

Metaforen als taalkundig hulpmiddel bij het leren van wiskunde

J. van Dormolen,
Pedagogisch Didactisch Instituut voor de Lerarenopleiding
Rijksuniversiteit Utrecht.

Our failure to acknowledge the acts of knowing and learning is analogous to the Victorian attitude toward sex. One cannot develop mathematical conception without engaging in the torrid act of learning. There is no such thing as immaculate conception! (Kaput, 1979)

Summary

In mathematics and in mathematics education people use many words and expressions, originating from non-mathematical contexts. Searle views a metaphor as a relation between word (or sentence) meaning and speaker's meaning. With this model the author analyses difficulties, that can occur when metaphors are used in mathematics education, although they are indispensable for the learning of new concepts. In a subsequent article some cases will be further analyzed.

Inleiding

Dit artikel handelt over het gebruik van overdrachtelijke taal in het wiskunde-onderwijs, in het bijzonder over metaforen. In deze inleiding geef ik globaal de plaats aan, die metaforen in de communicatie van wiskundige begrippen inneemt.

Bij het leren van wiskundige begrippen bedienen leraar en leerling zich van wiskundige vaktaal. Kemme (1984) heeft al gewezen op de bijzondere plaats van de wiskundige vaktaal tussen andere vaktalen. Een van de eigenschappen daarvan is de hoge mate van ondubbelzinnigheid. De lezer of toehoorder (de ontvanger) weet precies wat de spreker of schrijver (de zender) bedoelt. Woorden en uitdrukkingen hebben in de wiskundige vaktaal, binnen een tevoren overeengekomen wiskundige context, een eenduidige betekenis. Die betekenis is bekend aan zender en ontvanger. (De zender hoeft niet noodzakelijk de leraar te zijn, en de ontvanger niet noodzakelijk de leerling. De rollen kunnen ook

omgekeerd zijn. Zo worden de woorden in dit artikel overal bedoeld.)

Wie zich met onderwijs bezighoudt weet, dat de praktijk anders is. Dat kan ook niet anders in een onderwijs-leersituatie (1). De leraar kan zich niet beperken tot wiskundige vaktaal, omdat de leerling niet van alle woorden en uitdrukkingen (kortweg: taaltkens), die aan de orde moeten komen de betekenis kent. En veel taaltkens zijn dan niet in de vaktaal, bijvoorbeeld door middel van een definitie, aan de leerlingen over te dragen. Bijvoorbeeld (in alfabetische volgorde) woorden als: associatief, axioma, definitie, even en oneven, grondtal, integraal, marginaal, paradox, poollijn, translatie, variabele, veelhoek.

De leraar die de leerling een nieuw taaltken wil leren, kan in een aantal gevallen een beroep doen op de aanwezige kennis van wiskunde bij die leerling. Bijvoorbeeld door elementen uit die kennis te nemen en die tot voorbeeld van het nieuwe begrip te verklaren. Zoals in:

"6 kun je door 2 delen en daarom noemen we 6 een even getal. Ook 14 kun je door 2 delen en daarom is 14 ook een even getal."

Of:

"De figuren die je daar ziet noemen we rechthoeken"

Het leerproces kan dikwijls nog geholpen worden door non-voorbeelden uit de kennis van de ontvanger te tonen:

"27 is niet deelbaar door 2 en daarom is 27 niet een even getal."

Of:

"Deze figuren zijn wel vierhoeken, maar geen rechthoeken."

(Zie bijvoorbeeld Ausubel & Robinson, 1969; Van Dormolen, 1974; Van Dormolen, 1981; Freudenthal, 1978; Van Hiele, 1973; Jakobson & Halle, 1956; Skemp, 1979 en vele anderen.)

Ook als zender zal een leerling dikwijls gebruik maken van taaltkens, die niet tot de vaktaal behoren om de eenvoudige reden, dat de bedoeling door de leerling niet in de vaktaal kan worden weergegeven.

Als de zender zich niet in de vaktaal verstaanbaar kan maken, moet een beroep gedaan worden op niet-wiskundige taal, die de ontvanger wel verstaat.

De vaktaal neemt veel taaltkens over uit de niet-vaktaal. Dikwijls behouden ze daarbij hun oorspronkelijke betekenis, bijvoorbeeld bij woorden als bekend, horizontaal, lang, meer, minder, niets, tekenen, optellen.

Er zijn ook taaltkens -en dit artikel gaat over zulke tekens-, die in de wiskundige context ten tijde van de communicatie voor de zender een andere betekenis hebben, dan de ontvanger kent. Voorbeelden zijn zelfstandige naamwoorden als: been, blok, functie, graad, groep, lichaam, macht, midden, ruit, vergelijking, verzameling, wortel, en werkwoorden als: bewijzen, delen, draaien, omkeren, oplossen, spiegelen, toevoegen, trekken, uitdrukken, verschuiven. Zulke woorden hebben voor degenen, die ze voor het eerst in een wiskundige context tegenkomen, een overdrachtelijke betekenis.

