De rol van representaties bij het oplossen van problemen

A.van Streun
Mathematisch Instituut
Rijksuniversiteit Groningen

Summary
As a result of a change in the fourth-form mathematics curriculum of the secondary school many mathematics teachers are supposed to teach useful applications of mathematics to real problems.
What are the experiences in the research project 'Heuristic Education of Mathematics'? How can the teacher stimulate and motivate the non-specialist students? Which applied problem-solving abilities should be developed?

The function of four representations is discussed:
- the verbal description of a real situation
- the grafical representation
- the numerical representation
- the analytical representation.

Problem transformation could often be characterized as translation from one representation to another representation.

Het project 'Heuristisch wiskunde-onderwijs'

Het project 'Heuristisch wiskunde-onderwijs' is opgezet door de werkgroep voor de didactiek van de wiskunde van het Mathematisch Instituut in Groningen. De projectleider is A.van Streun, externe begeleiders zijn A.D.de Groot en M.van der Kamp. De probleemstelling is als volgt samen te vatten:

> Is het mogelijk om heuristisch wiskunde-onderwijs te ontwikkelen, waarin leerlingen beter leren nieuwe problemen met behulp van wiskunde op te lossen, zodat de transfer van verworven wiskundige kennis en vaardigheden naar nieuwe probleemsituaties binnen de wiskunde en daar buiten wordt verbeterd?

In de cursussen '82-'83 en '83-'84 wordt het ontwikkelingsonderzoek in vier klassen 4-v.w.o. uitgevoerd, waarbij systematisch wordt onderzocht wat de moeilijkheden zijn van de leerlingen en wat de effecten zijn van het onderwijs. Omdat het project zich afspeelt op de grens van het 'traditionele' wiskunde-onderwijs in de onderbouw van het v.w.o. en een meer op toepassen gericht wiskunde-onderwijs in de bovenbouw van het v.w.o. (het vak wiskunde A) wordt veel aandacht besteed aan het leren toepassen van wiskunde. Met name leerlingen die alleen het vak wiskunde als exact vak in hun vakkenpakket hebben, staan in dit artikel centraal.

Interne en externe representaties

Zoals elder is beargumenteerd (Van Streun 1982, 1983) is het onderzoek naar de ontwikkeling van de mentale voorstelling, die een oplosser van een probleemsituatie heeft, bijzonder interessant voor de didactiek van het leren oplossen van problemen. Die interne mentale representatie van de oplosser omvat het geheel aan ideeën over de situatie en is niet rechtstreeks toegankelijk voor onderzoek. Het klassieke onderzoek naar de ontwikkeling van de "total problem conception' (De Groot, 1981) bij schakers of naar de (psychologische) ontwikkeling van het probleem (Duncker, 1935) maakte gebruik van hardop-denken-protocollen. Paige en Simon (1966) interviewden leerlingen na het oplossen van ingeklede vergelijkingen om zo een externe representatie te kunnen reconstrueren van een interne representatie. Oplossers, die een visueel beeld van de probleemsituatie hadden, slaagden er beter in de voorgelegde opgaven op te lossen dan anderen, die geen visueel beeld bezaten. In het onderzoek naar oplossingsprocessen bij eerstejaars studenten wiskunde (Van Streun, 1983) is eveneens gebruik gemaakt van de analyse van hardop-denken-protocollen en interviews achteraf voor de reconstructie van de ontwikkeling van de mentale voorstelling van de oplossers.

In dit artikel wordt gerapporteerd uit het ontwikkelingsonderzoek in 4-vwo ('83-'84). Gedurende het gehele schooljaar zijn van 120 leerlingen de schriftelijke overhoringen en proefwerken geanalyseerd op oplossingswegen. Er zijn interviews afgenomen, leerlingen hebben hun reacties op het eigen werk opgeschreven en hun opvattingen over wiskunde en het wiskunde-onderwijs kenbaar gemaakt. De rol van verschillende representaties bij het oplossen van problemen is in kaart gebracht met het oog op de bijstelling van het lesmateriaal voor de definitieve versie in '84-'85. Met name de gebleken en door leerlingen gerapporteerde blokkades en de manier waarop leerlingen die blokkades overwonnen, hadden bijzondere aandacht.

