Fouten en knelpunten bij het oplossen van problemen over de projectielbeweging

Een analyse van 152 schriftelijke oplossingen

M. Vanderlocht & J. Van Damme
K.U. Leuven, Afdeling Didactiek

Summary
In this article we present a description and an analysis of errors and difficulties which occur in 152 solutions of problems on projectile motion. The background for the description of errors and difficulties is a task analysis which makes explicit the knowledge and the operations involved in solving problems on projectile motion.

1. Doelstellingen, leerstofonderdeel, proefgroep en onderzoeksmethode

Het is een gemeenschappelijke bevinding van menig docent dat studenten vrij veel moeilijkheden ondervinden bij het oplossen van natuurkundige problemen. In het kader van het ISSAD-project hebben we ons tot doel gesteld meer inzicht te verwerven in de aard en de oorzaken van deze moeilijkheden om vervolgens een aantal gefundeerde aanbevelingen voor de optimalisatie van dit onderwijsleerproces te formuleren, te concretiseren en te evalueren.

De *doelstelling* van dit eerste deelonderzoek is het inventariseren en analyseren van fouten en knelpunten die voorkomen in 152 schriftelijke oplossingen van problemen over een beperkt leerstofonderdeel uit de mechanica, nl. de projectielbeweging. We spreken van een knelpunt wanneer een oplosser een noodzakelijke stap in de oplossing van een probleem niet uitvoert. We spreken van een fout als de uitvoering van een oplossingsstap wel plaats vindt maar op een onjuiste manier. De inventarisatie van fouten en knelpunten gebeurt tegen de achtergrond van een taakanalyse waarin we expliciteren welke kenniselementen en operaties een rol spelen bij het oplossen van projectielproblemen. Het is tevens onze bedoeling te zoeken naar mogelijke oorzaken van de vastgestelde fouten en knelpunten.

De schriftelijke protocollen die we analyseerden zijn oplossingen van zeven problemen over de *projectielbeweging*. De projectielbeweging is een beperkt leerstofonderdeel uit het hoofdstuk mechanica van de cursus natuurkunde die de proefgroep volgt. De projectielbeweging is een bijzondere bewegingsvorm die zich voltrekt volgens twee dimensies. Ze doet zich voor wanneer een projectiel horizontaal of schuin in het zwaarteveld van de aarde terecht komt en wanneer enkel de zwaartekracht invloed uitoefent op het voorwerp. We hebben dit onderwerp om twee redenen gekozen. Ten eerste blijken de studenten uit onze proefgroep zeer matig te presteren bij het oplossen van problemen over de projectielbeweging. Uit een overzicht van de resultaten die de proefgroep behaalde op een tussentijds examen mechanica in 1985 en 1986 blijkt dat de gemiddelde score voor de zeven projectielproblemen die in deze examens werden opgenomen slechts 39% bedraagt, terwijl de gemiddelde totale score voor de twee jaren respectievelijk 50,3% en 53,2% bedraagt. Een tweede reden is dat de projectielbeweging vrij vroeg in het academiejaar aan bod komt, wat praktische voordelen biedt voor een eventueel vervolgonderzoek.

De studenten uit onze *proefgroep* zijn eerstejaarsstudenten laborant aan een Vlaams Instituut voor Hoger Onderwijs buiten de Universiteit. Deze studenten hebben wekelijks acht uur natuurkunde op hun programma waarvan drie uur theorie, drie uur practicum en twee uur oefeningen. Ongeveer half december krijgen de studenten een tussentijds examen met vier of vijf vraagstukken mechanica. De resultaten op dit examen tellen voor een beperkt gedeelte mee in de eindbeoordeling voor het vak natuurkunde. De schriftelijke protocollen komen uit de examens mechanica 1985 en 1986 en zijn afkomstig van 152 verschillende studenten.

Het onderzoek gebeurt via een analyse van de *schriftelijke oplossingen* die ons door de docenten ter beschikking werden gesteld. We hebben geopteerd voor deze methode op grond van twee overwegingen. Gezien het verkennend karakter van dit eerste deelonderzoek was het wenselijk een groot aantal oplossingen te analyseren. Het verzamelen en verwerken van schriftelijke oplossingen is veel minder tijdrovend dan onderzoeksmethoden zoals hardop denkend probleemoplossen en laat dan ook toe een veel groter aantal oplossingen in het onderzoek op te nemen. Een tweede overweging is dat docenten jaarlijks bij het corrigeren van toetsen en examens een groot aantal schriftelijke oplossingen van problemen ter inzage krijgen. Wanneer het mogelijk is via een analyse van schriftelijke oplossingen betekenisvolle patronen van knelpunten en fouten op te sporen, dan kan dit voor docenten een belangrijke inspiratiebron vormen voor de optimalisatie van hun onderwijsgedrag. Ook vanuit deze overweging lijkt het zinvol de informatiewaarde van schriftelijke oplossingen te evalueren.

De analyse van de oplossingen gebeurde in twee fasen. Eerst werden de protocollen herhaaldelijk doorgenomen om tot een definitief codeerschema te komen. Vervolgens werden alle protocollen nogmaals doorgenomen en definitief gecodeerd.

2. Oplossen van projectielproblemen: een taakanalyse

De bedoeling van een taakanalyse is het expliciteren en ordenen van de kennis en de operaties die vereist zijn voor het uitvoeren van een bepaalde taak (Stephens, Bhaskar & Dillard, 1981; Jochems & Vastenhouw, 1985). In deze paragraaf zullen we zo een taakanalyse presenteren voor het oplossen van projectielproblemen.

In het oplossingsproces van natuurkundige problemen kunnen drie grote stappen onderscheiden worden. In de fase van probleemanalyse dienen de gegevens en de gevraagden uit de opgave vertaald te worden in termen van natuurkundige grootheden. Wanneer de beschikbare informatie in de opgave natuurkundig vertaald is, wordt het mogelijk natuurkundige wetten en formules, die relaties leggen tussen verschillende grootheden, toe te passen op de probleemsituatie en zo een stelsel van vergelijkingen te genereren. Als het aantal gegenereerde vergelijkingen voldoende groot is, kunnen door oplossing van het gegenereerde stelsel de waarden van de gezochte grootheden berekend worden en verkrijgt men een uitkomst.

We zullen deze drie stappen dadelijk concretiseren voor het oplossen van projectielproblemen. Ter illustratie wordt hierbij voornamelijk verwezen naar de oplossing van opgave drie. De zeven opgaven en de oplossing van opgave drie zijn respectievelijk in bijlage één en twee opgenomen.