In dit artikel zal ook het overdrachtelijk gebruik van taaltekens ter sprake komen, die niet tot de wiskundige vaktaal zullen gaan behoren, maar wel gebruikt worden om wiskundige begrippen aan een ander duidelijk te maken. Voorbeelden:

- Een functie wordt vergeleken met een automaat.
- Optellen en aftrekken van negatieve en positieve getallen wordt vergeleken met koude en hete blokjes, die door een heks in een heksenbrouwsel worden gedaan of eruit gehaald.
- Een vergelijking wordt vergeleken met een weegschaal.

Juist in gevallen, waarbij een taalteken zowel in de vaktaal een andere betekenis heeft als in de niet-vaktaal en de ontvanger de vaktaalbetekenis niet kent, liggen misverstanden tussen zender en ontvanger voor de hand. Daarom is het de moeite waard deze situatie nader te analyseren en te onderzoeken of die analyse in de praktijk toepasbaar is. In dit artikel zal ik me tot de analyse beperken. Het onderzoeken komt in een volgend artikel aan de orde. Daarin zal ook de situatie worden besproken waarbij taaltekens uit de wiskundige vaktaal zelf een overdrachtelijke betekenis krijgen.

Twee taalbetekenissen

Een taalteken heeft taalkundig gezien een intern (semantisch) en een extern (syntactisch) aspect (Keitel et al., 1980).

Het externe aspect is onder andere het uiterlijk van het teken. Zo kan, bijvoorbeeld het externe aspect van het gelijkteken omschreven worden als: twee evenlange horizontale streepjes onder elkaar met de breedte van een letter, midden op de regel. Het externe aspect van het taalteken 'appel' is de reeks letters a, p, p, e, l in deze volgorde tot één woord gevormd.

Het externe aspect is meer dan alleen een bepaalde vorm. Er zijn ook regels, die formeel vastleggen hoe er met de taaltekens mag worden omgegaan. Sommige vormen heten 'letter', sommige lettercombinaties heten 'woord', sommige woordcombinaties heten 'zin'. Er zijn bepaalde regels waaronder bepaalde vormen, letters, woorden, zinnen gebruikt mogen worden. Die regels moeten zowel aan de zender, als aan de ontvanger bekend zijn (al hoeft dat niet altijd in de vorm van expliciet geformuleerde regels). De ontvanger en de zender van dit artikel weten, dat er geen Nederlands woord bestaat met negen klinkers achter elkaar en dat links en rechts van het gelijkteken een rekenkundige of algebraïsche uitdrukking moet staan. Zulke regels behoren ook tot het externe aspect. Grammaticaregels, of in het algemeen syntax-regels, behoren eveneens tot het externe aspect van taaltekens.

De betekenis die binnen een bepaalde context aan een taalteken wordt toegekend noem ik het interne aspect ervan. Het interne aspect van het gelijkteken hangt samen met zoiets als: "Wat er links van staat is even groot als wat er rechts van staat" (2). Het interne aspect van

het woord 'appel' is zoiets als een vrucht, die op een bepaalde manier kan smaken, op een bepaalde manier gevormd wordt aan een bepaald soort boom en wat al niet meer. Het interne aspect kan erg ruim zijn.

Intern en extern aspect van een taalteken zijn onverbrekelijk met elkaar verbonden. Men kan alleen zenden en ontvangen als er bij beide partijen overeenstemming bestaat over deze binding (Van Hiele, 1973). Als een van beide alleen het externe aspect kent, bijvoorbeeld door een definitie uit het hoofd te leren, zendt of ontvangt hij klakkeloze taaltekens (Ausubel & Robinson, 1969; Van Dormolen, 1975).

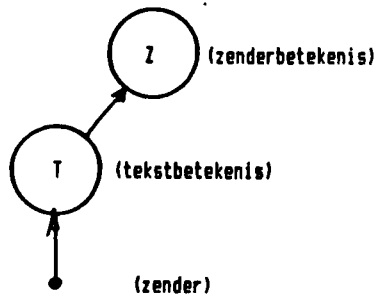
Het interne aspect van een taalteken, of dat nu tekens, woorden of combinaties ervan zijn, zal ik in het vervolg aanduiden met tekstbetekenis. Searle (1979) spreekt in dit verband over "word or sentence meaning".

