten.
Over een aantal zeer bijzondere steunpunten willen we het hier hebben. We menen, dat het denken in de wereld van het getal sterk ondersteund kan worden door, wat we willen noemen, denkmodellen. Dit is een groot woord voor een vaak zeer eenvoudige zaak. Neem Herman, die bij het rekenen met kommagetallen gebruik maakte van een denkmodel: geld. In het voor hem vertrouwde wereldje van geldrekenen kreeg een getal als 0,37 een betekenis, evenals de vermenigvuldiging met 10. Denkend in geld (notatie) leverde de gestelde opgave hem geen moeilijkheden.
Kinderen, die zich inzichtelijk met rekenen bezighouden, hebben vaak behoefte om zich iets bij getallen, hoofdbe-

werkingen, cijferen, of de breuken voor te stellen. De gedachte aan een reisje van Hengelo naar Hilversum bracht Miranda op het spoor van de oplossing. Overigens had eerder een onjuiste interpretatie van de situatie het hier misleidende denkmodel van de getallenlijn opgeroepen. Je moet natuurlijk wel in staat zijn bij een gegeven situatie het juiste model te vinden.
Een aardig voorbeeld hiervan vond een (Engelse) onderzoeker, die aan enkele volwassenen de volgende vraag voorlegde: "Wat stel je je voor bij tweeënvijftig min negenendertig?" De meeste antwoorden lieten zien dat de cijfernotatie sterk domineert: "Ik zie zoiets als $\begin{array}{r}52\\ \underline{-39}\end{array}$".
Er waren er ook bij die zich de getallenlijn voorstelden en tegelijkertijd aldus rekenden:

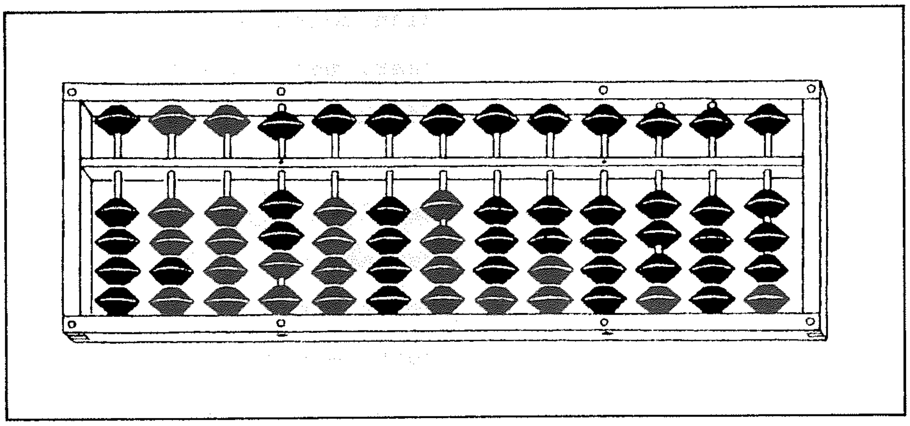
Antwoord: 1 + 10 + 1 + 1 = 13
Maar één van de ondervraagden was uniek in de keuze van zijn denkmodel-van-de-situatie: "Ik denk bij 52 aan een jaar, met 4 kwartalen. 39 is drie kwartalen, er komt dus één kwartaal uit, dat is 13."

Getallen zijn, dat vertelden Bouman en Van Zelm -auteurs van een van de bekendste rekenmethoden uit de eerste helft van deze eeuw- aan hun leerlingen, denkdingen. Je kunt ze niet vastpakken, je kunt ze alleen maar denken.
Kinderen, en onderwijsgevenden, uit de tijd van "Bouman en Van Zelm" hadden het zwaar te verduren. Ze mochten zich bij getallen niets voorstellen, ze konden geen steun verwachten van denkmodellen. Helaas heeft men toentertijd geen onderzoek kunnen verrichten naar de wijze, waarop kinderen rekenden. Of zij misschien op eigen initiatief toch nog zo hun eigen voorstellingen bij de denkdingen schiepen.
Later in deze eeuw hebben veel didactici, zeg maar schoolmeesters, auteurs, leermiddelenproducenten en dergelijke, zich grote inspanningen getroost om onder andere getallen te concretiseren.
Gaan we even voorbij aan het vanouds bekende telraam, dat merkwaardigerwijs niet een juist denkmodel voor onze

(positionele) getallen oplevert, dan komen we op een nog veel oudere concretisering: de abacus. Hieronder ziet u plaatjes van de Chinese (suanpan) en de Japanse (soroban) versie.



Uit: Wisk.& Did.



Uit: Wisk.& Did.

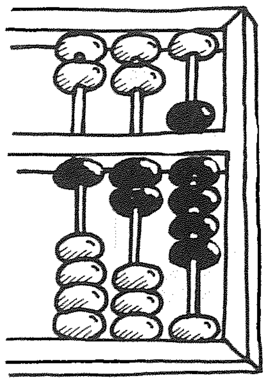
In deze "telramen" komen twee essentiële aspecten van onze getallennotatie naar voren:

. het decimale (tientalligheid)

. het positionele (plaatswaarde).

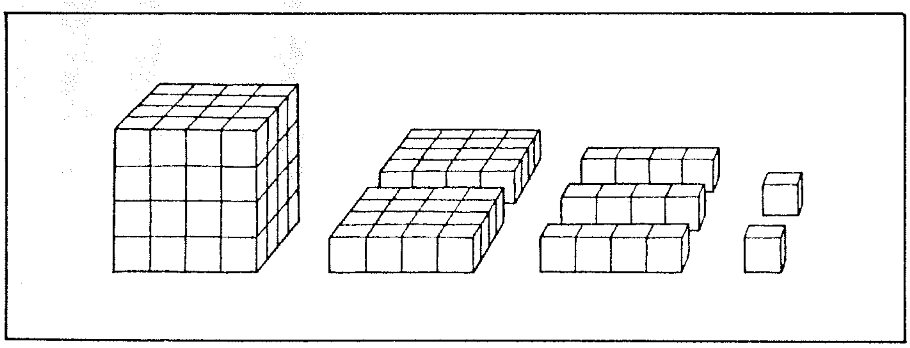
Ziet u dat de Japanse abacus minder kralen heeft dan zijn Chinese pendant? Zou het mogelijk zijn op beide "alle" getallen in beeld te brengen?

Probeert u maar eens:



1 2 9 , hoe ziet dat er op de soroban uit?

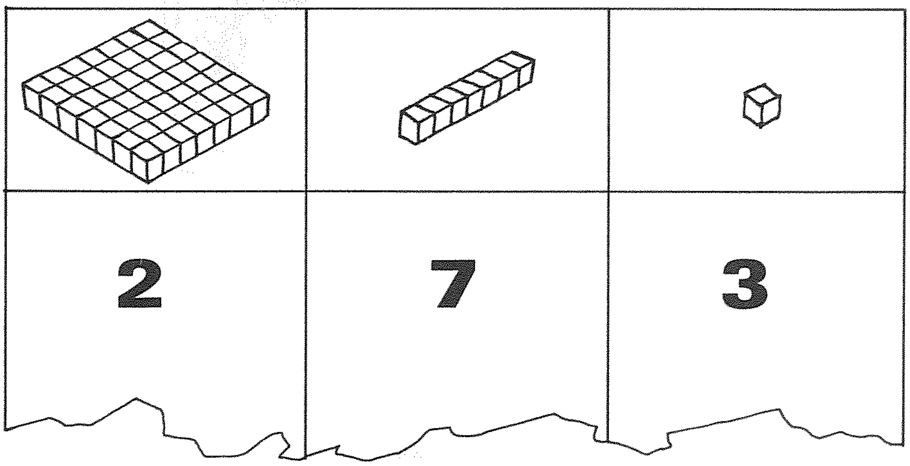
U heeft al wel begrepen dat deze materialiseringen van de getallen eerder vergeleken kunnen worden met rekenmachientjes dan dat ze als denkmodellen fungeren. Dit feit komt ook tot uitdrukking in het gebruik van de suanpan bij het blindenonderwijs. Men kan de getallen, positioneel en tientallig, erop voelen! Wat het denken betreft, liever de ondersteuning van het denken, noemen we een leermiddel van recente datum: het M.A.B. (= Multibase Arithmetic Blocks) materiaal. De M (van multibase) geeft aan dat niet alleen de "basis" tien (tientalligheid) gebruikt wordt. Vanuit een bepaalde didactische opvatting laat men jonge kinderen eerst met kleinere "bundelingen" (bases twee, drie, vier en zes) werken.
Hieronder een illustratie (basis vier):



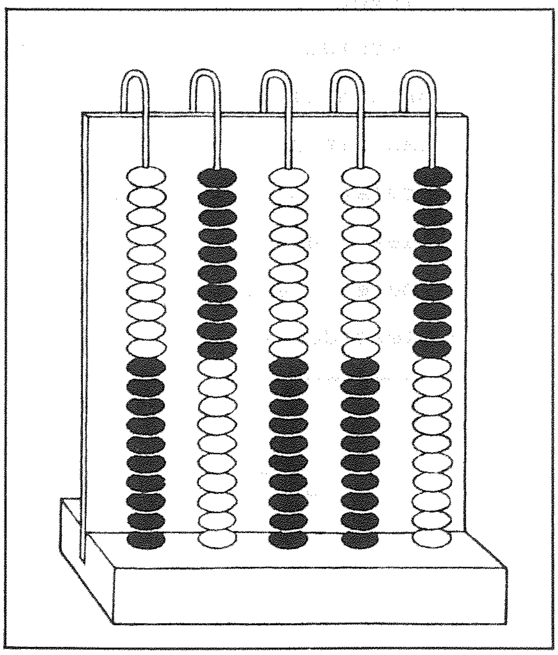
Hier gaat het om $1232_{\text{basis vier}}$.

Het M.A.B. materiaal geeft een mogelijkheid om zich iets bij (grote) getallen voor te stellen. Neem maar (tientallig) het getal 129. Wat kunt u daarbij denken? Veel belangrijker evenwel is de inwissel<u>handeling</u>, die met het materiaal kan geschieden, maar die ook zonder mate-

riaal, dus mentaal, nu concreet gedàcht kan worden.
(Van tien "lossen" maak je één "staaf", van die 12 "staven" gebruik je er 10 om een "plak" te maken...)
Hoe dit denken in M.A.B. materiaal gestalte krijgt, blijkt uit notatie-schema's als hieronder:



Ook van hout, zo mogelijk nog kleuriger maar principieel abstracter dan het M.A.B. materiaal, is de lusabacus.

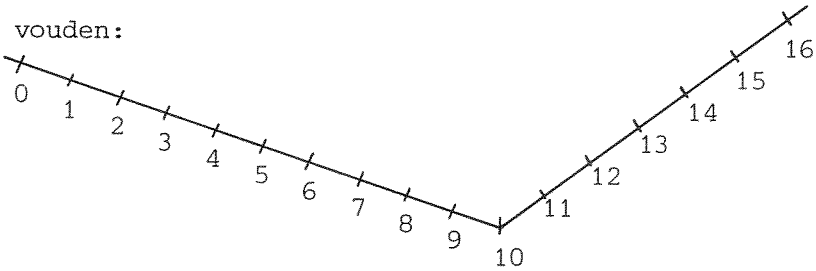


Uit: Wisk.& Did.

De posities zijn hier gematerialiseerd in staven, over het inwisselen (tien op de eerste staaf worden één op de volgende) moeten afspraken gemaakt worden. Hoe de abacus eerst als telraam verkend wordt, daarna handelingsmodel wordt voor het opereren met positionele getallen en tenslotte het denken zal ondersteunen, vertelt Hans ter Heege in zijn bijdrage "Van Abacus tot Positieverhaal" (pag. 35).

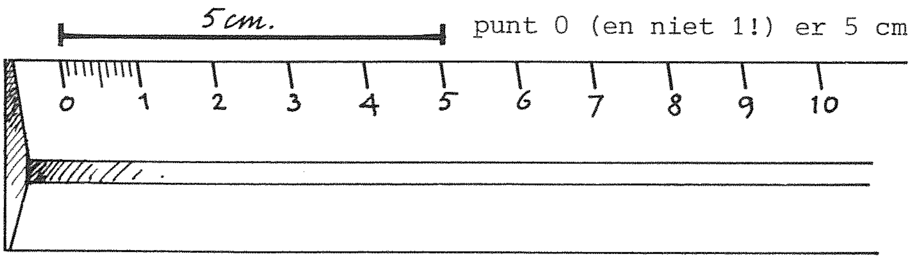
Met voorgaande materialen werd hoofdzakelijk aandacht gevraagd voor de notatie van onze getallen. Dit hangt nauw samen met het cijferen. Cijferen is namelijk gebaseerd op de positionele schrijfwijze. Denkend aan het optellen (onder elkaar) doe je feitelijk niets anders dan het toepassen van de basisvaardigheden (optellen van getallen tot 10) op elke positie, en onthoudt steeds wat op de volgende positie moet worden meegenomen. Optellen met onthouden, zeggen de kinderen dan ook. Met M.A.B. materiaal of abacus is dat onthouden (voorafgegaan door inwisselen) een concrete handeling.

Getallen zijn meer dan symbolen. Dat leren de kinderen vóórdat ze aan de cijfersommen worden gezet: getallen hebben namen, ze hebben een vaste volgorde, er zit een systeem in, je kunt zolang doorgaan als je zelf wilt (met opnoemen) en je kunt er ook mee tellen. Later kunnen getallen ook dienst doen om meetresultaten weer te geven. De laatstgenoemde functie heeft sommige mensen op het idee gebracht de duimstok als model voor de rij getallen te nemen. Denk dan de knikken op de plaats van de tienvouden:



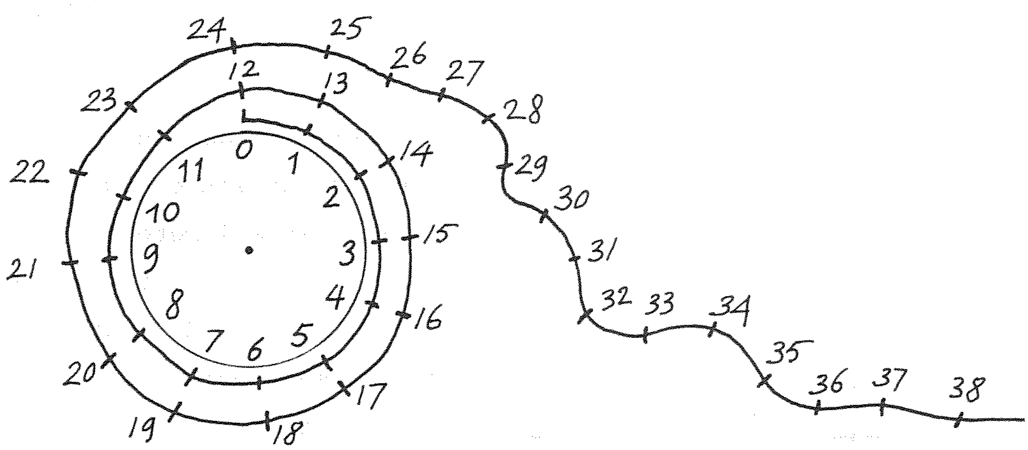
Ziet u het nut daarvan in?

Je kunt natuurlijk ook gewoon een liniaal nemen, met centimeter en milimeteraanduiding. Maar let wel, bij een liniaal, als meetinstrument, gaat het om de stukjes tussen de punten (de centimeters, milimeters, decimeters). In feite geeft het pùnt 5 aan, dat gemeten vanaf het punt 0 (en niet 1!) er 5 cm voorkomen.



