Uitleggen door analogie en context

S.L.Kemme
Vakgroep Wiskunde
Rijksuniversiteit Groningen

Summary
In the introduction of mathematical concepts and activities the role played by realistic situations (contexts) is still increasing. However, the effects of embodiments in contexts are very different and unpredictable. Three similar contexts are analysed with respect to their suggested analogies to formal, symbolic operations. The effects of these contexts upon pupils' learning have also been investigated. As a result some reasons are given that might explain the differences.

1. Inleiding

Het gebruik van realistische contexten begint gemeengoed te worden bij de ontwikkeling van het reken- en wiskundeonderwijs. Vanzelfsprekend ontstaan daarbij nieuwe didaktische problemen.

Goffree c.s. (1988) signaleren het probleem van sluiproutes die ontstaan bij de introductie van bewerkingen met negatieve getallen aan de hand van situaties binnen contexten. Onder sluiproutes verstaan ze ongewenste, blind uitgevoerde verkortingen die niet gedragen worden door inzicht vanuit praktische ervaringen of theoretische beschouwingen. Terecht plaatst Broekman (1989) de nodige vraagtekens bij hun beschouwingen. Hij vraagt zich af of: "negatieve getallen en de rekenregels die gelden in het formele systeem (Z,+,.) te krijgen zijn *vanuit* de aangereikte contexten, of alleen *op te leggen* door een interpretatie aan mingetallen te geven." Naar mijn idee raakt hij hiermee één van de kernvragen over het gebruik van contexten in het wiskundeonderwijs.

In relatie met deze problematiek worden in dit artikel drie situaties van contextgebruik geanalyseerd: de heks en het treintje (bewerkingen met negatieve getallen) en de weegschaal (oplossen van lineaire vergelijkingen). Deze voorbeelden zijn ontleend aan Moderne Wiskunde, brugklasdeel, 4e editie en tweede klas deel, 5e editie.

In het bijzonder zal ik me richten op de volgende vragen:

1. Waarom is de heks wèl een effectieve context en het treintje niet?
2. Hoe treden verkortingen op bij het leren oplossen van lineaire vergelijkingen vanuit de weegschaal en wat zijn de verschillen daarin tussen atheneum-2 en mavo-2 leerlingen?

2. Analogie en context

Onder een *context* verstaat men in het algemeen de situatie waarin een wiskundig probleem wordt gepresenteerd. Klassiek is het voorbeeld van de woordproblemen bij het traditionele rekenonderwijs. Bij een *realistische* context is de situatie geënt op in de realiteit herkenbare feiten. Het begrip realiteit heeft hierin een wat ruimere betekenis dan gebruikelijk (Treffers). De feiten hoeven niet fysisch correct te zijn. De situatie moet voor de leerling voldoende realiteitswaarde hebben. Dat kan dus ook een sprookjeswereld zijn.

Het doel van dit contextgebruik is heel verschillend. Contexten kunnen tot doel hebben om de leerlingen vertrouwd te maken met het hanteren van wiskunde in praktijksituaties. In dat geval is de praktische waarde van de context essentieel. Contexten kunnen echter ook tot doel hebben een leeromgeving voor de leerlingen te bieden voor de ontwikkeling van algemene wiskundige begrippen en technieken. De realiteitswaarde is dan geen essentieel punt. Het gaat er veel meer om dat de leerling een denkmodel krijgt aangereikt dat voldoende rijk is van structuur en waarin de leerling zich voldoende kan inleven. Het is de bedoeling dat leerlingen geconfronteerd worden met situaties die voor hen vanzelfsprekend en aanvaardbaar zijn.

Dit geschetste onderscheid in functies van contexten is geen strikt onderscheid. Met name in de rekendidactiek kunnen beide functies samenvallen.

In dit artikel zal ik me beperken tot contexten waarin het accent ligt op de begripsvorming. De Lange (1987) noemt dit contexten van de derde soort. Vooral in de fase van begripsvorming van de wiskunde wordt veel waarde gehecht aan het gebruik van contexten (Treffers en Goffree, 1985). Het wiskundig begrip of wiskundig model ontwikkelt zich aan de hand van een context.