In het bovenstaande heb ik een paar voorbeelden gegeven waarin een ontvanger iets nieuws leert, doordat deze de uitgezonden signalen kent en er dezelfde betekenis aan hecht als de zender bedoelde. De bedoelde betekenis noem ik zenderbetekenis. Searle (*ibid.*) spreekt over "speaker's utterance meaning". Ik wil me echter niet beperken tot sprekers, ook schrijvers zenden signalen uit. (3)

Mensen gebruiken in hun taal verschillende stijlvormen om hun bedoelingen duidelijk te maken. Ik doel hier in het bijzonder op de gevallen waarbij tekstbetekenis en zenderbetekenis niet samenvallen. Als de zender zegt: "De appel valt niet ver van de boom", dan zijn tekstbetekenis en zenderbetekenis gewoonlijk verschillend. De tekstbetekenis van 'appel' is een plantkundig begrip. De zenderbetekenis is hier: kind van. De zender verwacht, dat de ontvanger begrijpt welke zenderbetekenis bedoeld wordt. Alleen als zender en ontvanger in een boomgaard staan en zien hoe iemand, die onder een appelboom slaapt, wordt getroffen door een vrucht uit die boom, zullen zender- en tekstbetekenis waarschijnlijk wel samenvallen.

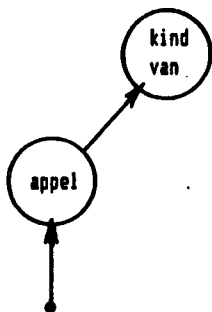
Ik wil de relatie tussen zenderbetekenis en tekstbetekenis door plaatjes uitbeelden.

Als zenderbetekenis en tekstbetekenis niet samenvallen, dan geef ik dat, in navolging van Searle (*ibid.*), aan door



De beide pijlen symboliseren een activiteit van de ontvanger. De onderste pijl duidt op het registreren van de uitgezonden signalen door de ontvanger. De schuine pijl slaat op het zoeken naar de mogelijke zenderbetekenis.

Bijvoorbeeld:



"Een appel valt niet ver van de boom"

Als tekst- en zenderbetekenis samenvallen, geef ik dat aan door



Bijvoorbeeld:



"Dit is een lekkere appel"

In het eerste geval ($Z \neq T$) begrijpt de ontvanger de overdrachtelijk bedoelde tekst, in het tweede geval ($Z = T$) wordt de letterlijk bedoelde tekst ook als zodanig opgevat.

Een probleem in de communicatie

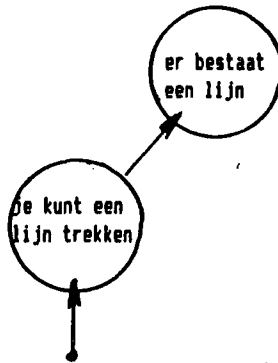
Met behulp van de diagrammen kan ik een probleem in de communicatie duidelijk maken.

Bij het zenden en ontvangen van taaltekens zijn er verschillende mogelijkheden.

a. De ontvanger interpreteert de uitgezonden signalen anders dan de zender ze bedoelde.

a1. Dat is bijvoorbeeld het geval, als de ontvanger de signalen letterlijk volgens de tekstbetekenis interpreteert, terwijl dat niet de bedoeling van de zender is ($Z \neq T$).

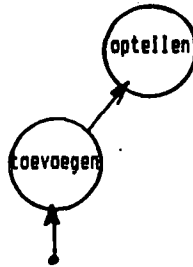
Voorbeeld: Een leerling deelde me eens mee, dat ze het niet met me eens was, dat je door twee punten niet meer dan rechte lijn kunt trekken. Om dat toe te lichten tekende ze twee punten op een blaadje, legde daar haar liniaal langs en trok met een potlood enige malen een lijn langs de liniaal. Ik had het werkwoord 'trekken' overdrachtelijk bedoeld. Mijn zenderbetekenis was: Er bestaat niet meer dan één rechte lijn door twee punten. De leerling gebruikte de tekstbetekenis. De situatie was dus als volgt bedoeld.



"Door twee punten is niet meer dan één lijn te trekken"

a2. Een ander mogelijkheid is, dat de zender de signalen letterlijk bedoelde ($Z = T$), terwijl ze door de ontvanger overdrachtelijk worden opgevat.

Voorbeeld: Een (numerieke) functie wordt dikwijls omschreven als een voorschrift, dat aan zekere getallen uit een (origineel)verzameling getallen toevoegt uit een beeldverzameling. Het woord 'toevoegen' heeft twee betekenissen. Het kan bedoeld zijn in de betekenis van "er bij laten horen", zoals in "De luitenant werd als liaisonofficier toegevoegd aan de commandant van het regiment". Een andere betekenis is "erbij doen", zoals in "Zout aan de soep toevoegen". Veel leerlingen kennen het woord alleen in de tweede betekenis. (4) Ze gaan dan speculeren over wat de zenderbetekenis zou kunnen zijn en verbinden die dan met optellen. Zo wordt dan bij de functie $x \rightarrow x+3$ aan het getal 5 het getal 13 toegevoegd. Een leerling kon dat uitleggen: "de functie maakt van de 5 een 8. En als je 5 aan 8 toevoegt krijg je 13".