Probleemanalyse: vertalen van gegevens en gevraagden in termen van natuurkundige grootheden

Tabel 1 geeft een overzicht van de natuurkundige vertaling van de gegevens en de gevraagden uit de zeven opgaven. Belangrijke grootheden waarmee men de bewegingstoestand van een voorwerp op een bepaald tijdstip kan beschrijven zijn de positie, de ogenblikkelijke snelheid en de versnelling. Bij een projectielbeweging zijn de totale versnelling en ook de versnellingscomponenten volgens beide assen steeds gekend en constant. In de fase van probleemanalyse kan de versnelling dan ook buiten beschouwing blijven.

Tabel 1: Natuurkundige vertaling van de gegevens en de gevraagden (?) in de zeven opgaven

	1	2	3	4	5	6	7
x(o)	0m	0m	0m	0m	0m	0m	0m
y(o)	0m	?	0m	0m	78,4m	0m	2m
x(t)	4000m	?	?	?	?	10m	?
y(t)	0m	0m	60m	-	0m	5m	0m
v(o)	?	8m/s	50m/s	12m/s	300m/s	?	2m/s
Θ(o)	35°	-20°	55°	48°	0°	60°	60°
v(t)	-	-	?	-	-	-	-
Θ(t)	-	-	-	-35° -	-	-	
t	?	3s	?	?	?	?	?

Identificeren van tijdstippen

Het maatgetal van een grootheid is afhankelijk van het tijdstip waarop men de grootheid beschouwt. In de zeven projectielproblemen is telkens sprake van twee tijdstippen, nl. het begin van de beweging (t = 0 s) en een tijdstip t waarover bijkomende informatie wordt gegeven en/of gevraagd. In zes van de zeven opgaven wordt gevraagd dit tijdstip t te berekenen. In opgave twee is dit tijdstip gegeven.

Beschrijven van posities

De beschrijving van de positie van een voorwerp dient steeds te gebeuren vanuit een bepaald assenstelsel. Bij de projectielbeweging zal een twee-dimensionaal (X,Y)-assenstelsel volstaan. De keuze van het (X,Y)-assenstelsel is in principe vrij. Bepaalde assenstelsels zijn wel meer voor de hand liggend dan andere omdat ze de positiebeschrijvingen vereenvoudigen. De oorsprong van de X-as kan men het beste laten samenvallen met de positie van waaruit het voorwerp wordt weggeworpen. De oorsprong van de Y-as kan men best situeren ter hoogte van de grond. In de tekeningen die vijf van de zeven opgaven bevatten, is het assenstelsel op deze wijze geplaatst. In opgave drie kan de informatie over de posities als volgt natuurkundig beschreven worden: $x(o) = 0$ m $x(t) = ?$

$y(o) = 0$ m $y(t) = 60$ m

Beschrijven van de ogenblikkelijke snelheden

Na het identificeren van de posities dient men in de opgave op zoek te gaan naar informatie over de grootte ($v(t)$) en de richting en zin ($\Theta(t)$) van de ogenblikkelijke snelheid van het voorwerp op bepaalde tijdstippen.

In opgave drie zijn de waarden van $v(o)$ en $\Theta(o)$ expliciet gegeven. Onder c wordt gevraagd naar de grootte van de snelheid waarmee het projectiel de heuvel treft. We kunnen dit vertalen als $v(t) = ?$ In opgave vijf is de waarde van $\Theta(o)$ minder expliciet aanwezig. Het gegeven dat het projectiel horizontaal wordt afgevuurd, dient hier geëxpliciteerd te worden als $\Theta(o) = 0°$. In probleem twee dient men uit de tekening af te leiden dat de bal naar beneden wordt geworpen en dat bijgevolg $\Theta(o) = -20°$. Ook in probleem vier is de ogenblikkelijke snelheid op tijdstip t beneden de horizontale gericht, wat betekent dat $\Theta(t) = -35°$.

Genereren van vergelijkingen: toepassen van natuurkundige formules

Een tweede stap in de oplossing is het genereren van vergelijkingen die relaties leggen tussen gekende en gezochte grootheden. Oplossen van projectielproblemen veronderstelt dan ook kennis en kunnen toepassen van een aantal formules. Tabel 2 geeft een overzicht van deze formules. We onderscheiden drie groepen: vectorformules, formules van het bewegingsverloop en supplementaire formules.

Vectorformules

De eerste twee formules geven weer hoe men op basis van de grootte en de richting en zin van de ogenblikkelijke snelheid van een voorwerp op een bepaald tijdstip t de ogenblikkelijke snelheidscomponenten volgens de X-as en de Y-as kan bereke-

Tabel 2: Overzicht van de formules voor het oplossen van projectielproblemen

1. vectorformules

1. $v_x(t) = v(t).\cos\theta(t)$
2. $v_y(t) = v(t).\sin\theta(t)$
3. $v(t) = \surd\{v_x(t)^2 + v_y(t)^2\}$
4. $tg\theta(t) = \dfrac{v_y(t)}{v_x(t)}$

2. formules van het bewegingsverloop

5. $x(t) = x(o) + v(o).\cos\theta(o).t$
6. $v_x(t) = v(o).\cos\theta(o) = \text{constant}$
7. $y(t) = y(o) + v(o).\sin\theta(o).t - \frac{1}{2}.g.t^2$
8. $v_y(t) = v(o).\sin\theta(o) - g.t$

3. supplementaire formules

9. $R = \dfrac{v(o)^2.\sin 2\theta(o)}{g}$
10. $T = \dfrac{2.v(o).\sin\theta(o)}{g}$
11. $H = \dfrac{v(o)^2.\sin^2\theta(o)}{2g}$

nen. Dit opsplitsen is vereist omdat bij een projectielbeweging de verticale en de horizontale component onafhankelijk van elkaar en op verschillende wijze evolueren in functie van de tijd. Formules drie en vier beschrijven de omgekeerde bewerking nl. het samenstellen van snelheidscomponenten. Op basis van de ogenblikkelijke snelheidscomponenten volgens de X-as en de Y-as op een bepaald tijdstip t kunnen de grootte (3) en de richting en de zin (4) van de totale ogenblikkelijke snelheid op tijdstip t berekend worden.