De vier representaties

De opgaven waar het hier om gaat zijn allemaal geformuleerd in termen van een min of meer herkenbare of voorstelbare situatie. Ze kunnen als toepassingen van functies en differentiaalrekening worden geklassificeerd. Wat dat betreft vertonen die opgaven overeenkomsten met de bekende en beruchte redactie-opgaven en ingeklede vergelijkingen. In de terminologie wordt geen strikt onderscheid gemaakt tussen opgaven en problemen, omdat de glijdende schaal van reproduceren van oplossingen tot het oplossen van problemen verschilt van individu tot individu (Van Streun, 1983). Onze aandacht gaat uit naar de rol van de representaties tijdens het oplossingsproces en naar de mate waarin een vertaling naar een andere representatie helpt bij het overwinnen van blokkades.

De in de paragraaftitel bedoelde vier representaties kunnen het beste aan de hand van een voorbeeld worden toegelicht.

Een probleem

> Een trein vertrekt van Parijs en Lyon en houdt een constante snelheid van 120 km/uur aan.
> Een supersnelle trein vertrekt in dezelfde richting een kwartier later en rijdt met een constante snelheid van 200 km/uur.
> Op welke afstand van Parijs zal de supersnelle trein de eerste trein inhalen?

De oplosser kan bij deze gegeven situatieschrijving (S) al redenerend in de situatie tot een oplossing komen. Die oplossing is een numeriek antwoord (N), namelijk het aantal kilometers van Parijs.

S —— S —— N

In dit voorbeeld kan zo'n redenering als volgt verlopen:
De supersnelle trein heeft bij vertrek een achterstand van $\frac{1}{4}.120=30$ kilometer.
Per uur haalt hij 80 km in, dat is per minuut 80/60 = 4/3 km. Na 30 : 4/3 = 22 minuut passeert de supersnelle trein de eerste trein.
Dat is op 22 x 200/60 = 75 km van Parijs.

De oplosser kan ook een tabel maken en door systematisch getallenvoorbeelden door te rekenen tot een oplossing komen.

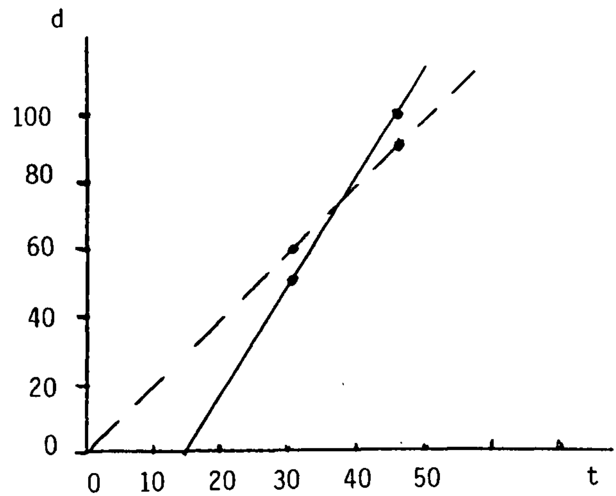
S —— N —— N

Bijvoorbeeld:

tijd in minuten	0	15	30	45	40	35	37
afstand eerste trein	0	30	60	90	80	70	75
afstand tweede trein	0	0	50	100	$83\frac{1}{3}$	$66\frac{2}{3}$	75

De oplosser kan een aantal getallenvoorbeelden doorrekenen, een grafische voorstelling maken en vervolgens uit de grafiek het numerieke antwoord afleiden.

S —— N —— G —— N



De oplosser kan ook bij de gegeven situatie een analytische representatie (een vergelijking, een functievoorschrift, een formule) maken, waarmee de numerieke oplossing wordt bepaald.

S —— A —— N

Eerste trein: S=120t, t in uren, S in km.
Tweede trein: S=200(t-1/4), t in uren, S in km.
De tweede trein haalt de eerste in als 120t=200(t-1/4).
Dat is op tijdstip t = 5/8 en na 120.5/8 = 75 km.

Vier A-leerlingen

Wij volgen nu de ontwikkeling van vier leerlingen met een A-pakket (alleen wiskunde als exacte vak) in 4-vwo tijdens de cursus ´83-´84. Het zijn Sonja, Mieke, Herman en Wim. De eerste drie zijn met een onvoldoende voor wiskunde overgegaan naar 4-vwo, Wim had een eindcijfer 7 in 3-vwo. In klas 3 hebben zij in het kader van de keuzebegeleiding evenals hun klasgenoten een vragenlijst van het C.I.T.O. ingevuld over hun houding t.o.v. het wiskunde-onderwijs. (Kremers,

