Dichtheden in 'leerproccessen'

L.Streefland
Vakgroep OW&OC, R.U.-Utrecht

Overzicht

Voor het verwerven van begrip en inzicht in de β-vakken zijn uiteenlopende benaderingen beproefd. Deze kunnen gekenschetst worden als het aanbrengen van begrip, gevolgd door oefening binnen het vakgebied en dan pas - als het er nog van komt - *toe*passen, of het bijbrengen van geïsoleerd begrip gepaard aan oefening binnen het vak zonder meer.

Beide - verwante benaderingen - berusten in wezen op (impliciete) theorieën omtrent het leren, of op z'n minst op de overtuiging, dat vooral de nodige zuiverheid in benadering een goede begripsvorming teweegbrengt. Bijgevolg zal een begrip dat men op het oog heeft, zoveel mogelijk 'in z'n eentje' aan de leerlingen moeten worden voorgesteld - dus zonder ruis en zonder (in)zicht belemmerende samenhang - willen zij een heldere kijk hierop krijgen.

In toenemende mate blijkt echter uit de vruchten van ontwikkelings- en onderzoeksarbeid op velerlei terrein, dat voorgaande benaderingen, gelet op het leereffect en met name op de toepasbaarheid van het geleerde, niet langer houdbaar zijn. Meer en meer krijgt men oog voor de rol en het belang van contexten voor en de toepasbaarheid van het geleerde. De tweedracht die zichzelf voortdurend zaait aan hen die onderwijs ontwikkelen, plannen, organiseren, onderzoeken, etc. is het spanningsveld tussen onderwijzen en leren telkens uit nevelen opdoemend danwel erin gehuld, als Scylla en Charybdis, waartussen men behoedzaam moet en ook wil laveren wanneer men althans bij het onderwijzen rekening wil houden met en gebruikmaken van wat zich in het brein van de leerlingen voltrekt en omgekeerd.

In dit artikeltje willen we enkele gedachten ontvouwen voor een leerproces over langere termijn, waarbij het begrip *dichtheid* centraal staat.

Het genoemde dilemma speelt daarbij in zoverre mee, dat eerst - aan de hand van enkele voorbeelden geïllustreerd - de leerlingen gevolgd worden op hun 'hob-

belige' leerweg. Uitgangspunt daarbij is het zoveel mogelijk rechtdoen aan hun denkbeelden en standpunten, daarbij aansluiten en die ontwikkelen tot wat men 'vakzuivere begrippen' zou kunnen noemen.

Het alternatief - waartoe men zeker bij oudere leerlingen geneigd is (en waartoe men ook gemakkelijk(er) geneigd zal blijven) - is het dictaat van de vakstructuur volgen, mede bepaald door daarin geldende definities.

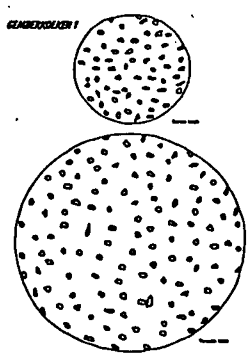
De kern van het betoog wordt gevormd door het idee, leerprocessen voor afzonderlijke noties, die verband houden met dichtheid, reeds in een pril stadium te *verweven*, zodat het leerprogramma als het ware op de dingen die nog komen - in dit geval dichtheid - vooruitgrijpt.

Een ander kenmerk van een dergelijke benadering is het rechtdoen aan het materiaal van wiskundige en fysische aard e.d., waarop dichtheid gegrondvest wordt. Let wel, het gaat om een keuze ten gunste van de positie van de leerling vooraf (a priori) wanneer het leerproces wordt ingezet ten koste van het vakstandpunt achteraf (a posteriori), wanneer men van het welgeordende kennisbestand van het vak zou uitgaan.

Dichtheid a priori: enkele voorbeelden

De volgende voorbeelden bevatten onderwijsnabije beschrijvingen, die deels geobserveerd zijn en deels gedacht.

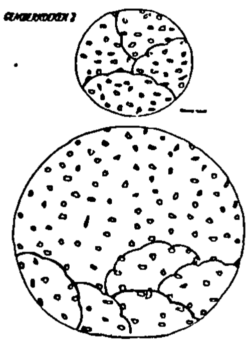
Voorbeeld 1: Een kwestie van smaak



In een herziene versie van een onderwijsthema over verhoudingen, bakt een bakker boterkoeken van twee grootten, 'besprenkeld' met stukjes gember (Streefland, 1983a).

Derde klassers van de lagere school zoeken uit - met het oog op het recept - hoeveel stukjes gember beide koeken bevatten. Eerst schatten, dan tellen door groepjes maken. De 'rekenzinnen' die het tellen verkort samenvatten, leveren de resultaten, b.v. 12 x 5 = 60 en 24 x 5 = 120.

