

Psychologie, vakdidactiek en ontwikkelingsonderzoek

PEDAGOGISCH DIDACTISCH INSTITUUT
VOOR
aan de Universiteit
AFDELING PSYCHOLOGIE

A. Treffers
Vakgroep OW&OC, Universiteit Utrecht

1. Inleiding

Op het AERA-congres 1982 kregen zeven vooraanstaande onderwijsleertheoretici het verzoek een les over optica (holle en bolle lenzen) samen te stellen. 'Met stijgende verbazing vernamen de toehoorders dat, ofschoon de theoretische uitgangspunten totaal verschillend zijn, de uitwerkingen van de lessen opmerkelijk veel overeenkomst vertoonden' - aldus een van de toehoorders (De Klerk, 1982, p.520).

Holle en bolle lenzen alom: de bezoekers keken hun ogen uit! Kennelijk kent men in onderwijsleertheoretische kring grote invloed toe aan theoretische concepten bij het ontwikkelen van onderwijs. Dit blijkt ook uit het volgende citaat:

'Curriculumconstructie is lange tijd in handen geweest van praktici en vakdidactici. Op basis van ervaringen en eigen inzichten werden tal van methoden samengesteld. Steeds meer gaan wetenschappelijke inzichten en bevindingen indirect en direct een rol spelen bij de constructie van curricula. Indirect, doordat een aantal methodes voor de basisschool zegt uit te gaan van een expliciete leerpsychologische visie, direct doordat wetenschappelijke instituten zich meer en meer met curriculumontwikkeling zijn gaan bezighouden.'

De studie van enkele doctoraalstudenten onderwijskunde waaruit dit fragment afkomstig is, bevat zelf een voorbeeld van deze trend: de aspirant-onderzoekers vergeleken leergangen lengtemeting die op basis van onderwijsleertheorieën van Gagné en Gal'perin waren samengesteld.

Naast de cumulatieve leertheorie van Gagné en Gal'perins theorie over de trapsgewijze vorming van mentale handelingen zijn veel gebruikte referenties die van Davydovs concept over de vorming van theoretische begrippen, de informatie-verwerkingstheorie, het werk van Piaget en Bruner, en van de neo-Piagetianen.

Bij dergelijk onderzoek wordt verondersteld dat genoemde theorieën aanknopingspunten voor de constructie van leergangen en lessen bieden. In genoemd werkstuk wordt dit ook met zoveel woorden gesteld.

Het is echter de vraag of dergelijke algemene onderwijsleertheorieën met bijbehorende analyse-methodieken inderdaad houvast bieden bij het construeren van lessen en leergangen i.c. bij ontwikkelingsonderzoek. Naar onze mening is dat niet het geval, maar zijn het vooral de (vaak impliciet blijvende) basisconcepties over het betreffende schoolvak die het globale stramien van de taakanalyses en onderwijsconstructies bepalen.

We zullen een en ander eerst globaal aan de hand van een optica-opdracht toelichten en hem daarna nog wat nader uitwerken voor het leren van de staartdeling. Aangezien we aan vakspecifieke basisconcepties groot gewicht toekennen, zullen de voorbeelden op dit punt nogal breedvoerig worden besproken.

2. Verschillende onderwijsconcepties in een passpiegel bezien

De zojuist geponeerde stelling zou voor de uitkomsten van de straks genoemde natuurkundeles impliceren dat de uniformiteit in de lesplannen vooral aan de overeenkomst in de basisopvattingen over natuurkundeonderwijs i.c. optica-onderwijs moet worden toegeschreven. Aangezien we echter geen gedetailleerde informatie over de lesopdracht en de uitwerkingen ervan bezitten, kunnen we de juistheid van onze veronderstelling voor dit specifieke geval niet met nadere gegevens staven. Wat we wel kunnen doen, is zelf een soortgelijke opdracht formuleren en daaraan demonstren wat we straks stelden over de doorslaggevende betekenis van de basisconceptie.

We nemen daartoe het volgende elementaire optica-probleem als voorbeeld:

Hoe verhouden zich mijn (echte) maten tot die van de door mij waargenomen maten van mijn beeld-op-de-spiegel, in het geval van een vlakke verticaal geplaatste wandspiegel ?

Korter: hoe groot zie ik mijn spiegelbeeld op het spiegeloppervlak ?

We bespreken achtereenvolgend hier verschillende les-uitwerkingen van deze opdracht, te weten:

- een heuristische,
- een inductivistische,
- een deductivistische aanpak,
- en een mechanistische onderwijsaanpak.

In de *heuristische* variant wordt de opdracht in de volgende didactische vorm gegoten:

Ik wil een passpiegel kopen die ik tegen de binnenkant van de kastdeur kan plakken. Daarin moet ik mezelf (net) helemaal kunnen zien. Hoe groot moet die spiegel zijn ? (Schoemaker, 1984).

Hoe zullen leerlingen van laten we zeggen het derde leerjaar van het voorgezet onderwijs dit probleem aanpakken ? Of beter: hoe zullen wij de les of de lessen-serie globaal plannen ?

Vanaf de start een spiegel erbij ? Of juist eerst zonder spiegel maar eens een hypothese laten opstellen ?

We doen het laatste - de motivering van deze keuze volgt straks bij de bespreking van de ideeën van Lakatos.

Op grond van vroegere ervaringen voorspellen we dat de leerlingen in eerste instantie de volgende oplossingen zullen kiezen:

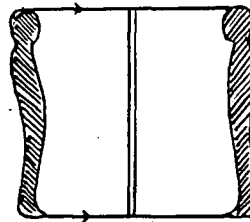
- er zijn er nogal wat die veronderstellen dat de spiegel even groot moet zijn als hun eigen lengte;
- sommigen vinden dat de grootte er (theoretisch gezien) in feite niet toe doet, omdat als je maar ver genoeg wegloopt je jezelf altijd wel kunt zien;
- en wellicht nog een enkele tussen-oplossing.

De twee genoemde uitersten zijn vanuit de ervaringswereld van de kinderen als volgt te verklaren.

Je spiegelbeeld is even groot als jezelf, *dus* moet de spiegel ook zo groot zijn. Dit 'dus' berust op het idee van parallelprojectie van het object en z'n spiegelbeeld op het spiegeloppervlak, gezien vanuit het standpunt van de 'buitenstaander' en niet vanuit de gespiegelde zelf. (fig.1)

Het idee van 'de grootte doet er niet toe', dus in principe zou ook een zakspiegeltje als passpiegel kunnen dienen, ontspruit waarschijnlijk aan meerdere ervaringsbronnen.