1980, 1981). Mieke scoorde extreem negatief op de schaal "Plezier in wiskunde(lessen)". Ook Sonja scoorde negatief vergeleken met de grote middenmoot. Het was haar minst geliefde vak. Sonja, Mieke en Herman benadrukten alle drie de moeilijkheid van en de angst voor het vak sterker dan de grote groep van leerlingen. Alleen Herman vond het vak wiskunde redelijk relevant, de beide meisjes en Wim zagen het anders. T.a.v. de schalen "Plezier" en "Angst" was Wim een middenmoter.
Tesamen zijn zij redelijk representatief voor de verscheidenheid van de leerlingen, die met een A-pakket in 4-vwo het vak wiskunde volgen. Uit de vier projectklassen in de cursus ´83-´84 zijn zo nog wel tien andere viertallen te lichten, waarin soortgelijke oplossingsprocessen en ontwikkelingen zijn op te merken.

<u>De electriciteitsrekening</u>

Hoewel de eerstegraads functies in klas 2- en 3-vwo uitgebreid aan de orde komen, bleek in het eerste projectjaar (´82-´83) de aansluiting naar formules en (eerstegraads)functies die een realistische situatie beschrijven, bijzonder moeizaam te verlopen. Daarom werd lesmateriaal ontworpen, waarin het functiebegrip en de interpretatie van analytische modellen (formules, functievoorschriften) met o.a. vaste kosten en variabele kosten expliciet aan de orde kwamen. In het eerste (diagnostische) toetsje over eerstegraads functies werd onderzocht in hoeverre de wiskundige (analytische) technieken (bekend uit de onderbouw en opnieuw opgefrist) ook functioneerden bij S-opgaven.

Vraag 3 toetst de techniek van het opstellen van een functievoorschrift van een eerstegraads functie als de coordinaten van twee punten van een lijngrafiek zijn gegeven. Die stap

N —— A

ging bij alle vier leerlingen feilloos.

Dezelfde techniek kan bij de vierde vraag worden gevolgd:

> Bij een verbruik van 4974 kWh voor het jaar 1982 bedroeg mijn electriciteitsrekening f 1275,53. Mijn buurman betaalde bij een verbruik van 3360 kWh het bedrag van f 875,60.
> Wat zijn voor dat jaar het vastrecht en de prijs per kWh? Welk functievoorschrift heeft het electriciteitsbedrijf gebruikt?

In de leerlingentekst zijn dit type kostenberekeningen (een vast bedrag en een lineair variabel deel) besproken. De interpretatie van formules in termen van de situatie (vraag 1) en het opstellen van het functievoorschrift als de vaste kosten en de variabele kosten per eenheid zijn gegeven (vraag 2), worden goed beheerst. Maar deze vierde opgave blijkt voor veel leerlingen een probleem te zijn. Er is een probleemtransformatie nodig om uit de gegevens naar de structuur van vaste en vaste kosten te komen. Of een herkenning van de overeenkomst met vraag 3, namelijk dat er gewoon twee getallenparen zijn gegeven.

Wim herkent die analogie: S — N — A — S
Hij licht de twee getallenparen eruit, past de techniek uit opgave 3 toe om de formule op te stellen en interpreteert die formule in termen van de situatie.

Mieke en Herman delen rechtstreeks de twee bedragen door het aantal kWh en weten niet wat ze met hun uitkomsten moeten doen. Sonja berekent wel de verschillen in kWh en gld. maar komt niet verder. De aanpak van Wim komt veel voor bij leerlingen met een B-pakket. De meeste leerlingen met een A-pakket komen niet verder dan Mieke, Herman en Sonja.

De conclusie is wel duidelijk. Beheersing van de afzonderlijke stappen N — A, A — S (getoetst in de vragen 1 en 3) is niet voldoende voor het kunnen aanpakken van een probleem waarvan de onderliggende structuur eerst moet worden herkend. In het aansluitende onderwijs is vooral benadrukt dat de oplossingsweg van Wim en van de meeste B-leerlingen niet de enige mogelijkheid is om zo'n probleem aan te pakken. Ook de oplossingswegen:

S — S — N , S — N — G — N

worden aanbevolen.

Het eerste proefwerk
Het proefwerk over eerstegraads functies, enkele weken later, wordt goed gemaakt. Interessant is nu hoe onze vier leerlingen de opgaven hebben uitgewerkt. De eerste opgave gaat over de kostenvergelijking van een auto B met een benzinemotor en een auto D met een dieselmotor, als de vaste kosten en de variabele kosten per kilometer zijn gegeven. De vierde en laatste opgave gaat over de kosten van een reparatie, te splitsen in voorrijkosten en uurloon. Twee eindbedragen en de reparatietijden zijn gegeven.

