Sluiproutes door realistische leergangen - ongewenste verkortingen

F. Goffree, J. Vedder en K. Buys[1]
SLO, Enschede

Summary
The authors state that students in mathematics, when introduced to negative numbers in accordance with the realistic teaching theory, tend to interpret these in a mechanistic manner. They attribute this to the nature of the topic, which allows certain short cuts to be taken and essential learning moments to be missed. After analyzing this problem the authors conclude that a different structure of the curriculum within the framework of the realistic approach might result in a solution. In this respect they refer to Sawyer's ideas on the introduction of negative numbers.

1. Inleiding

In de Ontwikkelgroep voor Leraren Opleidingen (OGLO) van de SLO wordt sinds twee jaar gewerkt aan een boek over (negatieve) getallen. Het is bedoeld voor hen die zich interesseren voor wiskundeonderwijs aan leerlingen tussen 10 en 14 jaar. Met de voorlopige werktitel: "Tussen Twee (Getal-)Werelden[2]", is de plaats van handeling (in de school en in het leerplan) aangegeven. Bij het ontwikkelwerk aan deze en gene zijde van het van oudsher beruchte breukvlak tussen lager- en middelbaar (basis- en voortgezet-)onderwijs, komt men bekende aansluitingsproblematiek tegen. Eén ervan willen we *in het kader van een theorie* over het reken-wiskundeonderwijs, naar voren brengen. Het is geen nieuw probleem, maar door recent onderwijsontwikkelingswerk en de daarop gebaseerde theorievorming, heeft de problematiek een actuele betekenis gekregen.

Globaal kunnen we de problematiek en onze stellingname aldus samenvatten: deelleergangen voor negatieve getallen, ontworpen volgens de realistische onderwijstheorie, kunnen door de leerlingen gemakkelijk mechanistisch opgevat worden. De aard van de leerstof maakt het namelijk mogelijk sluipwegen te benutten die aan essentiële leermomenten voorbijgaan. Een oplossing van deze problematiek kan, zo menen wij, gevonden worden in een andere opbouw van het wiskundecurriculum.

Aan deze bewering liggen theoretische opvattingen en praktische bevindingen ten grondslag. In dit artikel brengen we theorie en praktijk in wederzijds verband naar voren om vervolgens bovengenoemde constatering in een onderwijs-ontwikkelingsperspectief te plaatsen.

- Eerst geven we globaal onze interpretatie van realistisch reken-wiskundeonderwijs en schetsen het daarbij behorende theoretische kader.
- Dan wordt als voorbeeld van een fenomenologische analyse het spaarbankwezen beschreven, waarmee een voedingsbodem wordt gelegd voor een didactische fenomenologie en daarop gebaseerd educatief ontwerpwerk. De fenomenologische oriëntatie van brugklassers, als eerste fase van het leerproces hierin gerealiseerd, blijkt in de praktijk echter een essentieel manco te vertonen.

Om de leerlingen op dit punt te hulp te komen, dient eerder verricht rekenwerk binnen N (dat op de basisschool heeft plaatsgevonden), nu formele aandacht te krijgen.

- Het permanentie-principe, voor de wiskunde geformuleerd door Hankel en in een nieuw en didactisch jasje gestoken door Semadeni, combineert fenomenologische oriëntatie en formele doordenking. Zo ontstaat het beeld van een realistische leergang.
- Dan is het moment aangebroken om op basis van observaties in de onderwijspraktijk nogmaals het vermoeden uit te spreken, dat (theoretisch) ongewenste sluiproutes hier niet te vermijden zijn. Zou met dit vermoeden een algemene waarheid zijn onthuld, dan zitten we met een theoretisch en een practisch probleem. Ontluistert de praktijk van het wiskundeonderwijs een veelbelovende theorie erover?
- Tenslotte gaan we in op de onderwijstheorie van realistisch reken-wiskundeonderwijs. De bovengestelde vraag noopt namelijk tot reflectie. Daarom kijken we terug naar de theorie en doen dit in het perspectief van een nieuwe ontwikkeling. Een andere opbouw van de leerstof, een nieuw educatief ontwerp, zo laat het zich aanzien, biedt een praktische oplossing die de theorie niet alleen in stand houdt, maar deze zelfs versterkt.

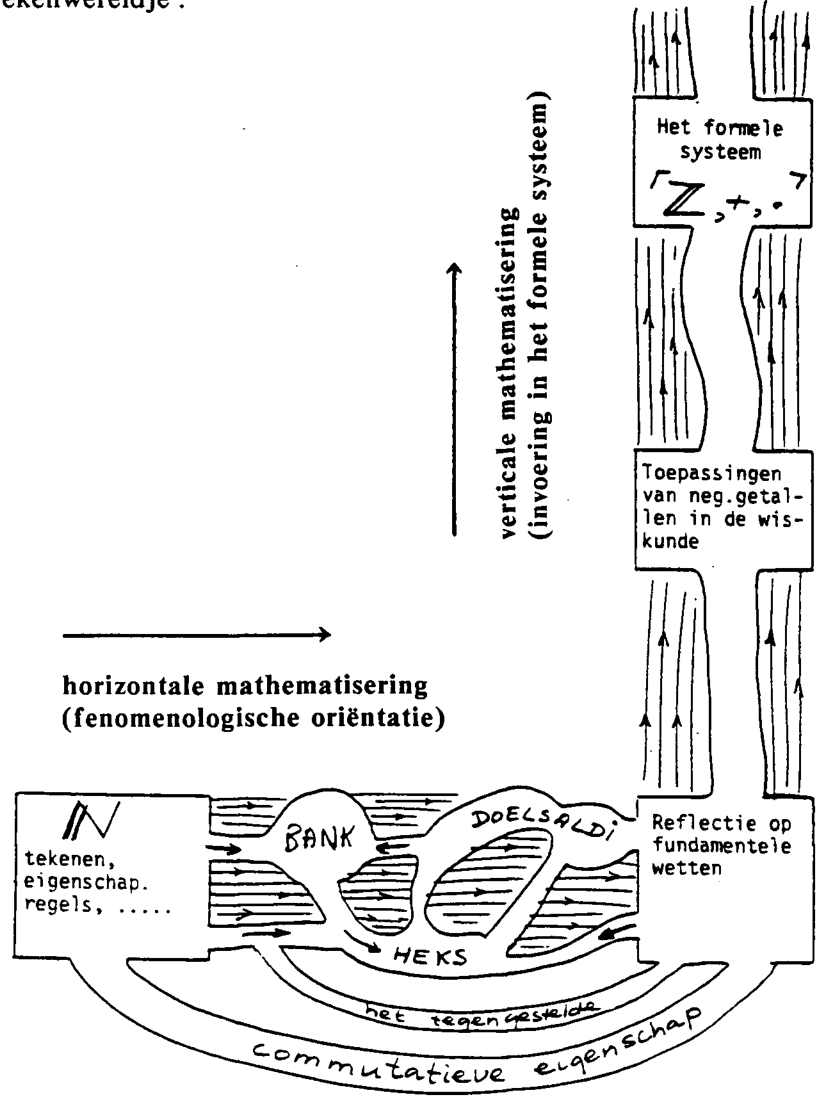
2. Het theoretisch kader van realistisch reken-wiskundeonderwijs