- als je achteruit loopt zie je jezelf kleiner (denk aan een winkelruit) en je vergeet dat ook de spiegel naar verhouding kleiner wordt gezien;
- als je een zakspiegeltje gebruikt, zie je inderdaad meer van je gezicht indien je het spiegeletje wat verder van je afhoudt (niet omdat je niet duidelijk zou zien!). En dat is bij een kleine passpiegel ook zo. Dus de stelling 'hoe verder weg hoe meer je van jezelf ziet' is tot op zekere afstand juist;
- en als je jezelf op het standpunt van de buitenstaander stelt die op een vaste afstand meekijkt, dan kun je inderdaad in een zakspiegeltje alles op afstand vangen.



figuur 1

Hoe het ook zij, we veronderstellen dat slechts een zeer gering aantal leerlingen in eerste ronde een enigszins correcte benadering van de benodigde passpiegel-grootte zal geven. Zoals gezegd, komt dit door allerlei 'misleidende' ervaringen, waarop die met een schuin geplaatste spiegel geen uitzondering vormt.

Hoe nu verder ?

Wel, het ligt voor de hand de verschillende hypothesen eens aan de realiteit te toetsen: we halen er passpiegels bij en nemen de proef op de som. Nu kan empirisch worden vastgesteld dat de verhouding object-spiegelgrootte ongeveer 2 op 1 is. Overigens is dat nog wat lastiger dan het zo op het eerste gezicht lijkt. Want je moet voldoende afstand tot de spiegel nemen om jezelf helemaal te kunnen zien, de spiegel moet op de goede hoogte hangen, je moet ontdekken dat je ook als je verder achteruit loopt toch precies in de spiegel gevangen blijft, dus dat er een constante verhouding is tussen object en beeld-op-de spiegel

Maar goed, laten we zeggen dat de verhouding 2 staat tot 1 op een gegeven ogenblik vaststaat, daarbij de passende hanghoogte en de juiste afstand in acht nemend, dan dient vervolgens het bewijs van deze regel(maat) te worden gevonden.

Die verklaring zouden de kinderen eigenlijk zelf moeten ontdekken. Of is het nog te vroeg om ze te stimuleren een plaatje te tekenen waarin object, spiegelbeeld en beeld-op-de-spiegel in onderling verband staan afgebeeld, en waarin de scherpende lichtstralen welke het spiegelbeeld van onder tot boven omsluiten in ogenschouw worden genomen ?

Misschien wel. Uit praktijkervaring en onderzoek is namelijk bekend dat de natuurwetenschappelijke kijk op het zien niet strookt met het primitieve voorwetenschappelijke beeld ervan. Zelfs leerlingen die reeds optica-onderwijs hebben gehad, bezitten vaak nog de hele concrete voorstelling van licht, als iets dat zich bij een stralingsobject bevindt of wat via mijn 'superman-ogen' wordt uitgezonden. Blijkbaar heeft de boekjeskennis de alledaagse opvatting (nog) niet kunnen beïnvloeden.

Margaret Donaldson (1978) spreekt bij dergelijke gevallen van 'apartheid' en 'disembeddedness' van het schoolse leren ten opzichte van de kennis die in het alledaagse leven wordt gehanteerd. De oorzaak daarvan ligt volgens Donaldson in het feit dat het onderwijs niet bij de informele kennis van de leerlingen aansluit (hetgeen de heuristische aanpak wel nadrukkelijk probeert te bewerkstelligen, zoals hier blijkt - maar dit terzijde).

Andersson en Kärrqvist concluderen uit hun onderzoek over hoe kinderen van 12-15 jaar het licht en zijn eigenschappen opvatten:

'This means that quite another degree of attention than that now prevalent, must be paid to providing the pupils with the opportunity of gaining an insight

into what we call the key idea of optics.' (Andersson en Kärrqvist, 1983)
 We willen dit ter harte nemen voor wat betreft het waarnemen van het eigen beeld-op-de-spiegel. Na de ervaring met de passpiegel lijkt het nodig dat de leerlingen eerst hun eigen beeld-op-de-spiegel van bijvoorbeeld het hoofd schetsen (met behulp van een stukje zeep). Of eerst nog algemener: omtrekken van hoofden van medeleerlingen op een glazen ruit tekenen. Dit alles om de aandacht op het oog-centrum van de scherpende lichtstralen te vestigen (Goddijn en Schoemaker, 1980). Daarna zijn we toe aan de verklaring van de verhouding 2 staat tot 1 via schematisering van beeld, spiegelbeeld, beeld-op-de-spiegel en de oogstralenbundel (fig.2). De middenparallel biedt de mathematische sleutel tot de oplossing vsn het passpiegelprobleem. Over de verschillende manieren waarop dit verhoudingsprobleem bewezen kan worden, zullen we het hier verder niet hebben.

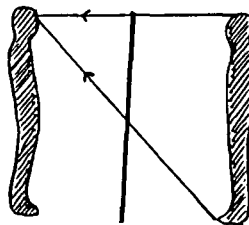
Nu nog enkele opmerkingen over de *inductivistische*, de *deductivistische* en de *mechanistische* werkwijzen.

De *inductivistische* variant komt kortweg neer op meten-en-verklaren. Dat wil zeggen, het probleem 'hoe groot zie ik mijn spiegelbeeld op het spiegeloppervlak afgebeeld?', wordt nu uiteengelegd in een meet-opdracht en een te-bewijzen-opgave. De meetopdracht bestaat er in dat een klasgenoot op jouw aanwijzing streepjes zet bij kruin en zool van je spiegelbeeld, en vervolgens moet je de lengte op dit beeld-op-de-spiegel vergelijken met je eigen lengte. Daarna wordt een verklaring van de gevonden verhouding gevraagd. Kortom, er wordt zonder omwegen naar de te vinden betrekking toegewerkt met hulp van een grote wandspiegel, en niet direct via een kleine passpiegel met alles wat daar zoal bijkomt.

In de *deductivistische* aanpak gaat het zelfs nog directer met de rechtstreekse vraag te bewijzen dat de verhouding beeld tot beeld-op-de-spiegel gelijk is aan 2 staat tot 1. Dus hierin bepaalt men zich slechts tot het te bewijzen deel.

De *mechanistische* werkwijze beperkt zich tot de vaststelling dat de halveringsregel geldt. Voor praktische doeleinden (zeg voor de verkoop van passpiegeltegeltjes) werkt die regel overigens nog iets anders uit, omdat men immers ook rekening moet houden met de hanghoogte van de passpiegel als hij voor verschillende lengten bruikbaar moet zijn!

Men kan dan adviseren: hanghoogte 1.80 meter en lengte 1 meter, want daarin kan iemand van zowel 1.90 meter als ook van 1.60 meter zichzelf (vrijwel) helemaal zien - zoals uit het voorgaande volgt. Alleen bewijst men in de mechanistische aanpak niets. Hooguit gaat men na of de regel werkt.



figuur 2

Ziehier vier verschillende uitwerkingen van één opdracht tot het samenstellen van een les of lessenserie over een spiegelprobleem.

In hoeverre verschillen de concepties ?

We zullen het markante onderscheid toelichten aan de hand van Lakatos' denkbeelden over wis- en natuurkundeonderwijs.

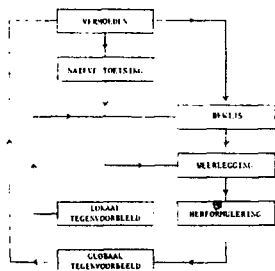
Lakatos laakt de traditioneel bepaalde deductivistische en inductivistische onderwijs-aanpak in ongemeen felle bewoordingen:

'It has not yet been sufficiently realised that present mathematical and scientific education is a hotbed of authoritarianism and is the worst enemy of independent and critical thought. While in mathematics this authoritarianism follows the deductivist pattern just described, in science it operates through the inductivist pattern'....