Op een liniaal kun je je een aardige voorstelling maken

van het getal 3,7. Met een liniaal (metend) kom je er al gauw achter dat de uitkomst 3,7 cm vast nog onnauwkeurig is, iets tussen 3,65 en 3,75. Maar wie ziet dat nog op de liniaal "voor huishoudelijke doeleinden". Je kunt (en moet dus) er veel bij denken: meetgetallen zijn benaderingen, de liniaal helpt je getallen te denken als kleine stukjes (3,65 tot 3,75). Zover gaan we meestal niet op de basisschool. Helaas, zou ik willen zeggen, want de precisie van het rekenen (45 x 45 = 2025 precies!) komt in de wereld van het meten niet voor.
De liniaal is de houten uitvoering van een denkmodel bij uitstek: de getallenlijn. Ze wordt als het ware gebruikt bij het reken-wiskundig denken van kleuterschool tot universiteit.
Weet u trouwens dat je de wijzerplaat op een klok ook als getallenlijn kunt beschouwen? Nu heeft de tijdrekening op de klok iets bijzonders. Men begint steeds weer opnieuw, na 24 uur (of 12 uur) is het één uur. Het zou heel wat moeite kosten om na te gaan hoe laat het nu (4 maart 1983, 12 uur) zou zijn, als de klok bij het begin van de jaartelling zou zijn gestart met 0 uur, en niet steeds overnieuw was begonnen.
Wie dit probleem wil oplossen, kan zich er iets bij "denken", namelijk de getallenlijn, opgewonden rond de wijzerplaat van een klok.

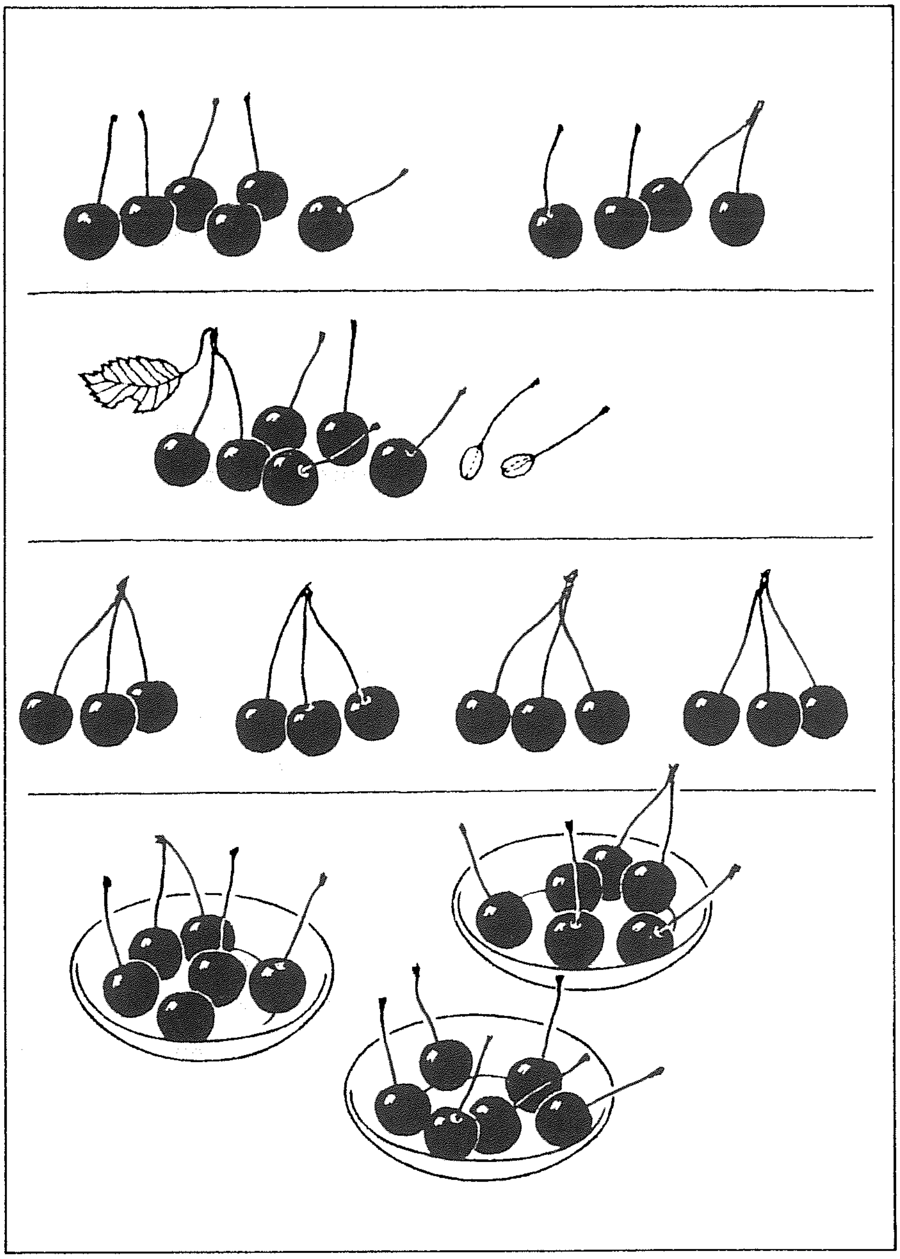


Als je de getallenlijn in plaats van op te winden, in stukken knipt, en die onder elkaar legt, dan ontstaat een nieuwe structuur, het honderdveld:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Hierop kun je allerlei vreemde sprongen maken, die in de taal van tientallen en eenheden, optellen en aftrekken, vermeerderen en verminderen te beschrijven zijn. Begin maar eens bij 45, ga dan 3 horizontaal naar rechts en 4 verticaal omlaag (45 + 43 = 88). Een andere vraag: welke getallen liggen er om het getal 63?
Denken in termen van het honderdveld betekent stilstaan bij de positionele schrijfwijze van de getallen, nu in een ander verband dan bij M.A.B. en abacus. Kijken we met andere ogen naar het honderdveld, bijvoorbeeld door alle drievouden erop rood te kleuren, dan komen prachtige patronen naar voren. De schuine arcering bij de uitkomsten van de tafel van drie gaat over in een verticaal strepenpatroon, als we tweevouden nemen. Kijkt u eens naar de negenvouden, en leg maar eens uit hoe dat patroon ontstaat.
Patronen, wetmatigheden, regelmatigheden, herhalingen, ritmiek en dergelijke zijn essentieel binnen het wiskundig denken. Vaak kun je ze zichtbaar maken, en het ontstaan verklaren. In bepaalde gevallen, zoals bij het tellen, kun je de regelmaat laten horen (tikken, tromslagen) of in bewegingen (springen, stappen, hinkelen) tot uitdrukking brengen. Alda Kolste gaat op dit gegeven nader in: "Patronen en Ritmiek" (pag. 21)

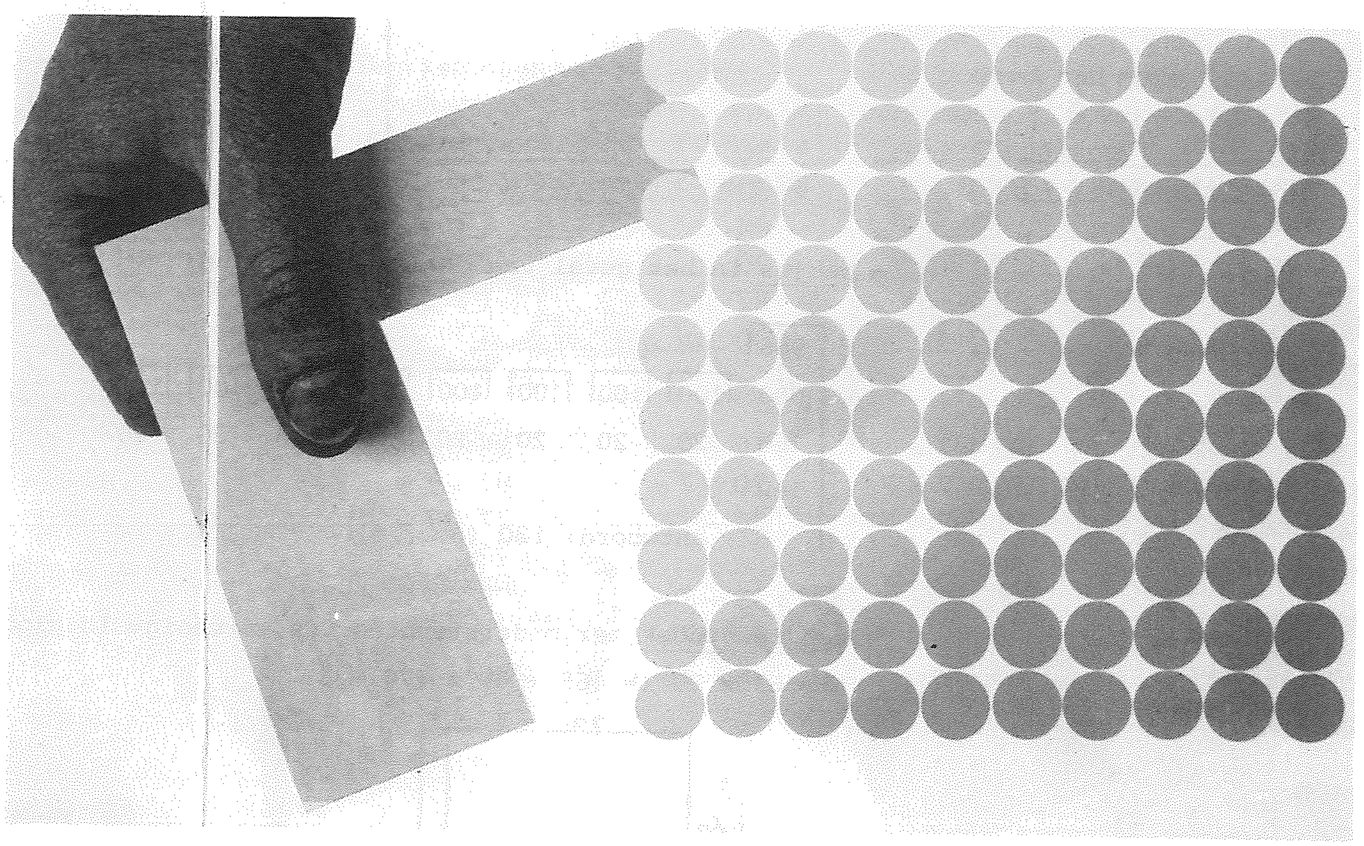
Met getallen kun je ook rekenen. Dat weet ieder schoolkind. Met rekenen bedoelt men dan meestal het uitvoeren van de hoofdbewerkingen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.
Rekenen is uitrekenen: 78 + 25 =
Eigenlijk doet men met dit soort uitspraken het vak tekort. Tenslotte leer je rekenen om het te kunnen toepassen. Bepaalde situaties in het dagelijks leven vragen om "berekeningen". Dan is het de kunst om eerst uit te zoeken over welke bewerking het gaat. In het onderstaande plaatje



Uit: Wisk. & Did.

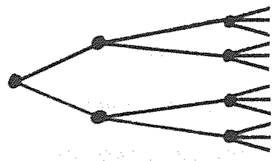
zijn de bewerkingen, veronderstellen we, direct duidelijk. Dit is niet altijd het geval: "De intercitytrein uit Amerfoort van 8.08 naar Enschede ontmoet ergens de intercity uit Enschede van 7.56 naar Amersfoort. Waar is dat ontmoetingspunt?"
Bij een dergelijke opgave weet je niet direct hoè je moet rekenen. Dan maak je een plaatje, om het denkproces wat te ondersteunen, of je probeert je in de situatie in te leven, of je tracht je er iets concreets bij voor te stellen. In het rekenonderwijs trachten we onze leerlingen dergelijke ondersteuningsmiddelen aan te reiken, vaak in de vorm van visuele voorstellingen, schema's, notatieschema's, diagrammen, pictogrammen, grafieken. Soms hebben de "modellen" een tijdelijke betekenis (voor die ene situatie), maar het komt ook voor dat het model een groot toepassingsbereik en lange levensduur heeft. Zonder daar hier nader op in te gaan kunnen we noemen:

- het stippenpatroon om een vermenigvuldiging zichtbaar te maken,
  bijvoorbeeld Taltaal:



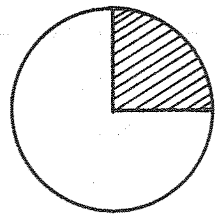
Uit: Taltaal

- het boomdiagram om een combinatie van mogelijkheden te tellen;



(2 x 2 x 3)

- het sectordiagram voor eenvoudige breuken;



- het verhoudingsblok als notatieschema in het geval van evenredigheden;

8	12	
		(5x)
40	60	

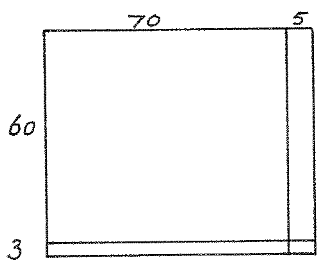
- de positiestrepen voor het leren optellen met onthouden;

h	t	e	
	3	7	
	9	8	+
	12	15	
	13	5	
1	3	5	

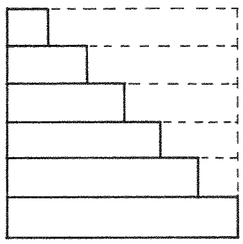
- bakjes in het geval van de (staart)deling;

8	966								
	800	100	100	100	100	100	100	100	100
	166	20	20	20	20	20	20	20	20
	160								
	6	antwoord: 120 (over 6)							

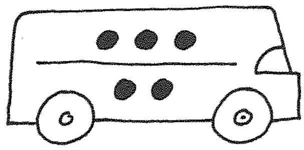
- een rechthoek ter ondersteuning van vermenigvuldiging als 63 x 70 (= (65 + 3) x (70 + 5))



- staafjes van Cuisenaire om onder andere bewerkingen, relaties tussen getallen, verhoudingen, structuren zichtbaar te maken;

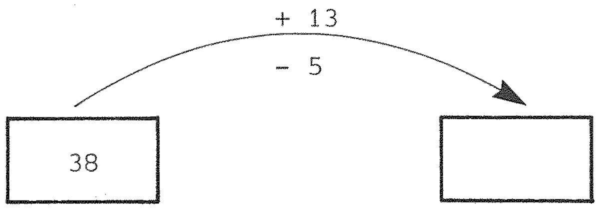


- dubbeldekkers om somstructuren betekenis te geven;



5 = 3 + 2

- autobusproblemen om optellen en aftrekken een dynamische invulling te geven;



De opsomming is, als zo vaak, niet volledig of uitputtend. Bovendien betreft ze slechts modelmatige zaken, die zichtbaar gemaakt kunnen worden. Kinderen hebben evenwel ook steunpunten voor het rekenen, die niet direct berusten op een visualisering en die nogal eens verborgen blijven voor de onderwijsgevenden.
Inmiddels wat bekender bij didactici, door onderzoek van het rekenen bij kinderen, zijn de eigen vondsten op het gebied van denkstrategietjes.
Bijvoorbeeld de optelling 6 + 7. Onderwijsgevenden zijn geneigd om hier een vast algoritme te volgen: 6 + 7 = (6 + 4) + 3. Dat vraagt van de kinderen om een vaardigheid in het doelgericht structureren:

6 + 7; eerst naar 10, dus 10 = 6 + 4.
Dan naar 7 : 7 = 4 + 3.
Tenslotte over de 10 heen: (6 + 4) + 3.

Maar wat blijkt? Sommige kinderen hebben er zelf "iets op gevonden", vaak voordat ze het op school onderwezen kregen. Bijvoorbeeld de voorkeur voor "doubletten" wordt ingezet:

6 + 7 =   ; ik weet 6 + 6 = 12.

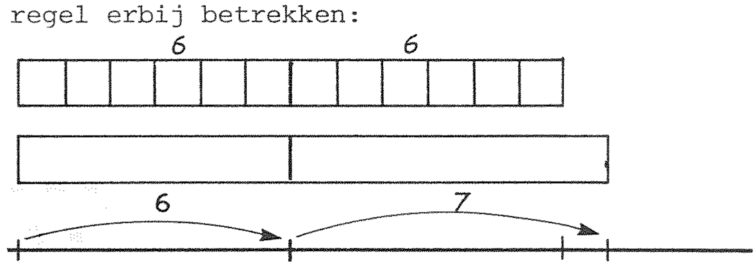
6 + 7 is dan één meer: 6 + 7 = 12 + 1.

Of, iets minder gebruikelijk:

7 + 7 = 14 (dat weet ik "gewoon"), dus

6 + 7 = 14 - 1.

Natuurlijk kun je achteraf een dergelijke denkstrategie in beeld brengen, en zelfs een algemeen geldende rekenregel erbij betrekken:



6 + 7 = 12 + 1.