Het onderwijstheoretische kader, tot stand gekomen door een reflectie op Wiskobas (Treffers en Goffree, 1985, en Goffree, 1986, p. 19-21), kan in grove trekken neergezet worden met Van Hieles niveautheorie, Freudenthals didactische fenomenologie (Freudenthal, 1984) en de didactiek volgens progressieve mathematisering, zoals die in Wiskobas ontwikkeld is. Wiskunde, zo stelt men, wordt op het nulde niveau geleerd door een fenomenologische verkenning van, laten we even stellen, wereldse zaken. Hoeveelheden worden verkend, georganiseerd en gestructureerd aan concrete objecten zelf, de situaties waarin dit gebeurt zijn herkenbaar in de eigen omgeving of tenminste vanuit eerdere ervaringen voorstelbaar. Dit geldt overigens niet alleen voor het domein van de getallen, maar ook voor dat van de meetkunde, het meten, de functies, de kansen e.d. Op dit nulde niveau worden intuïtieve noties aangescherpt en informele procedures meer bewust gemaakt. Reflectie speelt een essentiële rol, eigen constructies (zoals handige aanpakken of gememoriseerde voorkeuren) en eigen producties (zoals uitleggen aan medeleerlingen of het ontwerpen van toetsopgaven voor de komende repetitie) dragen daaraan bij. Tegens komen steunpunten voor het denken (letterlijk) in beeld, als organisatieschema's, tabellen, grafieken, symbolische taaltjes en denkmodellen. Deze steunpunten zijn als het ware geconstrueerd tijdens het bewerken van 'de realiteit'. Als de denkmodellen later meer formeel worden ingezet om in het proces van verticale mathematisering ondersteuning te geven, kan zonodig deze verbinding met de realiteit opnieuw geactualiseerd worden.

Langzamerhand, bij het voortschrijden in de wiskunde als systeem, kunnen leerlingen de banden met het concrete, voorstelbare, reële verbreken. Maar dan is men al vergevorderd op het eerste niveau van Van Hiele, waar niet meer de objecten zelf, maar de eigenschappen ervan en de relaties tussen de objecten tot onderwerp van studie zijn gemaakt.

Voor de onderwijsontwikkelaar, die op basis van deze theoretische overwegingen leergangen wil ontwerpen, is het nu zaak bij de gekozen wiskundige leerstof fenomenen te zoeken, waaraan die wiskunde zichtbaar gemaakt kan worden. Als hij geluk heeft, komt de geschiedenis van de wiskunde hem te hulp. Wie het Wiskobas- en Hewetmateriaal analyseert, zal evenwel tot de conclusie komen dat educatieve ontwerpers voor wiskunde ook veel situaties zelf moeten verzinnen.

In het geval van de negatieve getallen laat fig. 1 hiervan iets zien. De 'heks' staat voor fantasie, 'doelsaldi' voor een aangepast actueel gegeven en 'bank' voor een hierna uit te werken 'rekenwereldje'.



Tevens brengt deze figuur de problematiek, zoals gesteld in de inleiding, iconisch in beeld. Een wiskundeleergang, ontworpen naar realistisch model, bestaat uit een 'horizontaal' deel (in dit geval een fenomenologische oriëntatie op drie verschijnselen, vanuit hetgeen eerder ervaren en geleerd is bij het rekenen met positieve getallen) en een 'verticaal' deel (hier met rekenen in Z, toepassen van negatieve getallen en voortgezette activiteiten in de richting van het formele systeem) onderling verbonden in een 'scharnierpunt', dat reflecteren op fundamentele wiskundige ervaringen en anticiperen op het wiskundige systeem symboliseert. Zo te zien is elk van de situaties in het horizontale deel een mogelijk beginpunt van een sluiproute naar dat punt in het verticale deel, waar negatieve getallen al worden toegepast. Een onbedoelde verkorting treedt dan in het leerproces op, omdat essentiële momenten van reflectie omzeild worden en de gewenste oriënteringsbasis voor later werk in het formele systeem niet tot stand komt.