'Inductivist style, just like its deductivist twin (not counterpart!), while claiming objectivity, in fact fosters a private guild-language, atomises science, suffocates criticism, makes science authoritarian. Counterexamples can never occur in such presentation: one starts with observations (not a theory), and obviously unless one has a prior theory one cannot observe counterexamples.'

'Heuristic style on the contrary highlights these factors. It emphasises the problem-situation: it emphasises the 'logic' which gave birth to the new concept.' (Lakatos, 1977, p.142-144).

Het vereenvoudigde Lakatos-model voor de heuristiek van het wiskundige en natuurwetenschappelijke ontdekkingsproces ziet er (mede voor het onderwijs) als volgt uit (zie fig.3, naar Davis & Hersh, 1982):



figuur 3

Startend vanuit een probleem of vermoeden wordt er zowel naar een 'bewijs' als naar tegenvoorbeelden gezocht. 'Bewijs' dient in deze samenhang niet als een logisch onbreekbare keten te worden opgevat die van aanname tot conclusie loopt, maar veeleer als een (wellicht feilbare) verklaring of rechtvaardiging die het vermoeden min of meer overtuigend aantoont en bestand doet zijn tegen 'counterexamples'. Of beter: in het bewijs is juist met tegenvoorbeelden rekening gehouden. Lokale tegenvoorbeelden tasten in eerste instantie de bewijsgang op bepaalde onderdelen aan, maar de globale 'counterexamples' raken het bewijs in het hart, dat wil zeggen in de conclusie zelf. In het laatste geval zal naar een ander plausibel vermoeden toegewerkt moeten worden, dat men vervolgens zal trachten te bewijzen. Bij een lokale weerlegging dient het bewijs slechts op onderdelen te worden bijgesteld. Welnu, in de passpiegel-aanpak kan men de kenmerken van heuristisch onderwijs duidelijk waarnemen:

- er wordt met een 'echt' probleem gestart dat voor de leerlingen goed inleefbaar is;
- op grond van ervaringen hebben de kinderen een (al dan niet juist) vermoeden in welke richting de oplossing gezocht moet worden;
- 'naieve' toetsing geeft al snel een globale weerlegging van (één van) die vermoedens: de spiegel hoeft niet even groot als jezelf te zijn, maar mag ook niet willekeurig klein zijn;
- tevens levert het experiment een herformulering van de hypothese op: de passpiegel moet ongeveer de halve persoon-grootte zijn;
- althans als je niet te dicht bij de spiegel gaat staan, want dan is de helft te weinig een 'lokale' weerlegging;
- en nu proberen de leerlingen de gevonden (vast)-stelling te bewijzen; schematisering van object, spiegelbeeld, beeld-op-de-spiegel en de in het oog springende stralenbundel levert de aanzet tot het meetkundig bewijs of de stelling van de middenparallel en ook de 'lokale' uitzondering wordt ermee plausibel gemaakt.

In de standaardaanpak van de inductivistische (en ook de deductivistische) werkwijze wordt de eerste fase overgeslagen. Het probleem is namelijk zodanig gesteld, dat er geen globale tegenvoorbeelden kunnen opduiken: naieve vermoedens, hypothesen of theorieën krijgen geen kans om gesteld en weerlegd te worden 'one starts with observations (not a theory) and obviously unless one has a prior theory one cannot observe counterexamples', merkte Lakatos op (1977, p.142).

En in de mechanistische werkwijze slaat men zelfs de tweede fase nog over: er is geen sprake van een onderzoeksmoment doch slechts van regelgeving.

Ziehier hoe verschillende basisconcepties over het (schoolvak)-onderwijs tot verschillende concretisering van één probleemstelling kunnen leiden.

Is het een wonder dat de zeven onderwijs-leertheoretici die een opdracht kregen een les over optica samen te stellen, tot één en dezelfde uitwerking kwamen? Nee, ze zijn waarschijnlijk allen van dezelfde basisconceptie uitgegaan i.c. van de geschetste inductivistische standaardopvatting (of z'n deductivistische evenbeeld) - een vermoeden dat we met het hiervoor beschreven optica-voorbeeld plausibel hebben proberen te maken.

In het begin van deze paragraaf schreven we dat de stelling inhoudende dat de basisconceptie over het schoolvak de bepalende factor bij het ontwikkelen van onderwijs is, sterk ondersteund zou worden indien blijkt dat twee verschillende uitwerkingen van één opdracht door één en dezelfde algemene onderwijstheorie omkleed zouden kunnen worden.

In het voorgaande is aangetoond dat er inderdaad goed gemotiveerd, verschillende concretisering mogelijk zijn. Rest ons nog te laten zien dat zowel de heuristische, de inductivistische als de mechanistische aanpak aan één en dezelfde onderwijsleertheoretische bron kunnen ontspringen. Anders gezegd, dat het specifiek heuristische deel onderwijsleertheoretisch 'neutraal' is en derhalve noch uit één of andere algemene onderwijs-theorie voortvloeit noch er, omgekeerd, juist mee in tegenspraak zou zijn. Kortom, dat al-dan-niet heuristisch onderwijs er algemeen onderwijsleertheoretisch bezien niet toe doet: er is geen noodzaak toe, maar de heuristiek wordt evenmin buitengesloten.

Wel, wat de niet-noodzakelijkheid betreft, die lijkt nogal evident: het overgrote deel van de onderwijsleertheoretische uitwerkingen van wis- en natuurkundeonderwijs is niet heuristisch. Onderwijsleertheoretisch gefundeerd onderwijs voert niet noodzakelijk tot een heuristisch uitgelijnde onderwijsaanpak.

Aan de andere kant is er geen in het oog springend argument wat erop wijst dat het strijdig met een of andere onderwijsleertheorie zou zijn (Van Streun, 1983). Ook binnen bijvoorbeeld de sterk algoritmisch georiënteerde en voorschrijvende onderwijstheorie van Gal'perin is het mogelijk dat de leerlingen zelf een volledige oriënteringsbasis creëren. Hoewel we hieraan direct moeten toevoegen dat het denken vanuit vakmatige eindproducten en het niet nadrukkelijk aansluiten bij informele benaderingswijzen veruit meer gebruikelijk is in de onderwijsleertheoretische afleidingen naar correct onderwijs, dan de niet-vaksystematisch bepaalde heuristische aanpak waarin wel nadrukkelijk bij naïeve voorwetenschappelijke denkbeelden wordt aangesloten.