Daarmee beschrijf je evenwel niet het denken van de leerling, die "gewoon weet" dat 6 + 6 = 12, en 9 + 9 = 18 enz.

Je kunt je afvragen hoe bovenbedoelde leerling, die zijn voorkeur niet op school heeft leren te onderdrukken, de volgende opgave uit het hoofd maakt:

46 + 27 =

Is dat verschillend van uw eigen aanpak? Kun je dat verschil beschrijven in termen van steunpunten? Van achterliggende denkstrategieën? Van een denkmodel wellicht?

Inderdaad zie je niet vaak hoe kinderen denken bij het rekenen. Veelal menen wij dat ze denken als wij, dat ze sommen uitrekenen zoals we ze dat gezegd hebben te doen. Met of zonder ondersteuning. Het reeds genoemde Engelse onderzoek liet dat anders zien. De vraag aan ons zou moeten zijn: hoe kunnen we dat bij onzen eigen leerlingen zien? En wat doen we ermee?

U begrijpt, de aanpak van deze vraag vereist een nieuwe conferentie, zeker in het geval van het reken/wiskundeonderwijs aan doven.

Nog wèl binnen de vraagstelling van deze conferentie valt de bijdrage van Jan van den Brink: "Zakrekenmachines", Een zakrekenmachientje heeft ook iets van een onzichtbare aanpak. Je drukt op een paar knoppen, en er verschijnt een reactie op het schermpje. Soms snap je het antwoord, maar het komt ook voor dat het rekendoosje onbegrijpelijke taal uitslaat. Jan probeert met zijn leerlingen achter de geheimen van (het "denken" van) de ZRM te komen.

Tenslotte.

De "vereniging voor het onderwijs aan doven" heeft een bijeenkomst belegd voor haar leden. Het thema is "reken/wiskundeonderwijs", de bedoeling is om kennis te nemen van recente ontwikkelingen op dat terrein. Een vertaling naar de specifieke eisen van het onderwijs aan doven wordt vooreerst aan de deelnemers zelf overgelaten. Toch hebben de samenstellers van dit boekje de thematiek niet onafhankelijk van de doelgroep gekozen. Met "modelmatig denken" is namelijk niet het moderne reken/wiskundeonderwijs in al zijn facetten beschreven. Voor hen, die meer willen weten, verwijzen we naar de literatuurlijst achterin.
We kozen dit thema in de gedachte dat juist het reken/wiskundeonderwijs aan doven zeer gediend kan zijn met een beschouwing van steunpunten in het denken. Steunpunten, die in eerste instantie een visueel, schematisch karakter hebben. Wiskundige activiteit vraagt om structuur brengen, kinderen doen dit soms spontaan in allerlei contexten, soms moeten ze erbij geholpen worden. Bepaalde structuurtjes hebben een grotere gebruikswaarde dan andere. Ze kunnen vaker, en met meer succes worden toegepast. Het is dan mogelijk dat het zelfs denkmodellen worden. Hiervóór zijn er verschillende genoemd, ook verschillend naar gebruik.
Sommige denkmodellen geven aanleiding om (mentaal) "aan te handelen", zoals de abacus. Andere denkmodellen beschrijven een situatie (rechthoekmodel) of een verandering (autobussen) of een verband (grafiek). Nog weer andere werken als invulschema's (notatieschema's), of als geschematiseerde context (staartdeling). Je hebt statische modellen (dubbeldekker) en dynamische, die een verande-

ring toelaten. Grote gebruikswaarde hebben modellen, die een zekere heuristische waarde hebben. Daarmee bedoelen we modellen, waarbinnen je nog nieuwe dingen kunt ontdekken. De getallenlijn heeft dat in hoge mate, en het is dan ook begrijpelijk dat de getallenlijn zowel in de eerste klas van de basisschool -aan de wand- hangt, als in geavanceerde wiskundeboeken frequent voorkomt. Dit was een onderscheiding, van (denk)modellen naar gebruik.

Je kunt ze ook op het punt van (de beschreven) structuur onderscheiden. We noemen, tot slot van deze inleiding, een paar structuren. Wie het voorgaande goed gelezen en begrepen heeft, kan er zelf de voorbeelden bij bedenken. Een soort "eindtoets" dus, voor deelnemers aan de conferentie, als ze achteraf dit boekje lezen.

- De positionele structuur.
- De inwisselstructuur.
- De veranderingsstructuur.
- De optel/aftrekstructuur.
- De produktstructuur.
- De deelstructuur.
- De punt en intervalstructuur van de getallenlijn.
- De combinatiestructuur.
- De relatiestructuur.
- De algoritmestructuur.
- De verhoudingsstructuur.
- De herhalingsstructuur (periodiciteit).
- De meetstructuur.

Ook deze opsomming is niet volledig. Nog niet uitgeputte deelnemers kunnen hun toetsresultaat verbeteren door er een essentiële structuur aan toe te voegen. Wellicht kan Herman (herinnert u zich nog?) u op een eerste idee brengen?

Patronen en Ritmiek

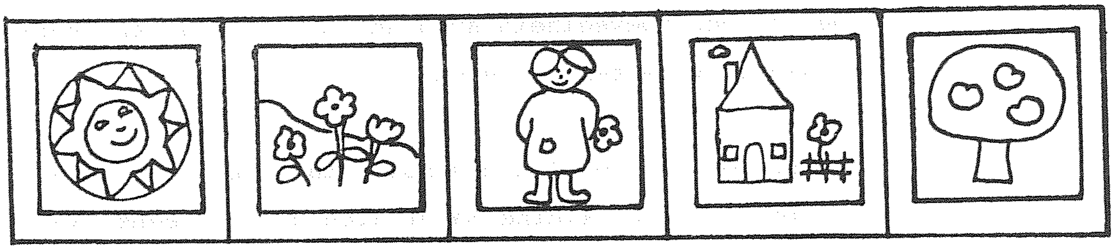
Hans ter Heege
Alda Kolste

Op het eerste gezicht zal dit onderwerp binnen een themadag over rekenen/wiskunde nauwelijks tot enige herkenning leiden.
Patronen en ritmiek. Wat zijn dat eigenlijk, patronen in de wiskunde? Hebben patronen iets te maken met ritmiek?
Deze en andere vragen zullen binnen dit kader niet tot op de bodem worden uitgediept. Het is slechts onze bedoeling een hoeveelheid suggesties voor les- en leerlingenactiviteiten te geven.

"Bij ons in de kleuterschool staat een grote ton met allerlei kleine materialen die wel eens "waardeloos materiaal" worden genoemd, maar die voor ons vaak zeer waardevol zijn.
Neem nou Dikkie, vorige week. Op z'n tafeltje lag een tien-bij-tien-veldje waarop hij materialen uit de rommelton legde. Netjes, in elk hokje één kastanje, één schelp, één kroondop of iets anders. Ik liet hem maar begaan en hielp Liselotte die aan het verven was. Een paar minuten later zag ik Dikkie bezig het tien-bij-tien-veldje opnieuw met het materiaal uit de rommelton vol te leggen, maar nu heel anders. Het leek me "systematisch". Wat had-ie gedaan? Wel, om en om een kroondop en een knoop. Maar hij stopte en zocht in de rommelton.
"Wat zoek je, Dikkie?", vroeg ik.
Dikkie antwoordde: "Er zitten geen knopen meer in". En in één adem, naar het scheen, vervolgde hij: "Nou, dan neem ik schelpen uit de schelpendoos".
Dit geschiedde. Even later was Dikkie's tien-bij-tien-veldje helemaal vol, met een systematisch patroon van één kroondop, één schelp, één kroondop,

één schelp, enzovoorts. Zonder één enkele fout. "Mooi, hé, juf", zei Dikkie toen hij klaar was. Ik knikte."

Wat is een patroon? Wel, Dikkie màakte een patroon. Dat is een hoog niveau van werken, vooral als je als kind de systematiek tot het einde toe foutloos kunt doorzetten. Het patroon van Dikkie's spel is van het type a-b-a-b-a-b enzovoorts, maar wel in twee richtingen, horizontaal en verticaal.
Je kunt natuurlijk ook gegeven patronen laten herkennen, of patronen laten voortzetten.
Neem bijvoorbeeld deze strook van vijf tekeningetjes, die uit een stukje inpakpapier werden geknipt dat we in de speelgoedwinkel kregen 1).

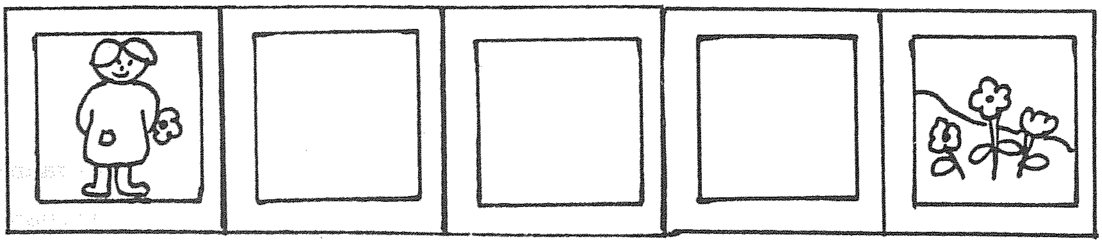


Natuurlijk behoort het gekleurd te zijn. Voor de eenvoud van het drukken hebben we het mooie papier maar op deze manier nagetekend.
Deze vijf tekeningetjes vormen nu de basis voor een oneindig voor te zetten patroon, waarin de strook van vijf steeds wordt herhaald. Een patroon dus van het type a-b-c-d-e-a-b-c-d-e-a- enzovoorts.
Zonder dit patroon ook daadwerkelijk voort te zetten, kunnen we vragen: "Welke is het achtste plaatje in de rij?" "Welke het tweeëntwintigste?"

Het plaatjespatroon heeft ook buiten de wiskunde betekenis. Het "verhaal" dat bij dit schema hoort, a-b-c-d-e, is anders dan het "verhaal" bij c-b-d-a-e-. We gaan hier niet dieper op in, maar volstaan met de opmerking dat hiermee veel mogelijkheden voor creatief taalgebruik aanwezig zijn.

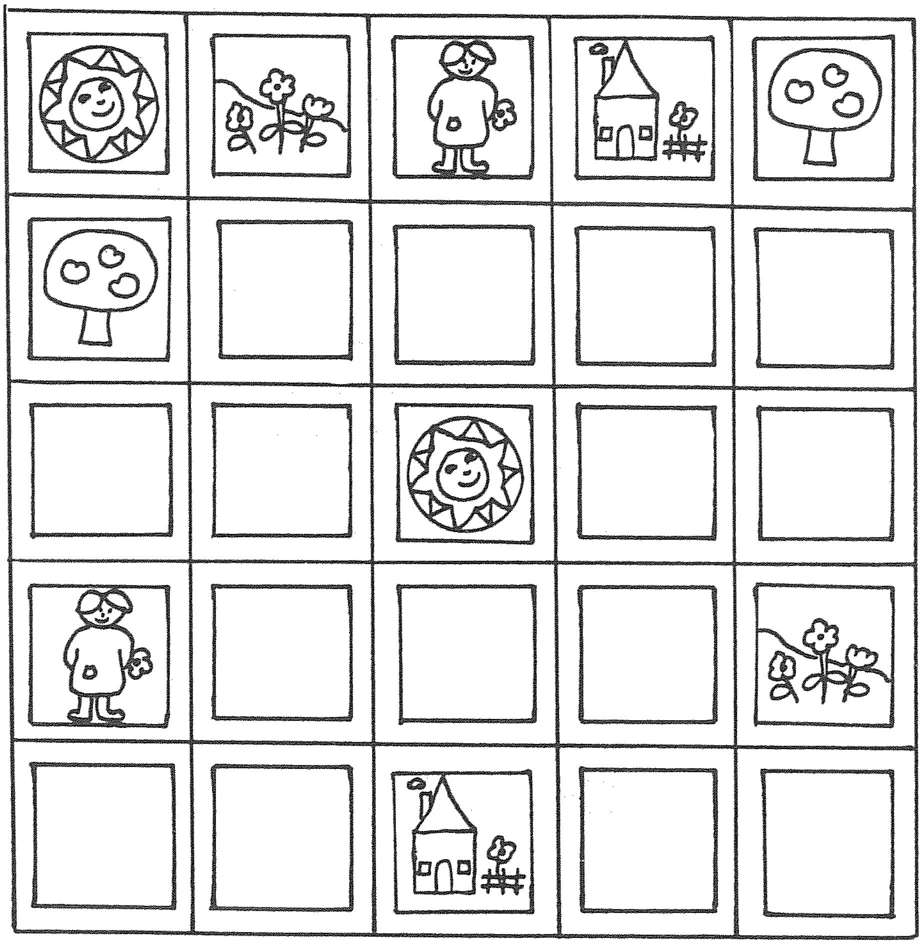
1) Met dank aan Jeannne de Gooyer (uit Patronen, interne IOWO-publikatie)

Maar ook in wiskundige zin, zijn er vele ontdekkingen mogelijk. De creativiteit van de onderwijsgevende kan in dit opzicht een veelheid aan zinvolle opdrachten opleveren.
We geven een aantal voorbeelden, waarbij we ervan uitgaan dat kinderen het pakpapierpatroon door hebben. Als het patroon bekend is, vragen we de kinderen die open plaatsen in te vullen:



Deze opdracht bereidt een veel moeilijker opdracht voor, waarbij het lineaire patroon wordt gebruikt om een vlakvulling (twee-dimensionaal) te maken. Zoals:

"Dit is een stukje pakpapier. Weet je welke tekeningetjes er op de open plaatsen horen?"



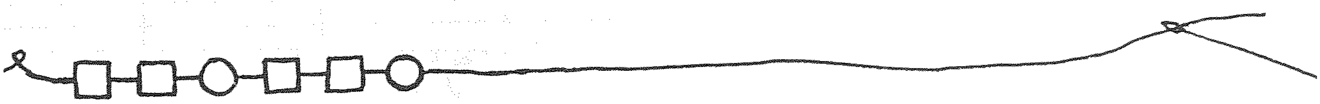
Op deze manier zijn er ook verticaal bepaalde patronen ontstaan.
"Hoe zien die patronen eruit? Wat hebben ze te maken met het grondpatroon (a-b-c-d-e)?"

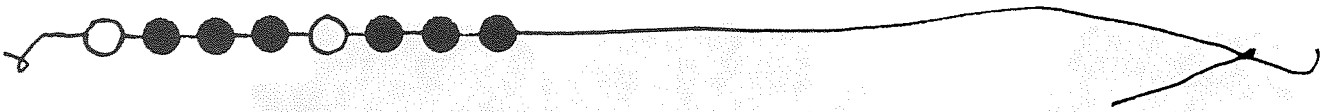
Activiteiten, die reeds in de kleuterschool en in de onderbouw mogelijk zijn. De inspiratie ervoor werd gevonden in een stukje pakpapier. Maar het ging ons om patronen.

Een eerder gestelde vraag was:
Patronen in de wiskunde, wat zijn dat? In het voorgaande is op deze vraag een antwoord gegeven. Er is althans een voorbeeld van een wiskundig patroon uitgewerkt. Zo'n voorbeeld is geschikt om er wiskundeonderwijs van te maken op het niveau van de kleuterschool en de onderbouw van de lagere school.
We gaan nu wat dieper in op de mogelijkheden van wiskundige patronen voor het onderwijs.

In het voorafgaande hebben we reeds aangeduid dat het ging om het herkennen en het voortzetten van patronen, zoals in het pakpapier-voorbeeld, en om het maken van patronen, zoals in het voorbeeld van Dikkie. Er is dus sprake van activiteiten op diverse niveaus in het wiskundeonderwijs over patronen.
Er is echter meer.
De vulling van het tien-bij-tien-veldje zoals Dikkie dat deed, is het maken van een visueel patroon. Ook in het pakpapier-voorbeeld ging het om een visueel patroon. Visuele patronen kunnen ook meetkundige patronen worden genoemd, ééndimensionaal, tweedimensionaal (in het vlak) of driedimensionaal (in de ruimte).