Wim gaat bij de autokosten rechtstreeks over op de analytische representatie en pakt daarmee de vraag aan over het aantal kilometers, waarbij de totale kosten gelijk zijn. Hij gebruikt zijn functievoorschriften eveneens voor het opstellen van een tabel, waarna hij de (gevraagde) grafieken tekent. Zowel met een (analytische) ongelijkheid als met de grafieken beantwoordt hij de vraag bij welk aantal kilometers de auto D voordeliger is dan auto B. Ook bij de reparatiekosten vertaalt Wim de opgave naar een analytische representatie (zoals bij de electriciteitsrekening) en beantwoordt vervolgens de vragen. Wim prefereert de aanpak S —— A en kan er goed mee uit de voeten. Bij dit type opgaven.

Sonja werkt bij de autokosten ook met de formules, maar gebruikt de grafiek voor het vergelijken van de kosten. Aan de laatste opgave is ze niet toegekomen.

Mieke werkt bij de autokosten eveneens met vergelijkingen en berekent zo voor welk aantal verreden kilometers de kosten gelijk zijn. Ze verliest evenwel de situatie uit het oog, als ze grafieken gaat tekenen. Ze werkt n.l. met 0,1,2,3 km per jaar en haakt vervolgens af. Bij de reparatiekosten komt ze er wel langs de analytische weg uit.

Herman heeft uit het voorafgaand onderwijs begrepen dat het niet beslist hoeft met formules en lettervariabelen. (Voor hem en voor de meeste leerlingen was alleen dat werken met x, a, y, b enz. wiskunde). Bij de eerste opgave merkt hij op dat de kosten per kilometer f 0,20 verschillen en de vaste kosten f 1000,--. Na 5000 km is dat verschil ingehaald. Bij meer dan 5000 km is auto D dus voordeliger. Bij de reparatiekosten deelt hij het verschil van de totale geldbedragen door het verschil in reparatietijden om het uurloon te bepalen. Analytische representaties gaat hij uit de weg. Zijn aanpak is te karakteriseren door S —— S —— N.

<u>De maximale oppervlakte</u>

Na de inleiding in de differentiaalrekening volgen de toepassingen op maximum/minimum-problemen. Een proefwerk half december bevat de volgende "kraker":

> Van een rechthoek ABCD is de zijde AB = 10 en de zijde AD = 6. Op AB ligt het punt P, op BC ligt het punt Q, op CD ligt het punt R en op DA ligt het punt S zo dat AP = CQ = CR = AS.
> Hoe lang is AP als de oppervlakte van de vierhoek PQRS maximaal is?
> Wat is die maximale oppervlakte?

Wim en Sonja stellen AP = x en drukken de oppervlakte van PQRS uit in x. Waarna zij het maximum van de oppervlaktefunctie bepalen.

S —— A —— N —— S

Sonja schrijft achteraf: "Dit wist ik wel. Gewoon door logisch denken. Terwijl ik dat bij andere sommen niet kan. Hardstikke goed van mij!"

Herman kan er kop noch staart aan vinden. "Naar mijn neing kon je bijvoorbeeld de afstand van A naar P niet tekenen, omdat je niet wist of hij daar wel lag. Hij kan ver en dichtbij liggen. Ik heb hem daarom niet getekend".

Mieke is somber gestemd. "Direct in het begin al wist ik wat ik moest doen. Ik heb die sommen nog nooit gesnapt. Een volgende keer zou ik vast nog niet weten, wat ik moest doen".

De eerste opgave vroeg o.a. naar de uiterste waarden van de functie f met $f(x) = 1/4x^4 - 5/2x^2 + 9/4$. Mieke werkt dat feilloos uit evenals Wim. Sonja en Herman verdwalen in het technische rekenwerk.

Voor grote groepen leerlingen blijken dit type toepassingen nog moeilijk. Met name de eerste stap, de vertaling van een situatie naar een analytische representatie. Een probleemaanpak wordt besproken en op papier vastgelegd.