Deze kunnen op zichzelf al verrassend zijn, omdat de kinderen in eerste instantie 'evenveel' geschat (kunnen) hebben. Na het bepalen van de absolute aantallen stukjes gember, gaan de kinderen samen met hun juf eens kijken naar de smaak van de koeken (of het aantal stukjes gember per hap).



De kleine koek met de minste stukjes blijkt toch het meest naar gember te smaken, want, zo kunnen de leerlingen argumenteren:
'Op een hap van de grote koek zitten bijvoorbeeld maar vijf stukjes gember en op een *even grote hap* van de kleine koek veel meer stukjes'. Of: 'De grote koek is vier keer die kleine. Als die kleine net zo was, moesten er 30 stukjes op zitten.'
Dus: 'de grote koek heeft de meeste stukjes gember, maar 'naar verhouding' heeft de kleine koek de meeste stukjes gember', zo besluiten juf en de kinderen deze activiteit.

Voorbeeld 2: Telefoondichtheid (I.O.W.O., 1976)

In een zesde klas ontlokte de uitspraak: 'Bijna iedereen heeft tegenwoordig telefoon', de nodige discussie. De onderwijzer neemt in zijn klas de proef op de som: 24 van de 32 kinderen blijken thuis telefoon te hebben. Later grijpt hij dit 'incident' aan als uitgangspunt voor enkele reken-wiskunde-lessen over het tellen van grote hoeveelheden, schatten van grote aantallen, rekenen met gemiddelden, lineaire en bijna lineaire grafieken en het verscherpen van noties bij zijn leerlingen omtrent hun wijze van statistisch denken.

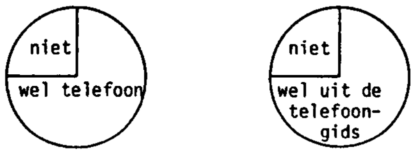
Instap

Bij ons in de klas heeft een groot gedeelte van de kinderen telefoon, wel 24 van de 32. Kunnen we met dit gegeven het aantal inwoners van onze woonplaats bepalen ?

De klas gonst al spoedig van de ideeën en na enige discussie wordt besloten tot de volgende procedure. In onze klas heeft $\frac{1}{4}$ deel van de kinderen geen telefoon. Als we nu de telefoongids nemen, het aantal nummers in onze plaats tellen en daar het $\frac{1}{3}$ deel bij optellen, dan hebben we het aantal inwoners.

Enkele elementen in deze procedure (1) vormden mede de aanleiding tot de discussie, vanwege het vele werk (al die nummers tellen) en omdat 'die $\frac{1}{3}$ ' niet begrepen werd. Beide bezwaren werden tijdens de discussie weggenomen.

Voor het tellen werd afgesproken: Ieder tweetal leerlingen telt een nieuwe bladzijde in de telefoongids. We kijken naar het gemiddelde aantal van de getelde bladzijden en vermenigvuldigen dit met het aantal bladzijden.
De breukenkwestie kon eenvoudig visueel gemaakt worden:



'onze klas' 'onze stad'

Er moet, zoals uit het plaatje blijkt, dus maar $\frac{1}{3}$ deel van de aansluitingen bijgeteld worden. Over de gekozen oplossingen bleven toch nog wel enkele twijfels bestaan, die als terecht erkend werden, zoals de nummers van fabrieken, scholen en kantoren die werden meegeteld, terwijl .....

Desondanks toog men welgemoed aan de slag en na het nodige tellen, middelen, vermenigvuldigen, delen en bijtellen, bleek bij navraag bij de afdeling bevolking, de uitkomst ER VER NAAST ! Toch hadden bijna alle groepjes vrijwel hetzelfde antwoord, mede door het gebruik van zakrekenmachientjes.

Conflict ontmaskerd

De onderwijzer vertelt: 'In de vierde klas - ik heb dit nagevraagd - zijn er 20 van de 30 kinderen die telefoon hebben. Kunnen we nu zeggen, dat in onze twee klassen *samen*

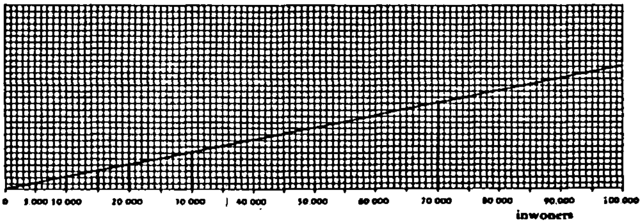
  24 van de 32
en 20 van de 30 +
  44 van de 62 kinderen telefoon hebben ?

