Sluiproutes of alternatieve wegen?

Een reactie op het artikel van Goffree c.s. in Tijdschrift voor Didactiek der ß-wetenschappen 6, 1, januari 1988

H.G.M.Broekman
P.D.I., RUU

Summary
In this contribution the author opposes the term "side-roads" (Dutch" 'sluiproutes', i.e. not officially permitted minor roads) introduced bij Goffree c.s. whenever they mean 'alternative frames'. The author also maintains that the part of the curriculum dealing with negative numbers should be fundamentally questioned, namely:
Can negative numbers and the computational rules that apply to the formal system (Z, +, .) be obtained
- *from the given contexts, or*
- *can they only be imposed by giving a particular interpretation to minus-numbers?*

1. Inleiding

Een van de bekende aansluitingsproblemen tussen basis- en voortgezet onderwijs - de negatieve getallen - brengen Goffree c.s. in het kader van een theorie over het reken-wiskunde onderwijs naar voren.

Een reden voor die aansluitproblemen komt volgens Küchemann (1981) voort uit het feit dat er slechts twee hoofdtypen van benadering lijken te zijn: one of which is essentially abstract while the other relies on the use of concrete models or embodiments to give meaning to the integers and the operations to be performed on them (Küchemann, p. 86).

De eerste benadering blijkt - overal ter wereld? - voor vele leerlingen problemen op te leveren en de tweede benadering lijkt toch ook nogal wat beperkingen te hebben wegens het schijnbare ontbreken van goede (alles omvattende) vormgevingen. Voor een oppervlakkige beschouwer van het rekenwiskunde onderwijs levert de deelleergang negatieve getallen echter nauwelijks een probleem. Min maal min is immers plus (zie Vredenduin 1986, p. 333/334) en er zijn in totaal maar zes rekenregels nodig (Freudenthal 1983, p.457).

Voor diegenen die, zoals de auteurs van voornoemd artikel, meer willen dan een 'sterk instrumenteel getinte attitude' (p.18) en de wiskundige begrippen willen grondvesten op, of in, het 'concrete, voorstelbare, reële' (p. 7), zijn er wel degelijk problemen te constateren.

2. Alternatieve wegen

Voor mij als lezer van het artikel van Goffree c.s. is het echter onvoorstelbaar dat de auteurs, als voorstanders van realistisch reken-wiskunde onderwijs, hun beschouwing de titel meegeven "Sluiproutes door realistische leergangen - ongewenste verkortingen". Het woord *sluiproutes* suggereert iets heimelijks/oneerlijks. Het zou inhouden dat de leerlingen weten wat de wel bedoelde route is en deze bewust niet kiezen. Dit is nog erger dan het gebruik van een term als 'misconception', die gelukkig steeds vaker vervangen wordt door 'alternative concept' (Nussbaum en Novick, 1982), 'alternative framework' (Davis en McKnight, 1979), of 'Child Methods' (o.a. Booth, 1981).

Het tweede deel van de titel - ongewenste verkortingen-geeft mijns inziens duidelijker de situatie weer waar de auteurs op doelen. De leerlingen ontdekken in de hun aangeboden situaties, o.a. het bankwezen, mede door de vragen die hen gesteld worden en de notaties die hen aangereikt worden een aantal rekenregels. Deze regels maken het hen mogelijk de gestelde vragen te beantwoorden. Kennelijk ontdekken zij niet datgene dat de auteurs graag willen dat ze ontdekken. De auteurs zeggen namelijk niet te willen dat door de leerlingen onvolledige inzichten gevormd worden.

> "In dat geval worden rekenregels aangenomen, overgenomen en blind uitgevoerd. Deze rekenregels werken, maar ontlenen hun betekenis niet aan praktische ervaringen of meer theoretische beschouwingen. Maar we willen juist dat de leerlingen op een zeker moment dat formele systeem wel ontdekken, dat ze de wetmatigheden ervan onderkennen, dat ze zich erin kunnen bewegen en dat ze, bij het toepassen van negatieve getallen in het vervolg van het onderwijs, enige steun kunnen ontlenen aan hun begrip van dat formele systeem en de daarin geldende regels en wetten." (p. 13)

Onvolledige inzichten zijn echter slechts dan belemmerend als 'volledige' inzichten nagestreefd worden (helaas meestal door de docent zonder dat de leerling hem of haar kan 'verstaan'), of indien er problemen opgelost moeten worden waarbij een volledig inzicht benodigd is.