Formules van het bewegingsverloop
Uitgangspunt voor de beschrijving van het bewegingsverloop bij een projectielbeweging is de onderlinge onafhankelijkheid van de bewegingscomponenten volgens de X-as en de Y-as. Onder invloed van de zwaartekracht zal er zich volgens de verticale as een valbeweging voltrekken. De zwaartekracht heeft echter geen invloed op de horizontale snelheidscomponent daar de zwaartekracht loodrecht staat t.o.v. deze component. Op de horizontale as voltrekt zich bijgevolg een eenparige beweging. Deze globale beschrijving wordt verder uitgewerkt in de formules vijf t.e.m. acht, die weergeven hoe bij een projectielbeweging de positie en de ogenblikkelijke snelheid volgens de X-as en de Y-as evolueren in functie van de tijd.

Supplementaire formules
Bij een bijzondere vorm van projectielbeweging waarbij de lanceerhoogte en de eindhoogte 0 m zijn, is het mogelijk de formules negen t/m elf af te leiden. Deze formules laten toe om op een directe manier de reikwijdte (R), de vluchttijd (T) en de maximale hoogte (H) van een projectielbeweging te berekenen. Deze parameters kunnen echter ook berekend worden met de algemene formules. Kennis van deze RTH-formules is dus eigenlijk niet vereist. We hebben ze in ons overzicht opgenomen omdat ze ook in de cursus van de proefgroep vermeld worden.

Als men gebruik maakt van de RTH-formules is het belangrijk de toepassingsbeperkingen ervan te kennen en in het oog te houden. Zoals vermeld, mogen ze slechts toegepast worden bij projectielproblemen waarbij lanceerhoogte en eindhoogte beide 0 m zijn. Dit is enkel het geval in opgave één. In de oplossing van de overige zes opgaven mogen de RTH-formules niet gebruikt worden.

Oplossen van het gegenereerde stelsel van vergelijkingen
Om uit formule zeven de vluchttijd te berekenen, is het soms nodig een tweedegraadsvergelijking op te lossen. Dit is het geval in de opgaven drie en zeven. Oplossen van een tweedegraadsvergelijking in deze natuurkundige context impliceert drie stappen. Een eerste stap is dat de oplosser zelf inziet dat hij te maken heeft met een tweede-graadsvergelijking. In een tweede stap dient hij de nulpunten te berekenen. In een derde stap dient hij uit de context van de probleemsituatie af te leiden welk van

de berekende vluchttijden het antwoord geeft op de vraagstelling in de opgave. Deze laatste stap kunnen we illustreren aan de hand van de oplossing van opgave drie. De oplossing van de tweedegraadsvergelijking geeft als nulpunten 1,89 s en 6,46 s. Terugkoppelend naar de probleemsituatie betekent dit dat het afgevuurde projectiel zich op deze twee tijdstippen op een hoogte van 60 m bevindt. Na 1,89 s zal het projectiel al stijgend een hoogte van 60 m bereiken. Na 6,46 s bereikt het opnieuw een hoogte van 60 m, maar nu al dalend. Uit de tekening bij opgave drie blijkt dat het projectiel de heuvel al dalend raakt. Het gezochte tijdstip is dus 6,46 s.

Validiteit van de taakanalyse

Om de validiteit van de taakanalyse te evalueren, hebben we nagegaan of het inderdaad mogelijk is projectielproblemen op te lossen met de geïnventariseerde kenniselementen. Dit bleek het geval te zijn zowel voor de opgaven uit dit onderzoek als voor een reeks projectielproblemen die we uit verschillende handboeken hebben verzameld. Ter illustratie geven we de oplossing van de opgaven drie en vijf schematisch weer. De cijfers in het schema verwijzen naar de formules in tabel twee. Het schema geeft weer hoe, vertrekkende van gekende grootheden en door toepassing van deze formules, de waarden van ongekende grootheden en uiteindelijk de waarden van de gezochte grootheden kunnen berekend worden. Het kwadraat in de oplossing van opgave 3 geeft weer dat voor het berekenen van t een tweedegraadsvergelijking moet opgelost worden.

Figuur 1: Schematische voorstelling van de oplossing van opgaven 3 en 5

```
                  opgave 3

                  x(o)-┐
                  v(o)-┤
y(o)-┐            θ(o)-┼--5--->x(t)
y(t)-┼---7²---->   t   -┘
v(o)-┤             t   -┐
θ(o)-┘            v(o)-┼--8--->v_y(t)┐
                  θ(o)-┘             ├--3-->v(t)
                  v(o)-┬--6--->v_x(t)┘
                  θ(o)-┘

                  opgave 5

y(o)-┐
y(t)-┼--7--->  t   -┐
v(o)-┤        x(o)-┼--5--->x(t)
θ(o)-┘        v(o)-┤
              θ(o)-┘
```

We eindigen deze paragraaf met twee opmerkingen. Ten eerste wijzen we erop dat bepaalde deelopgaven van de projectielproblemen ook opgelost kunnen worden door toepassing van de wet van behoud van mechanische energie. We hebben deze echter niet in de taakanalyse opgenomen omdat geen enkele student ze gebruikte bij de oplossing van de geanalyseerde opgaven. Ten tweede wijzen we erop dat de taakanalyse het uitgangspunt vormt voor onze analyse van de oplossingen maar dat ze niet als uitgangspunt werd gebruikt bij het onderwijzen van de projectielbeweging aan de proefgroep.

3. Globale prestaties

Tabel 3: Gemiddelde door de docenten toegekende score voor de zeven opgaven

	1	2	3	4	5	6	7	Tot.
$\bar{x}$	3,7	5,3	3,0	2,0	1,8	4,5	8,2	3,9
SD	3,9	2,8	2,6	2,7	3,6	3,5	2,9	3,8
n	22	23	21	24	26	16	20	152

We geven een beeld van de globale prestaties van de studenten via twee invalshoeken, ten eerste via de scores zoals gegeven door de docenten en ten tweede via een analyse van de uitkomsten.

Uit tabel drie blijkt dat de gemiddelde *"docentscore"* voor de zeven opgaven 3,9 op 10 is. Bij de kwotering wordt door de docenten niet enkel de uitkomst maar heel de oplossingsweg in beschouwing genomen. De *uitkomst* van een oplossing is een beperkt maar zeer eenduidig aangrijpingspunt om de kwaliteit van oplossingen globaal te beoordelen. De codering van de uitkomsten gebeurt per deelopgave. Van de 325 deelopgaven bevatten er 25,2% een juiste uitkomst, 51,4% een foute uitkomst en 23,4% geen uitkomst.

We weten nu dat slechts een kwart van de deeloplossingen tot een juiste uitkomst leidt. In de volgende paragraaf gaan we op zoek naar de fouten en knelpunten die er voor zorgen dat in drie kwart van de deeloplossingen geen of een foute uitkomst bereikt wordt.