Tja, er zijn er wel enkelen, die aan hun broertje of zusje in de vierde klas moeten denken, ... dus die zijn *dubbel* geteld !
Vingers, Meneer !!! Meneer !!! Velen hebben echter nog een blik van niet begrijpen. De leerkracht negeert de vingers nog even en richt zich tot één van hen: 'Peter, zoek jij *jezelf* eens op in de telefoongids.'
Ook anderen grijpen spontaan een gids, maar dan ..... Dat kan natuurlijk helemaal niet ! Het begint te dagen. 24 telefoons per 32 kinderen (of 20 per 30) zijn misleidende aantallen. Met de 'telefoor van Jan' doen ook zijn ouders, zijn broertje, zijn zusje, ...

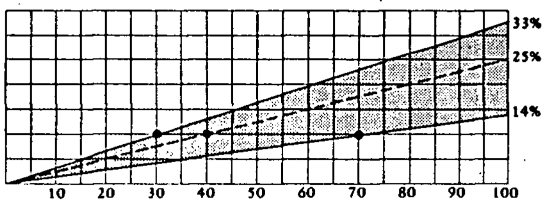
Vervolgactiviteiten

Als dat inzicht éénmaal bij ieder is doorgebroken, volgt een reeks van activiteiten, gericht op:

- het bepalen van de echte telefoondichtheid van 'de klas';
- het tellen van het aantal aansluitingen in een aantal plaatsen van hun district;
- het vergelijken van deze aantallen met de inwoneraantallen en het vaststellen en verwoorden van een trend, de dichtheid bij deze plaatsen is ....; hierbij wordt gebruik gemaakt van een grafiek.



- het vergelijken van de uitkomsten met officiële gegevens van de PTT;
- het bepalen van de inwoneraantallen van enkele kleine, middelgrote en grote plaatsen, waarbij de telefoongids als schatter wordt gebruikt;
- het relativeren van de gevolgde procedure, i.v.m. mogelijke afwijkingen, bijv. op grond van de dichtheden in Nederland (25%), Amsterdam (33%) en Maastricht (18,8%). (2)



Voorbeeld 3: Druk (3)

Tweede klassers in het voortgezet onderwijs hebben zich al geruime tijd ingeleefd in allerlei fysische verschijnselen. Soms zelf moest het ogenschijnlijk onmogelijke verklaard worden.

Zo was er de proef met het omkeren van een vol waterglas, met een papiertje afgedekt en de proef met de klap op een op de tafel gelegen lat, afgedekt met een vlak uitgespreide krant.

Vooral de waterproef had tot de verbeelding gesproken en ook wel wat overmoed uitgelokt.
'Zou het met dit hoge maatglas (ca. ½m, zonder tuitje) ook nog lukken ?', had de leraar gevraagd. Twijfels en voors en tegens alom.
Na het overtuigende bewijs was een nog hoger vat op de proppen gekomen. Hoe ver kon je wel gaan ? Zover als je wilde ? En ... wat zat erachter ?
Sommige leerlingen hadden de leraar al eens gevraagd de afdekpapiertjes tijdens de proeven kleiner te maken.

Toch was iedereen onder de indruk toen de waterbarometerproef gedaan werd en bleek dat de luchtdruk een waterkolom van wel 10 meter overeind hield. (De proef had trouwens heel wat voeten in de aarde gehad). Op die manier was men in de geheimen van de luchtdruk doorgedrongen, steeds zoekend en tastend naar achterliggende verklaringen van de waargenomen verschijnselen.

De leraar, die vooral ook een voorstander van samenhang in het geleerde was en dit ook voor zijn leerlingen nastreefde, had met zijn collega's biologie en nederlands - met het oog op verbreding van dit onderwerp - overlegd of het niet mogelijk was, dat zij in hun lessen ook enige aandacht aan dit onderwerp zouden besteden. Beiden hadden ingestemd. Bij het onderwerp 'aanpassingen aan het milieu', had de biologieleraar de aandacht gevestigd op langgeteende en breedbevliesde waadvogels, skiërs, de 'spreidvoeten' van sommige evenhoevigen,de armspierbundels van luiaards etc. en samen met de leerlingen naar verklaringen gezocht. De leraar nederlands had een tekst aangegrepen om uitdrukkingen op een rijtje te zetten, als: Langs de kust was het een *drukte* van belang. Ik heb het erg *druk*. Vanuit de Tweede Kamer wordt *druk* op de regering uitgeoefend.