3. Negatieve getallen; meerdere contexten
In een deelleergang negatieve getallen kan een leerling geconfronteerd worden met 'fantasie', 'aangepast actueel gegeven', 'een rekenwereldje' en een 'formeel systeem' (p. 8). Wij dienen ons daarbij goed te realiseren dat het begrip 'negatief getal' in ieder van die contexten een andere - zij het vanuit een bepaald gezichtspunt gezien isomorfe - betekenis heeft. Onderdeel van het horizontaal mathematiseren is onder andere het zoeken van het gemeenschappelijke in de diverse aangeboden contexten en dit 'verwoorden'. Essentieel daarbij is een grote vrijheid van handelen voor de leerling, en die is er in de voorstellen van Goffree c.s. niet. De leerlingen wordt een taal aangeboden (opgedrongen?) waarmee op een voorgeschreven wijze geopereerd dient te worden. Van nivo-overgang, zoals bedoeld door Van Hiele (1986) is hierbij overigens geen sprake.

Is het dan eigenlijk niet fantastisch dat zoveel jongeren van 12 à 13 jaar het lef hebben zich aan die dwang te onttrekken en eigen - in de praktijk van alledag begaanbare - wegen bewandelen? We dienen echter voorzichtig te zijn. Er bestaat immers de mogelijkheid dat de leerlingen een scherp onderscheid maken tussen de waargenomen kunstmatige schoolsituatie en de zogenaamde thuisomgeving (Wittrock, 1986; Booth, 1981), of misschien gewoon het hen vertrouwde niet los durven laten.

Hoe dan ook, Goffree c.s. constateren niet gewenste eigen initiatieven van veel leerlingen en maken zich daar zorgen over. Hun zorg ten aanzien van een versterking van een sterk instrumentele attitude deel ik. Daarom betreur ik het echter dat zij aan de hand van hun voorbeeld "het bankwezen' niet laten zien, dat juist door het opleggen van een *onnodig* taaltje om praktische problemen op te lossen de leerlingen wel haast gedwongen worden in de richting van mechanistische, lauter instrumentele wiskunde. Hoeveel leerlingen zaten bij de bank (op de bank) op negatieve getallen te wachten?

Laten we eerlijk zijn:

wie telt ooit temperaturen op
wie telt ooit doelsaldi op?
wie telt ooit tijdstippen op (vóór respectievelijk ná Christus)?
....
wie trekt ooit temperaturen af?
wie vermenigvuldigt ooit 'tekorten' en 'tegoeden'?

Toch is het zinvol en handig om in meerdere situaties te spreken over positief en negatief en niet alleen omdat de leerlingen ook een zakrekenmachine als context hebben. Er ligt echter een wereld van verschil tussen die situaties. Een verschil dat vooral tot uiting komt als we willen gaan rekenen, terwijl dat niet het meest voor de hand liggende is in veel probleemsituaties, (zie bv. Crowley, 1985 en in reactie hierop Johnson, 1985). Veel van de aangedragen situaties zijn daardoor misschien wel prototypisch voor het leefwereldenken, maar daardoor nog niet prototypisch ten aanzien van de zinvolheid om ze met behulp van negatieve getallen te beschrijven. Helaas moet ik constateren dat Goffree c.s. daar in hun artikel langs heen lijken te gaan, ook al wordt opgemerkt dat in het bankwezen fundamentele wetten van het formele systeem (Z, +, .) niet naar voren komen (p. 12/13).

Uiteraard is het niet mogelijk in een bestek van 18 pagina's de hele problematiek van een 'deelleergang negatieve getallen in realistisch reken-wiskunde onderwijs' uit de doeken te doen. Toch meen ik dat de auteurs meer expliciet een fundamentele vraag hadden kunnen én moeten stellen. De vraag namelijk of negatieve getallen en de rekenregels die gelden in het formele systeem (Z, +, .) te verkrijgen zijn *vanuit* de aangereikte contexten, of alleen *op te leggen* door een interpretatie aan mingetallen te geven.