"Een functie is een voorschrift, dat aan elk getal uit een origineelverzameling precies één getal uit een beeldverzameling toevoegt."

a3. De derde mogelijkheid is, dat de ontvanger onderkent, dat zenderbetekenis en tekstbetekenis niet hetzelfde zijn ($Z \neq T$), maar een andere overdrachtelijke betekenis aan de signalen toekent, dan de zender bedoelde.

Voorbeeld: In een leerlingentekst voor de brugklas staat de volgende opgave.

"(a) Patrick heeft op woensdagavond een score van 3 punten en op donderdagavond een score van 2 punten. Wat heeft hij op donderdag gescoord?"

(b) De situatie uit (a) kun je schrijven als een vergelijking:

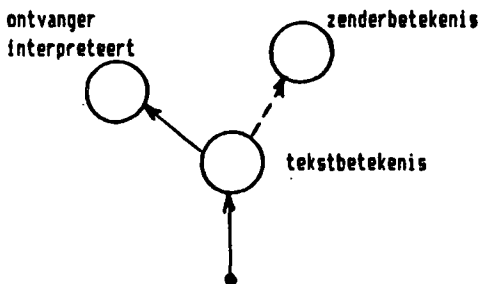
$$3 + ? = 2$$

Wat betekent ? in het verhaal?" (Van Bodegraven c.s., zonder jaartal).

In de letterlijke betekenis wil een vraagteken zoiets zeggen als: De zin, die hiervoor staat is als vraag bedoeld. Het feit dat er geen zin voor het vraagteken staat geeft de lezer al het signaal, dat het hier overdrachtelijk bedoeld is, namelijk als afkorting voor: Welk getal kun je hier schrijven, zodat er een ware bewering komt?

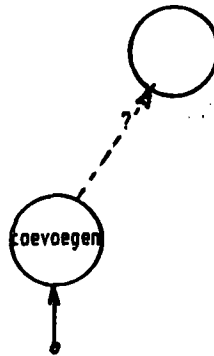
Een leerling schreef als antwoord op vraag (b):

"? = hij heeft niets bijzonders gedaan of ze weten het niet".



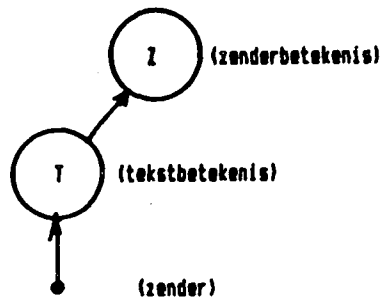
b. De ontvanger begrijpt niet wat de uitgezonden signalen met het onderwerp te maken hebben. Binnen de bedoelde context hebben ze dan ook geen betekenis voor de ontvanger. Bij hetzelfde voorbeeld over 'toevoegen' komt het ook voor, dat leerlingen helemaal niet begrijpen wat er met dat woord bedoeld wordt.

Opvallend is, dat leerlingen in dergelijke situaties dikwijls wel goede antwoorden kunnen geven op rekenopgaven. Dat komt dan doordat ze klakkeloos voorbeelden van zulke opgaven imiteren. Als hen dan gevraagd wordt hoe ze aan het antwoord komen, reageren ze met opmerkingen als: "Dat moet je zo doen".



"Een functie is een voorschrift, dat aan elk getal uit een origineelverzameling precies één getal uit een beeldverzameling toevoegt."

c. De ontvanger begrijpt de uitgezonden signalen zoals ze door de zender zijn bedoeld.



Vormen van overdrachtelijk taalgebruik

Ik zal niet alle mogelijkheden voor overdrachtelijk taalgebruik opsommen. Het gaat in dit artikel in het bijzonder om de stijlform die metafoor wordt genoemd.

Bij het zenden is het mogelijk de ontvanger te waarschuwen, dat er overdrachtelijke taal wordt gebruikt. Door zijn woordkeuze geeft de zender te kennen dat deze moet zoeken naar een zenderbetekenis, die niet met de tekstbetekenis samenvalt.

Voorbeelden:

"Zoals het spreekwoord zegt: de appel valt niet ver van de boom",

"Je moet je getallen voorstellen als punten op een rechte lijn",

"Een functie is net zoiets als een automaat",

"Denk maar aan een pijl bij een vector",

"Het lijkt wel of hij op zijn geld is gaan zitten, zo zuinig is hij".