4. Fouten en knelpunten in de 152 oplossingen
Probleemanalyse

Tabel 4: Overzicht van de fouten in de probleemanalyse

	positie					snelheid grootte			snelheid richting en zin			Tot.
	x(o)	y(o)	x(t)	y(t)	tot.	v(o)	v(t)	tot.	θ(o)	θ(t)	tot.	
gegevens	4	3	0	19	26	1	9	10	28	6	34	70
gevraagden	0	8	1	0	9	1	5	6	0	0	0	15
totaal	4	11	1	19	35	2	14	16	28	6	34	85

We stellen vast dat respectievelijk 70 en 15 fouten voorkomen bij het natuurkundig vertalen van de gegevens en de gevraagden. Dit geeft een totaal van 85 fouten in de probleemanalyse. Vijfendertig fouten hebben betrekking op het beschrijven van de posities. Zestien fouten hebben betrekking op het beschrijven van de grootte van ogenblikkelijke snelheden en bij het beschrijven van de richting en zin van ogenblikkelijke snelheden komen 34 fouten voor.

Beschrijven van posities
In de foute positiebeschrijvingen kunnen we twee belangrijke groepen onderscheiden. Een eerste groep fouten zijn *verwarringen* hetzij tussen de X-as en de Y-as, hetzij tussen de twee tijdstippen waarvan in de opgaven telkens sprake is. Zo stellen drie studenten in opgave één dat y(t) = 4000 m terwijl x(t) = 4000 m. In opgave vijf stellen twee studenten dat x(o) = 78,4 m terwijl y(o) = 78,4 m. In opgave zeven stelt één student dat x(o) = 2 m terwijl y(o) = 2 m. Eén student zoekt in deze opgave y(t) i.p.v. x(t). Andere verwarringen hebben betrekking op de tijdstippen waarover sprake is. Zo stellen twee studenten in opgave vijf dat y(o) = 0 m en y(t) = 78,4 m terwijl y(o) = 78,4 m en y(t) = 0 m. Deze verwarringen worden mede in de hand gewerkt door ongedifferentieerd gebruik van symbolen. Zo zien we dat menig student geen onderscheid maakt tussen x-symbolen en y-symbolen en verder valt het op dat tijdspecificaties meestal niet worden aangegeven. Men noteert x of y i.p.v. x(o), y(o), x(t) of y(t).

Een tweede groep fouten zijn te beschouwen als *veralgemeningen van een vertrouwde positiebeschrijving.* Het 'typische projectielprobleem' waarmee de studenten vanuit de theorie en de oefeningensessies het meest vertrouwd zijn, ziet er als volgt uit: er wordt informatie gegeven over het begin van de beweging, het voorwerp komt een eind verder op de grond terecht en er wordt informatie gevraagd over de positie of de snelheid op dat tijdstip. De opgaven twee en vier wijken elk op een bepaald punt af van deze typische probleemsituatie. Zo wordt in opgave twee informatie gevraagd over de beginpositie en niet over de eindpositie. In deze opgave komt eenzelfde foutenpatroon dan ook acht keer voor. Acht studenten stellen dat y(o) = 0 m i.p.v. onbekend en zij berekenen y(t) i.p.v. y(o). In opgave vier stellen vijf studenten dat y(t) = 0 m terwijl de waarde van y(t) onbekend is. In de typische opgave waar het voorwerp op tijdstip t op de grond terecht komt, geldt inderdaad dat y(t) = 0 m. In opgave vier wordt echter geen informatie gevraagd over het tijdstip waarop de bal op de grond terecht komt, maar over een tijdstip tijdens de beweging waarop de bal zich nog boven de grond bevindt.

Beschrijven van de grootte van ogenblikkelijke snelheden

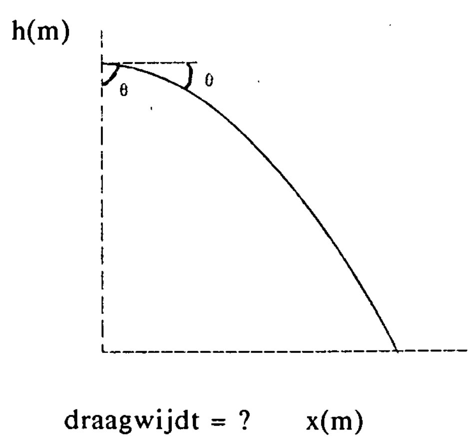
We stellen vast dat elf studenten ten onrechte *een waarde van 0 m/s toekennen aan v(t)* of in enkele gevallen aan $v_x(t)$ of $v_y(t)$. We zien twee plausibele verklaringen hiervoor. In sommige opgaven over de projectielbeweging maar ook over de verticale worp wordt gevraagd wat het hoogste punt is dat het weggeworpen voorwerp zal bereiken. Een belangrijke stap in de oplossing van zulke opgaven is de gelijkstelling $v_y(t)$ = 0 m/s bij een schuine worp en v(t) = 0 m/s bij een verticale worp. Een aantal van deze fouten zijn dus mogelijk een ongeldige veralgemening van een vertrouwde snelheidsbeschrijving. Een tweede mogelijke verklaring kwamen we op het spoor toen een student tijdens een oefeningensessie aan het bord deze fout maakte. Toen de docent om een verantwoording vroeg voor een verkeerde gelijkstelling v(t) = 0 m/s, antwoordde de student: "Als het projectiel op de grond terecht komt, zal het stil liggen en dus is de snelheid dan 0 m/s". Dit antwoord wijst op een onvolledig inzicht in de abstractie die gemaakt wordt bij de beschrijving van een projectielbeweging. De kinematische beschrijving van het bewegingsverloop bij een projectielbeweging is slechts geldig tot het tijdstip juist vóór het projectiel de grond raakt en dan is de snelheid zeker niet gelijk aan 0 m/s.

Beschrijven van de richting en zin van ogenblikkelijke snelheden
Bij de oplossing van opgave vier stellen we vast dat twee studenten Θ(o) de waarde 35° geven i.p.v. 48°. De waarden van Θ(o) en Θ(t) worden dus verwisseld en ook hier stellen we vast dat deze twee studenten net als de meeste anderen geen tijdspecificaties aangeven in hun Θ-symbolen.

In de opgaven twee en vier dient uit de tekeningen te worden afgeleid dat respectievelijk Θ(o) = -20° en Θ(t) = -35°. We stellen vast dat in beide opgaven respectievelijk veertien en zes studenten dit minteken over het hoofd zien.