3. Fenomenologische analyse van het spaarbankwezen.

Laten we eens kijken hoe het horizontale deel in realistische zin gearrangeerd kan worden. Daartoe beginnen we met een fenomenologische analyse van het verschijnsel Spaarbank. Een waarschuwing vooraf: leerlingen zijn nog geheel uit zicht, het gaat er slechts om na te gaan of dit verschijnsel zich laat organiseren en structureren met het wiskundige middel van de negatieve getallen. Wat we van de negatieve getallen al weten, mogen we proberen toe te passen. Als 'het past' kunnen we later wellicht nagaan of kinderen, door die structurerende activiteit, de kennis van negatieve getallen ook kunnen verwerven. Als we zover zijn komt pas de didactiek in beeld. Als fenomeen beschouwen we *"het spaarbankwezen"*. Stelt een organisatie van dit verschijnsel ons in de gelegenheid om de verzameling Z (opnieuw) te vinden? Komen alle *bekende wiskundige regels* uit de verf of lopen we met onze verkenning van deze reële wereld vast? Vragen genoeg voor een spannende verkenningstocht.

Stel U voor, de spaarbank van Jimmy en enkele andere kinderen. Wat er precies gespaard wordt zullen we voorlopig met natuurlijke getallen gaan beschrijven (Wie bang is zodoende *f*7,50 niet kwijt te kunnen, bedenke dat het om 750 cent gaat). De *eerste* spaargeschiedenis is die van Jimmy. Deze laat zich als volgt beschrijven:

1 jan.	+ 350	tegoed	350
15 febr.	+ 725	tegoed	1075
2 mrt.	- 500	tegoed	575
11 mei	- 300	tegoed	275

Op een spaarbank kun je geld bij laten schrijven (storten) of af laten schrijven (opnemen). Storten en bijschrijven beschrijf je met optellen; opnemen, afschrijven en overschrijven gaat met aftrekken. Stel nu dat Jimmy een krantenwijk neemt en elke week 500 van zijn verdiende geld op de spaarbank zet. Op 11 mei bijvoorbeeld heeft hij 275 op zijn rekening. Over 13 weken is daar dan 13 x 500 bijgekomen. En 4 weken eerder was dat nog maar 9 x 500. Er wordt blijkbaar ook vermenigvuldigd, maar pas op. In het product 9 x 500 staat 500 voor een spaarbedrag en 9 voor het aantal keren dat dit bedrag bijgeschreven is. Straks moeten we nog letten op de commutativiteit.

Voor de *tweede* spaargeschiedenis keren we nog even terug naar 11 mei. Johnny, de broer van Jimmy, had toen ook 275 op zijn rekening. Op 15 mei haalt hij 300 van zijn rekening af. Eigenlijk gaat dat niet, maar ach, iedere bank laat een beetje roodlopen wel toe.

11 mei		tegoed	275
15 mei	- 300	tegoed	-25

Johnny heeft nu een schuld van 25, omdat 275 + 25 = 300 is. (Hij ontvangt dus de 275 die nog op zijn rekening staat en daarnaast 25 van de bank te leen.) Dat hij 25 rood staat wordt aangegeven met -25 (of met 25D). Nu we toch negatieve getallen geïntroduceerd hebben, kunnen we de laatste transactie ook als volgt beschrijven: 275 - 300 = -25. (We moeten hier onderscheid maken tussen het eerste min-teken voor het bekende aftrekken (afschrijven) en het tweede min-teken bij -25 dat slaat op een tekort.) Bij sommige 'banken' laten ze dat verschil ook zien: 275 - 300 = -25.

De *derde* spaargeschiedenis is van Wilma. De laatste regel van haar spaarbankboekje ziet er als volgt uit:

4 juni	+ 500	tegoed	3600

De komende weken heeft Wilma elke week een bedrag van 100 nodig. Ze haalt dat van haar rekening.
ver 3 weken is het totaal van haar spaartegoed verminderd tot 3300. Men kan het (negatieve?!) spaargebeuren aldus beschrijven:
3600 - 3 x 100 = 3300.
Maar kijken we in het spaarbankboekje, dan zien we:

4 juni			3600
11 juni	-100	tegoed	3500
18 juni	-100	tegoed	3400
25 juni	-100	tegoed	3300

De gang van zaken laat zich dus netter beschrijven door 3 x (-100) dan door 3 x 100 er af te trekken. Het resultaat is in beide gevallen hetzelfde. Evenals trouwens er in één keer 300 afhalen. De schrijfwijze 3 x (-100) heeft onze voorkeur, want die sluit het dichtst aan bij het verschijnsel. Elk van de volgende uitdrukkingen symboliseert een andere spaarbank-handeling:

3600 + 3 x (-100)
3600 - 3 x 100
3600 + -3 x 100
3600 - 300
3600 + -300

Hoewel - 300 en +(-300 hetzelfde effect begin saldo van 3600 hebben, zit er een verschillende activiteit in spaarbanktermen achter. Anders gezegd, -300 en +(-300) hebben verschillende realiseringen in het spaarwezen.

Aan de hand van de volgende situatie zullen we zo'n verschil duidelijk maken: stel dat iemand al langere tijd elke week een bedrag van 100 naar de bank brengt. Dat hij er af en toe ook een bedrag afhaalt, doet even niets terzake. Je kunt nu vragen: hoe staat het met z'n rekening over 6 weken? Antwoord: +(6 x 100), dit bedrag wordt bij het bedrag van nu opgeteld. Maar dan een blik in het verleden. Hoe stond hij er 6 weken geleden voor? Die vraag kan op twee manieren beantwoord worden:
Eerste: in zes weken zou er 6 x 100 bijgekomen zijn, dan was er zes weken eerder 6 x 100 minder dus -(6 x 100).
Tweede: je zou ook kunnen zeggen dat je terugtelt op de kalender: elke week terug (-1), zes weken terug (-6). Dus: (-6) x 100 (t.o.v. het bedrag van nu). De uitkomst van -(6 x 100) of van (-

6) x 100 is in het verhaal niet moeilijk te vinden: -600, 600 minder dan nu.