Het bioscoopbezoek
Het volgende proefwerk bestaat uit twee toepassingen.
De eerste opgave is:

> De bioscoopeigenaar in Adorp ziet de bezoekersaantallen de laatste jaren dalen. Op het ogenblik komen er bij een toegangsprijs van f 12,-- ongeveer 170 bezoekers. Uit de gegevens van concurrerende bioscopen meent hij te kunnen opmaken dat bij een lagere toegangsprijs het aantal bezoekers zal toenemen.
>
> Neem aan dat bij iedere gulden prijsverlaging het bezoekersaantal met 30 zal toenemen.
>
> a. Onderzoek of de inkomsten toenemen als de prijs een gulden lager wordt
> b. Stel dat de prijs met x gulden dalt. Druk het bezoekersaantal uit in x.
> c. Schrijf ook de opbrengst R (de totale inkomsten) als functie van x.
> d. Bereken de prijs, waarbij de opbrengst R maximaal is (afgerond op kwartjes).

Wim noemt niet de prijsverlaging x, maar de prijs zelf. Het bezoekersaantal wordt dan $170 + (12 - x).30 = 530 - 30x$ en de opbrengst $R(x) = -30x^2 + 530x$.

S —— A —— N —— S

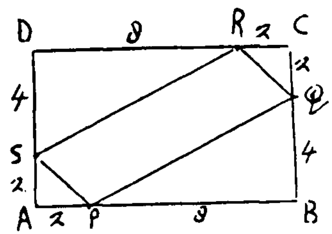
Met nieuw zelfvertrouwen gaat ook Sonja haar eigen weg. Zij berekent twee getallenparen (12, 170) en (11, 200) van de functie, die het

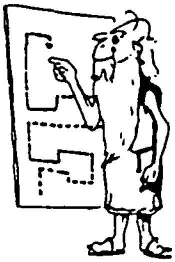
Een probleemaanpak.

ORIENTEREN.

Waar ben ik?
Waar naar toe?

Zonder tekening begin ik niets. Een rechthoek ABCD met AB = 10 en AD = 6. Punt P op AB. Punt Q op BC. Hoe? De lengte van AP is die van CQ. En nu punt R en dan punt S. Nog eens goed lezen of het klopt, want als de tekening niet deugt, dan gaat de hele opgave de mist in. Wat is die PQRS voor een figuur? Geen ~~rechthoek~~ ..... De oppervlakte is niet met lengte keer breedte uit te rekenen.





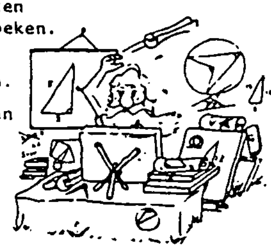
TERREINVERKENNEN.

Het zal wel weer met x en O(x) moeten, maar dat is me voorlopig nog te ingewikkeld. Eerst maar eens een getallenvoorbeeld doorrekenen. B.v. AP = 2, dan is PB = 8 en AS = CQ = CR = 2. BQ = 4 = SD en RD = 8. Waar moet ik ook al weer naar toe? De oppervlakte van PQRS wordt gevraagd. Even de getallen in de figuur er bij zetten. Wat weet ik nu van de oppervlakten van de driehoekjes? Die kan ik berekenen, want het zijn halve rechthoeken. De totale oppervlakte is ook te berekenen. Dat wordt:

$$\text{opp. APS} = \text{opp. CRQ} = \tfrac{1}{2}.2.2. = 4 \text{ en opp. PBQ} = \text{opp. SRD} = \tfrac{1}{2}.8.4 = 16.$$

Nu is de oppervlakte van PQRS natuurlijk gelijk aan de oppervlakte van ABCD verminderd met de oppervlakte van die driehoekjes. Dus:

$$\text{opp. PQRS} = 6.10-2-2-16-16 = 24.$$

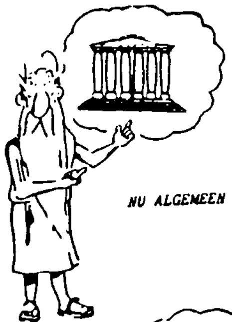


EEN PLAN MAKEN.

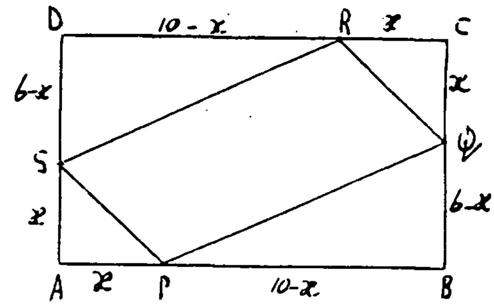
Het idee voor de oplossing bij een gegeven lengte van AP is nu wel duidelijk. Nog een getallenvoorbeeld doorrekenen? Nee, ik denk dat ik het nu wel rechtstreeks met AP = x kan proberen. Dat geeft dan een functievoorschrift voor de oppervlakte. Waarna ik het maximum kan bereken.

meer voorbeelden

AAN DE SLAG.