In dergelijke gevallen is er sprake van een analogie. Men zou de analogie kunnen opvatten als een vergelijking van twee verhoudingen $A:B :: C:D$. (Miller, 1979; Pimm, 1981). De zender laat in het midden welke verhouding bedoeld wordt en op welke manier de vergelijking plaats vindt.

"Een appel staat tot de boom, zoals de eigenschappen van iemand tot de eigenschappen van diens ouders",

"Net zoals punten naast elkaar op een lijn liggen, zo volgen de getallen elkaar op",

"Net zoals je bij een automaat iets kunt krijgen, bijvoorbeeld een blikje cola, als je er geld in stopt, zo krijg je bij een functie een getal als je er een getal in stopt" (5).

Het vertalen van de andere voorbeelden, die ik gaf, laat ik aan de lezer over.

Bauersfeld en Zawadowski (1981) stellen het wat ruimer. Bij een analogie worden twee situatie met elkaar vergeleken. Daarbij wordt gesuggereerd, dat beide situaties een overeenkomstige structuur hebben. De zender laat in het midden wat de aard is van de structuren, die met elkaar worden vergeleken. Dat moet ook wel. Als het mogelijk zou zijn de structuren nauwkeurig te beschrijven, was de stijlform, behalve om literair-esthetische redenen, overbodig. De kracht van het gebruik van ongedefinieerde analogieën ligt hem juist in het feit, dat mensen in staat zijn via zulke analogieën te leren (Hofstadter, 1986). Als men toch niet meedeelt welke structuur men precies bedoelt, heeft men de mededeling ook niet in de vorm van een analogie te geven. Men kan delen van de analogie weglaten. Men heeft dan de metaforische stijlform.

Voorbeelden:

"Getallen zijn punten op een rechte lijn",

"Een functie is een automaat",

"Een vector is een pijl",

"Hij zit op zijn geld",

" $\sqrt{-1}$ is een imaginair getal",

"De avond valt",

"Jan is een varken",

"Door twee punten is niet meer dan één rechte lijn te trekken",

" $3 + ? = 2$ ".

In al deze gevallen is de metafoor terug te brengen op een analogie. Het is duidelijk, dat de zender hier een groot beroep doet op de ontvanger. Deze ontvangt het bericht en registreert, dat de tekstbetekenis T in deze situatie niet bedoeld kan worden. Dat zou immers een conflict met de context geven. Uit deze anomalie leidt de ontvanger af, dat naar een speciale zenderbetekenis Z gezocht moet worden. Door bewust een anomalie in te bouwen waarschuwt de zender, maar nu impliciet, dat er naar een Z ($\neq T$) gezocht moet worden.

Black (1972) heeft er terecht op gewezen, dat de opvatting, dat een metafoor voortkomt uit een analogie ("comparison view") onvoldoende is om het verschijnsel metafoor diepgaand te kunnen bestuderen. Hij pleit voor een opvatting waarbij de tekstbetekenis en de zenderbetekenis elkaar beïnvloeden ("interaction view"). In "Jan is een varken" heeft 'Jan' na het verzenden en ontvangen van de zin niet meer dezelfde tekstbetekenis als daarvoor. Maar ook 'varken' heeft een andere betekenis gekregen. Het woord staat niet langer voor een bepaald dier met zekere biologische eigenschappen, maar voor een stereotype. Afhankelijk van wat de ontvanger van Jan en van diens relatie met de zender afweet, is het varken nu een wezen vol modder, of een beest dat slobberend en morsend eet, of een beest met een seksuele aberatie. Vooral in situaties die niet met letterlijke tekst zijn te beschrijven, speelt de 'comparison view' een grote rol. Dit geldt ook als iemand aan een ander een wiskundig begrip wil duidelijk maken, dat die ander nog niet kent. Heel in het bijzonder is dit het geval als het om elementaire begrippen gaat, die alleen via axiomatic of zeer abstracte definities zijn vast te leggen. In het begin van deze paragraaf zijn daar een paar voorbeelden van gegeven.

Een andere stijlform is de metoniem. Dat is een vorm waarbij de zenderbetekenis niet uit de tekstbetekenis wordt afgeleid door het vergelijken van structuren, maar door de een of andere samenhang tussen tekstbetekenis en de zenderbetekenis.

Voorbeelden:

"Ik heb gisteren nog met Den Haag gebeld",

"Er waren 40 koppen aan boord",

"Heb jij soms mijn Shakespeare geleend?",

"Oppervlakte is grondvlak maal hoogte",

"De stelling van Euler voor lichamen is $H - R + V = 2$ ".