Tenslotte nemen we een *vierde* spaargeschiedenis, één met veel negatief erin: iemand is gewend om elke week 250 van zijn rekening te halen. Elke week dus (-250) op het boekje. (We zien even voorbij aan het af en toe bijschrijven van fikse bedragen uit andere bronnen om roodstaan te voorkomen). Hoe staat hij er over 8 weken voor? Antwoord: bedrag van nu + 8 x (-250) en dat is -(8 x 250) "erbij", dus 2000 minder. En hoe zat dat 4 weken terug? Antwoord: (-4) x (-250) en toe was dat bedrag 4 x 250 hoger dan vandaag.) (Als antwoord kan ook: -(4 x (-250)) en dat is ook 1000 hoger dan vandaag.)

Zo te zien heeft het 'spaarbankwezen' ons nieuwe getallen (negatieve) en een aantal bewerkingsregels opgeleverd. Maar hoe verloopt de overgang van het bankwezen met z'n spaarbedragen en tijdsintervallen naar het formele systeem van de getallen? Formeel wil zeggen: afgezien van betekenissen in reële verschijnselen. We hebben te maken met een geordende verzameling getallen met afgesproken regels voor de hoofdbewerkingen. Welke fundamentele wetten bepalen het reilen en zeilen van een dergelijk systeem? Die wetten hebben we met onze fenomenologische oriëntatie op het bankwezen niet ontdekt, want dáár was bijvoorbeeld -5 x 99 iets heel anders dan 99 x -5. Vroeger (in N) hadden we wèl: 5 x 99 = 99 x 5, meestal uitgevonden in een rekenachtige context, waar de wetmatigheid rekengemak opleverde. De commutativiteit van vermenigvuldigen in Z komt pas uit de verf als we ons losmaken van het bankwezen en reflecteren op de structuur van de gehele getallen en de bewerkingen daarmee. Bij het reflecteren zou men het formele systeem direct in het geding kunnen brengen, natuurlijk uitgaande van ervaringen met de bewerkingen in N. Strategieën voor handig rekenen en plezier in patronen vormen goede uitgangspunten.

Met de laatste overweging zijn ongemerkt de leerlingen in zicht gekomen. De fenomenologische analyse begint een didactische fenomenologie te worden. Daarin wordt het gebied van de negatieve getallen opnieuw, vanuit diverse invalshoeken, en in het perspectief van leren en onderwijzen, onder de loep genomen. Nemen we als invalshoek de praktijkervaringen van vele leraren met hun leerlingen, dan zien we de laatsten in grote getale sluipwegen inslaan voordat er ook maar enige sprake was van reflectie (zie figuur 1). Daarbij wordt het ontwikkelen en leren kennen van het formele systeem op zich voor onnodig gehouden. Als je de regeltjes maar kent, dan kun je zonder kleerscheuren 'er' doorheen komen. Zonder reflectie, op basis van de genoemde invulling van het horizontaal mathematiseren alleen, worden onvolledige inzichten gevormd. In dat geval worden rekenregels aangenomen, overgenomen en blind uitgevoerd. Deze regels werken, maar ontlenen hun betekenis niet aan praktische ervaringen of meer theoretische beschouwingen. Maar we willen juist dat de leerlingen op een zeker moment dat formele systeem wel ontdekken, dat ze de wetmatigheden ervan onderkennen, dat ze zich erin kunnen bewegen en dat ze, bij het toepassen van negatieve getallen in het vervolg van het onderwijs, enige steun kunnen ontlenen aan hun begrip van dat formele systeem en de daarin geldende regels en wetten.

Fundamentele wetten als die van de commutativiteit kwamen in het bankwezen zoals we gezien hebben, niet naar voren. Het organiseren en structureren van het bankwezen heeft leerlingen dus weinig te bieden bij het nadenken over fundamentele wetten in het formele systeem (Z, +, .). Dit geldt daarentegen niet voor het begrip 'tegengestelde' dat een centrale rol kan spelen bij het beredeneren van de rekenregels. Het tegengestelde-begrip kan binnen de fenomenologische oriëntatie naar voren gebracht en geëxpliciteerd worden. En dit tegengestelde-begrip kan later bij het oplossen van 'kale' sommen goed van pas komen. Op basis daarvan kan bijvoorbeeld beredeneerd worden dat $-4.1\frac{1}{2}$ het tegengestelde is van $4.1\frac{1}{2}$, en dat de uitkomst dus $-(4 \times 1\frac{1}{2})$ moet zijn. En evenzo kan beredeneerd worden dat $-2\frac{1}{2}.-2\frac{1}{2}$ het tegengestelde moet zijn van $2\frac{1}{2}.-2\frac{1}{2}$, waarvan de uitkomst zich op een vergelijkbare wijze laat afleiden. Het tegengestelde-begrip kan hier dus op formeel niveau als steunpunt functioneren en het kan tijdens de fenomenologische oriëntatie tot ontwikkeling komen. In het wereldje van de spaarbank bijvoorbeeld kan zonder moeite aan het licht komen dat -2 en 2 elkaar als het ware opheffen: een tekort van 2 en een tegoed van 2 leveren een saldo op van 0. Evenzo kan dit 'elkaar-opheffende-karakter' van positieve en negatieve getallen in enkele andere verschijnselen (zoals dat van de doelsaldi en dat van de warme en koude blokjes van de heks) ervaren worden. Echter: het aan het licht treden van deze eigenschap van gehele getallen gaat niet vanzelf! Het is nodig dat er reflectie plaatsvindt op de uitgevoerde activiteiten en dat de gemeenschappelijke wiskundige inhoud wordt blootgelegd en bewust gemaakt. Een essentiële stap in het proces van *horizontale mathematisering* is dan gezet: het mathematische object zelf komt naar voren en kan als zodanig onderzocht worden. We zijn daarmee aangeland in de fase waarin het proces van *verticale mathematisering* verloopt. De voorwaarden zijn nu geschapen om een stap verder te gaan in het onderwijsleerproces en te onderzoeken hoe het opereren met deze 'nieuwe' getallen in z'n werk gaat en vast te stellen welke regels hieraan ten grondslag liggen. De vraag is dan op welke wijze we de leerlingen deze rekenregels laten opsporen, en hoe we ze daarbij gebruik kunnen laten maken van steunpunten in hun denken. Steunpunten bijvoorbeeld als het tegengesteldebegrip, steunpunten ook als een direct uit de realiteit afkomstige 'krachtige' situatie zoals de spaarbank. Karakteristiek voor dit deel van het leerproces is nu dat geleidelijk aan een steeds formelere benaderingswijze van de sommen nodig is om oplossingen te kunnen vinden en beredeneren. Bij sommen als:

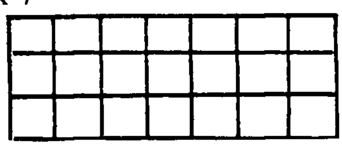
$$-3 - -2 = \qquad -3 \times 2 =$$
$$5 - -3 = \qquad -3 \times -5 =$$

wordt het steeds moeilijker en omslachtiger om er nog iets van een reële betekenis aan toe te kennen met behulp waarvan een oplossing uitgedacht kan worden. In wezen doet zich hier iets zeer opmerkelijks voor: het is wellicht voor het eerst in hun reken/wiskundige ontwikkelingsproces dat de leerlingen zich gesteld zien voor een reeks van wiskundige problemen waarbij de weg terug naar de realiteit waaruit die wiskunde voor hen is voortgekomen, steeds meer afgesneden en verbroken raakt. Het ziet ernaar uit dat de leerlingen hier op een zeker moment op de drempel komen te staan van een nieuwe getallenwereld, een wereld waarvan ze bepaalde grondtrekken al veel eerder hebben leren kennen, maar die als zodanig nieuw voor hen is. De vraag is dan hoe we ze over deze drempel helpen en hoe we ze binnenvoeren in de formele getallenwereld. Hoe verschaffen we ze toegang tot het formele systeem (Z, +, .)?

4. De permanentie van concretiseringen door Semadeni

Een interessante bijdrage aan de discussie werd enige tijd geleden geleverd door de Poolse didacticus Zbigniew Semadeni (1984), die getracht heeft op basis van Hankels permanentieprincipe een brug te slaan tussen de fenomenologische oriëntatie (zoals in het voorgaande aan de hand van het bankwezen) en het werken op formeel niveau. Niet meer de permanentie van rekenregels of algebraïsche wetten staan centraal in de educatieve ontwerpen van Semadeni, maar de permanentie van een concretisering (model, schema, context. e.d.). Dit betekent dat vanuit het denkmodel, dat tot stand is gekomen door organiserend en structurerend werk van een zekere situatie met wiskundige hulpmiddelen, een grensoverschrijding plaatsvindt. Het model blijft aanwezig als denkkader, het wiskundig domein wordt uitgebreid en krijgt een nieuwe betekenis. Zo kun je bijvoorbeeld het vermenigvuldigen binnen N betekenis geven en begrijpen in een rechthoekmodel:

3 x 7



Met handhaving van het rechthoekmodel kun je vervolgens bedenken wat bijvoorbeeld $3\frac{1}{2} \times 7$ zou kunnen betekenen en zelfs $3\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{2}$. Rekenregels als $3 \times 7 = 3 \times 5 + 3 \times 2$, eerder in het model zichtbaar gemaakt, leiden nu tot handige splitsingen als: $3\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{2} \doteq (3 + \frac{1}{2})(7 + \frac{1}{2}) = 3 \times 7 + 3 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 7 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$.
Semadeni beveelt de volgende vier stappen aan volgens welke het onderwijsleerproces kan worden ingericht.

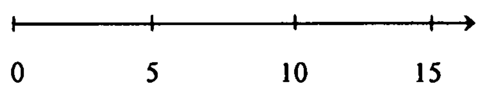
1. De leraar zoekt een geschikte concretisering, d.w.z. een bruikbaar denkmodel en een paradigmatisch voorbeeld waarin het denkmodel ontwikkeld, verkend en geoefend kan worden.
2. De leerlingen werken aan het voorbeeld, variëren de aantallen, hoeveelheden, getallen en blijven binnen de grenzen van het bekende domein.
3. De leraar stelt voor om het voorbeeld uit te breiden met nog onbekende getallen.
4. De leerlingen gaan op onderzoek in de nieuw ontstane situatie en beantwoorden vragen, die in gewone omgangstaal geformuleerd zijn. Op die manier vinden ze nieuwe getallen uit en bedenken hoe daarmee gerekend kan worden. Het denkkader, al dan niet aangepast, biedt steunpunten voor het denken.

Met deze aanwijzingen kunnen we proberen een ontwerp te maken voor het zojuist besproken, cruciale deel van het onderwijsleerproces rond negatieve getallen. Semadeni's aanpak blijkt dan interessante aanknopingspunten te bieden. Interessant is vooral dat hij de leerlingen binnen de gekozen concretisering laat komen tot een herbewustmaking van de rekenregels en wetmatigheden die ze in de loop der tijd met betrekking tot het bekende domein der natuurlijke getallen hebben leren kennen en waarmee ze tot op zekere hoogte vertrouwd zijn. Vervolgens laat hij, nog steeds binnen de in deze tekst gekozen concretisering, de overstap maken naar het nieuwe uitgebreidere domein en laat hij, mede op basis van de geactualiseerde kennis omtrent {N,+,.}, onderzoeken welke regels daar gelden. Het effect van een dergelijke overgang kan zijn dat daarmee de eigen wiskundige kennis rond het werken met de natuurlijke getallen in geactualiseerde vorm als steunpunt onderkend en gebruikt kan gaan worden. Daarmee zou dan het denkkader gecreëerd kunnen zijn waarmee de leerlingen de rekenregels die binnen Z gelden, kunnen onderzoeken en beredeneren: het formele systeem wordt hiermee toegankelijk gemaakt. Zo zou bij de aanwezigheid van een dergelijk denkkader, voor wat betreft het leren vermenigvuldigen met negatieve getallen, gebruik kunnen worden gemaakt van steunpunten die geworteld zijn in reële situaties (door bijvoorbeeld 3 x -2 te interpreteren als 3 keer een tekort van 2 gulden), maar ook van steunpunten die voortvloeien uit de eigen wiskundige kennis (bijvoorbeeld: -2 x -3 opvatten als het tegengestelde van 2 x -3). Vraag is nu echter wat voor concretisering het zou moeten zijn in termen waarvan de genoemde herbewustmaking van rekeneigenschappen binnen het systeem der natuurlijke getallen, gevolgd door het onderzoeken en in kaart brengen van de rekenregels binnen het systeem der gehele getallen, kan plaatsvinden. Een concretisering geeft een soort samenhang waarbinnen activiteiten en handelingen zin hebben.