Ook dit had heel wat interessante gespreksstof opgeleverd en ook hier was een verbinding gelegd met de natuurkunde. Zo was er bij 'Ik heb het erg druk' vastgesteld dat voor iemand die dat zegt, de taken en verplichtingen kennelijk beslag op zoveel van zijn tijd leggen (zo dicht in de tijd liggen), dat er nauwlijks of geen ruimte voor ontspanning overblijft.

Over de laatste uitdrukking kwamen leraar en leerlingen tot de conclusie dat deze bevreemding zou wekken wanneer achter de gemelde pressie slechts een éénmansfractie in de Tweede Kamer schuilging.

Wat de natuurkunde aangaat begint zich bij de leerlingen steeds scherper het besef af te tekenen, dat de uitgeoefende kracht en een oppervlak dat die kracht moet weerstaan, alles met elkaar te maken kunnen hebben. De kracht wordt als het ware evenredig 'uitgesmeerd' over het oppervlak waarop ze wordt uitgeoefend, net zoals een bevolking wordt 'uitgesmeerd' over het beschikbare leefgebied om de dichtheid te bepalen, of het aantal telefoon aansluitingen over ...., of .... Hoewel dat 'uitsmeren' is maar één kant van de zaak. Hoe zit het met hele kleine oppervlakken ? Er zal nog het één en ander moeten gebeuren om in de kijk van de leerlingen op het begrip druk nog de nodige verfijning aan te brengen.

Later - in allerlei toepassingssituaties - worden ook rekenvoorbeelden uitgewerkt, waarbij voor het rekenwerk de verhoudingstabel wordt toegepast.

Voorbeeld:

Van duikende potvissen is bekend dat zij een diepte in de oceaan van ruim 1100 m kunnen bereiken.
Welke druk moet zo'n dier op deze diepte weerstaan ?

Na een gezamenlijke instap waarbij de proef met de waterbarometer en de daarbij vastgestelde luchtdruk van 10 N/cm^2 als uitgangspunt wordt genomen, produceren de leerlingen oplossingen als:

× 10 × 10

diepte in m	10	100	1000	1100
druk in $10^5 N/m^2$	10^5	10^6	10^7	11×10^6

+

of

: 110

diepte in m	1100			10
druk in $10^5/m^2$	11×10^6			10^5

× 11×10

Een belangrijk vraag daarbij is nog of de luchtdruk nu wel of niet moet worden meegeteld. Door de ruim 1100 m diepte beseffen de leerlingen dat een luchtdruk-vervangende waterkolom van 10 m meer of minder niet zoveel uitmaakt. Het feit dat een potvis 11 x 10^6N per m^2 weerstaat (ofwel 110 kg per cm^2), wekt diepe indruk en maakt nog heel wat tongen los om een verklaring te vinden waarom de potvis ter plekke niet in een 'platvis' wordt omgezet.

Voorbeeld 4: Reactie

Na verschillende scheikundige reacties bestudeerd te hebben - voor zover de practicummogelijkheden op school dit toelaten - maken leerlingen uit 5-HAVO vraagstukken als:
'De stoffen koolstof (C) en zuurstof (O) reageren in de massaverhouding 3 staat tot 8. Hoeveel blijft er van welke stof over wanneer 8 gram C met 23 gram O in

contact wordt gebracht ?' De leerlingen komen met verschillende tabeloplossingen die, gelet op de efficiency in procedure, niet allemaal even kort en recht op het doel af zijn. De leraar prefereert 'omwegen' in de vorm van het met tussenstappen bouwen naar een antwoord toe boven niet begrepen exercities met regels en algoritmen.

Enkele oplossingen:

C	8	16	24
O	23	46	69

en

	x8		
C	3		24
O	8		64

Al werkend in de eerste tabel, wordt steeds 'met een schuin oog' naar de tweede gekeken, totdat een getallenpaar bereikt is, waarmee het andere gemakkelijk vergelijkbaar gemaakt kan worden, dat is bij

C		24
O		69

het geval.

Vervolgens wordt vastgesteld dat een overschot van 5 gram O bij 24 gram C een overschot van $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$ gram O moet geven bij 8 gram C.

Andere leerlingen doen bijv.:

	-2x3	$-\frac{2}{3}$x3	
C	8	2	0
O	23	7	$1\frac{2}{3}$
	-2x8	$-\frac{2}{3}$x8	

of

	:3	x8	
C	3	1	8
O	8	$2\frac{2}{3}$	$21\frac{1}{3}$
	:3	x8	

of

C	3	8
O	8	$21\frac{1}{3}$

met als conclusie dat er dus $1\frac{2}{3}$ gram O rest.

Dichtheid achteraf: enkele definities

Dichtheid (van materie) werd slordigheidshalve wel eens gedefinieerd met 'massa gedeeld door volume'. Daarmee wordt dan ruwweg slechts het *algoritmisch* recept aangegeven hoe je tot zoiets komt.