Kortom, alle voorwaarden tot zeer variabele concretisering van algemene onderwijsleertheoretische concepten lijken voorhanden. Anders gezegd: opdrachten tot het

samenstellen van lessen en leergangen op grond van algemene onderwijsleertheorieën lijken, gelet op het voorgaande, nogal onbepaald, vaag en misleidend. Het is niet zozeer de expliciete algemene onderwijsleertheorie als wel de (vaak impliciete) vak-onderwijsleertheorie (de basisconceptie) die de concrete uitwerking in hoge mate lijkt te richten, zo leert een eerste globale orientatie. We zouden hier met name de variabele toepasbaarheid van de algemene onderwijsleertheorie nog wat nader kunnen detailleren en toelichten aan de hand van het spiegelbeeld-probleem, en laten zien hoe zowel de heuristische als de inductivistische les-uitwerking binnen bijvoorbeeld de informatie-verwerkingstheorie past. Het nadeel daarvan is echter dat we ons dan tezeer tot één les-voorbeeld beperken, terwijl het bij ontwikkelingsonderzoek, althans in het reken-wiskundeonderwijs, veelal om grotere constellaties i.c. leergangen te doen is. Om die reden gaan we nu over naar een voorbeeld van een leergang, te weten het cijferen, en zullen aan de hand daarvan enkele onderdelen van onze stelling die in het voorgaand onderbelicht bleven, nog wat proberen te verduidelijken. Daarmee maken we de overstap naar zowel het basis-onderwijs als de wiskunde, wat ons nog een bredere blik op de cruciale basisconcepties kan verschaffen dan die welke het begrippenpaar heuristisch-inductivistisch (deductivistisch) ons bood.

3. Cijferen in ontwikkelingsonderzoek

Voor het cijferend rekenen 'onder elkaar', waaronder de lange vermenigvuldigingen en de staartdeling, hebben we het eerder gestelde reeds enigermate onderzocht en beschreven (Treffers, 1092a, 1982b, 1983). We geven hiervan nu een samenvatting.

Ten eerste bleek inderdaad dat verschillende theoretische uitgangspunten tot een-vormige leergangen kunnen leiden, ten tweede dat fundamenteel verschillende leergangen door één algemene onderwijsleertheorie omkleed kunnen worden, en ten derde dat er wel een relatieve onafhankelijkheid van curriculumconstructie en onderwijsleertheorie bestaat, maar geen absolute.

Wat het laatste betreft: algemene onderwijsleertheorieën sluiten blijkbaar wel bepaalde onderwijsmethodieken uit, zoals bijvoorbeeld het 'blinde' mechanistische cijferen, omdat die werkwijzen niet met de respectieve theorieën stroken, maar laten tevens fundamenteel verschillende 'insluitingen' van leergangen toe. Dat men vanuit één onderwijsleertheorie veelal toch maar tot één vormgeving van onderwijs i.c. een bepaalde opbouw van een leergang komt, moet zoals gezegd grotendeels worden toegeschreven aan het feit dat men in de 'afleiding van theorie naar praktijk' een (vaak impliciete) basisopvatting over het vakspecifieke onderwijs inbouwt.¹⁾

Onderwijsleertheoretici hanteren daarbij meestal een standaard-beeld van reken-wiskundeonderwijs, dat kort gezegd de vaksystematische opvatting behelst. Wiskunde

wordt in deze visie primair als een schoolvak gezien waarvan de inhoud uit de vakwetenschap is afgeleid. Een vak dat een compendium is van verworven structuren, concepten en denkwijzen, waarin kinderen op een psychologisch verantwoorde wijze ingevoerd dienen te worden. Aldus bezien is wiskunde een voorgetekende structuur, een voltooid bouwwerk, iets dat je aantreft en wat verder op dit niveau geen nadere explicatie behoeft. Kortom de vakstructuur mag bekend verondersteld worden, daarover hoeft men niet te twisten. Waarover men wel van mening kan verschillen, is de vraag welke begrippen in het onderwijs geaccentueerd zouden moeten worden. Het is de specifieke taak van de onderwijsleerpsychologie om te onderzoeken hoe mensen die begrippen leren (gebruiken en toepassen), en hoe het complex van cognitieve structuren waarin de wiskundige kennis vervat ligt, onderwezen moet worden - aldus het vaksystematisch bepaalde standpunt. In de schematische voorstellingen van de taakanalyse ten behoeve van leerplanontwikkeling en ontwikkelingsonderzoek die op dit grondidee geënt zijn, valt het meest de wijze van afleiding op, die loopt van de theoretische structuur van de vakwetenschap via de cognitieve structuur van de expert langs de te ontwikkelen inhoudelijke leerstofstructuur naar de actuele en beoogde cognitieve structuur van de leerling

Voor het cijferen wordt deze (rationele) taakanalyse volgens het vaksystematische model als volgt zichtbaar: men gaat uit van de standaard-algoritme in z'n meest verkorte eindvorm en breekt per algoritme de complexe procedurehandelingen af in elementaire procedures. Deze worden dan in opklimmende moeilijkheid van deelgeval naar deelgeval, eventueel met behulp van daartoe geschikt materiaal, aangeleerd. Een top-down strategie van (psycho)-logische afleiding, startend vanuit het verworven concept i.c. de standaard-algoritme en verwoord en verbeeld in termen van taken en subtaken (Gagné) of van cognitieve structuren (Resnick).

Voor bijvoorbeeld de staartdeling leidt een dergelijk *taakanalyse* tot het uiteenleggen van de algemene procedure in tal van subprocedures die naar opklimmende moeilijkheid geordend worden. Naar de leergang vertaalt deze analyse zich in een serie taken als bijvoorbeeld achtereenvolgens:

18:3

120:4

96:3

256:4

300:10

3000:50

840:20

736:23

1924:26

93875:320

Steeds wordt per deelgeval naar de standaard-vorm toegewerkt. Voor de laatstgenoemde gaat dat zo:

$$\begin{array}{r} 320/93875: 293 \\ 640 \\ \underline{2987} \\ 2880 \\ \underline{1075} \\ 960 \\ \underline{115} \end{array}$$

Resnick heeft de bezwaren tegen zo'n leer(stof)-product gerichte analyse opgesomd en er een (rationele) *procesanalyse* naast gesteld waarin meer aandacht aan het leerproces en de cognitieve structuren wordt besteed. Met name de relatie tussen de cijferhandelingen en het betekenisvol manipuleren met positiemateriaal (Dienesblokken), zijnde het betekenisvolle fundament van de staartdeling, wordt door haar benadrukt. Maar de vaksystematisch bepaalde leerstofordening als geheel wordt door haar onaangetast gelaten: de rationele procesanalyse richt zich op het psychologische micro-niveau van cognitieve representaties e.d.; het macro-niveau van de curriculum-orientatie wordt echter bewust buiten beschouwing gelaten.

Kortom, in grote lijnen voeren dergelijke analyses tot de traditionele (inzichtelijke) aanpak van de staartdeling. Het cijferen staat hierin geïsoleerd, dus los van toepassingsproblemen, en de globale ordening van de leergang is grofweg door de grootte van getallen volgens opklimmende moeilijkheid bepaald.