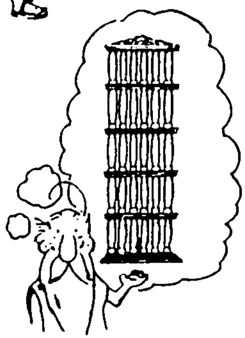
Neem $AP = x$. Even kijken naar het getallenvoorbeeld. $AP = 2$ en $PB = 8$, dat is vier maal zo groot. Dus $PB = 4x$. Klopt dat wel? Samen zijn AP en PB 10 ..... Dan is $5x = 10$ en x is altijd 2 ..... Hoe kwam ik ook al weer aan die $PB = 8$? Dat was $10 - 2$, natuurlijk $PB = 10 - x$!



Ook de andere lengten in de figuur er bij schrijven. Wat is het plan ook al weer? Opp. $APS = \frac{1}{2}x^2$ en opp. $QCR = \frac{1}{2}x^2$. Samen hebben ze opp.x^2. Opp. $PBQ = \frac{1}{2}(10-x)(6-x) =$ $=$ opp.SRD, samen $(10-x)(6-x)$. En opp.$PQRS =$ $= 60-x^2-(10-x)(6-x) = 60-x^2-60-10x-6x-x^2 =$ $= -2x^2-16x$. Dus $O(x) = -2x^2-16x$.

Nog even controleren, want je vergist je zo gemakkelijk met al die min-tekens. Als $AP = x = 2$ moet er 24 uitkomen.

$O(2) = -8-32 = -40$. Het klopt niet! Even narekenen.....



Oh ja, met die haakjes gaat het mis.

$O(x) = 60-x^2-(60-10x-6x+x^2) =$
$= 60-x^2-60+16x-x^2 = -2x^2+16x$. Controleren geeft $O(2) = -8+32 = 24$, het klopt.

Wat is er ook al weer gevraagd? Oh ja, voor welke x is $O(x)$ maximaal. Dat kan met het tekenschema van de afgeleide. Maar $O(x)$ is een eenvoudige tweedegraads functie, waarvan de top van de grafiek snel kan worden berekend. Een plaatje: $O(x) = -2x^2 + 16x = -2x(x-8)$. Nulpunten voor $x = 0$ en $x = 8$, de top ligt dan bij $x = 4$. Zo klaar.....

TERUGBLIK.

De vraag beantwoord? Nee, de maximale oppervlakte nog. Die is $O(4) = 32$. En in het vervolg niet vergeten de verschillende stappen goed te controleren!

bezoekersaantal vastlegt, uitgedrukt in de prijs. Daarna past zij de analytische techniek toe voor het opstellen van de eerstegraads functie. Dat levert haar uiteindelijk eveneens $R(x) = -30x^2 + 530x$.

S —— N —— A —— N —— S

Herman verwoordt eerst de situatie: "Als de prijs met x gulden daalt, dan stijgt het bezoekersaantal met 30x. Voor de opbrengstfunctie komt hij tot

$$R = 12 - x = 170 + 30x$$

Hij vertrouwt het niet en herinnert zich de probleemaanpak. Eerst maar eens een tabelletje.

toegangsprijs	bezoekersaantal	inkomsten
f 12,--	170	f 2040,--
f 11,--	200	f 2200,--
f 10,--	230	f 2300,--
f 9,--	260	f 2340,--
f 8,--	290	f 2320,--
f 7,--	320	f 2240,--
f 6,--	350	f 2100,--
f 5,--	380	f 1900,--

Dan opschrijven wat er gebeurt:

opbrengst = prijs maal bezoekersaantal

$$R(x) = (12 - x).(170 + 30x)$$

(c) S —— N —— S —— A —— N —— S

Mieke komt tot een prijs (12 - x) en een aantal bezoekers (170 + 30x). Ook zij maakt net zo'n tabel als Herman, maar bij haar functioneert die niet als hulp bij het opstellen van R(x). Zij blijft steken in:

$$R = 12 - x = 170 + 30x$$

<u>Nog eens de vier leerlingen</u>

Wim is met redelijk goede resultaten voor het vak wiskunde in 4-vwo binnen gekomen. Zowel met de wiskundige methoden, als met de toepassingen kan hij goed uit de voeten. Zijn aanpak bij toepassingen vertoont veel overeenkomsten met die van de groep B-leerlingen. Snel een variabele invoeren, een formule of een functievoorschrift opstellen en dan een analytische methode er op loslaten.