De gezochte samenhang kan die van de wiskunde zijn, die van het getallensysteem-in-aanbouw zoals dat tot onderwerp van onderzoek gemaakt kan worden. De wiskunde zelf en de eigen kennis daarvan gaat dan min of meer als context fungeren en moet de leerlingen ook als zodanig gepresenteerd worden. Te denken valt dan aan een reeks activiteiten als:

* vermenigvuldigen: wat is dat ook alweer? Wat betekent dat ook al weer?;

* reken eens uit: 3 x 4, 15 x 6, 64 x 2, 3 x 99, 16 x 25, 24 x 334;
* bedenk eens een situatie waarin je 3 x 4 tegenkomt;
* hoe reken je dat uit: 64 x 2? Kun je uitleggen waarom dat zo mag?;
* hoe zou jij aan een zusje van 7 jaar uitleggen wat vermenigvuldigen inhoudt;
* hoe reken je 3 x 99 uit het hoofd uit? Kun je uitleggen waarom dat zo mag?;
* teken eens op de getallenlijn: 4 x 3;



* weet je ook wat het verband is tussen vermenigvuldigen en optellen? En tussen vermenigvuldigen en delen?
* je kunt natuurlijk ook vermenigvuldigen met negatieve getallen: 3 x -2, -2 x 3, -2 x -3, -3 x -2, ... probeer eens .....;
* bedenk eens een situatie waarin je 3 x -2 tegenkomt;
* lukt dat ook nog met -2 x 3? En met -2 x -3?;
* 3 x -2 kun je vast wel uitrekenen. Kun je uitleggen waarom dat zo mag?;
* en -2 x 3: hoe zou het daarmee zitten?;
* is er verband tussen -2 x 3 en 2 x 3? En tussen 2 x -3 en 2 x 3? Hoe zit dat?;
* en nu deze: -2 x -3. Zie je verband met 2 x -3? Wat zou -2 x -3 moeten zijn?;
* .....

Op een dergelijke wijze zou een koppeling plaats kunnen vinden van 'opgefriste' kennis van het getallensysteem der natuurlijke getallen aan de recentelijk verworven kennis omtrent de gehele getallen. Met behulp van het daarmee gecreëerde denkkader kan dan vervolgens onderzocht en beredeneerd worden hoe het opereren met de gehele getallen in z'n werk gaat. Nu hoeft het weinig betoog dat een dergelijke reeks activiteiten een zorgvuldige en geleidelijke opbouw van het onderwijsleerproces vergt: er wordt van de leerlingen heel wat gevraagd als men ze de wiskunde zelf als context wil doen ervaren. Gravemeijer en Van Galen (1986, p. 139), doen ten aanzien van het gebruik van de wiskunde als context een nadere aanbeveling voor die opbouw van het leerproces. Het lijkt hen zinnig de wiskundige kennis zelf pas tot onderwerp van onderzoek te maken, als deze wiskunde de leerlingen even vertrouwd is als de eerder gebruikte reële contexten. Waar het daarbij om gaat is dat de opdrachten en de gehanteerde begrippen betekenis hebben voor de leerlingen, zodat de leerlingen eigen aanpakken, eigen kennis en eigen vaardigheden tot ontwikkeling kunnen brengen. De leerlingen worden in dat leerproces gestimuleerd over eigen oplossingen te reflecteren. In het geval van de gehele getallen zou dit kunnen inhouden dat er bij de leerlingen iets van overzicht van het getallensysteem aan het groeien is; belangrijke eigenschappen van getallen en bewerkingen moeten daarin een plaats hebben, evenals relaties tussen getallen (zoals het tegengestelde-begrip), enzovoorts. Het lijdt weinig twijfel dat de verdere uitgroei van zo'n overzicht geruime tijd vergt. En hiermee zijn we aangeland bij het in de aanhef van dit artikel aangeduide problematiek.

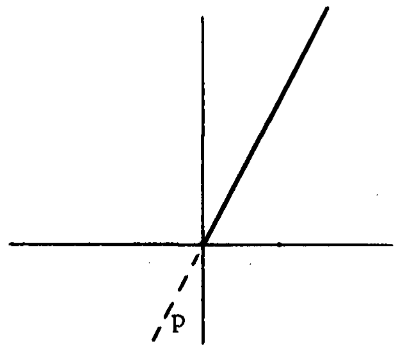
5. Het vermijden van ongewenste sluiproutes

Als we ons nog even de totaliteit van de geschetste leerweg voor de geest halen: werken in contexten (bank, heks, doelsaldi, enz.), reflecteren op N en anticiperen op het nieuwe systeem Z, gevolgd door toepassen dan blijkt onmiddellijk dat het verwerven van de rekenregels daarin pas op een laat tijdstip aan de orde komt. En dat, terwijl die rekenregels op zich eenvoudig van aard zijn. Men kan zich dan ook afvragen of deze leerweg zo is in te richten dat de leerlingen het verwerven van de rekenregels zo lang uit kunnen stellen tot een volwaardig begrip van het systeem der gehele getallen gevormd is. Er zullen heel wat leerlingen en ook leraren zijn die sterk de neiging hebben om al tijdens de fenomenologische oriëntatie, als het begrip nog grotendeels gevormd moet worden, de rekenregels via wat kunstgrepen uit een context 'af te leiden'. Een groot deel van het vervolg van het geschetste onderwijsleerproces zal dan vruchteloos aan leerlingen voorbijgaan, want ze weten toch al hoe ze moeten rekenen met de nieuwe getallen. Ze hebben dan als het ware een eigen sluiproute langs de leerweg gevonden, met het gevaar dat daardoor een sterk instrumenteel getinte attitude gaat ontstaan. Daarmee is het tegengestelde bereikt van hetgeen de ontwerpers van realistisch wiskunde-onderwijs beoogden.