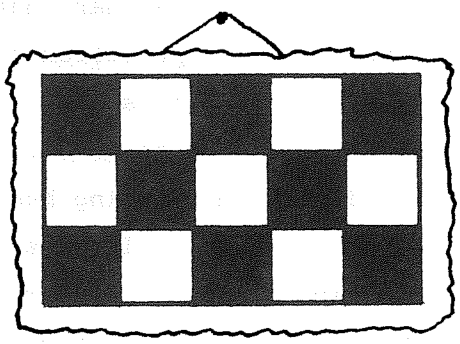
"Maak deze kralenkettingen af".

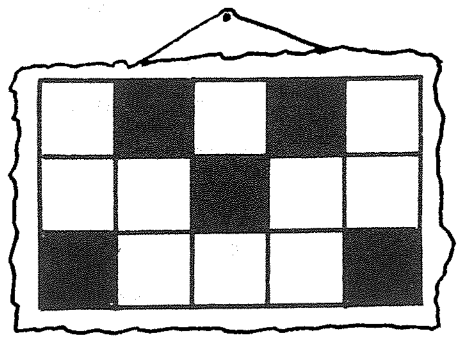




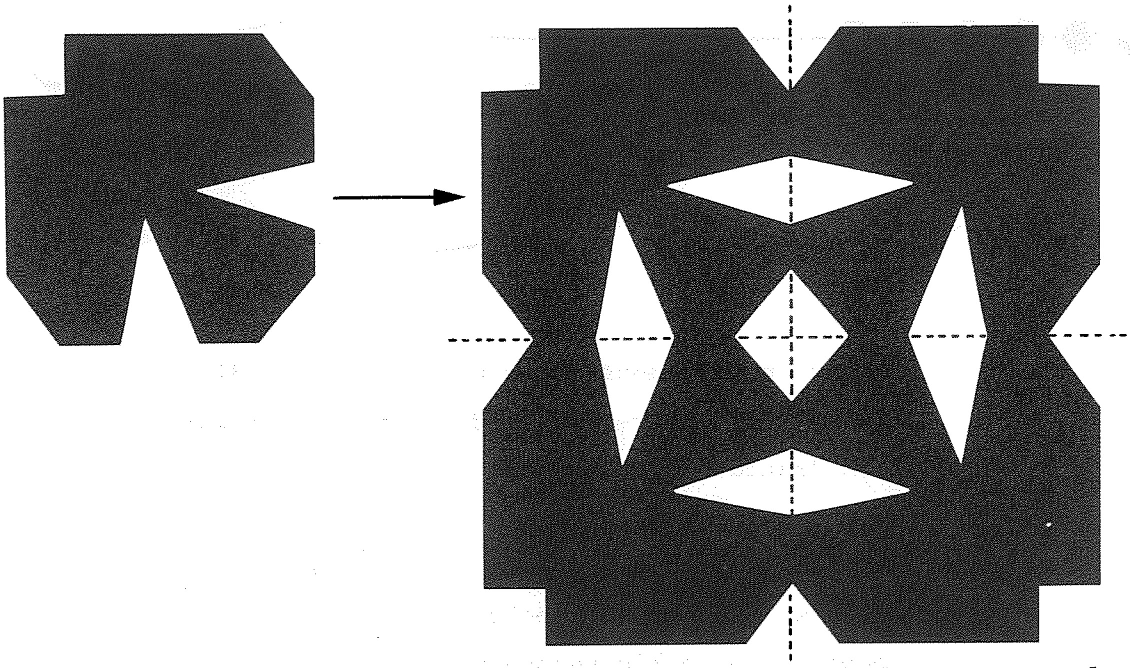
Dit zijn ééndimensionale patronen, oneindig te variëren. In het pakpapier-voorbeeld heeft dit het karakter van een "randornament".

Tweedimensionale patronen, zoals vlakvullingen, zagen we zowel in het voorbeeld van Dikkie, als van het pakpapier. In de kleuterschool zien we deze vlakvullingen in allerlei situaties een rol spelen, zoals in het maken van een "lapjesdeken" of een schilderij. Twee voorbeelden:





Deze patronen maken kinderen na met mozaïeken of op de kralenplank. Het rechter voorbeeld, waar de symmetrie van het linker- en het rechtergedeelte in het oog springt, wordt in knip- en plaklessen in de kleuterschool èn in de lagere school nagevolgd. We kennen allemaal het voorbeeld waarbij een vouwblaadje in vieren wordt gevouwen om er vervolgens enkele hoekjes uit te knippen.
Zoals in dit voorbeeld:



Visuele patronen, zoals de bovenstaande, zijn één mogelijkheid, akoestisch-ritmische patronen zijn een andere mogelijkheid. Voorafgaand aan een uitdieping van deze akoestisch-ritmische patronen moet ons van het hart dat we ons niet begeven in de discussie welk type patronen in het onderwijs het belangrijkste zijn. Het is hier slechts de bedoeling een summiere inleiding te geven. Tellen, in allerlei vormen, en ritmiek en beweging hebben veel met elkaar gemeen. Ze komen samen in liedjes, ook -misschien juist vooral- in kinderliedjes. Kinderliedjes zijn over het algemeen geen liedjes om zittend in de bank te zingen. Er moet bij gedanst of gehuppeld worden.
Het kinderliedje als integratie van telpatronen, ritmiek, melodie en beweging heeft een grote emotionele betekenis voor kinderen. In sommige kinderliedjes wordt echt geteld:

Eén, twee, drie, vier,
hoedje van, hoedje van,
één, twee, drie, vier,
hoedje van papier.

Of:

Eén, twee, kopje thee,
drie, vier, glaasje bier,
vijf, zes, kurk op de fles,
zeven, acht, soldaat op wacht,

negen, tien, ik heb de dief gezien,
tien, elf, jij bent de dief zelf!

Maar niet in alle kinderliedjes is dit het geval. In:

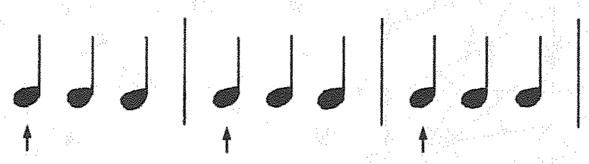
Schuitje varen, theetje drinken,
varen we naar de overtoom,
drinken we zoete melk met room,
zoete melk met brokken,
't kindje mag niet jokken!

is het ritme van dien aard dat de moeder met haar kind kan wiegen: heen-en-weer, heen-en-weer,...
Een soortgelijk element vinden we terug in "Twee emmertjes water halen", alleen vlugger, te vlug om te wiegen.

Bij liedjes hoort ritme en op ritme kun je kloppen:

Van je ras-ras-ras,
rijdt de koning door de plas.
Van je voort-voort-voort,
rijdt de koning door de poort.
Van je erre-erre-errek,
rijdt de koning door de kerk.
Van je één-twee-drie!

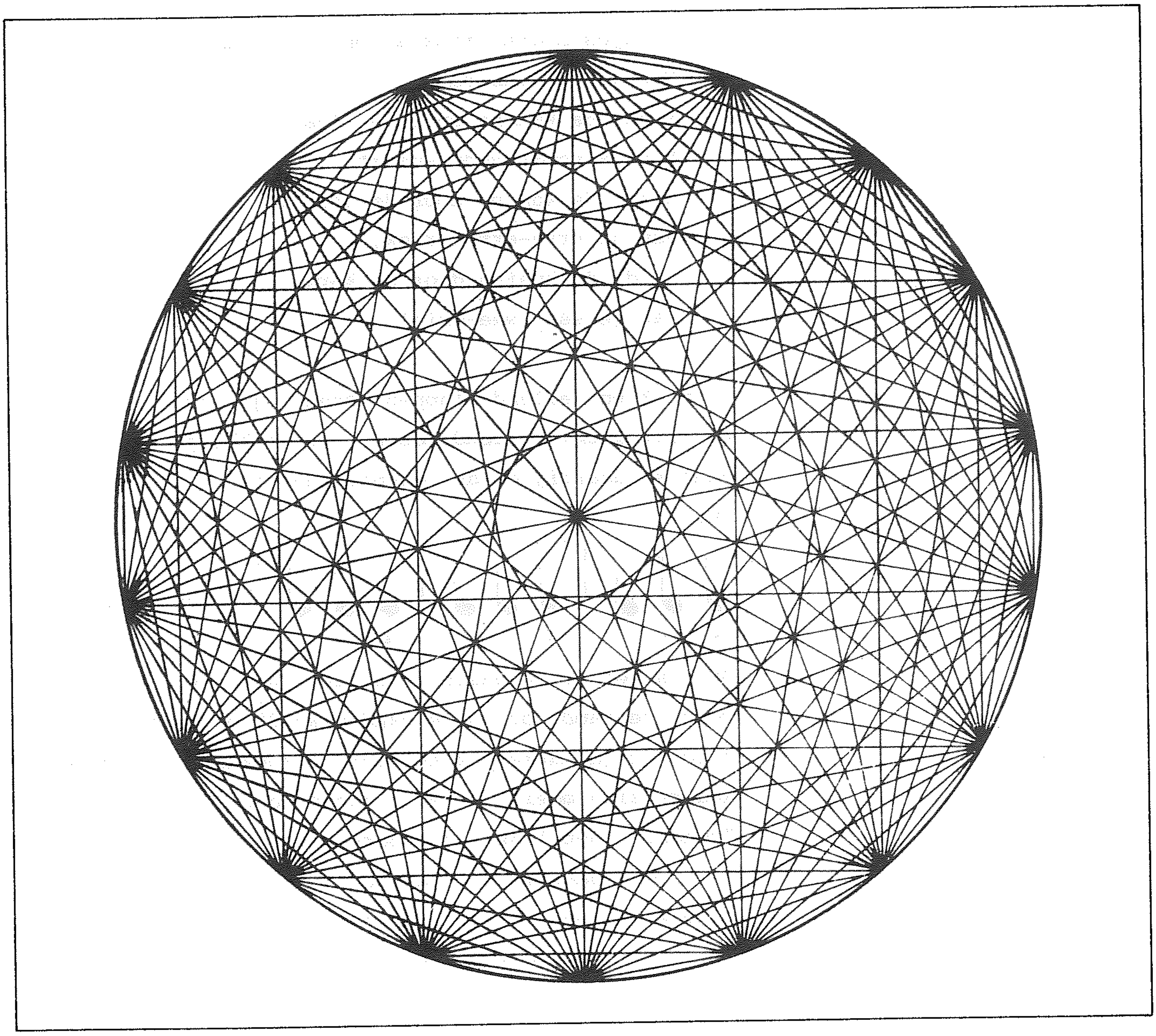
Ritmiek en tellend klappen horen bij elkaar. Ritmiek en (ritmisch) tellend lopen horen ook bij elkaar. Het gaat er daarbij om de accenten aan te geven, om maten dus:



enzovoorts.

Dit is het ritme waarbij op elke derde stap op de grond wordt gestampt of in de handen wordt geklapt. Sommige ritmen zijn makkelijk telbaar, klapbaar of loopbaar, andere zijn moeilijk. Maar kinderen kunnen dit veelal "zomaar". Het lijkt aangeboren, ook de moeilijke ritmen. We zouden daar in het aanvankelijk reken- en wiskunde-onderwijs veel gebruik van moeten maken; ten behoeve van het tellen vooral.

We spraken reeds van een emotioneel element in het ritmisch tellen en bewegen. Gewoon gezegd: Kinderen hebben vaak veel plezier in het bewegen en dansen en in het zingen. Hoezeer deze zaken te maken hebben met patronen is hiervoor aangestipt.
Ook visuele patronen hebben een emotioneel element in zich. Kunst is vaak op patronen gebaseerd. In de negen jaargangen van het Wiskobas-bulletin had prof. F. van der Blij een vaste rubriek "Wiskunst", daarmee aangevend hoezeer kunst, beeldende kunst, maar ook andere kunstvormen, met wiskunde te maken hebben. We volstaan er hier mee deze relatie tot uitdrukking te brengen in de "magische roos". Ziet u hoe dit patroon tot stand is gekomen? Dan kunt u ook het aantal lijnen tellen!



We besluiten deze inleiding met enkele patronen voor het aanvankelijk reken/wiskundeonderwijs. Ze worden naar voren gebracht op werkbladen, die we van commentaar voorzien, en waarvan we hopen dat ze enkele lezers inspireren om met patronen de klas in te gaan.

blad 1. randornamenten en kralensnoeren; dus lineaire patronen.
niveau: klas 1
aanvullende vragen:
hoeveel zwarte kralen?
hoeveel witte kralen?
klas 2/3: wie ziet tafelprodukten?

blad 2. vlakvullingen
niveau: klas 1/2
aanvullende vragen: zet buiten het schilderij het patroon voort.

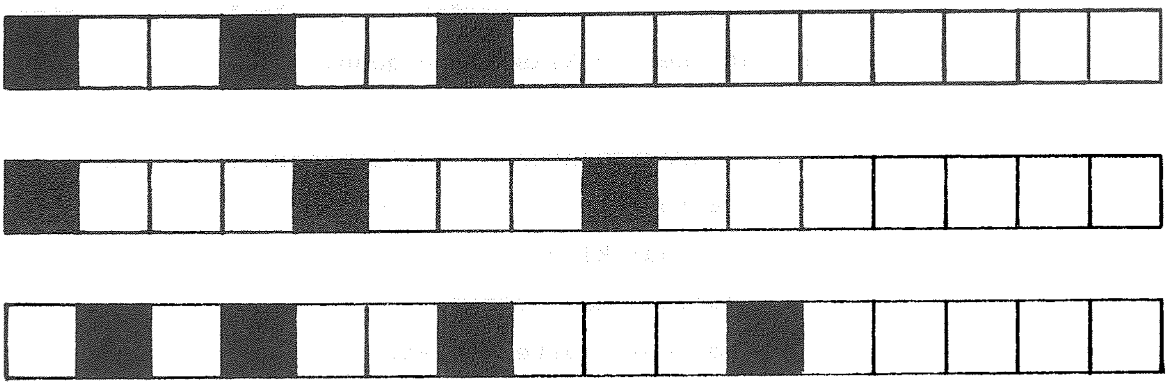
blad 3. kralensnoeren
niveau: klas 1/2
vraag: welke strook hoort bij welk snoer kralen?

blad 4. nummers
niveau: klas 2/3
aanvullende vragen: wie kent zijn tafelprodukten?
hoeveel zwarte kralen in het snoer?
hoeveel witte kralen? Hoe tel je die?