Nu zijn de resultaten van dergelijk opgezet onderwijs van oudsher zeer slecht: 1 op de 3 leerlingen blijkt het obstakel van de staartdeling niet te kunnen nemen, en bij wat moeilijker delingsproblemen (met nullen in de uitkomst) struikelt zelfs meer dan de helft. En dat terwijl er 60 tot 100 lesuren onderwijstijd aan besteed wordt, en als we de kommagetallen erbij nemen zelfs nog aanzienlijk meer. Daar komt dan nog bij dat de kinderen die de staartdeling geleerd hebben hem bij het oplossen van toepassingsproblemen lang niet altijd gebruiken. Niet uit een soort eigenwijsheid, maar eenvoudigweg omdat ze de delingsstructuur niet in de probleemsituatie onderkennen. Ze gebruiken dan primitievere, minder efficiënte oplossingsmethoden in plaats van een korte deling. Dus net zoals aftrekkingen vaak via de winkelmethode van het doortellen worden opgelost en er in zo'n doortelprobleem door sommige leerlingen geen aftrekking wordt onderkend, zo worden delingsproblemen soms via probevend door-vermeningvuldigen of zelfs op-tellen opgelost zonder dat die leerlingen ze kortweg als deling identificeren. Het gevolg van een en ander (technisch uitvoeren en toepassen) is wel dat toepassingsproblemen waarin een (staart)-deling vervat ligt, zelfs door aanzienlijk minder dan de helft van de basisschoolleerlingen goed worden opgelost.²⁾

Er is dus alle reden tot een kritische analyse van de bestaande vaksystematische aanpak van de staartdeling, die wat dieper gaat dan de genoemde taak- en procesanalyses. Zo'n analyse zal moeten aangrijpen op de vanzelfsprekendheden van vaksystematische aard die in dergelijke analyses niet nader worden verantwoord. Waarom zouden de standaardalgoritmen, dus eindproducten, het uitgangspunt van analyses moeten vormen en waarom wordt niet bij het algoritmiseringsproces van schematisering en verkorting begonnen? Wat is de reden dat het cijferen los van contextproblemen wordt aangeleerd, terwijl bekend is dat kinderen de algoritmen lang niet altijd op de daartoe geëigende problemen toepassen, maar informele, meer contextgebonden en minder efficiënte werkwijzen hanteren (en dus in dat geval ook de rekenmachine niet kunnen gebruiken) ?

Uit deze vragen komt, dat is duidelijk, een fundamenteel andere basisconceptie van het cijferonderwijs naar voren. Niet het vaststaande eindproduct vormt het uitgangspunt maar veeleer het proces van algoritmiseren staat centraal. Daarbij wordt zowel een ontogenetisch als een fylogenetisch gezichtspunt ingenomen: hoe ontwikkelde zich de staartdeling in de loop van de menselijke geschiedenis, welke verschillende vormen kreeg een dergelijk algoritme, en op welke wijze zouden informele werkwijzen van kinderen geleidelijk tot meer formele en uniforme algoritmen kunnen worden omgevormd in samenhang met het maken van toepassingen. Ziehier de belangrijkste gezichtspunten van een nieuwe analyse, die zich duidelijk onderscheidt van de taak- en procesanalyse uit de algemene onderwijsleertheoretische hoek. Een dergelijke niet-vaksystematisch bepaalde analyse wordt wel aangeduid als *fundamenteel mathematisch-didactische analyse* (Treffers, 1979; Streefland, 1980), *didactische-fenomenologische analyse* (Freudenthal, 1983) en *idee-analyse* (Lesh&Landau, 1983).

We laten nu even buiten beschouwing op welke wijze uit een dergelijke vakdidactische analyse via ontwikkelingsonderzoek de alternatieve cijferleergang werd ontwikkeld, maar concentreren ons op het resultaat ervan.

Welnu, het leren van de staartdeling wordt als een vorm van steeds handiger rekenen gezien in relatie met contextopgaven. De 'omslachtige' werkwijzen van kinderen dienen daarbij als aangrijpingspunt. Deze methoden worden in de loop van ongeveer 20 lessen steeds verder ingekort en efficiënter gemaakt. Concreet gaat dat ongeveer als volgt. Men start met een aansprekend probleem van eerlijk verdelen:

'32 stickers worden onder 5 kinderen verdeeld, hoeveel krijgt ieder ?'

In de eerste fase van de leergang voeren de leerlingen het verdelen concreet uit via één-voor-één uitdelen: tegelijkertijd noteren en controleren ze het resultaat. De langdradige en onhandige één-voor-één werkwijze komt daarbij ter sprake.

5. Idem, 532,83 rest 4 is het antwoord.
6. 532,833333.

Samengevat: de nieuwe basisleergang staartdelen is betrekkelijk kort (zeg 25 lessen), hij ontwikkelt zich geleidelijk uit handig en steeds handiger rekenen, en reële problemen spelen een dominerende rol bij zowel het ontwikkelen van de staartdelingsprocedure als het toepassen ervan.

Uit onderzoek (Rengerink, 1983) blijkt dat de resultaten van dit geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering en verkorting aanmerkelijk beter zijn dan die van de traditionele vaksystematische aanpak; er worden geen procedurefouten gemaakt, er zijn vrijwel geen afhakers, qua techniek en qua toepassing is de opbrengst significant hoger, de onderwijstijd beduidend minder (ongeveer de helft !) - kortom de nieuwe aanpak is superieur aan de oude. Tevens is duidelijk dat de twee leergangen diepgaand verschillen ten aanzien van hun opstellingen tegenover kind, vak(-systematiek), toepassingsproblemen en gedifferentieerd onderwijs³⁾.

Hoe is nu de relatie van deze twee fundamenteel verschillende cijferleergangen tot de algemene onderwijskeertheorieën ? - zo luidt onze hoofdvraag.

De volgende anecdote werpt daarop een scherp licht. Uit contacten met onderwijswetenschappers, docenten en begeleiders bleek namelijk dat men vrij algemeen veronderstelde dat de nieuwe opzet van het cijferen op basis van Gal'perins onderwijsleertheorie was ontwikkeld. Men beschouwde de betreffende leergang zelfs als een modeltoepassing van die theorie, omdat men daaraan en daarmee alle parameters van de cijferhandelingen glashelder kon toelichten - op zichzelf een juiste gedachte. Toch bleek die veronderstelling niet juist, eenvoudigweg omdat de Wiskobasgroep toentertijd (1972) in het geheel niet op de hoogte bleek van Gal'perins concept. Sterker: als men dat wel was geweest en Gal'perins voorbeeld zou hebben gevolgd, was men wellicht nooit tot de opzet van het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering gekomen. Gal'perin heeft namelijk zelf een toelichting op zijn leertheorie aan de hand van het cijferen gegeven welke sterk van de Wiskobasaanpak verschilt (Gal'perin, 1969, p.269). Op zich niet zo verwonderlijk, want zijn concept kan zowel bij de vaksystematisch bepaalde aanpak als bij de Wiskobaswerkwijze gebruikt worden. In het eerste geval past men de parameters van fasering en verkorting van de procedurehandelingen toe op het micro-niveau van de progressieve complicering. Per deelgeval slijpt men de standaard-algoritmen in via het doorlopen van de cyclus van materieel tot mentaal handelen (dus eerst met positieblokken werken en later alleen met symbolen). In het tweede geval hanteert men de handelingstheorie op het macroniveau van de progressieve schematisering, daarbij eenvoudige contextproblemen als concrete oriënteringsbasis gebruikend.