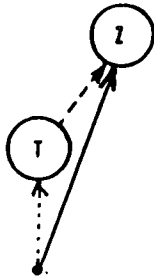
Net als de metafoor is de metoniem een belangrijk hulpmiddel bij het overbrengen van begrippen via taal. Ze vullen elkaar aan. Bij de metafoor hebben Z en T ongeveer dezelfde (door de zender gesuggereerde) structuur, maar verschillen ze van inhoud. De overdrachtelijkheid berust op vergelijken van de structuren van Z en T . Bij de metoniem hebben Z en T dezelfde inhoud, maar verschillen van structuur. De overdrachtelijkheid berust op samenhang van Z en T . Dat metaforen en metoniemen bij het gebruiken van taal een complementaire

rol spelen hebben Jakobson en Halle (1956) duidelijk aangetoond bij mensen met de spraakstoornis afasie.

Dit artikel zou aanzienlijk langer worden als het gebruik van metoniemen hier ook geanalyseerd zou worden. Ik zal er daarom nu niet verder op ingaan. Andere vormen van overdrachtelijke taal zijn onder meer indirecte of impliciete taal, ironische taal (bijvoorbeeld Searle, ibid.). Ook hierover zal ik verder niets zeggen.

Dode metafoor

Soms is beeldspraak een staande uitdrukking geworden. Het is dan geen metafoor meer. Men zou van een dode metafoor kunnen spreken (Searle, ibid.).



Dat een uitdrukking als "De avond valt" inderdaad van oorsprong een metafoor is, merkt men pas duidelijk op als men, zoals ik, nauw contact heeft met mensen, die een andere moedertaal hebben en bezig zijn met het leren van Nederlands. Ik heb een van deze mensen vragend zien kijken bij het horen van deze uitspraak. Hij merkte op: "De avond kan toch niet vallen?". De zender was zich er niet van bewust, dat "vallen" niet in de letterlijke betekenis werd gebruikt.

Dergelijke situaties komen in het onderwijs herhaaldelijk voor. Elke wiskundeleraar kent wel de verbaasde blikken van sommige leerlingen als zij voor het eerst horen over snijdende lijnen.

Andere voorbeelden, waarbij misverstanden kunnen optreden:

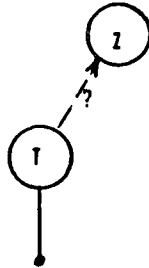
- Een zin, waarin het woord 'getallenlijn' voorkomt.
- De wortel van een vergelijking.
- De limiet van
- Reële, imaginaire en complexe getallen.
- Een ruit.

Ik heb in de inleiding van dit artikel ook al een groot aantal zelfstandige naamwoorden en werkwoorden gegeven, die in de wiskundige vaktaal niet precies dezelfde betekenis hebben als in de niet-vaktaal. Het woord 'kwadraat' is voor de meeste leerlingen een vreemd onbekend woord. In diverse andere talen hebben echter 'de tweede macht van een getal' en 'de vierhoek met vier gelijke zijden en rechte hoeken'

dezelfde naam. Leerlingen kennen de naam voor de meetkundige figuur en raken dan in verwarring als de andere betekenis bedoeld wordt.

De verwarring bij dergelijke situaties ontstaat juist als de leraar niet beseft, dat de woorden en uitdrukkingen in oorsprong metaforisch zijn bedoeld, maar inmiddels in de wiskundige vaktaal een eigen betekenis hebben gekregen.

Als de zender zich van deze situatie bewust is, kan hij waarschuwen door uitdrukkingen als: "Dit noemen we ... ", of "Dat noemt men in de wiskunde ...". Dat neemt echter niet weg, dat de zenderbetekenis volstrekt nieuw is voor de ontvanger en dus volstrekt onvoldoende is geïntegreerd in diens kennis. De ontvanger merkt de anomalie wel op ("Wat hebben getallen met lijnen te maken?", "Is een lijn dan zoiets als een mes?") en gaat bewust of onbewust zoeken naar de hem onbekende zenderbetekenis. Die kan hij uit zichzelf niet vinden, omdat de zenderbetekenis nog niet tot zijn kennisvoorraad behoort. Men zou die situatie uit kunnen beelden door



Dat de ontvanger Z niet kan vinden komt, doordat hij in de gegeven context geen structuur kan vinden, die vergelijkbaar is met de structuur van T. Om te kunnen begrijpen wat de analogie is met de tekstbetekenis van bijvoorbeeld 'wortel' van een getal moet men weten hoe in de geschiedenis dat woord in de wiskundige vaktaal is ontstaan (Van der Waerden, jaartal onbekend)(7).