S —— A

Sonja ontdekt na enige maanden, dat zij met logisch denken - zoals zij dat zelf omschrijft - een heel eind komt. Met de goede resultaten stijgen ook het plezier en het zelfvertrouwen.

Herman blijft zich nog vaak verslikken in het technische rekenwerk. Maar bij problemen, die hij zich kan "voorstellen" houdt hij de goede koers. Verwoorden van de handelingen bij het uitwerken van een voorbeeld en het maken van tabellen helpen hem daar bij. Als hij het zonder "wiskunde" af kan (zonder analytische uitdrukkingen), dan zal hij het niet laten.

S → N —— A —— N

S → S —— N —— S

Mieke memoriseert uitstekende de algoritmische technieken en voert ze zorgvuldig uit. Bij een kleine variatie in de vraagstelling tast ze in het duister. Omdat toepassingen oppervlakkig beschouwd allemaal van elkaar verschillen kan ze de wiskundige essentie er niet uit halen. Die problemen blijven voor haar moeilijk. Zij probeert zich steeds te herinneren hoe een opgave moet worden aangepakt. En dat werkt bij toepassingen niet zo best.
Bij de revisie van dit artikel (zomer 1985) is intussen bekend hoe het deze leerlingen in klas 5-vwo bij het vak wiskunde-A is vergaan. Wim en Sonja doen het uitstekend en haalden hoge cijfers voor wiskunde-A. De technieken blijven Herman opbreken, zodat zijn rapportcijfers rond de grens onvoldoende-voldoende zweven. Mieke scoort op de technische proefwerken nog steeds redelijk. Maar redt het daarmee niet. Ook bij de zaakvakken blijkt het memoriseren niet meer voldoende.

Conclusie

Het gebruiken en toepassen van wiskunde in "realistische' probleemsituaties, doet een beroep op de vaardigheid flexibel te kunnen switchen van de ene probleempresentatie naar de andere. Een vaardigheid, die in klas 4-vwo nog helemaal moet worden ontwikkeld, omdat in het gebruikelijke wiskunde-onderwijs nagenoeg uitsluitend de overgang van de analytische representatie naar de numerieke of grafische aan bod komt. Bij de besproken klasse van problemen gaat het om probleemtransformaties vanuit een situatiebeschrijving naar een analytische representatie (een vergelijking, een formule, een functievoorschrift), waarop analytische methoden (algoritmische procedures) kunnen worden toegepast, die tot een oplossing leiden.

Sommige leerlingen (zoals Wim en veel B-leerlingen) slagen er binnen enkele weken in om die probleemtransformatie rechtstreeks en snel uit te voeren. Met name de leerlingen, die in de onderbouw al veel moeilijkheden ondervonden in het gangbare wiskunde-onderwijs (zoals Sonja, Mieke en Herman), slaan helemaal dicht. Zij weten niet hoe ze moeten beginnen. Een bekende ervaring bij b.v. ingeklede vergelijkingen. Uitleg helpt hen niet. Het invoeren van een (letter) variabele heeft voor hen geen betekenis. De blokkade is volledig.

Het aanreiken en stimuleren van een heuristisch gebruik van andere probleemrepresentaties bleek veel van die leerlingen te helpen. "Eerst maar eens een tabel maken". "Eerst maar eens opschrijven wat er precies aan de hand is." "Eerst maar eens een voorbeeld doorrekenen." "Even tekenen." De blokkade vervalt, de motivatie neemt toe. Dankzij de "omwegen" van de numerieke en grafische representaties ontwikkelen zij hun voorstelling van de situatie. Wat hen ook in staat stelt een adequate analytische representatie van de probleemsituatie te maken. De vraag "Mag dit ook in wiskunde?" wijkt voor het gevoel "Zo kan ik het ook."

De verschillen tussen de leerlingen blijven natuurlijk. Uit de literatuur (Krutetskii, 1976) is voldoende bekend dat de mensen verschillen in hun bekwaamheid om <u>visuele,</u> <u>numerieke</u> <u>of</u> <u>analytische</u> methoden toe te passen.