6. Terugblik en vooruitblik

De aandacht voor sluiproutes door realistische leergangen is bedoeld als bijdrage aan de theorie. Het feit dat leerlingen in het voortgezet onderwijs van deze sluiproutes gebruik maken, is waargenomen in vele praktijksituaties, al kon men het verschijnsel tot nog toe niet als zodanig benoemen. Is nu met deze constatering de onderwijstheorie van het realistisch reken-wiskundeonderwijs onjuist of ontoereikend gebleken? Tenslotte hebben zeker wiskundigen genoeg aan één tegenvoorbeeld om een veronderstelling te verwerpen.

We menen van niet. In de voorgaande beschouwingen hebben we ons, bij nader inzien, te sterk laten leiden door de praktijk van het brugklasonderwijs. Hoewel daarin sterke trekken van realistische leergangen herkenbaar zijn, is de daar gevolgde didactiek nog niet als directe afgeleide van de theorie te beschouwen. Wat ondermeer ontbreekt is een ingang naar het verticale mathematiseren. De fenomenologische oriëntaties, die in de brugklas plaatsvinden, zijn gericht op concrete objecten en fenomenen (doelsaldi, koude en warme blokjes in de heksenketel, plus- en mintreintjes e.d.). Dat de fenomenologische oriëntatie zich ook kan richten op wiskundige objecten en fenomenen, is in die praktijk nauwelijks onderkend. Toch zijn er in het verleden didactici geweest die, vanuit zuiver praktische overwegingen, op deze mogelijkheid hebben gewezen. Dat van hun ontwerpen nauwelijks iets in de schoolboeken is terecht gekomen, is niet verwonderlijk. Om namelijk een stukje wiskunde te kunnen gebruiken als object van een fenomenologische oriëntatie, moet die wiskunde eerst op het "gebruiksniveau" geleerd worden. Negatieve getallen nu, worden in het algemeen vooraan in het v.o.-programma behandeld, zodat voor een mogelijk andere aanpak ingrijpende verschuivingen van leerstof zouden moeten plaatsvinden. We veronderstellen nu dat de plaats van het onderwerp 'negatieve getallen' in het curriculum er de oorzaak van is dat de theorie van het realistisch wiskunde-onderwijs hier niet tot adequate leergangen kan leiden. Een zeer geschikt hoofdstuk uit het wiskundeprogramma is in dit verband dat over functies en grafieken. Ondermeer Sawyer (1964) heeft daarop in het bijzonder gewezen en dat niet alleen, hij werkte zijn gedachte nader uit. Hiervan is het volgende een afspiegeling. Neem de grafiek van $f(x) = 2x$



Punten op deze lijn worden bepaald door coördinaten: (1,2), (2, 4). Daarin herken je ook de vergelijking weer, de y is steeds 2 keer zo groot als de x. In het derde kwadrant wil je natuurlijk dat hetzelfde opgaat. Na uitvinding van de negatieve getallen voor aanduidingen links van de y-as, is dat in de coördinaten van P(-1, -2) te zien. Als je tenminste -2 als 2.(-1) wilt zien.
Nu hebben we ook grond onder de voeten om de grafiek y=-2x te bestuderen. De grafiek toont dat ondermeer (-2, 4) hierop ligt, dus dat -2. -2 = +4 niet zo onverstandig is. In de tabel, behorend bij deze verlijking, wordt de algemene rekenregel achter deze aanname zichtbaar:

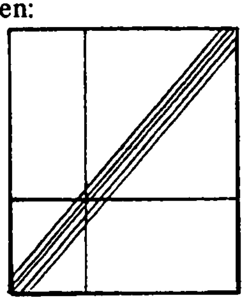
x	0	-1	-2	-3	-4
y	0	2	4	6	8

Voortgaand onderzoek aan kwadratische functies zal het vertrouwen in de eerder gedane uitvindingen, gerezen vermoedens en daarop gebaseerde beslissingen versterken.
Neem bijvoorbeeld $f(x) = x^2 - 6x + 5$

Bijbehorende tabel

x	0	½	1	2	3	4	5	5½	6
f(x)	5	2¼	0	-3	-4	-3	0	2¼	5

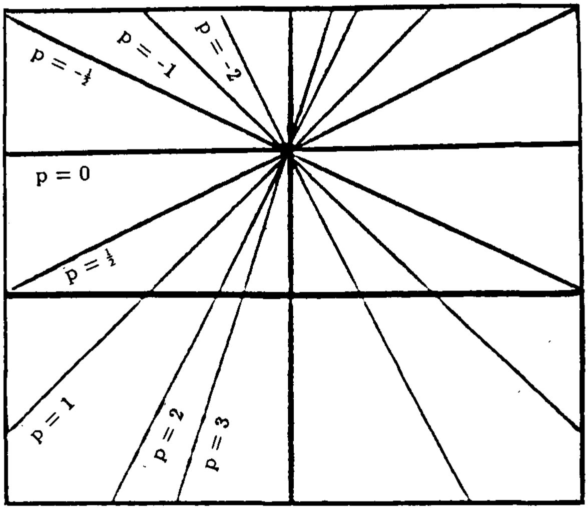
De vorm van de hier bedoelde grafiek hebben we al een keer ontmoet bij $f(x) = x^2$. Alle punten daarvan zaten echter boven of op de x-as, omdat $x^2 > 0$. Nu zakt het deel tussen $x = 1$ en $x = 5$ er echter onder: de grafiek van $f(x)$ is met behulp van $y = x^2$ wel te vinden en via $f(2) = 2^2 - 6.2 + 5 = 4$ (een negatief getal) ook te reconstrueren (-3). Nu kun je $x^2 - 6x + 5$ ook lezen als $(x - 5)(x - 1)$. En kijk nu eens wat er voor $x = 2$ staat? $(2 - 5)(2 - 1) = -3.1$ en dat is -3 zoals we zagen. Na deze informele beschouwingen over onderdelen van een formeel systeem in wording, gaan we een stapje verder. Kenmerkend voor een stukje formele wiskunde is ondermeer dat uitspraken en redeneringen een algemeen karakter hebben. Dat wil zeggen dat ze over een heleboel zaken tegelijk gaan. Sawyer, die we nog steeds op de voet volgen, geeft daarvan een paar zeer doorzichtige voorbeelden. Neem de grafieken van de volgende vijf vergelijkingen:



$y = 2x + 2$
$y = 2x + 1$
$y = 2x$
$y = 2x - 1$
$y = 2x - 2$

Op het eerste gezicht (van de vergelijkingen) zou je geneigd zijn aan twee soorten te denken:
soort 1: $y = 2x$ plus iets
soort 2: $y = 2x$ min iets
($y = 2x$ behoort tot beide soorten). Maar kijk je naar de grafieken, dan is er eigenlijk geen verschil tussen de soorten. Je kunt dan ook beter over één soort, n.l. $y = 2x + q$ spreken en toelaten dat q ook negatief mag worden. Na die beslissing is het ook nog aardig om na te gaan wat de betekenis van q voor de grafiek is. Neem $x = 0$, dan wordt $y = q$. Dus q is het door de grafiek van de y-as afgesneden stuk. Zit dat deel boven de x-as, dan is $q > 0$, zit het eronder dan is $q < 0$. Negatieve getallen hebben er hier voor gezorgd dat onze uitspraken over lineaire vergelijkingen een algemener karakter kregen en daardoor beter de meetkundige representatie beschreven. Natuurlijk moet je na a ook b zeggen, of beter, in dit geval na q ook p. De lijnen y =

px + q (houd q even constant) vormen ook één familie, als p zowel groter als kleiner dan 0 mag zijn, zelfs een hechte familie. In een meetkundige presentatie is dit heel goed te zien (y = px + 2).



Zo te zien maakt de ontdekking van negatieve getallen veel onaffe dingen af. Vroeger lieten didactici dit alleen maar zien aan de getallenlijn, die naar links van 0 voortgezet kon worden. Bovenstaande beschouwingen gaan verder, ze betreffen belangrijke consequenties voor het systeem van de wiskunde. De lezer kan zich wel voorstellen hoe op dezelfde manier de vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ algemene betekenis kan worden toegekend en hoe daarbij de "berg"- en "dal"parabolen hun invloed doen gelden.

Tot zover W.W.Sawyer, die hiermee misschien de weg heeft gewezen om ongewenste sluiproutes door realistische leergangen te blokkeren. Als dit zo is en alleen de praktijk van het onderwijs kan dit laten zien, dan is onze theoretisch geïnspireerde praktijkwaarneming uitgelopen op een nieuw educatief ontwerp binnen de realistische onderwijstheorie. Als dat ontwerp succes heeft, d.w.z. als de leerlingen het beoogde horizontaal en verticaal mathematiseren zonder mankeren kunnen beoefenen, dan heeft ook op dit punt de realistische onderwijstheorie iets van zijn constructieve capaciteit getoond.

Noten

1. Dit artikel is geschreven naar aanleiding van een lezing die de drie auteurs gehouden hebben op de NVORWO-conferentie voor onderzoekers van reken-wiskunde-onderwijs te Noordwijkerhout op 29 en 30 mei 1986. Met denk aan Adri Treffers voor zijn verwijzing naar Sawyer.

2. OGLO (1987) Het boek verschijnt binnenkort bij Bekadidact onder de titel "Tegengesteld". Het is speciaal bedoeld voor lerarenopleiders, bruikbaar als informatiebron ten behoeve van a.s. onderwijsgevenden, maar kan ook interessant zijn voor basisschool- en wiskunde-leraren, ouders en andere belangstellenden. Voor lerarenopleiders bevat het veel opleidingsdidactische noties ingebed in de didactiek van de wiskunde en het wiskundeonderwijs.

Literatuur

Freudenthal, H. (1984) *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren*, Utrecht.

Freudenthal, H. (1984) *Appels en peren/wiskunde en psychologie*, Apeldoorn, 1984.

Freudenthal, H. (1987) Theorievorming bij het wiskundeonderwijs. Geraamte en gereedschap, *Panama-post 5*, 3, 4-15.

Goffree, F. (1986) *Rekenen, Realiteit en Rationaliteit* (oratie). Enschede.

Goffree, F. & J. ter Pelle (1987) Van Rekenen (op je 10de) naar Wiskunde (op je 16de), *Euclides 62*, 5, 137-141.

Gravemeyer, K. & F. van Galen (1986) De betekenis van contexten, *Panama cursusboek 4*, 135-142.

Sawyer, W.W. (1964) *Aanschouwelijk Algebra*. Utrecht: Prisma, 316-337.

Semadeni, Z. (1984) A principle of concretization permanence for the formation of arithmetical concepts, *Educational Studies in Mathematics 15*, 379-395.

Treffers, A. (1987), *A model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction - the Wiskobas Project*, Dordrecht: Reidel.

Treffers, A. & F.Goffree (1985) Rational Analysis of Realistic Mathematics Education - The Wiskobas Program. In: L.Streefland (ed.). *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Volume II*, Utrecht, 97-121.

Wansink, J.H. (1967) *Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren, tweede deel*, Groningen.