Wie een en ander niet goed aanvoelen kan, moet maar eens proberen zich zijn eigen leerproblemen te herinneren bij het horen van woorden als 'lichaam', 'ring', 'filter', 'ideaal', 'imaginair', 'determinant', 'breuk', 'top van de dalparabool', 'discriminant', 'optellen van vectoren', enz., enz.

De zender moet zich dus goed realiseren, dat het gebruik van dode metaforen bij de ontvanger problemen geeft, doordat deze de tekst- en de zenderbetekenis laat samenvallen, of vruchteloos gaat zoeken naar een zenderbetekenis, die in de gegeven situatie zinvol is.

Metafoor onmisbaar bij het leren

In een volgend artikel zal ik een aantal voorbeelden uit het wiskunde-

onderwijs onderzoeken waarbij metaforen belangrijk zijn voor het leren van wiskundige begrippen. Met name zullen de volgende gevallen besproken worden:

a. Metaforen bij het gelijkteken

Het gelijkteken is formeel het symbool voor gelijkheid van twee uitdrukkingen (6). In de praktijk zijn er meer betekenissen:

In $(a - 3)(a + 5) = \dots$ heeft het een signaalbetekenis: de leerling wordt aangespoord een activiteit te ondernemen (Van Dormolen, 1982).

In $(a - 3)(a + 5) = 0$ heeft het gelijkteken ook een signaalbetekenis, maar een andere dan in het vorige geval en het heeft de symboolbetekenis zoals boven bedoeld.

In $y = 3x - 5$ en $y + 5 = 3x$ kunnen de gelijktekens verschillende symboolbetekenissen hebben. In de eerste kan het zoiets betekenen als: "Als je de waarde van x kent, kun je de bijbehorende waarde van y uitrekenen". In de tweede vergelijking hebben x en y een veel symmetrischer rol. Deze paar korte aanduidingen geven al aan, dat de betekenis van een taalteken sterk afhangt van de context.

b. Metaforen bij het limietbegrip

Het limietbegrip is voortgekomen uit het tijdsafhankelijke begrip beweging. Dat uit zich nog in het woordgebruik: "Als x nadert tot 0, dan ". Ook bij de standaardnotatie zit deze metafoor verborgen in het pijltje:

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x)$$

of ook: als $x \rightarrow 0$, dan $f(x) \rightarrow a$.

In de epsilon-delta-definitie is dit bewegingskarakter volledig verdwenen (Kaput, 1979).

c. Metaforen bij het minteken

Het minteken komt in drie verschillende betekenissen voor: als toestandsteken, als bewerkingsteken en als symbool voor het tegengestelde (bijv. Wansink, 1967). Om leerlingen, die van de basisschool komend alleen de tweede betekenis kennen, de andere betekenissen te leren en van elkaar te leren onderscheiden zijn metaforen noodzakelijk. Er zijn verschillende metaforen in gebruik. Het is de moeite waard te onderzoeken in hoeverre het gebruik ervan latere ontwikkelingen in begripsvorming kunnen remmen, zoals de metafoer van de heks met koude blokjes (negatieve getallen) en warme blokjes (positieve getallen) (De Vos, 1986).

d. Metaforen bij het variabelebegrip

Het gebruik van een letter is in oorsprong een metafoer. De moeilijk-

heden, die daarbij op kunnen treden zijn bij leraren bekend (Van Dormolen, 1984). Ook hier zijn verschillende methoden bekend om via andere metaforen het variabele begrip te benaderen, zoals open plaats, open blokjes en vraagtekens.

In gevallen als deze blijkt het gebruik van metaforen een belangrijk hulpmiddel te zijn tot begripsvorming. Men kan zelfs zover gaan, dat het gebruik van metaforen noodzakelijk is (Hofstadter, 1986; Pimm, 1981; Kaput 1979). De keerzijde van de medaille is het gevaar, dat de leerling zo sterk aan de metafoor gebonden raakt, dat daarmee verder leren geblokkeerd wordt. In mijn volgende artikel hoop ik aan te tonen, dat een en ander met de niveautheorie van Van Hiele (1973) geanalyseerd kan worden. Ik meen, dat het gebruik van de metafoor een overgangsfase is tussen enerzijds het grondniveau, waarbij de leerling de tekstbetekenis absoluut neemt, en het eerste niveau, waarbij de tekstbetekenis als model fungeert. In dat geval is er sprake van dode metafoor.