Het is een procedurele definitie, die zich over de kwaliteit van het gedefinieerde verder niet uitlaat.

Dergelijke definities brengen algemene vragen teweeg als: 'Mag men grootheden wel op elkaar delen ?', die op hun beurt weer hele discussies kunnen uitlokken. (Faraday, 46, 2, 6).

Op een lezersvraag in Faraday: 'Mogen we 'massa' door 'volume' delen ?' kwam als antwoord: 'Wat doe je *eigenlijk* als je 'massa' door 'volume' deelt ? Je deelt de *waarde* van de massa door de *waarde* van het volume. Je deelt getallen op elkaar, en daaraan ken je een nieuwe eenheid toe, en je vormt daardoor een nieuw begrip, de dichtheid (4). Niet voor niets schrijf je tijdens je berekeningen geen eenheden bij de getallen. Pas aan het eind van de berekening, bij het resultaat ervan, schrijf je de (nieuwe) eenheid.' (Faraday, 46, 2).

Hoewel de vorming van het nieuwe concept, dichtheid, in deze redenering nadrukkelijk in de aandacht is, is vooraf al bekend waarop met algoritmische middelen wordt aangestuurd. Wat a posteriori, per definitie is vastgesteld, namelijk dichtheid is massa gedeeld door volume, daarmee wordt nu vooraf al rekening gehouden.

Dit is een gang van zaken waarmee de leerlingen als niet-vertrouwden heel wat (meer) moeite zullen hebben. Waar het namelijk op aankomt is wanneer en vooral *waarom* massa en volume met elkaar in verband gebracht worden, d.w.z. het *beargumenteerd innemen van een relativerend standpunt, het gaan beschouwen van massa in verhouding tot volume.*

Laten we er nu even van uitgaan dat zulk een standpunt is ingenomen voor een blok hout met respectievelijk massa- en volumewaarden van 60 en 80. Door 60 en 80 beargumenteerd te relateren, is het dichtheidsstandpunt reeds ingenomen, dus het nieuwe begrip, dichtheid, 'gevormd'.

massa	60	30	15	3	$\frac{3}{4}$
volume	80	40	20	4	1

Iedere rekenkundige omzetting, die de gegeven massa-volume-verhouding respecteert, tast de dichtheid niet aan, deze blijft ongewijzigd. In elke berekende 'tussenstap' ligt de dichtheid ingebed, telkens anders *genormeerd.*

De uitdrukking 'massa per volume-eenheid' is dus niets anders dan een standaardnormering, een representant uit een klasse van verhoudingsconstante normeringen, die allemaal staan voor *dezelfde dichtheid.*

Dat de fysische werkelijkheid niet altijd even inschikkelijk het geschetste model van verhoudingsconstantie gehoorzaamt, doet aan het betoog zelf verder niets af. Wanneer empirische feiten aan het licht zouden brengen dat het blok hout inhomogeen is, kan men eventueel aan de verkregen niet meer helemaal verhoudingsconstante getalgegevens het lineaire model afdwingen, wanneer deze niet al te zeer afwijken en wanneer de bedoelingen die men heeft met het verbinden van massa en volume, zulks toelaten.

Nu is het zó, dat het uit 'Faraday' geciteerde standpunt formeel gesproken niet aanvechtbaar behoeft te zijn. Doch, wanneer men zich op het standpunt van de leerlingen en hûn leerproces stelt, kan men zich afvragen of het formeel correcte ook didactisch juist is. Waarmee overigens niet gezegd wil zijn dat het formeel onjuiste didactisch nog is goed te praten. (5).
Terug naar ons voorbeeld.

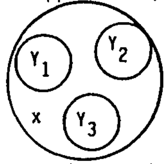
We noemen het beargumenteerd (leren) innemen van het dichtheidsstandpunt de *kern* van de kwestie. Dit is overigens geen eenvoudige zaak. Dichtheid is een theoretisch construct, waarin massa moeilijk empirisch verifieerbaar is, mede vanwege het inzicht dat vereist is om de invloed van de zwaartekrachtversnelling ter plaatse die zich aan het oog onttrekt, in te zien. (En mede vanwege het feit dat versnelling zèlf als 'gestapelde' samengestelde grootheid eveneens lastig is voor de leerlingen).