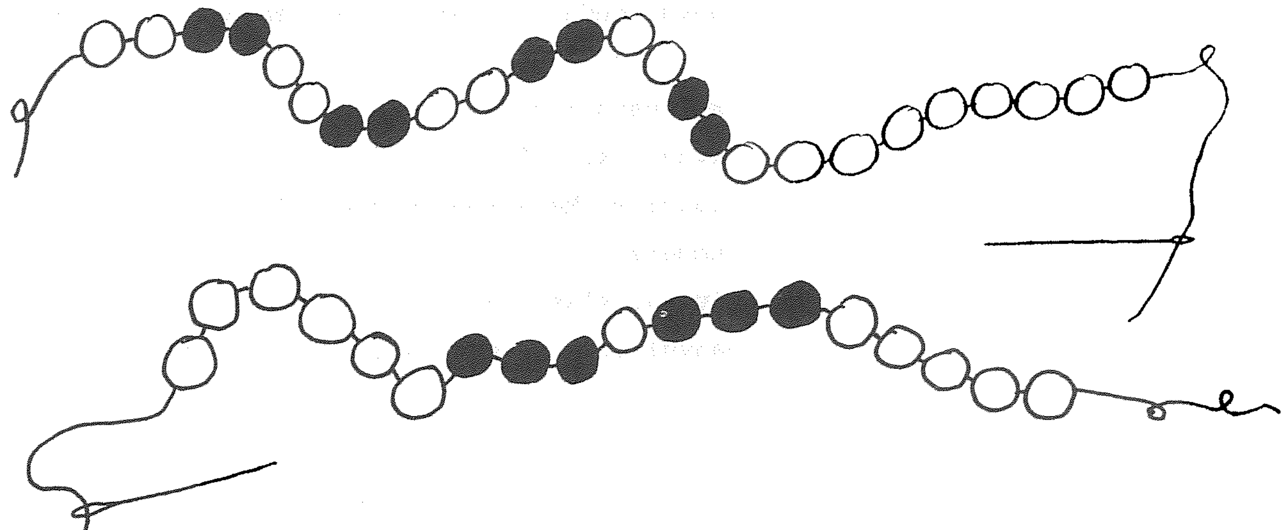
blad 5. lineaire patronen (lijnpatronen)

blad **1**

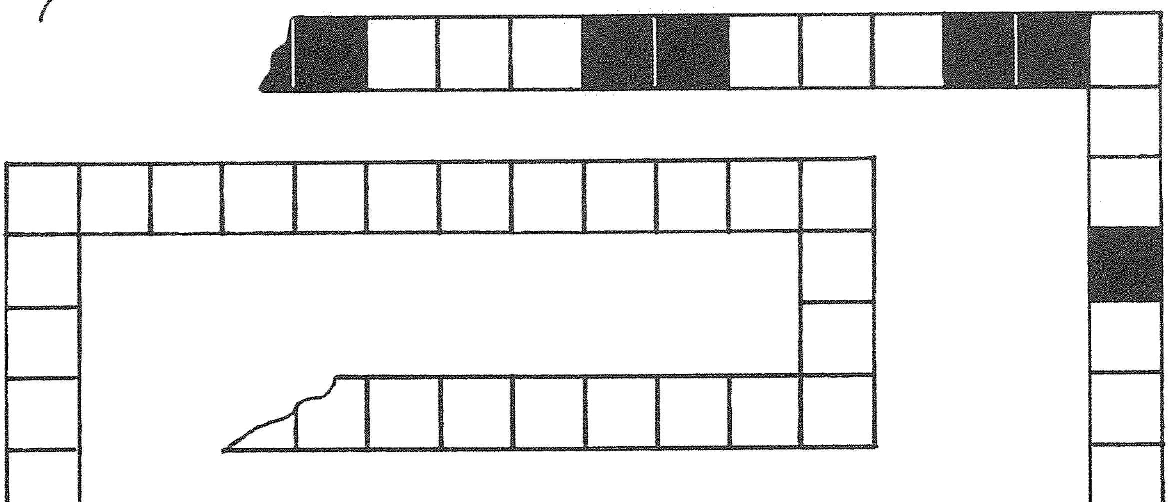
maak af:



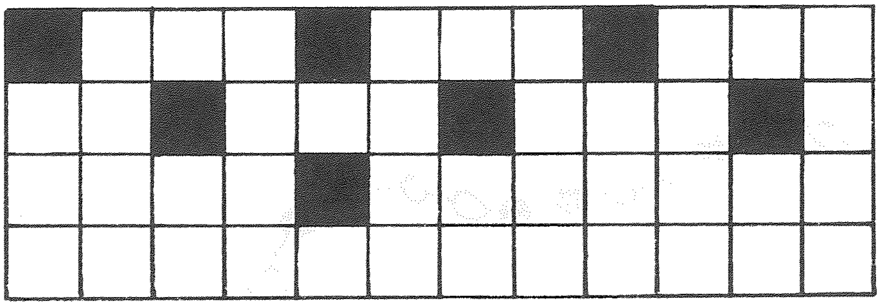
kleur verder:

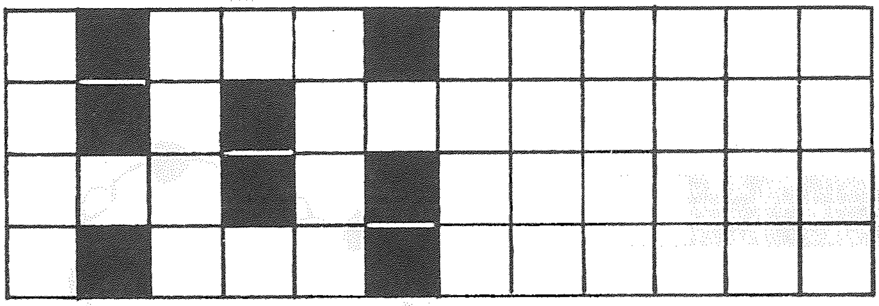


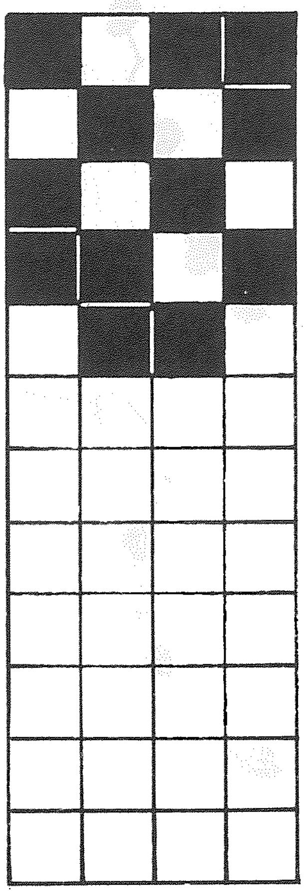
kleur af:



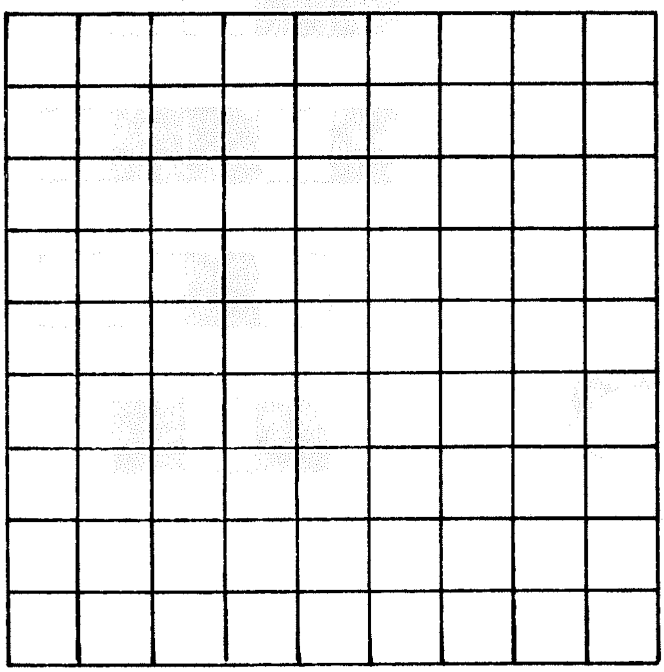
maak af:



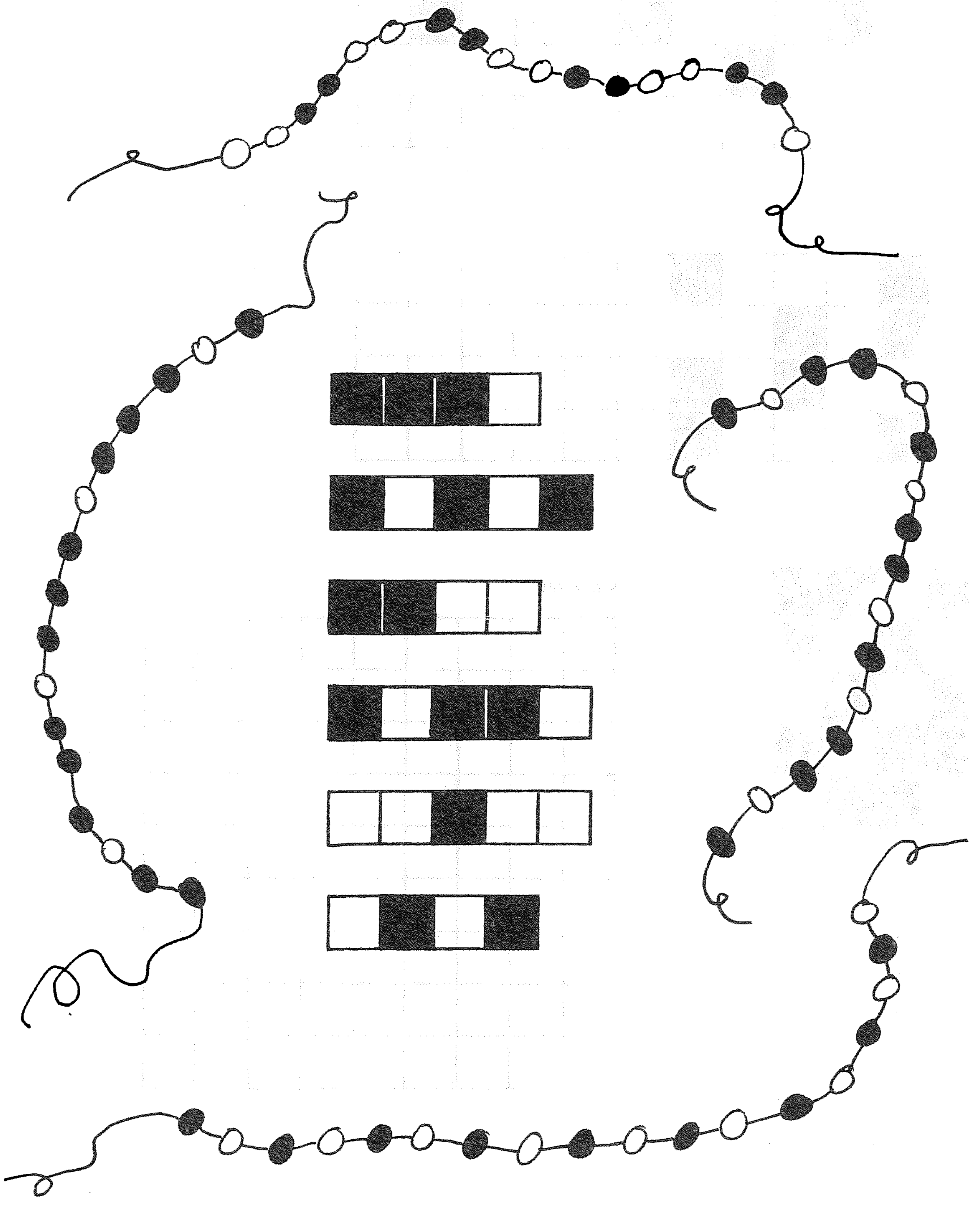




kleur zelf:

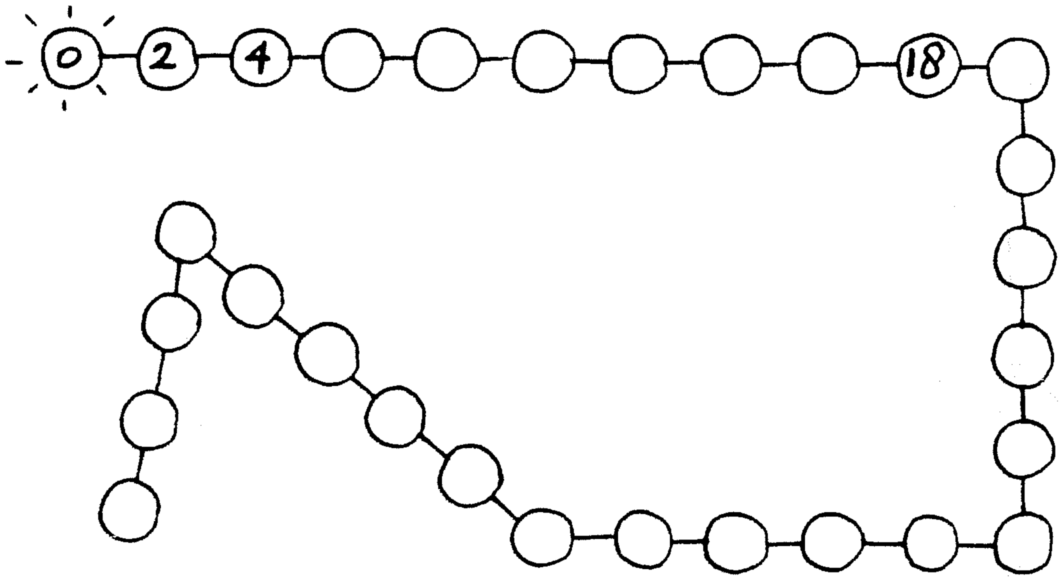


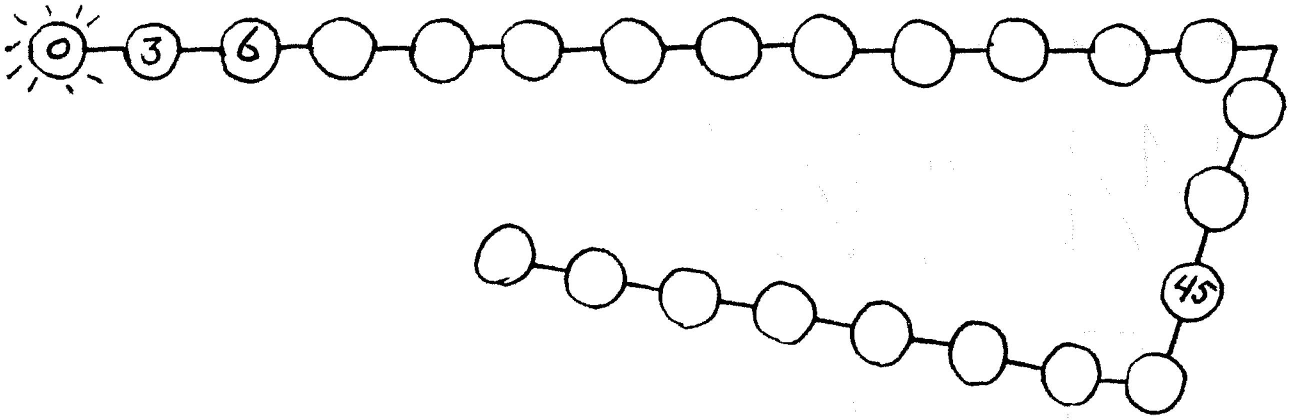
blad **3**



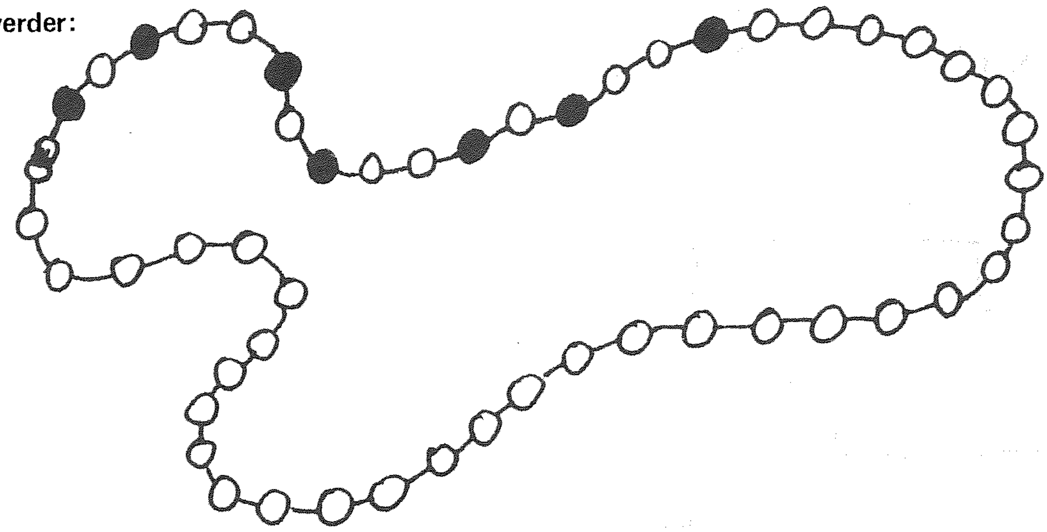
blad **4**

maak af:

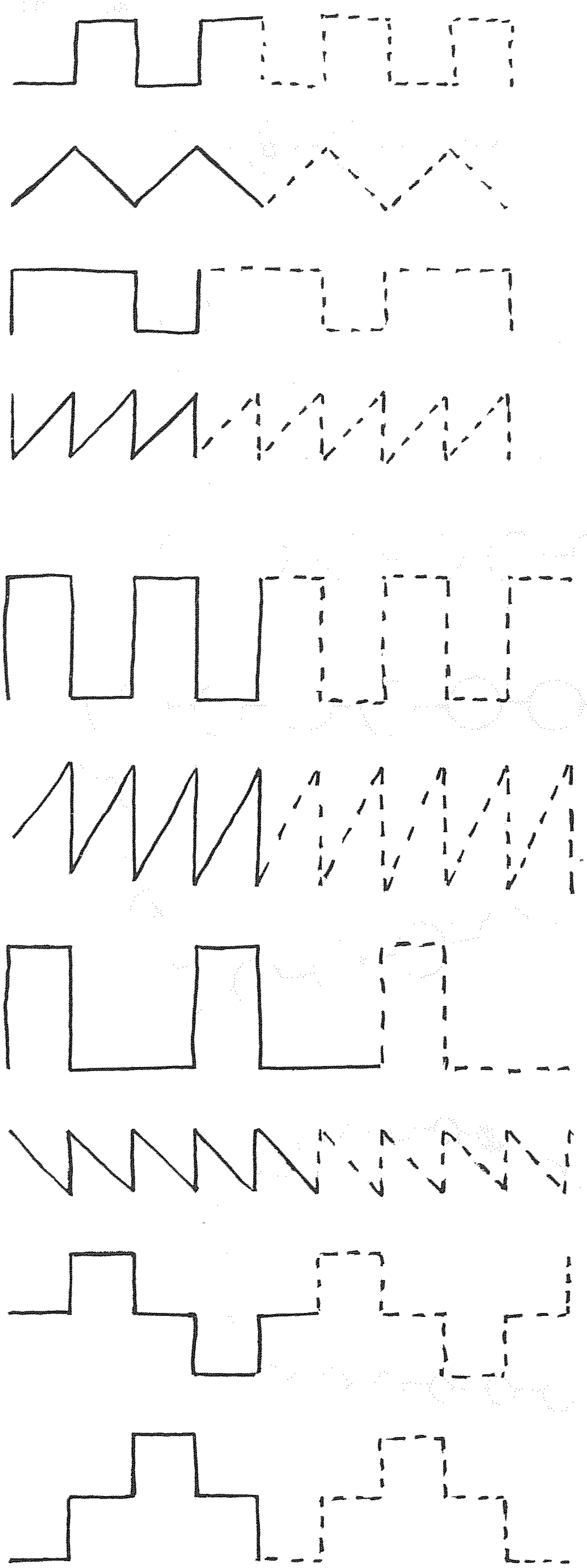




kleur verder:



blad 5



Van abacus naar positieverhaal

Hans ter Heege

Cijferen

De kern van het rekenonderwijs in de derde en vierde klas van het huidig onderwijs wordt gevormd door het leren cijferen. Gebruikelijk is dat achtereenvolgens het optellen en het aftrekken "onder elkaar" en het vermenigvuldigen en delen met cijferprocedures aan de orde komen.
Een aantal voorwaarden moeten vervuld zijn voor we met het cijferen kunnen beginnen. Tot deze voorwaarden behoren:
- inzicht in de positionele schrijfwijze van getallen;
- kennis van de basisvaardigheden, dus het kunnen optellen en aftrekken tot 20 en van de tafels van vermenigvuldigen.

Over deze voorwaarden kan nog het volgende worden gezegd. Ze zijn allerminst absoluut bedoeld. Tijdens het werken aan de cijferprocedures leren de kinderen méér over het positiestelsel. Ze scherpen hun inzicht in ons decimale stelsel aan tijdens het leren cijferen. Evenzo beoefenen kinderen in het cijferen de basisvaardigheden. Dat wil zeggen dat de basisvaardigheden allengs beter gekend worden.
Verdiept inzicht in het positiestelsel en toenemende kennis van basisvaardigheden zijn daarom vanzelfsprekende en door ons zeer gewaardeerde "bijprodukten" van het cijferen.

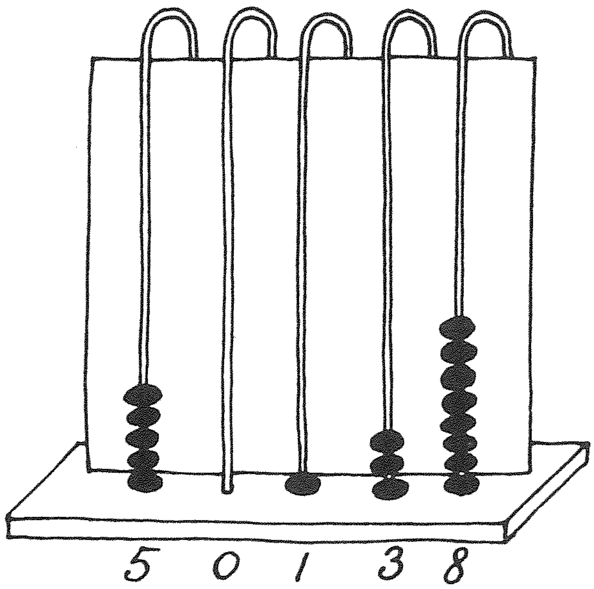
Abacus en positiewaarde

De plaats van een getalsymbool, een cijfer dus, in een getal bepaalt de waarde ervan. Met andere woorden: een 3 is niet altijd 3 waard. Dit is afhankelijk van zijn

plaats (positie) in het getal.
In 50138 is het symbool 3 genoteerd op een plaats, in een positie, waar dit symbool 30 betekent. In 501,38 betekent het symbool 3 "drietienden van de eenheid". Voor kinderen is deze kwestie zeer moeilijk, ook al omdat onze schrijfwijze en uitspraak niet met elkaar in overeenstemming zijn. Ook echter omdat de regel "elke 10 eenheden kunnen we voor 1 tiental inwisselen" (en omgekeerd) problemen oplevert.
Voor beide problemen, positionele schrijfwijze en de inwisselregel, gebruiken we in het onderwijs zogenoemd inwisselmateriaal. Dit materiaal kan, mits goed gebruikt het inzicht in de schrijfwijze van getallen en in de inwisselproblematiek bevorderen. Kinderen hebben er veel steun aan.
Er bestaat veel inwisselmateriaal. De bekendste zijn het M.A.B. materiaal, de 1-10-100-doos en de abacus. Elk materiaal heeft zijn eigen, speciale kenmerken.
Wij kozen voor de abacus omdat we van mening zijn, dat de abacus het beste te hanteren is in het onderwijs als het gaat om:

- inzicht in het positiestelsel
- het leren cijferend optellen en aftrekken

Ten aanzien van het eerste geven we het volgende voorbeeld:

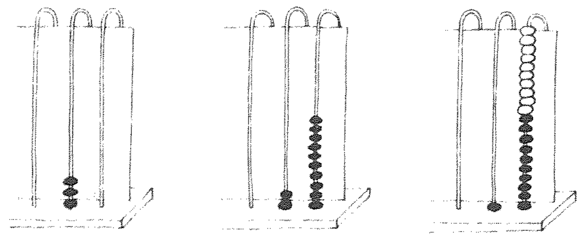


De hier gebruikte abacus is een zogenoemde lusabacus, met twee tot vijf staven. Elke staaf bevat 20 kralen.

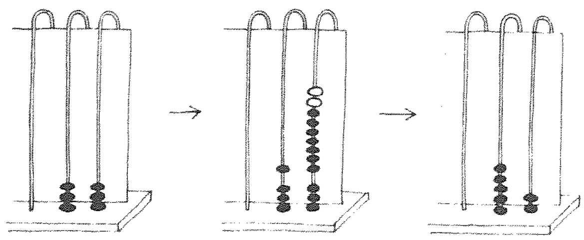
Kralen voor het schotje tellen mee, achter het schotje, dus uit het zicht, zijn de kralen die nog gebruikt kunnen worden. Zo zijn er op de eenheden-staaf, uiteraard de meest rechtse staaf, 8 kralen te zien. Achter het schotje zijn er nog 12.

Optellen met de abacus

De eerste mogelijkheid om de lusabacus te hulp te roepen is ten behoeve van de inwisselproblematiek. Daarvoor is de abacus te gebruiken als teller: elke kraal telt voor één mee.
Maar als de kralen op zijn, wat dan? Er zijn in totaal hoogstens 100 kralen op de vijf-staafabacus. Leerlingen zullen voorstellen meer abacussen te gebruiken en ze aan elkaar te schuiven.
Maar er is een andere oplossing. Deze levert een enorme uitbreiding van het gebruik van de abacus op: tien kralen kunnen worden ingewisseld voor één kraal met de waarde tien.
Het getal 30 kan daardoor op drie manieren op de abacus worden gerepresenteerd:



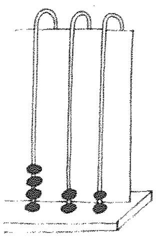
We tonen nu twee optellingen met de abacus.
33 + 19



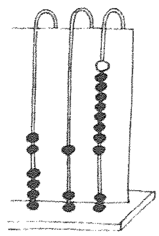
Commentaar: de optelhandeling en de inwisselhandeling zijn gescheiden. Ze vinden plaats in deze volgorde. Bij inwisselen wordt de functie van de kleur van de kralen duidelijk. Na vele oefeningen wordt het de kinderen direct duidelijk dat na inwisseling twee zwarte kralen overblijven op de eenhedenstaaf, omdat er 12 kralen (10 zwarte en 2 witte) op de eenhedenstaaf te zien zijn na de optelhandeling.
Met deze procedure wordt het op mentaal niveau brengen van de inwisselhandeling bevorderd.

422 + 219

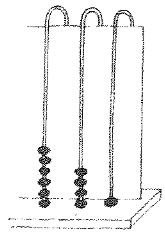
zet op de abacus 422



doe er 219 bij:

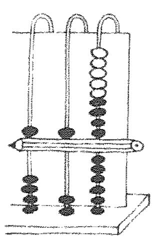


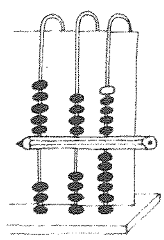
wissel in:



Commentaar: de optelhandeling en de inwisselhandeling worden weer gescheiden. Kinderen krijgen de gelegenheid zich de diverse stappen eigen te maken door klassikale en individuele oefening. De optelhandeling kan meer nadruk krijgen als we de getallen als volgt op de abacus zetten:

426	346
119 +	545 +





De optelhandeling wordt dan geconcretiseerd door het wegtrekken van het potloodje of de liniaal, waardoor ook visueel de getallen worden samengevoegd.

De positiekaart

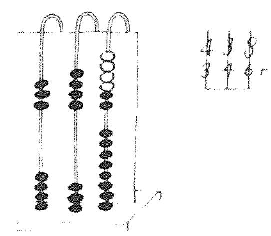
Alvorens in het kort de procedure te schetsen bij het aftrekken met de lusabacus, geven we eerst het vervolg van de deelleergang aan ten aanzien van het optellen. Op een gegeven ogenblik zal immers van de abacus moeten worden afgestapt. Dan is de tijd gekomen om dichter bij het eindalgoritme te komen. Voor veruit de meeste kinderen is dit het traditioneel bekende:

$$\begin{array}{r} 438 \\ +346 \\ \hline 784 \end{array}$$

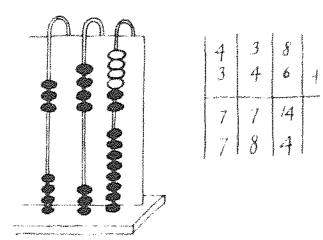
De positiekaart heeft een belangrijke functie in dit proces. Enerzijds doet de positiekaart denken aan de abakus, zodat aan het bekende gerefereerd kan worden. Anderzijds heeft de positiekaart het voordeel dat ze veel schematischer laat werken en daarmee in de richting van de mentale uitvoering leidt.

We geven aan de hand van de optelling 438 + 346 een voorbeeld van de werkwijze.

- op de abakus



- met de positiekaart



Met de positiekaart kan op twee niveaus worden gewerkt.

- eerste niveau: scheiding van optelhandeling en inwisselhandeling. Voorbeeld:

4	3	8	
3	4	6	+
7	7	14	
7	8	4	

- tweede niveau, volgend op het eerste niveau: gelijktijdig inwisselen en optellen.

  Voorbeeld:

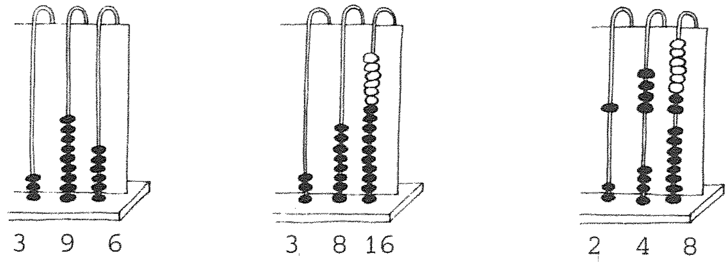
4	3	8	
3	4	6	+
7	8	4	

Het is duidelijk dat het nog slechts een kleine stap is naar het eindalgoritme van de optelling.

Aftrekken.

Het aftrekken wordt in een later stadium dan het optellen vanuit het handelend werken met de abacus aangezet. We geven een voorbeeld:

396
148 -



Commentaar: opnieuw wordt er een scheiding aangebracht tussen de inwisselhandeling ("terug inwisselen") en de aftrekhandeling.
Op de positiekaart wordt het aftrektal eerst herschreven:

3	8	16	
~~3~~	~~9~~	~~6~~	
1	4	8	−

Het verdient aanbeveling de eerste stand door te strepen.

Contexten.

Eén van de gevaren die ons rekenonderwijs bedreigen wordt gekarakteriseerd door het volgende voorbeeld.
Uit het schriftelijk werk van een leerling blijkt, dat opgaven als 32 + 45 = 77 voor hem geen problemen opleveren. De leerling kan deze opgave uit het hoofd en/of cijferend oplossen.
Aan de klas wordt de volgende (context)opgave voorgelegd:
Aan boord van een vrachtschip zijn 32 schapen en 45 koeien.
Hoe oud is de kapitein?
We zijn geneigd de schouders op te halen en te denken dat onze leerlingen deze opgave direct doorzien.

Ervaringen uit binnen- en buitenland, met jonge kinderen van een jaar of 8, alsook met kinderen van een jaar of 12 wijzen uit dat kinderen hier vaak gaan rekenen. Sommigen zeggen erna dat ze 77 jaar voor een kapitein wel wat oud vinden.
Indien we kinderen laten rekenen zonder dit veelvuldig betekenis te geven, dan leiden we de kinderen op voor "oenen". Dit wil zeggen, dat ook verfijnde didactische aanpakken, bijvoorbeeld waarbij de abacus en de positiekaart worden gebruikt, niet voldoende zijn. Zeer frequent zal aan het geleerde zin moeten worden gegeven. Hiermee wordt de betekenis van contextproblemen benadrukt. Zonder deze contextproblemen is het cijferprogramma, waaronder de deelleergangen optellen en aftrekken, onvolledig. Dit geldt dus ook voor andere delen van het rekenonderwijs, zoals het cijferend vermenigvuldigen en delen.
In dit artikel veronachtzamen we deze kwestie bewust, terwille van de overzichtelijkheid.

Een positieverhaal

Als kinderen met de abacus en met de positiekaart hebben leren optellen en aftrekken kan de lijn doorgetrokken worden naar het vermenigvuldigen en delen. Hoe dat precies gaat, willen we hier verder niet bespreken. De geïnteresseerde collega kan hiervoor terecht in de aanbevolen literatuur. Het cijferend vermenigvuldigen kan zoals gezegd, worden aangezet vanuit "het abacusprogramma". Het vermenigvuldigen wordt dan benaderd als herhaald optellen.
Dus: 16 x 24

$$16 \text{ x } \left\{ \begin{array}{l} 24 \\ 24 \\ 24 \\ . \\ . \\ . \\ 24 \end{array} \right.$$

De abacus kan hier geen dienst meer doen, omdat de optelling meer dan 20 kralen per staaf vereist. Met de abacus-inwisselprocedure op de achtergrond wordt nu gestart met een inwisselverhaal dat een beroep doet op het voorstellingsvermogen. Een voorbeeld van zo'n inwisselverhaal is dat van "De sultan van Bagdad".