Noten

1. Ik laat hier de gevallen buiten beschouwing waarbij zender en ontvanger zich best wel met elkaar kunnen verstaan als daar enige moeite voor wordt gedaan. Er is dan sprake van slordigheid en ondoordacht taalgebruik van de zender, ongeïnteresseerdheid en gebrek aan motivatie bij de ontvanger en dergelijke.
2. Ik doe geen poging een onduidelijke definitie te geven. De zaak is hier trouwens ingewikkelder. Voor sommige mensen is het interne aspect van het gelijkteken anders. Het lijkt eerder op een opdracht: "Reken uit wat er links van het gelijkteken staat" of op verklaring van een uitgevoerde opdracht: "Wat rechts van het gelijkteken staat is het resultaat van de berekening, die er links van staat". Voor hen is dan $(\underline{a} + \underline{b})(\underline{a} - \underline{b}) = \underline{a}^2 - \underline{b}^2$ iets anders dan $\underline{a} - \underline{b} = (\underline{a} + \underline{b})(\underline{a} - \underline{b})$.
3. Hofstadter (1986) gebruikt in een aardige alliteratie de termen "literary and literal meaning". Het was verleidelijk dit over te nemen, maar ik heb dat niet gedaan, omdat bij deze woorden de rol van de zender en de ontvanger verduisterd wordt.
4. Op de keper beschouwd gaat het hier in beide gevallen om eenzelfde betekenis, maar dat is pas zo als je er even over nadenkt. Dit komt in het bijzonder tot uitdrukking in de '1' uit BTW.
5. Dit is een te beperkte opvatting van het begrip functie. Ik geef deze hier alleen om mijn bedoeling duidelijk te maken.
6. Robert Recorde, de uitvinder van het gelijkteken gebruikte ook een metafoor. Hij voerde het gelijkteken in als twee evenwijdige strepen van ongeveer 2 cm lang, vlak onder elkaar: — — , "because noe 2 thinges can be moare equalle" (in: Recorde's Whetstone of Witte, 1557; zie bijv. Cajori, 1974).

7. Men kan dan ook begrijpen waarom 'wortel uit een getal' en 'wortel van een vergelijking' oorspronkelijk dezelfde metafoor waren.

Literatuur

- Ausubel, D.P. & Robinson, F.G. *School learning, an introduction to educational psychology*, New York: 1969.
- Bauersfeld, H. & Zawadowski, W. *Metaphors and metonymies in the teaching of mathematics*, Occasional paper nr.11, IDM, Universitt Bielefeld, 1981.
- Black, M. *Models and metaphors*, London: 1972.
- Bodegraven, D. van, c.s. *Wiskunde lijn*, deel 1b, Groningen: zonder jaartal.
- Cajori, F. *A history of mathematical notations*, La Salle: 1974.
- Davis, R.B. Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations, *The Journal of Children's Mathematical Behavior*, 3(1), 7-35, 1975.
- Dormolen, J.v. Learning to understand what giving a proof really means, *Educational Studies in Mathematics*, 8, 1977.
- Dormolen, J. v. *Didactiek van de wiskunde*, Utrecht: 1981.
- Dormolen, J. v. *Aandachtspunten, de a priori analyse van leerteksten voor wiskunde bij het voortgezet onderwijs*, Utrecht, 1982.
- Dormolen, J.v. Variabelen, *Euclides*, 60(3), november 1984.
- Freudenthal, H. *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Stuttgart: 1974.
- Freudenthal, H. *Weeding and sowing*, Dordrecht: 1978.
- Hiele, P.M. v. *Begrip en inzicht*, Purmerend: 1973.
- Hofstadter, D.R. *Metamagical themas: Questing for the essence of mind and pattern*, New York: 1986.
- Jakobson, R. & Halle, M. *Fundamentals of language*, Den Haag: 1956.
- Kaput, Mathematics and learning: Roots of epistemological status. In: J. Lockhead & J.Clement (Eds.). *Cognitive process instruction*, Philadelphia: 1979.
- Keitel, C., Otte, M. & Seeger, F. *Text, Wissen, Tätigkeit*, Königstein/Ts.: 1980.
- Kemme, S. *Taalaspecten van het wiskundeonderwijs*, Utrecht: Vakgroep OW&OC, 1984.
- Miller, G.A. Images and models, similes and metaphors. In: A. Ortony, *Metaphor and thought*, Cambridge: 1979.
- Pimm, D. Metaphor and analogy in Mathematics, *For the learning of mathematics*, 1(3), 47-50, 1981.
- Searle, J.R. Metaphor, In: A. Ortony, *Metaphor and thought*, Cambridge: 1979.
- Vos, W. de. Het belang van vakdidactisch onderzoek voor een samenhangend onderwijsbeleid, *Tijdschrift voor de didactiek der β-wetenschappen*, 4(3), 1986.
- Waerden, van der. *Ontwakende wetenschap*, jaartal onbekend.
- Wansink, Joh.H. *Didactisch oriëntatie voor wiskundeleraren*, Groningen: 1967.