Met het oog op het leerproces over langere termijn, zouden de leerlingen moeten kunnen gaan beschikken over een mentaal referentiekader, waarin dergelijke abstracte voorbeelden ingebed kunnen worden. In de geschetste (onvolledige) uitlijning van voorbeelden bouwen de leerlingen zo'n mentaal kader op. Het gaat dus om het bestuderen van dichtheden, die minder verhuld zijn, waarin niet zulke abstracte of gecompliceerde begrippen opgaan; dichtheden, die op grond van structuurovereenkomst voor de leerlingen model kunnen staan voor het bovenbedoelde; die als kapstok, als mentaal houvast, kunnen dienen bij het doordringen in deze materie. Daarom werden in eerste instantie *verdelingsdichtheden* beschouwd ook met het oog op het verwerven van criteria voor het uitlijnen van een leerproces over langere termijn; dergelijke criteria zullen vooraf rekening moeten houden met de a priori positie van de leerling. Ze kunnen daarom moeilijk (uitsluitend) geformuleerd worden vanuit het a posteriori standpunt van de vakstructuur (en definities daarbinnen).

Verdelingsdichtheden

Met verdelingsdichtheden bedoelen we dichtheden als bevolkingsdichtheid, de dichtheid van witte bloedlichaampjes in het bloed (concentratie) e.d. We gaan uit van de (vertaalde) definitie van Freudenthal. (Freudenthal, 1983).

Stel er is een verzameling X met al zijn deelverzamelingen Y_i en X bezit de nodige structuur (intern, extern), hetgeen zich hierin manifesteert dat de Y_i 'behalve het aantal $\#$ nog een zeker *karakter* k bezitten (bij 'karakter' kan men denken aan grootheden als oppervlakte, volume, lengte, gewicht, tijdsduur, ...);



dit karakter laat zich extensief beschrijven, d.w.z. door middel van een grootheid die zich bij het samenstellen additief gedraagt:

$$k(Y_1 \oplus Y_2) = k(Y_1) \oplus k(Y_2)$$" (Freudenthal, 1983, 91)

Om de definitie tot dusver nog wat te verhelderen, kijken we naar temperatuur als voorbeeld van een grootheid, die door middel van een parameter beschreven wordt, die zich intensief gedraagt. Als het vandaag 10 graden is en gisteren 5 graden was, kunnen we niet zeggen dat het op beide dagen *samen* 15 graden was.

Voor het *karakter* k in de definitie tot dusver, lukt het nu juist wel om door samenvoeging het karakter van de samenstelling uit de afzonderlijke karakters van de delen te vormen, zo'n parameter noemt men *extensief*.

Terug nu naar de definitie, want deze was nog niet af.

Denkt men bij het karakter k bijvoorbeeld aan *oppervlakte* en bij $k(Y_i)$ aan oppervlakte door Y_i bezet, dan is:

$$\delta(Y_i) = \# Y_i / k(Y_i)$$

het aantal van Y_i per oppervlakte-eenheid. Omdat deze overwegingen onafhankelijk zijn van de keuze van Y_i, noemt men X een k-homogene verzameling.

Bij 'karakter' had men - zoals gezegd - ook kunnen denken aan grootheden als *volume, lengte, gewicht, tijdsduur* en bij k(Y) dus aan door Y ingenomen volume resp. lengte, resp. gezamenlijk gewicht van de leden van Y of tijdsduur van de gezamenlijke elementen van Y.

$\delta(X) = \#X/k(X)$ kan men de *verdelingsdichtheid* van X ten opzichte van k noemen.

Tot zover deze definitie.

Men zou kunnen stellen dat bevolkingsdichtheid ervoor model gestaan heeft als exemplaar voor alle mogelijke verdelingsdichtheden. Men kan zich afvragen: Waartoe dient nu deze scherpslijperij ?

Wel, wat aan voorgaande definitie opvalt - en dit kwam in de eerst beschreven voorbeelden tot uitdrukking - is, dat de *herkomst* van het materiaal, waarop verdelingsdichtheden gegrondvest worden, duidelijk verantwoord wordt. De definitie neigt veel meer naar een a priori standpunt dan in de Faraday discussie over het delen van grootheden het geval was. Het is een definitie waarin dichtheid wordt teruggevoerd tot de verschijnselen die erin worden *samengesteld*. Het is een fenomenologische definitie, die recht doet aan alle verschijnselen die in het geding zijn.

Zo wordt bij bevolkingsdichtheid een resultaat van *tellen* (aantal inwoners) in verband gebracht met een resultaat van *meten* (oppervlakte). Dit gebeurt met een bepaalde bedoeling, namelijk om situaties (landen, gebieden, continenten) *vergelijkbaar* te maken op het punt van (over)bevolking. De hele probleemsituatie levert dan tevens het motief tot het *beargumenteerd* innemen van het relatieve standpunt: zoveel inwoners per ... maakt de verschillende situaties inderdaad vergelijkbaar.