"Er was eens een sultan in een ver Oosters land. Je weet hoe sultans eruit zien, met tulband op en allerlei gewaden om. Nou, die sultan zat dagelijks op zijn troon, net zo als ik nu voor jullie zit. In plaats van kinderen zag de sultan allemaal dienaren. Hij was knotsrijk, die sultan. Nou woonde in dezelfde stad Bagdad een man, die net zo machtig en rijk wilde zijn als de sultan. Hij probeerde op allerlei manieren aan geld te komen. Daarbij was hij niet altijd even eerlijk en daarom werd hij de dief van Bagdad genoemd. Nou had die dief van Bagdad al heel wat goudstukken te pakken gekregen, maar of 'ie al even rijk was als de sultan wist hij niet.
De sultan wist precies hoeveel goudstukken hij had. Die had namelijk drie schatkamers waarin ze opgeborgen lagen. In de eerste schatkamer werden de goudstukken gebracht die binnenkwamen. Voor die schatkamer zat een bewaker met een snor en die hoefde alleen maar de deur van het slot te doen als er goudstukken naar binnen moesten. Maar al gauw kreeg hij er een taak bij. Toen namelijk bleek dat de schatkamer al voller werd, moest hij goudstukken naar de tweede schatkamer brengen.
Eerst liep hij met een handvol naar de tweede schatkamer, maar de bewaker van deze schatkamer zei tegen hem: "De sultan heeft bevolen dat je voortaan tien goudstukken moet brengen, want die passen precies in een doosje." Op deze manier werd er dus voortaan gewerkt. De goudstukken werden verpakt in doosjes van tien. Af en toe bracht hij er twintig gelijk.
Maar ook deze schatkamer werd al voller en daarom moest de bewaker van de schatkamer met de dozen al gauw naar de derde schatkamer.
Voor schatkamer drie zat, en dat zul je zeker begrijpen, een enorme grote bewaker met een geweldige snor. Die bewaker moest de dozen in kisten doen. Hij zei daarom: "Je moet steeds tien doosjes brengen, want die passen pre-

cies in een kist." Zo had de rijke sultan op een dag in zijn schatkamer:

kisten	*dozen*	*goudstukken*
7	*5*	*9*

Hij had nog net geen tien goudstukken natuurlijk, want anders...Je weet nu wat de sultan bezat. Eigenlijk wist niemand in het land precies hoeveel de sultan bezat, maar de dief van Bagdad was er stiekum achter gekomen en mompelde: zeven kisten, vijf dozen en nog negen goudstukken. Nou kan ik vanavond stiekum in het donker eens kijken of ik al even veel heb als de sultan, dacht hij. Zo begon de dief, toen het donker was, bij een klein kaarsje zijn goudstukken te tellen. Hij kwam tot 468. Wie zou er meer hebben? De dief of de sultan?"

Uit: Cijferend Vermenigvuldigen volgens Wiskobas

De problematiek van het inwisselen op de abacus en met de positiekaart wordt nu -op een hoger abstractieniveau- herhaald. In de notatie van kisten-dozen-goudstukken kan op twee niveaus worden ingewisseld. Voorbeeld: 468 goudstukken:

- eerste niveau:

kisten	dozen	goudstukken
		468
	1	458
	2	448
	3	438

enzovoorts

Al gauw verkorten de leerlingen de inwisselprocedure.

- tweede niveau:

kisten	dozen	goudstukken
		468
4	6	8

Er kan nu met vermenigvuldigen begonnen worden:

"Op die dag kwamen 8 mensen de sultan de huur van hun huis betalen. Ieder moest 37 goudstukken betalen. De rekenmeester van de sultan noteerde dit zo:

kisten	dozen	goudstukken
	3	7
	3	7
	3	7
	3	7
	3	7
	3	7
	3	7
	3	7 +
	24	56 optellen
	29	6 inwisselen
2	9	6 nogmaals inwisselen

Besluit

Bij het leren cijferen kan de abacus een grote rol spelen. De abacus heeft waarde om het optellen en het aftrekken aan te zetten. Met de ervaring die de kinderen met de abacus hebben, is het mogelijk de positiekaart te introduceren. Deze heeft dezelfde mogelijkheden, zij het op een hoger niveau van abstractie. In een volgende fase kan de positiekaart worden gebruikt om het vermenigvuldigen aan te zetten. De positiekaart wordt dan ingebed in een positieverhaal, zoals "De Sultan van Bagdad". Een waarschuwing blijft van kracht: verlies bij dit alles de zingeving niet uit het oog!

Zakrekenmachines

Jan van den Brink

In 1980 schreven we[1]:
"Naar aanleiding van observaties rond het handelen met rekenmachines in kleuterschool en onderbouw van de lagere school is het mogelijk een voorlopig standpunt over dit handelen in te nemen. Het gaat hierbij om het antwoord op de vraag: Dient de rekenmachine uitsluitend om het rekenwerk voor kinderen te vergemakkelijken of zijn er ook handelingen van kinderen geobserveerd, die de machine in een *andere* wiskundige context plaatsen?"

Het onderzoek, dat daarna volgde binnen de vakgroep OW & OC van RUU te Utrecht toont aan dat we deze vraag met "ja" kunnen beantwoorden.

Onderzoeksfasen

In het onderzoek naar het gebruik van de zakrekenmachine door kleuters en lagere schoolleerlingen onderscheiden we drie perioden:

1. *Kinderlijke denkbeelden en handelen.* Dit betreft een onderzoek naar kinderlijke denkbeelden over de rekenmachine en naar

2. *Dialogen.* Een onderzoek naar het gebruik van de rekenmachine in groepjes van twee kinderen.

3. *Klas.* Een onderzoek naar het gebruik van de rekenmachine in de reële klassesituatie.

Elke voorgaande fase is te beschouwen als een voorbereiding op de volgende, binnen het doel dat ons voor ogen staat. We wilden namelijk *vanuit kinderlijke* denkbeelden en handelingen komen tot interessante lessituaties

1) De achterkant van de Möbiusband 1980, Utrecht: IOWO.

op de basisschool rond de rekenmachine. Onderzoek ten dienste van het onderwijs dat nodig is, omdat we immers startten vanuit een blanco situatie. Er bestond geen voorbereidend onderzoek over hoe bijvoorbeeld vierjarigen bezig zouden zijn met de machine of op welke manieren vijfdeklassers de rekenmachine gebruiken bij het cijferen. Dat moesten we zelf maar gaan bekijken. Er waren en zijn wel een groot aantal onderzoeks-*vragen* geformuleerd. Zoals: kunnen de kinderen straks alleen nog maar rekenen bij de gratie van een volle batterij?

Tijdens onze observaties bleek dat de rekenmachine niet strikt getalsmatig gebruikt wordt door jonge kinderen. Opvallend is dat de leerlingen in allerlei verrassingssituaties verzeild raken als ze met een rekenmachine bezig zijn. Er zijn hiervan voorbeelden te geven binnen verschillende leeftijdsgroepen.

- Karin (zes jaar, eerste klas) heeft in het venster van de rekenmachine "97" staan. Ze dicteert aan Eddy (zeven jaar): "Een zeven en een ... wat was dat ook alweer?" Ze telt de knoppen af tot 9, nu weet ze de naam weer: "Negen". Maar het is fout: "79" staat er bij Ed. Hoe kan dat nou?

- Bernd (zes jaar; kleuterschool) typt "1 2 3 4 5 6 9" in. "Waar is dat voor?", vraagt hij en wijst op de plus-toets. Hij drukt hem in en wacht lang op de dingen die gaan gebeuren ... "Die doet niks", zegt hij tenslotte.

Uit deze en andere voorbeelden blijkt dat jonge kinderen de automaat in de rekenmachine willen uitzoeken, ze willen weten hoe de machine functioneert. Ze maken een eerste onderscheiding in toetsen; ze worden geconfronteerd met de schrijfrichting van de machine. Dat is méér dan alleen maar weten dat hij kan rekenen. De machine werkt volgens bepaalde regels, die kinderen moeten ontdekken. Dat machines van verschillend merk niet op dezelfde manier werken, is daarbij een didactisch voordeel.

> Hugo (8; 11, derde klas) heeft tot taak: "Maak een recept voor de rekenmachine zodat je vriend of vriendin de machine kan gebruiken". Hugo schrijft in zijn recept: "Als je 180 uit de som wilt hebben moet je dit indrukken: 90 + 90 = 180. En zo kun je alles doen, als je maar indrukt: + ... en zoveel keer "=" als je maar wilt" (hij bedoelt hier: + a = = = ... =) en hij besluit met: "Als je x, :, - of + sommen wilt maken moet je dit doen ... x ... = ... en zo door".

Het is duidelijk dat Hugo hier het begrip variabele op algemene wijze hanteert: eerst voor getallen en tenslotte zelfs voor de operatietekens x, :, +, -. In feite is de kiem bij jonge kinderen al aanwezig om de automaat in de rekenmachine te algebraïseren. Hugo probeert in zijn recept de automaat zichtbaar te maken met taaltekens. Hij gebruikt er een schriftelijke "handelingstaal" voor die hij niet op school geleerd heeft en ontwerpt zodoende spontaan het idee variabele.

De didactische problematiek betreffende het onderscheid tussen inzichtelijk en algoritmisch gedrag vindt een *nieuw* gebied van onderzoek in de rekenmachine: het algoritme (of de automaat) werkt namelijk al *buiten de leerling om!* In tegenstelling tot bijvoorbeeld het algoritme van de staartdeling, dat geleidelijk aan wordt ontworpen samen met de leerling terwijl de eigenschappen van het algoritme in de rekenmachine door de leerling moet worden ontdekt. Dit is vergelijkbaar met het ontdekken van de eigenschappen van grootheden als gewicht en inhoud. Ook met de eigenschappen van handelingen als meten en aftellen.
Naast het laten ontdekken van de geheimen, die een rekenmachine herbergt, is binnen het onderzoek het zinvol toepassen van de zakrekenmachine in rekenproblemen steeds sterker beklemtoond. Het voorlopige standpunt van 1980 is daardoor geleidelijk veranderd. Destijds waren wij gericht op: het zoeken van jonge kinderen naar de automaat. Nu trachten we de plaats van de rekenmachine in het onderwijs te vinden door geschikte rekenonderwer-

pen en didactische werkvormen te onderzoeken. Eén ding is ons daarbij duidelijk geworden: er zijn (nog) geen *algemene* beschouwingen te geven over "het" onderwijs met de zakrekenmachine. Wel kunnen we zeggen dat er bepaalde onderwerpen bestaan die al of niet geschikt zijn voor onderwijs met zakrekenmachines. We noemen de "deskundigen-cyclus", de "handleidingen", het "programmeren" en "grote getallen". Tevens zijn er een groot aantal didactische principes beschreven op basis waarvan de onderwijzer zijn leerling kan sturen bij het gebruik van de rekenmachine. Binnen het lopende onderzoek zullen zeker meer onderwerpen ter afweging worden bekeken. Tevens zullen de veranderingen die in een bepaald onderwerp voorkomen, worden bestudeerd. De verslaggeving van deze onderzoeksactiviteiten zal plaats vinden in de Nieuwe Wiskrant.

pen en didactische werkvormen te onderzoeken. Eén ding is ons daarbij duidelijk geworden: er zijn (nog) geen *algemene* beschouwingen te geven over "het" onderwijs met de zakrekenmachine. Wel kunnen we zeggen dat er bepaalde onderwerpen bestaan die al of niet geschikt zijn voor onderwijs met zakrekenmachines. We noemen de "deskundigen-cyclus", de "handleidingen", het "programmeren" en "grote getallen". Tevens zijn er een groot aantal didactische principes beschreven op basis waarvan de onderwijzer zijn leerling kan sturen bij het gebruik van de rekenmachine. Binnen het lopende onderzoek zullen zeker meer onderwerpen ter afweging worden bekeken. Tevens zullen de veranderingen die in een bepaald onderwerp voorkomen, worden bestudeerd. De verslaggeving van deze onderzoeksactiviteiten zal plaats vinden in de Nieuwe Wiskrant.

Rekenen/wiskunde in het schoolwerkplan

Herman van Die

Het schoolwerkplan is een betrekkelijk nieuw verschijnsel in het onderwijs. Er wordt veel over gepraat en geschreven, maar nog weinig mee gewerkt.
Sommigen worden geïnspireerd door de idee "schoolwerkplan", anderen raken gefrustreerd bij de gedachte aan het vele werk dat het maken van zo'n plan met zich kan meebrengen.
De vrees bestaat, dat het schoolwerkplan in de praktijk zal neerkomen op papiermakerij: een soort bureaucratie in de school, die je in je vrije tijd moet realiseren. Dit laatste is niet de bedoeling en zal in geen geval mogen gebeuren.

In dit boekje besteden we aandacht aan de rol van het schoolwerkplan in het reken wiskundeonderwijs.
De volgende vragen komen aan de orde:

1. Wat is een schoolwerkplan?
2. Welke aspecten van reken wiskundeonderwijs worden in het schoolwerkplan beschreven?
3. Hoe kun je als team werken aan het onderdeel rekenen wiskunde in het schoolwerkplan?

1. Wat is een schoolwerkplan?

Het schoolwerkplan is bedoeld als middel om het denken en handelen van onderwijsgevenden te structureren: het is een plan voor het werken in de school.

Activiteiten in de school kunnen vanuit drie belangrijke gezichtspunten worden bekeken:

1. visie op onderwijs en opvoeding;
2. inhoud en vormgeving van het onderwijs;
3. organisatie.

Punt 1, visie op onderwijs en opvoeding, dwingt ons tot goed nadenken over wat we eigenlijk willen met ons onderwijs: het "waarom", de uitgangspunten en het "waartoe", de doelstellingen.

Punt 2, inhoud en vormgeving van het onderwijs, richt de aandacht op leerprocessen bij de kinderen. Is de manier waarop we het onderwijs verzorgen adequaat in het licht van de didactische mogelijkheden? Gebruiken we de juiste middelen?

Punt 3, organisatie, bepaalt ons bij de doelmatigheid van ons handelen, zowel waar het gaat om activiteiten in de klas als in teamverband.

Het zal duidelijk zijn, dat het thema van deze conferentie, "recente ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs", vooral te maken heeft met het tweede gezichtspunt: inhoud en vormgeving.
Uit de aard der zaak is er sprake van samenhang met de beide andere gezichtspunten, visie en organisatie.
Bij het werken aan het onderdeel rekenen/wiskunde komen echter algemene vragen met betrekking tot onderwijs en opvoeding vanzelf aan de orde. Het is zaak, daar op het juiste moment nota van te nemen. Vragen betreffende de organisatie zijn onder meer een gevolg van gemaakte pedagogische en didactische keuzen.

2. Welke aspecten van het reken/wiskundeonderwijs worden worden in het schoolwerkplan beschreven?

Voor de beantwoording van deze vraag kijken we eerst naar de scholen waar het reken/wiskundeonderwijs voornamelijk wordt bepaald door de gebruikte materialen. Vervolgens gaan we in op de problematiek van scholen die meer zelfstandig vorm (moeten) geven aan hun onderwijs.

Op veel lagere scholen worden inhoud en didactiek van het reken wiskundeonderwijs sterk gestuurd door de werkbladen, de boekjes en handleidingen van de methode. In het kleuteronderwijs is dit niet het geval. Daar gebruikt men echter, naast het speel-leermateriaal, ook wel handboeken met suggesties voor onderwerpen en activiteiten.

Men kan zich afvragen wat er nog in het schoolwerkplan moet worden beschreven, als de inhoud van het onderwijs door de gehanteerde middelen voor een groot deel al vastligt. Zou niet veel schrijfwerk kunnen worden voorkomen door naar de methode op het handboek te verwijzen?

Als het schoolteam qua werkwijze en opvattingen geen al te grote verschillen vertoont, is dit zeker mogelijk. Voorwaarde is wel, dat de continuïteit in de begeleiding van de kinderen door het maken van goede afspraken wordt gewaarborgd.

Als de lespraktijk in de school grotendeels overeenkomt met inhoud en didactiek van methode of handboek, kan wat het schoolwerkplan betreft, worden volstaan met het vermelden van:

- uitgangspunten en doelstellingen van methode en handboek (uiteraard mogen deze geen tegenstrijdigheden bevatten);
- materialen, verdeeld over de leerjaren;
- de belangrijkste onderwerpen en activiteiten per leerjaar;
- wijze van observeren en toetsen;
- manier van registreren en rapporteren van leervorderingen;
- wijze van differentiëren.