De Gal'perin-aneecdore kent trouwens een Davydov-vervolg. De laatste jaren wordt de nieuwe cijferaanpak vooral theoretisch gewicht toegekend omdat hij zo goed bij Davydovs denkbeelden over de vorming van theoretische begrippen past. Met name het feit dat het algoritmiseringsproces en het onderwijs spoort met de historische ontwikkeling van de betreffende cijferhandelingen achten de Davydov-adaptten een sterk punt. Niet onterecht. Toch is ook hier weer geen sprake van een algemeen leertheoretische toepassing maar spreekt de gesignaleerde verwantschap vooral voor de multiple toepasbaarheid van dergelijke theorieën. Hoewel ... toepasbaarheid is niet de juiste term, want er is geen sprake van toepassen, hooguit van een inpassing-achteraf, maar daarover straks meer.

Ook allerlei kernpunten uit de informatie-verwerkingstheorie zijn op de nieuwe leergang van toepassing: aandacht voor informele werkwijzen en inventies van kinderen, belang van cognitieve representaties (waartoe ook contextproblemen gerekend kunnen worden), het honoreren van individueel verschillende werkwijzen, de samenhang tussen de verschillende cijferoperaties, het zelf construeren van wiskundige kennis, het terugdringen van systematische fouten, de belangrijke functie van het werkgeheugen en het niet te zwaar belasten ervan - dat alles past zeer wel bij de grondideeën, zoals die door Resnick, Greeno e.a. verwoord zijn.

Kortom, (vrijwel) alle theorieën waarmee het vaksystematische cijferen wordt omkleed (Treffers, 1982b) kunnen ook als dekmantel voor de fundamenteel andere niet-vaksystematische werkwijze gebruikt worden. Ergo: algemene onderwijsleertheorieën vormen noch een concrete noch een volledige oriënteringsbasis voor het ontwikkelen van onderwijs. We zien dus onze eerdere globale waarneming bij het spiegelprobleem hier bevestigd: het zijn vooral de (soms impliciete) basisconcepties die de ontwikkeling richten. En dat geldt evenzeer voor de voorbeelden die de onderwijsleertheoretici zelf als grondslag of illustratie gebruiken. Deze komen namelijk niet rechtstreeks uit de betreffende theorie voort, maar veelal uit de vaksystematisch bepaalde basisopvatting over het onderwijs, die impliciet en niet verantwoord in de analyse-techniek gestopt worden.

4. Besluit

Hoe er vanuit een vakdidactische basisconceptie ontwikkelingsonderzoek verricht wordt, en welke precieze bijdrage vakdidactische idee-analyse daaraan levert, lieten we in het voorgaande grotendeels buiten beschouwing. Wel kwam terloops ter sprake dat Gagné weliswaar een curriculum-oriëntatie kent, maar dat deze sterk vaksystematisch bepaald is, zodat er van zijn kant geen behoefte aan specifiek construerend onderzoek of ontwikkelingsonderzoek bestaat. Resnick (zie Carpay 1982) en andere psychologen uit de informatie-verwerkingstheoretische hoek (zie Cobb & Steffe, 1983)

wijzen echter het macro-schema van onderwijsontwikkeling in het kader van psychologisch onderzoek principieel af. (En zij zullen zich derhalve van ontwikkelingsonderzoek distantiëren; slechts construerend onderzoek volgens een micro-schema dat niet leerplanbepaald is, rekenen zij tot hun taak, waaronder dus diagnostiserend en remediërend onderzoek op relatief kleine deelgebieden). Trouwens ook in het werk van Piaget, Gal'perin e.a. ontbreekt die curriculum-orientatie.

Davydov en zijn medewerkers vormen daarop een uitzondering: in een conceptie als die van 'ontwikkeland onderwijs' past een dergelijke distantie tot het (wenselijk geachte) onderwijs niet. Men heeft echter in de cultuurhistorische school niet veel aandacht aan de opzet en methodologie van het specifiek-construerende onderzoek (of in onze terminologie: ontwikkelingsonderzoek) geschonken. De noodzakelijk geachte analyses (de zogenaamde logische en psychologische analyse) met het oog op de vorming van theoretische begrippen, zijn bij Davydov, wat het rekenwiskundeonderwijs betreft, trouwens uiterst discutabel (Treffers, 1979; Freudenthal, 1983).

Hoe het ook zij, het basisidee van construerend onderzoek, aangezet vanuit algemeen onderwijsleertheoretische hoek, heeft ook in Nederland weerklank gevonden. Maar men kon zich daarbij slechts op één duidelijke 'techniek' baseren, namelijk die van Gagné, dus kwam men al gauw in vaksystematische en sterk leerstofinhoudelijk bepaalde concretisering terech. Gebruikte men Davydovs ideeën als uitgangspunt dan raakte men vaak helemaal het spoor bijster.

In vakdidactische kringen kan men zich zeer wel in Davydovs gedachten over ontwikkelend onderwijs en curriculum-georiënteerd onderzoek vinden. In ieder geval kan men de scheiding die Resnick e.a. tussen ontwikkeling en onderzoek aanbrengen, moeilijk volgen. Indien men namelijk aanvaardt dat de cognitieve ontwikkeling op het terrein van het rekenwiskundeonderwijs mede door het onderwijs zelf wordt bepaald, dan heeft dit tot consequentie dat ook het onderwijs zelf object van onderzoek moet zijn, of juist: dat de meest optimaal of waardevol geachte onderwijsleergangen mede in het ontwikkelingsonderzoek betrokken dienen te worden. En dat betekent weer, dat in het geval van bijvoorbeeld de staartdeling eerst een nieuwe onderwijswerkelijkheid moet worden gecreëerd, om vervolgens binnen die werkelijkheid voortgezet onderzoek te realiseren dat naast belangrijke praktische ook onderwijs-theoretische implicaties kan hebben. Deze kunnen in dit geval betrekking hebben op de betekenis van informele 'kinderlijke' noties en werkwijzen bij het verwerven van meer formele mathematische begrippen en operaties, de geleidelijke schakeling ervan, de mogelijkheden tot reflecteren, schematiseren en verkorten e.d. Indien men nu niet zo'n onderwijswerkelijkheid heeft geconstrueerd waarin kinderen zelf een soort standaard-algoritme kunnen ontwikkelen, dan kan men toch in feite ook geen

diepgravende onderwijsleertheoretische conclusies over die zojuist aangestipte punten trekken ?

We nemen nu enkele citaten van Lesh & Landau (1983) die weergeven hoe men van specifiek onderwijskundige zijde veelal tegen taak- en microproces analyses aankijkt:

'An explanatory model that is sufficient to stimulate students' behaviour on an isolated task may not be sufficient to explain how an idea influences the interpretation and solution of that problem; explanations that correctly predict behavior within a restricted universe of tasks often yield inappropriate responses in a slightly larger universe. For these reasons, the kinds of task analyses that characterize a large share of general (i.e. not subject-matter specific) psychological research are quite different from the idea analyses that characterize most of the mathematics education research reported in this book.'