Blijkens de gegeven definities geldt algemeen voor verdelingsdichtheden dat resultaten van *tellen* en *meten* met elkaar in verband worden gebracht.
In de natuur- en scheikunde zijn het dikwijls juist resultaten van *meten* èn *meten* die beargumenteerd aan elkaar gerelateerd worden, zoals dichtheid, druk, (eenparige) beweging, de wet van Proust, concentratie, etc.

Ook in het maatschappelijk verkeer worden telkens nieuwe samengestelde 'grootheden' gevormd. Zo heeft men voor het bepalen van de milieuheffing het begrip inwonerequivalent geïntroduceerd.

In de energiediscussie tussen de BOVAG en de NS over de vraag of particulier vervoer dan wel openbaar vervoer het energievriendelijkst is en die via advertenties in de dagbladpers werd uitgevochten, gebruikte men het begrip *energieverbruik per reizigerskilometer*. Het is dus de moeite waard om over dergelijke zaken eens wat dieper na te denken vanwege de ruime toepassingsmogelijkheden.

Indien we bij verdelingsdichtheden spreken van *tellen* en *meten*, sluiten we vanzelfsprekend algoritmische procedures niet uit, die in de leerprocessen voor het tellen (van grote hoeveelheden) en het meten van (enkelvoudige en samengestelde) grootheden ontwikkeld kunnen worden en toegepast bij de bewerking van uitkomsten van dergelijke activiteiten.

Dit gezegd hebbende rijst de vraag, welke consequenties dergelijke diepgravende overwegingen kunnen hebben voor het uitlijnen van een lange termijn leerproces voor dergelijke leerinhouden. Daarover handelt de volgende paragraaf, waarop een voorschot genomen wordt door eerst op de gegeven voorbeelden, op grond van het voorgaande, te reflecteren.

Reflectie op de voorbeelden

In het eerste voorbeeld ('een kwestie van smaak') werd getoond hoe de leerlijnen voor het tellen van grote hoeveelheden en oppervlakte reeds in een vroeg stadium verweven zouden kunnen worden met het oog op verhouding. Het innemen van het relatieve standpunt kreeg de nodige aandacht en werd vanwege de conflictwerking geconfronteerd met de absolute aantallen in het probleem. Een ander belangrijk aspect was de aanvankelijke kwalitatieve benadering, waarna via het schatten tot meer numerieke precisie werd overgegaan.

Bij het tweede voorbeeld - telefoondichtheid - vergde de constructie van het (juiste) relatieve standpunt de nodige tijd, vanwege de statistische elementen, die in het geding waren. Toen het juiste standpunt eenmaal 'boven tafel was', konden de beoogde wiskundige activiteiten ontplooid worden om, gebruikmakend van gemiddelde, (niet)-lineaire grafieken e.d. met de nieuwe samengestelde 'grootheid' telefoondichtheid, grote aantallen te kunnen bepalen.

In de twee laatste voorbeelden is het relatieve (standpunt) in feite vervat in de fysische en chemische verschijnselen, zoals ze werden waargenomen. In deze gevallen gaat het dus veel meer om een reconstructie van het impliciet relatieve, dan dat de leerlingen zelf de betrokken 'grootheden' in verhouding tot elkaar stellen. Bij deze reconstructie speelde de verbinding met vroegere ervaringen wat dichtheden aangaat, een belangrijke rol. Zoals bijv. inwoners werden 'uitgesmeerd' over hun leefgebied, zo gebeurde dit ook met uitgeoefende kracht over het bijbehorende drukgebied, etc. Heeft bedoelde reconstructie eenmaal voldoende plaatsgevonden - en bij het voorbeeld van (lucht)druk werd daaraan in puur kwalitatieve zin de nodige aandacht besteed, dan kan tot het verwerken van toepassingsproblemen worden overgegaan, waarbij de nodige hulpmiddelen beschikbaar dienen te zijn voor de numerieke verwerking.

Leerlijnen verweven

In ons uitgangspunt - de definitie van verdelingsdichtheden - kwam naar voren, hoe bij het beargumenteerd innemen van een relativerend standpunt, resultaten van tellen en meten met elkaar in verband gebracht worden. Meer algemeen geformuleerd zou men kunnen stellen dat resultaten van elementaire wiskundige of fysische operaties, zoals meten, wegen, tellen, schatten, rekenen en samenstellingen daarvan, gerelativeerd worden.

Verhouding (en dus ook dichtheid) is qua logische status complexer dan lengte, massa, oppervlakte, aantal, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, Verhouding verheft zich qua logische status boven genoemde begrippen. (Freudenthal, 1983).