De <u>attitude</u> t.o.v. het leren (van wiskunde) en het oplossen van problemen blokkeert leerlingen, zoals Mieke, in hun ontwikkeling. Leren, dat is memoriseren hoe iets moet. Je moet zien, hoe een probleem moet worden aangepakt. Als je het niet ziet, als je je niet herinnert hoe het moet, dan ben je weg. Die ideeën van leerlingen over leren blijken soms moeilijk beinvloedbaar.

<u>Het onderwijskundig belang</u>

In het wiskunde-onderwijs komt steeds meer aandacht voor het toepassen van wiskunde. Met name de vertaling van een realistische situatie naar een wiskundig model staat centraal in die "toepassingsgerichte" wiskunde. Bij de besproken klassen van problemen is dat een analytisch model. In het gehele voortgezet onderwijs haken veel leerlingen af op die analytische representaties, kenmerkend voor een belangrijke wiskundige aanpak.

Het uiteen rafelen van de oplossingswegen van leerlingen in de verschillende vertalingen van de ene probleemrepresentaties naar de andere maakt duidelijk waar precies de moeilijkheid zit. (Hier bij de stap van S naar A). Het onderwijzen van heuristische probleemtransformaties in de vorm van "omwegen".

S —— N —— A , S —— N —— G —— A , S —— S —— A ,

lijkt meer leerlingen de weg naar het zelf opstellen van een wiskundig (analytisch) model te openen.
In de definitieve leerlingentekst van het project wordt de genoemde probleemaanpak ingebed in de totale begripsvorming. Functie en afgeleide functies worden gerepresenteerd door verbale situatiebeschrijvingen, visuele (grafische) representaties, tabellen en analytische voorschriften. De leerlingen kunnen ervaren dat zij bij de aanpak en problemen dan weer de ene dan weer de andere representatie kunnen gebruiken. Terwijl zij geregeld kunnen kiezen uit verschillende mogelijkheden. (Deze leerlingentekst is terug te vinden in het boek voor klas 4-vwo van de nieuwe wiskundemethode Wiskunde Lijn, in '85-'86 verschenen). In de experimentele fase van het project ('84-'85) worden de leereffecten van de onderwijsconditie met deze methodische benadering (het projectmateriaal) vergeleken met andere onderwijscondities. Onderzocht wordt of de leerlingen uit de projectconditie meer succes boeken bij transferopgaven en of dat komt doordat die leerlingen meer gebruik maken van de in dit artikel besproken heuristische methoden.

Literatuurverwijzing
In de publicaties uit 1982 (A.v.Streun, 1982a, 1982b) wordt de relevante onderzoeksliteratuur besproken. De formulering van oplossingswegen in termen van representatie is ontleend aan het recente onderzoek in de cognitieve psychologie. Veel heuristieken van Polya zijn ook te formuleren in deze terminologie.

Literatuur

Duncker, K. *Zur Psychologie des produktiven Denkens*, Berlin: Springer, 1935.

Groot, A.D.de. Thought and Choice in Chess. In: N.H.Frijda en A.D.de Groot, Otto Selz, *His Contribution to Psychology*, Den Haag: Mouton, 1981.

Kremers, E.J.J. Affectieve doelstellingen in het onderwijs: exploratie van een probleemgebied, *Pedagogische Studiën, 57* 87-105, 1980.

Kremers, E.J.J. "De wiskunde-attitudeschaal": een voorbeeld van een instrument voor het evalueren van affectieve doelstellingen, In: P.Weeda (red.), *Aspecten van leerplanevaluatie*, Den Bosch: Malmberg, 1981.

Krutetskii, V.A. *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*, Chicago: University of Chicago press, 1976.

Paige, J., Simon, H.A. Cognitive processes in solving algebra word problems, In: B.Kleinmuntz, *Problem solving: research, method and theory*, New York: John Wiley, 1966.

Streun, A.van. Heuristisch wiskunde-onderwijs, *Pedagogische Studiën, 59*, 7/8, 317-333, 1982a.

Streun, A.van. *Het project "Heuristisch wiskunde-onderwijs"*, Groningen: Mathematisch Instituut, 1982b.

Streun, A.van. De relatie tussen kennis en heuristische methoden, In: G.de Zeeuw, W.Hofstee, J.Vastenhouw, *Funderend onderzoek naar het onderwijs en onderwijsleerprocessen*, Lisse: Swets en Zeitlinger, 1983.