Daarnaast worden enkele afspraken vastgelegd die door het team zijn gemaakt met betrekking tot:

- het gebruik van de methode;
- de leerstof;
- thema's en projecten;
- leerlingen die uit de methodische boot dreigen te vallen (goede èn zwakke leerlingen);
- het evalueren van de gebruikte methode;

- overgang naar het voortgezet onderwijs.

Het feit dat hier een pragmatische werkwijze wordt aanbevolen, betekent echter niet, dat een principiële discussie over het wezen van het onderwijzen uit de weg moet worden gegaan. Deze zal zeker plaats behoren te vinden. Te verwachten valt, dat bij de invoering van de Wet op het Basisonderwijs wel scholen zullen overgaan tot de aanschaf van een reken/wiskundemethode. Dit proces zal met de nodige zorgvuldigheid moeten worden omringd.
De criteria die tijdens het keuzeproces door het schoolteam worden opgesteld, kunnen bouwstenen opleveren voor het visiedeel van het schoolwerkplan. Over een jaar is bovendien het onderwijsleerplan basisonderwijs van de SLO gereed, waarin tal van doelformuleringen worden aangetroffen en waarvan het hoofdstuk wiskunde kan dienen als uitgangspunt voor discussies in het schoolteam.

Met betrekking tot de problematiek rond de keuze van een nieuwe reken/wiskundemethode, verwijzen we naar:
- Rapportboekje 3 van Wiskobas, waarin een groot aantal methoden wordt besproken.
- Op weg naar een nieuwe reken wiskundemethode (handreiking voor begeleiders van de Centrale Werkgroep Rekenen, verkrijgbaar bij het KPC te Den Bosch).

Hiermee zijn we aangeland bij de tweede categorie scholen: scholen waar de leerkrachten zelfstandig vorm geven aan het reken wiskundeonderwijs, min of meer los van een bestaande methode. We denken hier vooral aan scholen die noodgedwongen een eigen werkwijze moesten kiezen, omdat het gangbare lesmateriaal slechts ten dele bruikbaar is. Zoals bijvoorbeeld scholen voor dove kinderen.

Als ergens het schoolwerkplan een nuttige functie kan vervullen, dan is het op deze categorie scholen. Doordat een reken/wiskundemethode als kapstok ontbreekt, moet het schoolwerkplan zorgen voor de noodzakelijke

3. Hoe kun je als team werken aan het onderdeel rekenen - wiskunde in het schoolwerkplan?

Wie al langer in het onderwijs meeloopt, weet dat het mogelijk is veranderingen te realiseren, mits dit systematisch gebeurt en langs de weg der geleidelijkheid. Vele collega's passen deze strategie individueel in hun werk toe. Wanneer je echter in teamverband aan verbeteringen in het onderwijs wilt werken, zijn minstens twee dingen noodzakelijk:
- overeenstemming over het object van de verandering;
- planning.

Als het team besluit rekenen/wiskunde als thema voor het schoolwerkplan te nemen, kan het er van uitgaan, dat dit minstens een jaar of twee kost.
Beschrijving in het schoolwerkplan betekent in feite, dat het gehele leergebied wordt doorgelicht, dat het programma wordt uitgelijnd en de materialen gesystematiseerd. In de eerste plaats is het van belang, dat het gehele team zich verdiept in de didactiek van het vakgebied (zie de literatuurlijst van dit boekje).
Daaraan kunnen enkele bijeenkomsten worden gewijd.
Het is mogelijk, dat het team de gelegenheid aangrijpt om enkele moderne reken/wiskundemethoden te bestuderen; bijvoorbeeld methoden naar mathematisch-didactische modellen in zijn verwerkt. We noemen hier: de methoden Taltaal, De wereld in getallen, Getal in beeld, Operatoir rekenen. Enkele van deze methoden worden besproken in rapportboekje 3 van wiskobas.
Het kan ook zijn, dat het schoolteam besluit de bestaande werkwijze te verbeteren. Een middel hiertoe is het uniforme gebruik van multomappen in de verschillende leerjaren.

Iedere leerkracht tekent aan wat hij doet tijdens de rekenles.

structuur.
Het schoolwerkplan kan hier de functie vervullen van intern communicatiemiddel tussen de leerkrachten; en van extern communicatiemiddel tussen teams van verschillende scholen. De noodzakelijke continuïteit in de begeleiding van de kinderen moet er door worden gewaarborgd.
De vraag is hoe komt deze continuïteit tot stand?
Dit kan alleen als men bereid is als team samen te werken en geregeld tijd uit te trekken voor overleg over inhoud en didactiek van het reken wiskundeonderwijs. Dit overleg zal moeten resulteren in afspraken die in het schoolwerkplan worden vastgelegd, met name afspraken over de te volgen didactiek, het gebruik van materiaal en de leerstof.
Nemen we als voorbeeld de introductie van verschillende modellen, zoals de getallenlijn, het honderdveld, de abacus, het kruispuntenmodel bij vermenigvuldiging, het boomdiagram, etc.
Gesproken zou bijvoorbeeld kunnen worden over vragen als: Wanneer gebruiken we het honderdveld? (Het zou handig zijn als alle kinderen van de tweede klas beschikken over een kaart met het honderdveld, waarop blokjes en staafjes passen.)
Wanneer en hoe gebruiken we de lusabacus? Kunnen we de optel- en aftreksommen uit het rekenboekje daarbij gebruiken of moeten we er iets anders op bedenken?
Natuurlijk is het handig om een rekenmethode op de achtergrond te gebruiken: als is het maar voor de opbouw van de leerstof.
Wanneer er in de school bewust didactisch gehandeld wordt, als er geregeld overleg plaatsvindt over werkwijze en gebruik van materialen, moet het mogelijk zijn om in het schoolwerkplan duidelijke afspraken vast te leggen.

Daarvoor is het echter wel nodig, dat het reken/wiskundeonderwijs een vast punt op de agenda van de teamvergaderingen vormt.

3. Hoe kun je als team werken aan het onderdeel rekenen - wiskunde in het schoolwerkplan?

Wie al langer in het onderwijs meeloopt, weet dat het mogelijk is veranderingen te realiseren, mits dit systematisch gebeurt en langs de weg der geleidelijkheid. Vele collega's passen deze strategie individueel in hun werk toe. Wanneer je echter in teamverband aan verbeteringen in het onderwijs wilt werken, zijn minstens twee dingen noodzakelijk:

- overeenstemming over het object van de verandering;
- planning.

Als het team besluit rekenen/wiskunde als thema voor het schoolwerkplan te nemen, kan het er van uitgaan, dat dit minstens een jaar of twee kost.
Beschrijving in het schoolwerkplan betekent in feite, dat het gehele leergebied wordt doorgelicht, dat het programma wordt uitgelijnd en de materialen gesystematiseerd. In de eerste plaats is het van belang, dat het gehele team zich verdiept in de didactiek van het vakgebied (zie de literatuurlijst van dit boekje).
Daaraan kunnen enkele bijeenkomsten worden gewijd.
Het is mogelijk, dat het team de gelegenheid aangrijpt om enkele moderne reken/wiskundemethoden te bestuderen; bijvoorbeeld methoden naar mathematisch-didactische modellen in zijn verwerkt. We noemen hier: de methoden Taltaal, De wereld in getallen, Getal in beeld, Operatoir rekenen. Enkele van deze methoden worden besproken in rapportboekje 3 van wiskobas.
Het kan ook zijn, dat het schoolteam besluit de bestaande werkwijze te verbeteren. Een middel hiertoe is het uniforme gebruik van multomappen in de verschillende leerjaren.

Iedere leerkracht tekent aan wat hij doet tijdens de rekenles.

Men zou bijvoorbeeld de bladzijden van zo'n map als volgt kunnen indelen:

onderwerp	lesdoel	activiteiten/ werkvormen	materiaal/ werkblad

Met behulp van codes kunnen gebruikte werkbladen worden aangegeven. Op deze wijze groeit een overzicht van de behandelde onderwerpen per leerjaar. Over de inhoud van deze mappen vindt geregeld overleg plaats met collega's, hetzij in subgroepen (parellelklassen, of voorschool etc.). Voor de coördinatie van de werkzaamheden zou een speciale rekencoördinator kunnen worden aangewezen. Belangrijk is, dat er een rode draad gevonden wordt door de leerstof en dat men het eens wordt over de te volgen didactiek en de eigen deskundigheid verhoogt. Gemaakte afspraken worden in het schoolwerkplan vastgelegd.

Tot besluit geven we hier een aantal suggesties voor teamactiviteiten. Het gaat hier om werkvormen die op werkbijeenkomsten kunnen worden gehanteerd.
De leiding van deze bijeenkomsten zou in handen kunnen zijn van de reken-coördinator van de school.

A. <u>Het maken van een knelpuntenanalyse</u>.

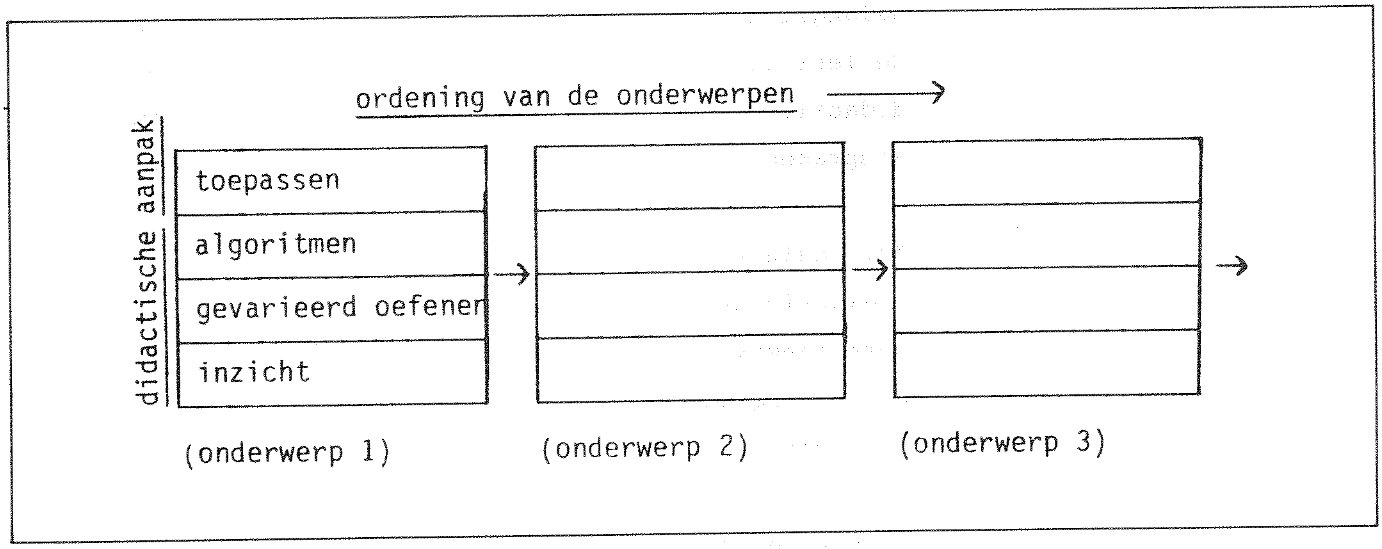
Hierbij wordt gebruik gemaakt van het volgende schema, dat door de leerkrachten individueel wordt ingevuld:

Leerjaar	Wat gaat goed bij het huidige wiskundeonderwijs?	Wat gaat niet goed?	Waarom niet?

Tijdens de teambijeenkomsten lichten de leerkrachten hun antwoorden toe.

B. <u>Het maken van een Top-tien lijst</u>.

Per leerjaar wordt geïnventariseerd wat de belangrijkste onderwerpen zijn die in het rekenprogramma aan de orde komen. Bijvoorbeeld: ruimtelijke oriëntatie, omgaan met hoeveelheden, passen en meten etc. op de kleuterschool, het getalbegrip in klas 1, cijferend optellen in klas 3, breuken in klas 4.
Geprobeerd kan worden leerstoflijnen aan te geven voor onderwijs aan 4-12 jarigen.
De didactische aanpak van de verschillende onderwerpen kan ter sprake komen. De betekenis van een "rijke context", de noodzaak van begripsvorming, e.d.



Leggen we de gegevens van de knelpuntenanalyse (A) naast die van het leerstofoverzicht (B), dan kan worden aangetoond, dat een deel van de knelpunten wordt veroorzaakt door:

- een gebrekkige opbouw van de leerstof;
- een verkeerde didactische aanpak (van de methode of de leerkracht).

Tijdens de bijeenkomst komt echter ook de noodzaak naar voren van het maken van duidelijke afspraken over leerstof en didactiek tussen de leerkrachten van de opeenvolgende leerjaren. Het is noodzakelijk, dat men op de hoogte is van elkaars werkwijze, teneinde te voorkomen dat de kinderen in verwarring geraken.

C. Het beantwoorden van elkaars vragen.

Alle teamleden schrijven een aantal vragen op die ze graag door hun collega's beantwoord zouden willen zien. Deze vragen en antwoorden worden vervolgens besproken.

D. Het maken van een lesopzet.

De teamleden krijgen de opdracht individueel de opzet van hun rekenlessen te beschrijven. Daarna volgt toelichting en discussie.

E. Het bespreken van een foutenanalyse.

De leerkrachten stellen een tussentoets samen, nemen die af, verwerken de gegevens en trachten na te gaan waar de oorzaak van bepaalde fouten ligt.
De analyse wordt besproken aan de hand van leerlingenmateriaal of het klasse-overzicht. Eventueel is een video-opname van een individueel kind hierbij te gebruiken.

F. Het bespreken van door de leerkrachten gemaakte casestudies.

Voorbeelden:
* mijn hulp aan zwakke leerling X;
* mijn introductie van vermenigvuldigen;
* hoe ik het delen heb uitgelegd.

Uit de aard der zaak zijn er meer werkvormen voor teambijeenkomsten te bedenken.

Aanbevolen literatuur

Jan van den Brink: Zo zijn onze manieren, in Willem Bartjens jaargang 1, nr. 1,3 SLO 1982.

Jan van den Brink: Zakrekenmachine, in Nieuwe Wiskrant jaargang 1, nr. 1,2,3,4 OW&OC 1981/82

Jan van den Brink: Pas op je tellen, in De Wereld van het Jonge Kind, 1982.

Jan van den Brink: Gewoon eentje overslaan, in De Wereld van het Jonge Kind, 1981.

Kees Both : Bouwen in de kleuterschool, in De Grabbelton, SLO 1981, nr. 3.

Centrale Werkgroep Rekenonderwijs: Op weg naar een nieuwe reken/wiskundemethode, CPS, 1982.

Abbes Dekker, Hans ter Steege en Adri Treffers: Cijferend Vermenigvuldigen volgens Wiskobas, OW&OC, 1982.

Hans Freudenthal : Wat is onderzoek van onderwijs? - een paradigma, in De Achterkant van de Möbiusband, IOWO 1980.

Fred Goffree : Kun je getallen zien?, in Willem Bartjens, jaargang 1, nr. 3, SLO 1982.

Fred Goffree : Wiskunde & Didaktiek voor aanstaande leraren basisonderwijs, Wolters Noordhoff, 1982/1983.

Louis Gilissen en Joost Klep: De Getallenlijn, Zwijsen 1980.

Hans ter Heege : Reizen voor half geld, in De Achterkant van de Möbiusband, IOWO 1980.

Hans ter Heege : Tafels leren om te vermenigvuldigen, SLO 1982.

Rob de Jong (e.d.): De abacus, leerplan-publikatie Wiskobas Bulletin, IOWO 1977.

pg.LOB. : Informatiepakket Schoolwerkplan, SLO 1982.

Adri Treffers en Fred Goffree: Inzicht in BOVO-toetsen voor rekenen, in Nieuwe Wiskrant jaargang 2, nr. 1 OW&OC 1982.

Wiskobasteam (red.): Overzicht rekenmethoden anno 1980, rapportboekje 3, IOWO 1980.