Sommige contexten blijken wel het gewenste effect te hebben, bij andere blijkt dat gewenste effect niet te worden gerealiseerd. Ook blijken leerlingen heel verschillend te reageren. Met name ligt de vraag voor of zwakke leerlingen wel zoveel baat hebben bij het gebruik van contexten. Of ze niet blijven steken in het verhaaltje en daarmee niet voldoende aan de wiskundige essentie toekomen.

In de gekozen voorbeelden worden gefantaseerde denkbeeldige situaties gepresenteerd. Het gaat om een heks, treintjes en balansen. Situaties die leerlingen in werkelijkheid niet zullen tegenkomen. Je kunt echter rekenen met negatieve getallen "net zo als de heks dat doet met blokjes" of "zoals dat met treintjes gaat". Je lost vergelijkingen "net zo op als met weegschalen". Het gebruik van het koppelwoord 'als' geeft aan dat analogieën hierin een belangrijke rol spelen.

Analogie is een veelgebruikt middel tot uitleg waarbij nieuwe, onbekende zaken verklaard worden aan de hand van bekende. Hierbij vindt overdracht van kennis over de ene, bekende situatie plaats naar de andere, nieuwe situatie. Polya (1945) werkt een aantal wiskundige problemen uit die door middel van analogie met andere bekende, reeds opgeloste problemen, kunnen worden aangepakt. Hij concentreert zich vooral op analogieën binnen het wiskundige probleemoplossen. Analogieën worden daarbij gekenmerkt door het aanwijzen of herkennen van overeenkomsten tussen verschillende situaties. Kern van het oplossingsproces is het herkennen van deze overeenkomst tussen een vertrouwde, bekende en een nieuwe, onbekende situatie en vervolgens het toepassen van die overeenkomst in de nieuwe situatie.

David Pimm (1987) geeft een omschrijving van analogie vanuit een taalkundige invalshoek. Het verschijnsel 'metafoor' speelt hierin een belangrijke rol. De metafoor is de taalkundige uitdrukking waarbij de analogie wordt overgedragen. In "hij brieste als een leeuw" worden de briesende, afschrikwekkende eigenschappen van een leeuw op de persoon in kwestie overgedragen. Bij een dergelijke overdracht van eigenschappen wordt het hele bijbehorende semantische veld overgedragen, inclusief de onderliggende structuur tussen de eigenschappen en de associatieve samenhangen.

Als aanvulling op het analogie-begrip binnen de wiskunde van Polya, hanteert Pimm het idee van de *buiten-wiskunde* metafoor. Daarmee worden metaforen bedoeld die wiskundige ideeën en processen proberen uit te leggen en te interpreteren in termen van gebeurtenissen uit de omgevingswereld. Doel is hier echter ook om los te komen van de metafoor. Dat kan gebeuren door de grenzen van de metafoor te bepalen, door te laten zien welke eigenschappen *niet* van toepassing zijn in de nieuwe situatie. Maar ook door te laten zien dat het maar om een metafoor gaat. Als voorbeeld van buiten-wiskundige metafoor noemt Pimm onder meer de weegschaal om vergelijkingen te leren vereenvoudigen. Deze beschrijving van buiten-wiskundige metafoor lijkt bij uitstek geschikt om het gebruik van contexten bij wiskundige begripsvorming te analyseren.

Analogieën zijn dus asymmetrische relaties tussen twee situaties. Ze suggereren een overeenkomst tussen een meer bekende en een minder bekende situatie. Door de analogie treedt er overdracht van kennis op in één richting: van een vertrouwde, aanvaarde situatie naar een onbekende of nieuwe situatie. Opvallend is het gebruik van koppelwoorden. Ze leggen de verbinding tussen de twee werelden en tegelijkertijd werken ze als een signaal dat de analogie niet letterlijk bedoeld is, dat het maar om een analogie gaat. Vergelijk bijvoorbeeld de zin: "een vergelijking is zoiets als een weegschaal" met "een vergelijking is een weegschaal". In de eerste zin komt naar voren dat bepaalde eigenschappen van de weegschaal wél en andere niet op vergelijkingen van toepassing zijn. In de tweede zin treedt een identificatie op tussen vergelijking en weegschaal. Nu zijn alle eigenschappen van weegschaal van toepassing op 'vergelijking'. Vergelijk dit met: "een vergelijking is een formule met een = -teken erin." Hierin worden vergelijkingen geïdentificeerd met formules met een speciale eigenschap.