'On the other hand, behavioral research based on task analyses (e.g. Klahr & Siegler, 1981) often generates models of isolated-task behavior that ignore certain mathematical ideas that a mathematics educator would regard as fundamental to the task.

From a mathematics education perspective, it is implausible that a student's behavior on a proportional reasoning task can be explained using a model that gives no substantive role to the student's concept of proportions. Mathematics educators would want to investigate the variability of a student's behavior across a set of tasks that are characterized by related underlying ideas. In contrast behavioral task analyses are typically based on theoretical perspectives that provide no basis for generating sets of isomorphic tasks, performance models that are parsimonious across isomorphic tasks, or explanations of performance on tasks based on related underlying ideas.'

'Mathematics educators, because of their interest in substantive mathematics content and educational implications, choose to focus on students' ideas as they are used in a variety of task situations.'

In het voorgaande werd kort aangeduid wat de idee-analyse bij de staartdeling inhoudt. Plaatst men deze tegen de achtergrond van met name Resnick's procesanalyse van het cijferen, dan vallen enkele van Lesh & Landau's verschilpunten direct op:

1. Resnick concentreert zich daarbij vooral op het punt van de cognitieve representatie i.c. de betekenis van het gebruik van positiemateriaal in de vorm van Dienes-blokken bij het leren cijferen. De kwestie dat ook 'natuurlijk' positiemateriaal als geld en contextproblemen van groot belang zijn voor de cognitieve representatie blijft volledig buiten haar gezichtsveld: cijferen staat immers per traditie volledig los van het maken van toepassingsproblemen.

2. Vakdidactisch bezien is zo'n isolering echter ongewenst (en terecht, zoals uit de resultaten blijkt). Het cijferen wordt als geheel in beschouwing genomen, geïntegreerd met het maken van toepassingen en met hoofdrekenen. En wat wellicht nog het meeste tref: de ideeën van de kinderen worden serieus genomen. Dat wil zeggen dat ze als aangrijpingspunten voor het onderwijs benut worden, en de voortgaande idee-ontwikkeling (de schematisering en de verkorting van de procedures) wordt er vervolgens mee gestimuleerd. Niet de standaard-algoritme maar het op het kind afgestemde algoritmiseringsproces in samenhang met contextproblemen staat hier centraal.

Te schetsen hoe ontwikkelingsonderzoek op basis van dergelijke idee-analysen precies plaatsvindt of kan plaatsvinden, zou te ver voeren. Kort gezegd, is dergelijk onderzoek als een soort idee-ontwikkeling te karakteriseren welke ongeveer verloopt volgens het Lakatos-model voor heuristisch onderwijs. Voor wat betreft het staartdelen bleek de eerste globale conceptie goed te voldoen. Wel vonden allerlei 'lokale' weerleggingen en correcties plaats met betrekking tot toepassingsproblemen, benodigde vaardigheden, notatiewijzen, en vele subtiele detailkwesties zoals het belang van verwoorden, het niet te snel overstappen naar een verdergaande verkorting e.d. Aanvankelijk lag de nadruk op het ontwikkelen van ideeën, aangezet vanuit het samenwerken met individuele leerlingen. Daarna volgde een fase van curriculum-orientatie: de ontwikkelde leergang werd in de klas beproefd, bijgesteld, beproefd, etc. Naarmate de beoogde leergang meer en meer gestalte kreeg, kwam het accent steeds meer op hypothesevormend, hypothesetoetsend en vergelijkend onderzoek te liggen - eerst met enkele klassen, later met meerdere.

Over de onderzoeksmethoden van dergelijk theorie-vormend en theorietoetsend ontwikkelingsonderzoek is, zoals eerder gezegd, heel weinig gediscussieerd en gepubliceerd, althans wat het macro-curriculumgeoriënteerd onderzoek aangaat. Micro-construerend onderzoek, dat sterk psychologisch gericht is, staat wat dat betreft de laatste tijd zeker wel in de belangstelling (De Corte, 1980; Cobb en Steffe, 1983; Ginsberg e.a., 1983). Veel methodologische kwesties die daarbij aangeroerd worden, met name die over het klinische interview en de rapportage ervan, zijn ook voor macro-ontwikkelingsonderzoek van belang.

Het allerbelangrijkste wat in algemene zin over ontwikkelingsonderzoek kan worden gezegd, is dat het typisch vakdidactisch onderzoek is.

Als Hooymeyers en Lijnse (1981, 134) stellen: 'Als hoofdtak van de vakdidactiek zien wij: het funderen en vernieuwen van het onderwijs in het betrokken schoolvak'..... en Roest onder meer als taak van de vakdidactiek formuleert: 'Ontwikke-

ling, beschrijving en toetsing van vakspecifieke onderwijsleertheorie en van de vakspecifieke didactische werkvormen' (Roets, 1982, 320) dan zal duidelijk zijn dat ook ontwikkelingsonderzoek binnen deze opvattingen van vakdidactiek past.

Gelet op het voorgaande, zou daar nog aan toegevoegd kunnen worden, dat het ontwikkelingsonderzoek zeker niet als afgeleid of toegepast (algemeen) onderwijsleertheoretisch onderzoek beschouwd kan en mag worden, omdat niet de algemene onderwijsleertheorieën als wel de vakspecifieke basisconcepties van doorslaggevende betekenis blijken te zijn.

We komen tot onze slotsom.

Ontwikkelingsonderzoek verricht vanuit een vakdidactische inspiratiebron en gerealiseerd in een samenwerkingsverband van vakspecifiek en algemeen onderwijsleertheoretisch geschoolede mensen biedt grote mogelijkheden indien er in de groep consensus bestaat over het totaal van te gebruiken vakspecifiek bepaalde analyse-, constructie- en onderzoeksmethoden. Algemeen onderwijsleertheoretisch geïnspireerd ontwikkelingsonderzoek daarentegen leidt veelal niet tot vakonderwijs in optima-forma, doch meer tot onderwijs in optima-forma, in de zin van vaksystematisch bepaald onderwijs dat ons als algemeen theoretisch gefundeerd onderwijs wordt voorgespiegeld.