In opgave vijf dient de oplosser het gegeven dat het projectiel horizontaal wordt afgevuurd natuurkundig te vertalen als Θ(o) = 0°. Deze vertaling loopt bij de meesten fout. Vier studenten kennen zelf een foute waarde toe aan Θ(o). Twee oplossers geven Θ(o) de waarde van 45°. Deze waarde wordt in de cursus vermeld als de lanceerhoek waarbij de reikwijdte maximaal is. Twee studenten stellen dat Θ(o) = 90°. Hieronder tonen we de tekening die voorkomt in de oplossing van één van deze studenten. Uit de tekening blijkt dat deze student getwijfeld heeft aan de wijze waarop Θ(o) moet bepaald worden. Uiteindelijk heeft hij de hoek bepaald t.o.v. de verticale as i.p.v. de horizontale as, wat inderdaad 90° als resultaat geeft.

Figuur 2: Tekening uit protocol 5.24



Naast de vijf studenten die een foute waarde toekennen aan $\Theta(o)$, zijn er zeven studenten die zelf een waarde berekenen voor $\Theta(o)$ niettegenstaande deze, zij het impliciet, gegeven is in de opgave. Zes van deze zeven studenten berekenen $\Theta(o)$ op dezelfde manier. Zij trachten het probleem op te lossen door toepassing van de RTH-formules. Ze stellen de maximale hoogte gelijk aan 78,4 m en berekenen op basis van formule 11 dat $\Theta(o) = 7{,}5°$. Vervolgens vullen ze deze waarde in in formule 10 om de waarde van x(t) te berekenen. Deze vaststellingen maken duidelijk dat bij een groot aantal studenten van de proefgroep het inzicht in de betekenis van $\Theta(t)$ en ook de kennis van de wijze waarop $\Theta(t)$ bepaald wordt, ontoereikend is.

Maken de studenten een overzicht van gegevens en gevraagden?
Het maken van een overzicht van de gegevens en de gevraagden kan beschouwd worden als een uiting van een systematische probleemaanpak. Dit maakt het de oplosser immers mogelijk vlot na te gaan over welke informatie hij beschikt en waar hij juist naar toe moet.

Uit een analyse van de oplossingen m.b.t. dit aspect blijkt dat 33% van de oplossers geen enkel gegeven en 67% van de oplossers geen van de gevraagden vooraf inventariseert. Verder valt op dat de meeste overzichten van de gegevens zeer onvolledig zijn. Veelal beperkt men zich tot gegevens die in de opgave of in de bijbehorende tekening zeer expliciet worden aangegeven. Meer impliciete gegevens worden slechts sporadisch in het overzicht opgenomen.

Genereren van vergelijkingen
Vectorformules
De vectorformules moeten enkel in de opgaven drie en vier toegepast worden. De vaststelling dat slechts 9 van de 111 deeloplossingen van deze opgaven een juiste uitkomst bevatten, laat reeds vermoeden dat hier één en ander misgelopen is. Slechts één student vermeldt formule drie maar past ze volledig fout toe. Eén student past formule vier juist toe. Vier andere studenten vermelden de formule maar passen ze niet of verkeerd toe.

We stoten hier op een belangrijk knelpunt. Het is weinig waarschijnlijk dat de studenten deze vectorformules als dusdanig niet kennen. In de examens mechanica van 1985 en 1986 kwamen drie opgaven voor waarin het vectorrekenen expliciet getoetst werd. De studenten scoorden vrij goed op deze opgaven. De gemiddelde score was 76% . Het probleem dat zich hier voordoet is dat de studenten in de context van de projectielbeweging de relevantie van deze formules niet inzien. In een voorbereidend hoofdstuk, vooraf gaand aan de mechanica, werd het vectorrekenen uitgebreid besproken en ingeoefend. Bij de bespreking van de projectielbeweging werd echter niet expliciet gewezen op de relevantie van de vectorformules en dit lijkt noodzakelijk om de gewenste transfer te realiseren.

Formules van het bewegingsverloop

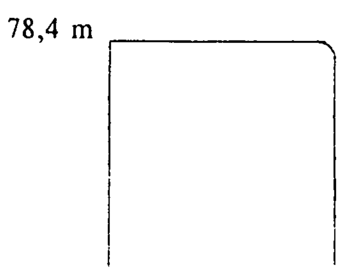
In totaal worden 99 fouten gemaakt tegen de formules van het bewegingsverloop. Het grootste deel van deze 99 fouten wordt gevormd door vier groepen van frequent terugkerende fouten.

Een *eerste* groep fouten bestaat erin dat de begingsnelheid niet of foutief wordt opgesplitst. In 35 formules wordt de beginsnelheid niet opgesplitst. Men gebruikt bijvoorbeeld de formule $x(t) = x(o) + v(o).t$ i.p.v. $x(t) = x(o) + v(o).\cos\Theta(o).t$. Zes keer gebeurt de opsplitsing foutief. Zo zijn er enkele oplossers die de opsplitsing doorvoeren bij de versnelling en niet bij de beginsnelheid. Zij gebruiken de formule: $y(t) = 1/2.g.\sin\Theta(o) + v(o).t + y(o)$. Andere oplossers gebruiken ten onrechte de cosinus voor de Y-as of de sinus voor de X-as.

Ook een *tweede* groep fouten wijst erop dat een aantal studenten onvoldoende inziet dat het opsplitsen in bewegingscomponenten een essentieel uitgangspunt is om de projectielbeweging te begrijpen en er vraagstukken over op te lossen. Zo stellen we vast dat vijf studenten in opgave vier v(t) trachten te berekenen met de formule $v(t) = v(o) - a.t$ of $v(t) = v(o) - g.t$. Ook in opgave vier komt deze werkwijze drie keer voor. In de bijzondere bewegingsvormen volgens één dimensie is het mogelijk met één formule de snelheid op een bepaald tijdstip t te berekenen als men v(o) en t kent. Bij een eenparig veranderlijk rechtlijnige beweging kan dit met de formule $v(t) = v(o) - a.t$ en bij een valbeweging kan dit met de formule $v(t) = v(o) - g.t$. Bij een projectielbeweging dient echter een andere werkwijze te worden gevolgd. De beginsnelheid moet opgesplitst worden in een horizontale en een verticale component. Beide componenten evolueren op verschillende wijze en de waarde ervan op een bepaald tijdstip t kan berekend worden met de formules zes en acht. Op basis van deze waarden kan met de formules drie en vier de grootte en de richting en zin van de totale ogenblikkelijke snelheid op dat tijdstip berekend worden.