Het gebruik van koppelwoorden geeft dus een duidelijke beperking aan de overdracht van betekenissen van weegschaal naar vergelijking. Welke eigenschappen precies zullen worden overgedragen zal sterk van de situatie afhangen waarin de analogie is gepresenteerd, van de associaties die leerlingen hebben met 'weegschalen' en van het vermogen van leerlingen om het gebruik van koppelwoorden in deze zin te interpreteren (Van Dormolen, 1987).

Samengevat: bij het leren van nieuwe begrippen door middel van een context spelen analogieën een belangrijke rol. Binnen de context zijn analogieën het verwijzingsmiddel van de vertrouwde wereld (de context) naar nieuwe onbekende feiten en begrippen. De analogieën gaan daarmee functioneren als een verklaringsmiddel. Dat is de kracht van analogieën in een uitleg. Zoals de bewegingen in het zonnestelsel verklaard kunnen worden aan de hand van een tekening met cirkels, zo kunnen binnen het wiskundeonderwijs de contexten functioneren als modellen die verklaringen leveren voor nieuwe onbekende begrippen.

3. De heks en het treintje in Moderne Wiskunde

De eerste kennismaking met negatieve getallen doet een sterk beroep op het voorstellingsvermogen van leerlingen. In de dagelijkse omgeving hebben natuurlijke getallen een hoeveelheids- èn een ordenings-betekenis (cardinaal- en ordinaal-getallen). Bij optellen en aftrekken van natuurlijke getallen kunnen deze betekenissen afzonderlijk van belang zijn. Zo kan optellen corresponderen met toevoegen en samenvoegen, of met doortellen. In de eerste twee gevallen is vooral de hoeveelheidsbetekenis van belang, in het laatste geval is de ordeningsbetekenis essentieel. Bij het aftrekken treedt iets soortgelijks op. Aftrekken kan zijn: wegnemen of vergelijken (verwijzend naar hoeveelheden) respectievelijk terugtellen (verwijzend naar posities op de getallenlijn). Ook bij vermenigvuldigen kunnen verwijzingen naar hoeveelheid en ordening optreden. 3x2 kan betekenen: het getal 2 en dat 3 keer. De factor 3 is een aantal in die zin, dat hij aangeeft hoe op de (hoeveelheid) 2 te opereren.

Dit is ook zo als de vermenigvuldiging op de getallenlijn wordt weergegeven: 3 keer (een aantal) 2 plaatsen naar rechts. In een vermenigvuldigingstabel verwijst 3x2 naar posities: 3 vertikaal en 2 horizontaal geeft 6 op het kruispunt.

Belangrijk is dat bij gebruik van natuurlijke getallen in de omgevingswereld, *beide* betekenissen (hoeveelheid en ordening) kunnen optreden, door elkaar, in afwisseling en ondersteuning van elkaar. Beide betekenissen kunnen functioneren als verklaringsmiddel: 3x2 = 6 vanwege het herhaalde optellen, 3x2 = 2x3 vanwege de symmetrie in de vermenigvuldigingstabel. Deze begripsmatige verankering in de omgevingswereld draagt belangrijk bij aan het vermogen om zich getallen voor te stellen.

Om voor negatieve getallen voldoende verankering in de omgevingswereld te realiseren ligt het voor de hand om ook negatieve getallen in te voeren aan de hand van diverse contexten uit de omgevingswereld: beneden de zeespiegel, temperatuur, de zakrekenmachine, de bankrekening, de voetbaltabel, de getallenlijn en figuren in een coördinatenstelsel (zie Moderne Wiskunde).