Op pag. 19 schrijven Goffree c.s.: "We veronderstellen nu dat de plaats van het onderwerp 'negatieve getallen' in het curriculum er de oorzaak van is dat de theorie van het realistisch wiskunde-onderwijs hier niet tot adequate leergangen kan leiden." Vervolgens verwijzen zij naar een betere plaats (bij functies en grafieken), waarbij mijns inziens zeker ook de aanpak met behulp van vectoren van Van Hiele (1985) genoemd had moeten worden. Verwijzen naar een betere plaats in het wiskundeprogramma, en de discussie over de wiskunde zelf als context, doet vermoeden dat ook de auteurs in verband met negatieve getallen afstand nemen van 'fantasie', 'aangepast actueel' en 'rekenwereldje' als context. Het is ook voor mij de vraag of Lijnse (1987), in navolging van Treffers (1987), gelijk heeft als hij het vermoeden uitspreekt dat het in de wiskunde mogelijk lijkt om uit daarvoor geselecteerde realistische aanleer-contexten, wiskundige begrippen als het ware continu te ontwikkelen. Is het niet zo dat in het geval van de negatieve getallen het leefwereld denken essentieel verschilt van de wiskundige beschrijving? Als dat zo is, is het nog maar de vraag of het één continu ontwikkeld kan worden uit het andere.

Na het verschijnen van het door Goffree c.s. aangekondigde boek "Tussen Twee (Getal-)Werelden" (?) zal ik op de hiervoor genoemde vraag graag nader ingaan. Evenals op de mogelijkheid om leerlingen interpretaties van mingetallen, en het rekenen daarmee, te laten zoeken in diverse contexten (zie Freudenthal, 1983; Johnson, 1985; Vredenduin, 1986; e.a.).

(De formele getallen zijn scheppingen der geest.
Of er in de realiteit getallen mee corresponderen is de vraag.)

Literatuur

Booth, L.R. (1981) Child-Methods in Secondary Mathematics. In: *Educational Studies in Mathematics 12*, 29-41.

Crowley, M.L. & K.A. Dunn (1985) On Multiplying Negative Numbers. In: *Mathematics Teacher*, 252-256.

Davis, R.B. & C.E. McKnight (1979) Modelling Processes of Mathematical Thinking, *The Journal of Children's Mathematical Behavior* 2, 2, 91-113.

Freudenthal, H. (1983) *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1973) *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Goffree, F., J. Vedder & K. Buys (1988) Sluiproutes door realistische leergangen - ongewenste verkortingen, *Tijdschrift voor Didactiek der ß-wetenschappen 6*, 5-23.

Hiele, P. van (1985) *Wiskunde Werkschrift voor het LBO*. Vakprodukties.

Hiele, P. van (1986) *Structure and Insight, A theory of Mathematics Education*, New York: Academic Press Inc..

Johnson, P.B. (1985) Choosing definitions, *Mathematics Teacher 78*, 9, 707.

Küchemann, D. (1981) Positive and negative numbers. In: Hart, K.M.(ed.) *Children's Understanding of Mathematics*, London: John Murray, 137-158.

Lijnse, P.L. (1987) over OSaEV en begrippen in het natuurkunde-onderwijs. In: H.G.B. Broekman & J.M.J. Weterings (Red.). *Leerstofordening, over de grenzen van een begrip.* Den Haag: SVO, 127-139.

Nussbaum, J. & S. Novick (1982) Alternative frameworks, conceptual conflict and accomodation: toward a principled teaching strategy, *Instructional Science 11*, 183-200.

Treffers, A. (1987) *Three Dimensions.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Vredenduin, P.G.J. (1986) Grepen uit de geschiedenis van het negatieve getal, *Euclides 61*, 10, 331-337.

Wittrock, M.C. (1986) Students' Thought Processes. In: M.V. Wittrock (Ed.). *Handbook of Research on Teaching*, third edition, American Educational Research Association, 297-315.