Een *derde* belangrijke bron van fouten is dat studenten op de X-as formules gebruiken van een eenparig veranderlijke beweging. In totaal hebben 22 fouten hierop betrekking. Twaalf studenten gaan er vanuit dat op de X-as een valbeweging plaatsvindt. Deze studenten zien dus niet in dat de zwaartekracht geen invloed heeft op de beweging volgens de X-as. Tien studenten berekenen zelf een andere waarde voor de versnelling op de X-as. We vermoeden dat dit type fouten mede in de hand wordt gewerkt door de aanwezigheid van intuïtieve 'impetusopvattingen' bij de studenten. Deze impetusopvatting, die door McCloskey (1983) bij verschillende groepen studenten werd vastgesteld, stelt in essentie dat een object bij het in beweging zetten een soort inwendige kracht of impetus meekrijgt die geleidelijk afneemt waardoor het object tot stilstand komt (McCloskey, 1983). Uit het onderzoek van McCloskey (1983) blijkt tevens dat deze impetusopvatting de verkeerde indruk kan wekken dat een horizontaal weggeworpen object eerst een eind op dezelfde hoogte en met afnemende snelheid verder beweegt en dan plots naar beneden valt. De impetusopvatting kan dus suggereren dat bij een projectielbeweging op de X-as een eenparig veranderlijke beweging plaatsvindt. Ook in de oplossingen van onze proefgroep zijn 'sporen van impetusopvattingen' terug te vinden. Zo treffen we in één van de oplossingen van opgave vijf een bewegingsbaan aan die perfect gelijkt op de typische bewegingsbaan die McCloskey vermeldt (zie fig. 3).

Figuur 3 : Tekening uit protocol 5.10



Ten *vierde* stellen we vast dat opvallend veel oplossers, nl. 19, het negatieve teken van de valversnelling over het hoofd zien. In een aantal gevallen is dit waarschijnlijk het gevolg van onoplettendheid. Anderzijds wordt deze fout mede in de hand gewerkt door de wijze waarop de meeste studenten formule zeven noteren. In de formule zijn drie componenten te onderscheiden, namelijk de beginpositie, de beginsnelheid en de versnelling. De meeste studenten beginnen met de versnelling en schrijven de formule als volgt: $y(t) = 1/2.g.t^2 + v(o).\sin\theta(o).t + y(o)$. Bij het begin van een formule is de vraag naar een plus of min veel minder pregnant dan bij een volgende component en zo kunnen we begrijpen dat vele studenten het minteken vergeten.

Supplementaire formules
Een eerste vaststelling is dat de RTH-formules frequent toegepast worden, namelijk 54 keer. Zesendertig oplossers (23,7%) passen één of meerdere RTH-formules toe. De neiging om supplementaire formules van buiten te leren is blijkbaar sterk aanwezig. Veertien van de 54 (25,9%) toegepaste RTH-formules bevatten één of meerdere fouten. De RTH-formules gelijken zeer sterk op elkaar en het is dan ook niet verwonderlijk dat één en ander door elkaar gehaald wordt. Zoals gezegd, mogen de RTH-formules enkel toegepast worden bij een projectielbeweging waarbij de lanceerhoogte en de eindhoogte 0 m zijn. Dit is enkel het geval in opgave één. We stellen vast dat 39 keer een RTH-formule toegepast wordt in een situatie die niet voldoet aan deze toepassingsvoorwaarde. Twintig studenten (13,2%) passen één of meerdere RTH-formules ongeoorloofd toe. Het is mogelijk dat een aantal van deze studenten de genoemde toepassingsbeperking wel kennen maar er bij de oplossing niet aan gedacht hebben. Aangezien in de cursus van de proefgroep niet uitdrukkelijk gewezen wordt op de toepassingsbeperking van de RTH-formules, vermoeden we echter dat de meeste van deze studenten de toepassingsbeperking gewoon niet kennen.

Oplossen van het gegenereerde stelsel van vergelijkingen
In opgaven drie en zeven moet een tweedegraadsvergelijking opgelost worden om de vluchttijd te berekenen. Voor beide opgaven samen passen 21 van de 41 oplossers (51,2%) deze techniek volledig juist toe. Eén student genereert de nodige vergelijkingen maar past de techniek niet toe. Eén student berekent

slechts één nulpunt nl. het niet toepasselijke. Twee studenten maken fouten bij het berekenen van de nulpunten.

Enkele studenten hebben problemen met de keuze van het nulpunt. Zo laten twee studenten beide vluchttijden als antwoord staan. Eén student berekent correct de twee nulpunten en kiest ook het juiste nulpunt. In zijn oplossing geeft hij als verantwoording voor het doorstrepen van het andere nulpunt: "te weinig". Dit laat zien dat zijn keuze van het nulpunt niet gebaseerd is op de juiste gronden. Tenslotte is er één student die in opgave drie voor beide vluchttijden de horizontale verplaatsing berekent en deze vervolgens optelt om de totale horizontale verplaatsing te bepalen. Een fragment uit deze oplossing is hieronder weergegeven. Deze problemen met de keuze van het nulpunt wijzen erop dat enkele studenten onvoldoende de relatie inzien tussen de wiskundige techniek die ze toepassen en de probleemsituatie waarmee ze te maken hebben.

Figuur 4 : Fragment uit protocol 3.16

		gevr:
$v(o)$	$= 50m/s$	a) $t = ?$
Θ	$= 55°$	b) $x = ?$
y	$= 60m$ hoger dan vertrekpunt	c) $v = ?$

$$
\begin{aligned}
* \; y(t) &= \tfrac{1}{2}.a.t^2 + v(o).t + y(o) \\
60m &= \tfrac{1}{2}.(-9{,}8).t^2 + 50m/s.\sin 55°.t + 0 \\
0 &= -4{,}9.t^2 + 40{,}96m/s.t - 60m \\
D &= b^2 - 4ac = (40{,}96)^2 - 4.(-4{,}9).(60) \\
\sqrt{D} &= 23{,}39 \\
t_1 &= (-40 + 23{,}39)/\ 2.(-4{,}9) = 1{,}79s \\
t_2 &= (-40 - 23{,}39)/\ 2.(-4{,}9) = 6{,}57s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
* \; x(t) &= \tfrac{1}{2}.a.t^2 + v(o).t + x(o) \\
x(t) &= 50m/s.\cos 55°.t + 0 \\
x(t_1) &= 50m/s.\cos 55°.1{,}79s = 51{,}34m \\
x(t_2) &= 50m/s.\cos 55°.6{,}57s = 188{,}4m
\end{aligned}
$$