Hierin zijn de ordenings-betekenis en de positieve en negatieve hoeveelheids-betekenis terug te vinden. Een verschil met de natuurlijke getallen is echter dat negatieve hoeveelheden in wezen positieve hoeveelheden *in contrast met* andere positieve hoeveelheden zijn. Schuld is een positieve hoeveelheid, het negatieve aspect van schuld komt alleen maar aan de orde als schuld geplaatst wordt in contrast met bezit. Negatief heeft in dat contrast altijd de betekenis van 'minder' te zijn dan positief. In deze zin zijn hoeveelheid- en ordenings-betekenis bij negatieve getallen onafscheidelijk met elkaar verweven. 'Negatieve hoeveelheid' is een begrip dat afgeleid is van 'positieve hoeveelheid' en komt alleen maar voor in een ordenings-relatie met positieve hoeveelheden. In de verschillende genoemde contexten is dit in meerdere of mindere mate terug te vinden. Bij zeespiegel en temperatuur is vooral het ordeningsaspect van belang, bij bankrekening en voetbaltabel vooral het negatieve hoeveelheidsaspect.

Het vervelende is echter dat de transformatie van positieve naar negatieve hoeveelheden niet in alle situaties te maken is. Heel duidelijk is dit bij 'aantal' als kenmerk van een herhaalde handeling. Je kunt 3 keer hetzelfde doen (bijv. 2 erbij tellen), je kunt aan -3 keer hetzelfde doen geen betekenis geven. Hierdoor verliest het herhaald optellen zijn verklarende waarde bij het vermenigvuldigen, wanneer de operator tenminste negatief is. 3x-2 is natuurlijk wel vanuit het herhaalde optellen te verklaren. Door de context van de heks wordt een kunstmatige wereld gecreëerd waarin het optellen en aftrekken met negatieve getallen aanvaardbaar en voorstelbaar worden gemaakt.

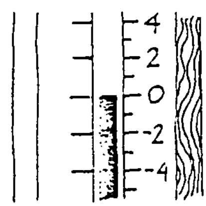
Het vermenigvuldigen van negatieve getallen wordt uitgelegd aan de hand van het treintje. Er zijn twee soorten locomotieven: positieve en negatieve. De positieve staan met hun voorkant naar rechts, de negatieve staan naar links. 3 x .... betekent dat het betreffende treintje vooruit rijdt, -3 x .... betekent dat het betreffende treintje achteruit rijdt. 3 x -2 is dus: het negatieve treintje legt 3 keer de afstand 2 vooruit af, -3 x -2 is: het negatieve treintje legt 3 keer de afstand 2 achteruit af.

In de praktijk blijkt de heks-context aanzienlijk beter te werken dan de treintjescontext. Leerlingen gebruiken wel de heksencontext als verklaringsmiddel bij het uitrekenen van opgaven (Goffree, 1986), maar niet de treintjescontext. Bij navraag bij een aantal leraren blijkt dat leerlingen vooral pro-

hekserij?

17 We gaan op bezoek bij een heks, die in een grote ketel een vreemd drankje klaarmaakt. Ze heeft wonderlijke blokjes om de temperatuur in die ketel te regelen.
Ze gebruikt warme blokjes die niet afkoelen en koude blokjes die niet smelten.
Als er evenveel warme als koude blokjes in de ketel zitten, is de temperatuur in de ketel 0°. Gooit ze er nu bijvoorbeeld 8 warme blokjes bij, dan zal de temperatuur 8° worden. Als het recept van het drankje aangeeft dat de temperatuur 5 graden moet dalen, dan gooit ze er 5 koude blokjes in.

a De temperatuur in de ketel is −4°.
De heks doet er 6 warme blokjes bij.
De temperatuur wordt . . .

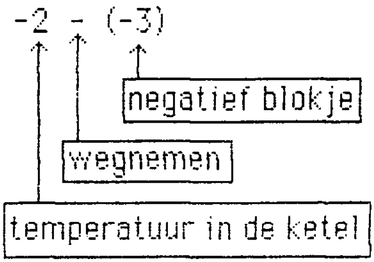


b De temperatuur in de ketel is 8°.
De heks gooit er 10 koude blokjes in.
De temperatuur wordt . . .