Noten

1. Er is toch zoiets als een natuurlijke verwantschap tussen algemene onderwijsleertheorieën en vakspecifieke basisconcepties. Neem bijvoorbeeld de cumulatieve leertheorie van Gagné. Principieel of louter theoretisch bezien is er geen noodzakelijk verband tussen deze theorie en de basisconceptie van formeel-mechanistisch getint wiskundeonderwijs. Maar feitelijk is deze verbinding er in de praktijk wel degelijk. Het UMAP-project produceerde onder leiding van Gagné kaal, formeel New Math onderwijs van pover gehalte, en ook nog andere (vooral sterk geïndividualiseerde) New Math programma's beriepen zich op Gagné's werk. (Howson, 1981). Nu kan men tegenwerpen dat de ontwikkelaar zich in die projecten hoofdzakelijk tot de drie laagste van de acht leertypen van Gagné bepaalde en dat ze zodoende geen goede operationalisering van zijn theorie bieden, ook niet al was Gagné er blijkbaar zelf bij betrokken. Maar dat is niet in tegenspraak met wat wij stellen. Integendeel. Wij beweren dat er principieel meerdere uitwerkingen mogelijk zijn, maar ook dat er onjuiste concretisering kunnen plaatsvinden. Alleen lokt Gagné's theorie en vooral ook zijn taakanalyse-techniek blijkbaar wel sterk een bepaalde (schrane) wiskundige realisering uit, vooral ook door de voorbeelden die hij zelf in z'n theoretische werk en zijn projecten geeft.

2. Uit onderzoek van Carpenter e.a. (1981) blijkt dat kinderen toepassingsproblemen slechter maken met de zakrekenmachine dan zonder. Dat komt ten dele omdat sommige leerlingen de deling niet (altijd) als zodanig identificeren, en blijkbaar blokkeert het machientje informele, minder verkorte oplossingswijzen.
3. Trouwens ook bij het delen in de ruime zin gezien, komt het onderscheid tussen de genoemde basisconcepties duidelijk tot uiting. Vaksystematisch beschouwd komt delen na de trits van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen. Logisch, zou je zeggen, want delen is de inverse van vermenigvuldigen, dat op zijn beurt weer aan het (herhaalde) optellen is gekoppeld waarvan het aftrekken de inverse operatie is. Maar in de bedoelde niet-vaksystematische ofwel realistische basisopvatting van wiskundeonderwijs die zich meer aan het *verschijnsel* delen en de toepassingen ervan orienteert dan aan de vaksystematiek, is die volgorde helemaal niet zo vanzelfsprekend. Eerlijk delen is immers voor kinderen een reëel en aansprekend fenomeen. Welnu, uitgaande van het eerlijk verdelen van objecten kunnen de relaties meer, minder en is-gelijk geïntroduceerd worden. Via hoeveel meer (minder) komt het aftrekken in beeld, het samennemen van onderdelen leidt tot optellen en het herhaald optellen van gelijke porties tot vermenigvuldigen. Kortom, de hele vaksystematische ordening komt zo op z'n kop te staan. Niet dat het zo zou moeten, maar wel dat het zo kan zijn in die zin, dat de vaksystematiek niet de enige, ja zelfs niet de meest voor de handliggende (psycho)-logische ordening zou leveren. (Voor het breukenonderwijs blijkt de zojuist aangeduide volgorde van eerlijk verdelen, meer-minder, aftrekken, optellen, vermenigvuldigen overigens uitermate effectief (Streefland, 1983).) En zo hoeft bij het cijferen evenmin de formele standaardinvorm tot uitgangspunt gekozen te worden.

Literatuur

- Andersson, B. and Kärrqvist, C. How Swedish pupils, ages 12-15 years, understand light and its properties, *European Journal of Science Education*, 5, 387-403, 1983.
- Carpay, J.A.M. Westeuropese benadering van onderwijs-leerprocessen. In: E.de Corte (red.): *Onderzoek van onderwijsleerprocessen. Stromingen en actuele onderzoeksthema's*, 's-Gravenhage, S.V.O., 28-36, 1982.
- Carpenter, T.P.e.a. Calculators in testing situations; results and implications from National Assessment, *The Arithmetic Teacher*, 28, 34-37, 1981.
- Cobb, P. and Steffe, L.P. The constructivist researcher as teacher and model builder, *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, 95-101, 1983.
- Corte, E.de. Onderzoek met betrekking tot onderwijsleerprocessen anno 1980, *Tijdschrift voor Onderwijsresearch*, 6, 163-174, 1981.
- Davis, P.J. and Hersh, R. *The Mathematical Experience*, Boston: Birkhauser, 1981.
- Davydov, W. *Arten der Verallgemeinerung im Unterricht, Logisch-psychologische Probleme des Aufbaus vom Unterrichtsfächern*, Berlin: Volk und Wissen, 1977.

- Donaldson, M. *Children's minds*, Glasgow: William Collins, 1979.
- Freudenthal, H. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht: Reidel, 1983.
- Gagné, R.M. Some issues in the psychology of mathematics instruction, *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, 7-19, 1983.
- Gal'perin, P.J. Stages in the development of mental acts. In: Cole, M. and Maltzmann, J. (eds.): *Handbook of contemporary soviet psychology*, London: Basic Books, 149-173, 1969.
- Ginsburg, H.P.e.a. Protocol Methods in Research on Mathematical Thinking. In: Ginsburg, H.P. (ed.): *The development of mathematical thinking*, New York: The Academic Press, 7-45, 1983.
- Goddijn, A. *Licht en schaduw*, Utrecht: OW&OC, 1980.
- Hoymayers, H.P. en Lijnse, P.L. Vakdidactiek als onmisbare interdiscipline, *Pedagogische Studiën*, 58, 134-140, 1981.
- Howson, G., Keitel, C. en Kilpatrick, J. *Curriculum development in mathematics*, Cambridge: C.U.P., 1981.
- Klerk, L.F.W. Verslag van het AERA-Congres 1982 te New York, *Pedagogische Studiën*, 59, 519-521, 1982.
- Lakatos, I. *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge: C.U.P., 1977.
- Lesh, R., Landau, M. (eds.). *Acquisition of Mathematics Concept and Processes*, New York: Academic Press, 1983.
- Rengerik, J. *De staartdeling: een geïntegreerde aanpak volgens het principe van progressieve schematisering*, Utrecht: VOU en OW&OC (doctoraalscriptie), 1983.
- Resnick, L.B., Ford, W. *The psychology of mathematics for instruction*, Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 136-156, 1981.
- Resnick, L.B. Syntax and Semantics in learning to subtract. In: Ginsburg, H.P. (ed.): *The development of Mathematical Thinking*, New York: Academic Press, 110-152, 1983.
- Roest, P. Vakdidactieken nader beschouwd, *Pedagogisch Tijdschrift*, 7, 318-322, 1982.
- Schoemaker, G. *Zie je wel*, Utrecht: OW&OC, 1980.
- Schoemaker, G. Sieh dich ganz im Spiegel - Spiegeln mathematisch und optisch. Eine Anregung zu forschend Unterrichten, *Mathematik lernen*, 1984 (in druk).
- Streefland, L. *Makro-structurele verkenningen*, Utrecht: IOWO, 1980.
- Streefland, L. *Aanzet tot een nieuwe breuken didactiek volgens Wiskobas*, Utrecht: OW&OC, 1983.
- Treffers, A. (ed.). *Cijferend vermenigvuldigen en delen*, Utrecht: IOWO, 1979.
- Treffers, A. Basialgoritmen in het wiskunde-onderwijs op de basisschool, *Pedagogische Studiën*, 59, 471-483, 1982.
- Treffers, A. Geïntegreerd cijferen volgens progressieve schematisering, *Pedagogische Studiën*, 348-360, 1983.