--> $x = 239{,}74m$

5. Conclusies

1. Verscheidene vaststellingen bevestigen de bevinding van andere studies (zie o.m. Ferguson-Hessler & de Jong, 1983) dat studenten bij het oplossen van problemen weinig aandacht schenken aan een analyse van de probleemsituatie en dat reeds in deze eerste fase van het oplossingsproces veel fouten voorkomen. In totaal worden 85 fouten gemaakt in de probleemanalyse. Frequente fouten zijn het ten onrechte toekennen van een 'typische' waarde aan een grootheid en verwarringen tussen verschillende specificaties van een grootheid. Dit laatste wordt mede in de hand gewerkt door ongedifferentieerd symboolgebruik. Verder valt op dat menig student geen overzicht maakt van de gegevens (33%) en van de gevraagden (67%). De overzichten zijn bovendien zeer onvolledig. De vastgestelde fouten bij het beschrijven van de richting en zin van ogenblikkelijke snelheden onderstrepen dat de probleemanalyse van een natuurkundig vraagstuk een kennisgebaseerde activiteit is. Het veronderstelt zowel declaratieve als operationele kennis van relevante grootheden.

Op basis van deze vaststellingen pleiten we ervoor studenten uitdrukkelijk te trainen in de probleemanalyse van natuurkundige vraagstukken. Een onderzoek van Heller & Reif (1984) waarin studenten vakspecifieke instructies kregen voor het analyseren van dynamica problemen toont dat zo'n training inderdaad tot prestatieverbeteringen kan leiden.

2. Een tweede conclusie is dat veel studenten (23,7%) gebruik maken van supplementaire formules. Dertien procent van de studenten passen één of meerdere RTH-formules ongeoorloofd toe en bovendien bevatten 26% van deze formules één of meerdere fouten. Het lijkt ons wenselijk het gebruik van dergelijke supplementaire formules zo veel mogelijk te beperken en vooral gebruik te maken van meer algemene en inzichtelijke formules.

3. Ten derde kunnen we concluderen dat bij menig student een adequaat inzicht in het bewegingsverloop bij de projectielbeweging ontbreekt. Een eerste bron van moeilijkheden is het opsplitsen van de beweging in componenten volgens beide assen. In 35 formules wordt de beginsnelheid niet opgesplitst en in zes formules gebeurt dit foutief. Bovendien proberen acht studenten met één enkele formule v(t) te berekenen op basis van v(o) en t. Ten tweede zien verscheidene studenten niet in dat de beweging volgens de X-as eenparig is. Twaalf studenten gaan er

vanuit dat op de X-as een valbeweging plaatsvindt en tien studenten berekenen zelf een waarde voor de versnelling op de X-as. Wat dit laatste betreft, werd gewezen op de mogelijke misleidende rol van impetusopvattingen.

Voor een juist begrip en gebruik van de formules van het bewegingsverloop bij de projectielbeweging is het belangrijk vooraf uitvoerig in te gaan op de onderliggende principes waarop deze formules gebaseerd zijn.

4. In de oplossing van sommige natuurkundige problemen moeten wiskundige technieken zoals het oplossen van een tweedegraadsvergelijking toegepast worden. Enkele vaststellingen i.v.m. de keuze van het nulpunt na het oplossen van een tweedegraadsvergelijking tonen dat sommige studenten onvoldoende inzicht hebben in de relatie tussen deze wiskundige techniek en de natuurkundige probleemsituatie. Om de gewenste transfer te bevorderen, lijkt het aangewezen de relevantie en de betekenis van deze technieken uitdrukkelijk toe te lichten in de betreffende natuurkundige contexten.

5. Via een analyse van schriftelijke oplossingen kan men verschillende frequent voorkomende fouten en knelpunten opsporen. Het lijkt ons een renderende tijdsinvestering bij het corrigeren van schriftelijke oplossingen een inventaris en een analyse te maken van de fouten en de knelpunten die voorkomen. Deze informatie kan een nuttige inspiratiebron zijn voor de optimalisatie van het gegeven onderwijs.

Anderzijds heeft het analyseren van schriftelijke oplossingen als onderzoeksmethode duidelijke beperkingen. Een schriftelijke oplossing is een indirecte en beperkte neerslag van het oplossingsproces en van het kennisbestand van de oplosser. Het is aangewezen de resultaten van deze methode te toetsen en aan te vullen met andere methoden die een meer directe en gerichte toegang tot het oplossingsproces en het kennisbestand van de oplosser mogelijk maken.

Noot

Het onderzoek gebeurde in het kader van het ISSAD-project aan het Onderzoekscentrum voor Secundair en Hoger Onderwijs van de Afdeling Didactiek. Het ISSAD-project is een interuniversitair onderzoeksproject op initiatief van de Minister van Onderwijs.

Literatuur

Ferguson-Hessler, M.G.M. & T. de Jong (1983) *Markante (dwaal)-wegen bij het oplossen van E&M problemen*, Eindhoven: Technische Hogeschool, rapport nr. 32.

Heller, J. & F. Reif (1984) Prescribing effective human problem solving processes: Problem description in physics, *Cognition and Instruction, 1*, 191-203.

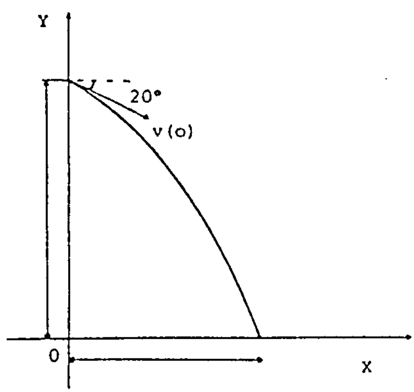
Jochems, W. & J. Vastenhouw (1985) Leerstof en leerstofanalyse. *Tijdschrift voor Didactiek ß-wetenschappen, 3*, 57-69.

McCloskey, M. (1983) Naive theories of motion. In: D. Gentner & L.A. Stevens (Eds.). *Mental models*, Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum, 299-323.

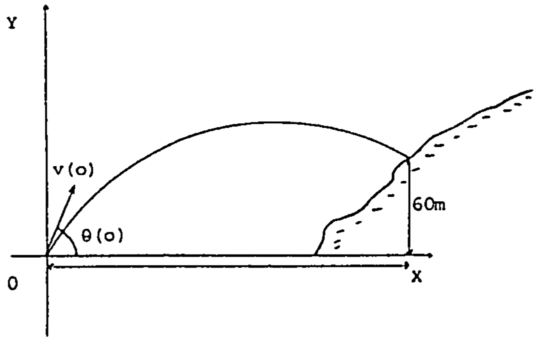
Stephens, R.G., R. Bhaskar, & J.F. Dillard (1981) The role of task analysis in understanding problem solving behavior, *Instructional Science, 10*, 23-45.