Voor genoemde meer elementaire begrippen en bewerkingen doorlopen de leerlingen afzonderlijke leerprocessen. Zo zijn basisschoolleerlingen actief - althans dat zouden ze moeten zijn - op gebieden als het tellen van grote hoeveelheden, het rekenen met grote hoeveelheden, het meten van lengte, oppervlakte en inhoud, het rekenen met lengten, oppervlakten en inhouden, enz.

Een belangrijke vraag voor het onderwijs is nu: moeten de leerlingen dergelijke afzonderlijke leerlijnen eerst helemaal doorlopen voordat ze met elkaar in verband gebracht worden met het oog op dichtheden. Of, is het wenselijk - en zijn er mogelijkheden - dit veel eerder in het leerproces en bij herhaling te doen ? De ervaring heeft uitgewezen - en ook uit uitkomsten van onderzoek kan men deze conclusie afleiden - dat een te late verweving van dergelijk afzonderlijke leerlijnen niet het gevraagde leerresultaat oplevert (vgl. Hart, 1981). De leerlingen blijken veelal in toepassingssituaties de geleerde algoritmen, regels en modellen te negeren ten gunste van hun eigen meer informele oplossingsmethoden voor problemen. Dat geldt dus *ook* voor de daarbij toegepaste rekenprocedures, zeg algoritmen. Ons standpunt is - en we hebben dit aan enkele voorbeelden toegelicht - dat dergelijke afzonderlijke leerlijnen in een vroeg stadium en vervolgens bij herhaling verweven zouden moeten worden, waarbij dan bovendien aansluiting gezocht dient te worden bij de intuïtieve, informele oplossingsmethoden en algoritmen van kinderen, in plaats van hen direct te forceren tot eind-algoritmen en slecht passende modellen op te leggen. (Streefland, 1983b).

Besluit

Het formeel definiëren van dichtheid (resp. verhouding) sluit een lange en rijke leerweg af, althans dat is wenselijk.

Actuele leerprogramma's beperken zich wat dit betreft tot enkele 'incidenten' in het basisonderwijs, gevolgd door veelal te sterk geformaliseerde vervolgen in het voortgezet onderwijs, zowel binnen de wiskunde als bij de toepassingen in biologie, natuur- en scheikunde.

Nadere analyse leert dat verhoudingen in het algemeen en dichtheid in het

bijzonder een brug slaan tussen de meer enkelvoudige, elementaire begrippen en operaties uit het basisonderwijs en de geformaliseerde vervolgen in de wiskunde en de voortgezette toepassingen in de natuurwetenschappen in het voortgezet onderwijs. In de verschijnselen, zoals voorhanden ligt genoemde brug in blauwdruk ingebed. Voor de didactische constructie ervan werden enkele suggesties gedaan om de leerlingen vanaf hùn kant de brug te laten 'nemen', want slechts door een zorgvuldige overtocht krijgt de overkant de juiste betekenis.
En .... daar gaat het toch om ?

Noten

(1) Vanzelfsprekend kan de instap tot dit probleem ook heel anders verlopen.

(2) De percentages dateren uit 1976.

(3) Dit gedeelte is mede geïnspireerd op, doch zeker niet letterlijk ontleend aan PLON (1981).

(4) De toekenning van de nieuwe eenheid verloopt niet altijd even gladjes als hier gesuggereerd wordt. Zo betoogt Raj.G.Rajan in een artikel over concentratie van oplossingen (Rajan, 1983), dat met het oog op het verkrijgen van de juiste eenheid bij uitkomsten van problemen %, g en ml tegen %, g en ml naar believen kunnen worden weggestreept, hetgeen de achterliggende noties van verhouding en verhoudingsconstantie wel heel erg negeert en op de leerlingen een indruk van willekeur moet maken. (Zie ook het vierde voorbeeld in dit artikel).

(5) Stellingname van Freudenthal.

Literatuur

Faraday, 1977, 46, 2 en 6.

Freudenthal, H. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht, Boston, Lancaster, Reidel, 1983.

Hart, K.M. (ed.). *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*. London, Murray, 1981.

IOWO Leerplanpublikatie nr.4. *'Interlokaal'*. Utrecht, 73-124, 1976.

PLON. *'Leven in Lucht'*. Zeist, NIB, 1981.

Rajan, R.G. *Concentration of solutions*. UMAP, 4, 455-469, 1983.

Streefland, L. *'Smaken verschillen'*. Willem Bartjens, 2, 2/3, 55-61, 1983a.

Streefland, L. *Search for the roots of ratio. Some thoughts on the long term learning process. (Towards ..... a theory ?)*. Utrecht, 1983b.
(N.B.: Dit artikel wordt in 1984 in twee delen gepubliceerd in Educational Studies in Mathematics).