Bijlage 1: de zeven opgaven

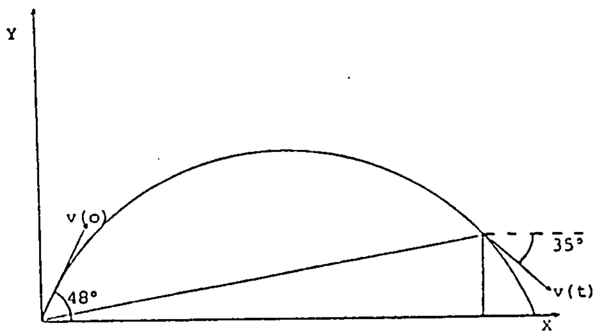
1. Een projectiel wordt onder een hoek van 35^{o} met de grond afgevuurd en bereikt de grond op een horizontale afstand van 4 km. Indien de luchtweerstand wordt verwaarloosd, bereken dan:
   a. de beginsnelheid
   b. na hoeveel tijd de grond wordt bereikt.
2. Een bal wordt naar beneden gegooid vanuit een venster op de hoogste verdieping van een gebouw. De beginsnelheid bedraagt 8 m/s en vormt een hoek van 20^{o} met de horizontale, zoals op onderstaande figuur. De bal komt 3 s later op de grond terecht.
   a. Hoever van het gebouw komt de bal op de grond terecht?
   b. Hoe hoog was het gebouw? (De wrijving met de lucht wordt verwaarloosd)



3. Een projectiel wordt afgevuurd met een snelheid v(o) = 50 m/s en onder een hoek van Θ(o) = 55° met de horizontale.
Het projectiel treft een heuvel 60 m hoger dan het vertrekpunt.
   a. Hoelang duurt de vlucht van het projectiel?
   b. Hoe groot is de verplaatsing in horizontale richting?
   c. Zoek ook de snelheid van het projectiel juist voordat het op de heuvel terecht komt.

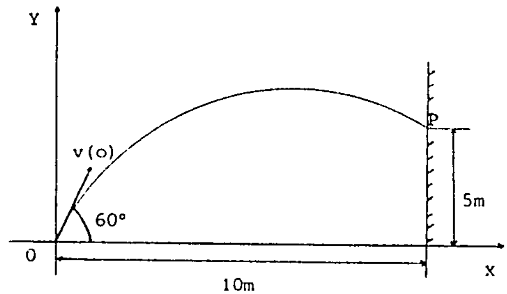


4. Een bal wordt vanop de grond weggegooid met een snelheid v(o) = 12 m/s en onder een hoek van 48° met de horizontale. Na hoeveel tijd zal de snelheid een hoek maken van 35° beneden de horizontale? Op welke horizontale afstand van zijn vertrekpunt bevindt de bal zich dan?

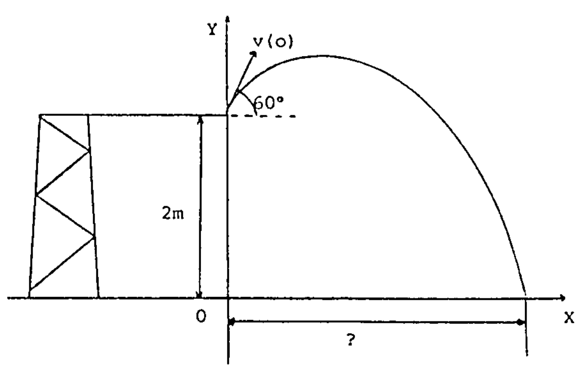


5. Een projectiel wordt horizontaal afgevuurd vanaf een rots die 78,4 m hoog is, met een snelheid van 300 m/s.
Na hoeveel tijd bereikt het projectiel de grond?
Hoe groot is de draagwijdte?

6. Een voorwerp wordt onder een hoek van 60^o weggegooid en botst tegen een muur in een punt P dat zich op 10 m horizontale afstand en op 5 m hoogte bevindt t.o.v. punt 0.
   a. Bereken de beginsnelheid.
   b. Welk was de vluchttijd?



7. Een zwemmer duikt vanaf de sprringplank in het zwembad. De springplank bevindt zich op 2 m boven het wateroppervlak. Indien hij de springplank verlaat met een snelheid van 2 m/s en onder een hoek van 60^o met de horizontale.
   a. Na hoeveel tijd komt hij dan in het water terecht?
   b. Op welke horizontale afstand van de springplank?



Bijlage 2: Oplossing van opgave 3

gegeven:		gevraagd:
$x(o) = 0$ m		a) $t = ?$
$y(o) = 0$ m	$y(t) = 60$m	b) $x(t) = ?$
$v(o) = 50$ m/s		c) $v(t) = ?$
$\theta(o) = 55°$		

oplossing

a) $y(t) = y(o) + v(o).\sin\theta(o).t - \frac{1}{2}.g.t^2$

$60m = 0m + 50m/s.\sin 55°.t - \frac{1}{2}.9{,}81m/s^2.t^2$

$-\frac{1}{2}.9{,}81m/s^2.t^2 + 50m/s.\sin 55°.t - 60m = 0$

$$t_{1,2} = \frac{-50m/s.\sin 55° \pm \sqrt{\{(50m/s.\sin 55°)2 - 4.(-\frac{1}{2}.9{,}81m/s2).(-60m)\}}}{2.(-\frac{1}{2}.9{,}81m/s^2)}$$

$t_1 = 1{,}89s$ en $t_2 = 6{,}46s$

We zien in de tekening dat het projectiel de heuvel dalend raakt, dus $t = 6{,}46s$

b) $x(t) = x(o) + v(o).\cos\theta(o).t$

$= 0m + 50m/s.\cos 55°.6{,}46s$

$= 185{,}3$ m

c) * $v_x(t) = v(o).\cos\theta(o)$

$= 50m/s.\cos 55°$

$= 28{,}68m/s$

* $v_y(t) = v(o).\sin\theta(o) - g.t$

$= 50m/s.\sin 55° - 9{,}81m/s^2 . 6{,}46s$

$= -22{,}41m/s$

* $v(t) = \sqrt{\{v_x(t)^2 + v_y(t)^2\}}$

$= \sqrt{\{(28{,}68m/s)^2 + (-22{,}41m/s)^2\}}$

$= 36{,}4m/s$