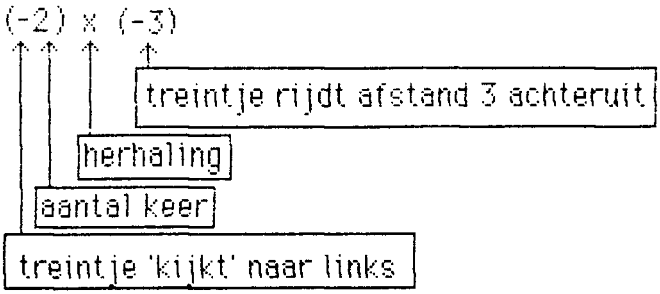
c De temperatuur in de ketel is −2°.
De heks gooit er 3 koude blokjes in.
De temperatuur wordt . . .

blemen hebben met het idee van negatieve treinen die achteruit rijden (Zie ook: Goffree, 1986). De combinatie is te ingewikkeld en vraagt teveel uitleg die nog meer verwarring schept. Alleen sterke leerlingen hebben in de gaten dat je het 'abstract moet bekijken'. Vermenigvuldigingen met negatieve getallen worden, ondanks de aanwezigheid van een context, direct met de formele hulpregels 'min x min = plus' enz.. uitgevoerd. Ook in het recent verschenen 'Tegengesteld' (Goffree, Buys, e.a. 1989), worden de problemen met de treintjescontext gesignaleerd. Het omzetten naar de voorbeeldsituatie vraagt om nogal wat 'vertaal'regels.

Dat is merkwaardig omdat er zo op het eerste gezicht geen didactisch verschil tussen beide contexten valt te bespeuren. Het betreft in beide gevallen bedachte, kunstmatige situaties waarbij de notatie zich kan ontwikkelen als een adekwate beschrijving van die situaties. Gedétailleerde analyse van de analogie geeft echter een heel ander beeld. De opgave -2 - (-3) laat zich in de heksensituatie als volgt interpreteren:



Deze interpretatie blijft dicht bij de gebruikelijke 'wegneem'-interpretatie van aftrekkingen en bij de interpretatie van thermometersommen. Het enige verschil is de introductie van negatieve blokjes. Helemaal onbekend hoeft dit niet voor leerlingen te zijn. Kampeer-koelboxen worden gebruikelijk gekoeld door het toevoegen van koude koelblokjes. De interpretatie van (-2)x(-3) in de treintjescontext ligt veel verder weg.



De ingewikkeldheid van deze vertaling is onvermijdelijk en hangt ten nauwste samen met de interpretatie van het x-teken. In de betekenis van het x-teken als herhaling, staat het x-teken voor het aantal keer dat iets herhaald moet worden. Doordat er nu een negatief getal staat wordt de verwachting gewekt dat er een negatief aantal zou moeten staan. Het aantal-begrip laat zich echter niet transformeren tot negatieve aantallen. In de context wordt dat opgelost als een combinatie van een treintje dat de andere kant 'uitkijkt' en een aantal. Dit is niet in overeenstemming met wat je zou verwachten.

Extra moeilijkheid is nog dat niet duidelijk is waarom een treintje dat naar rechts wijst positief genoemd wordt en een treintje dat naar links wijst negatief. Bij het vertalen van positief en negatief naar rechts en links gaat de essentiële eigenschap verloren dat positief meer is dan negatief.

Vergelijken we beide contexten met betrekking tot analogie dan zien we een belangrijk verschil. In de heksencontext wordt geprobeerd de betekenis van het aftrekken van positieve getallen als temperatuursverandering door het wegnemen van blokjes, door analogie over te dragen op het aftrekken van negatieve getallen. Doordat positieve temperatuur naar negatieve temperatuur kan worden getransformeerd en positieve warmte naar negatieve warmte, slaagt de analogie. In de treintjescontext wordt geprobeerd de betekenis van het vermenigvuldigen van positieve getallen als het herhaald verplaatsen van een treintje, door analogie over te dragen op het vermenigvuldigen van negatieve getallen. Doordat echter 'aantal herhalingen' zich niet laat transformeren tot 'negatief aantal herhalingen', moet een toevlucht worden genomen tot een andere interpretatie en gaat de analogie verloren. Voorwaarde voor het slagen van een analogie is kennelijk het intact laten van de begripsstructuur.

4. De weegschaal in Moderne Wiskunde

Het formele letterrekenen wordt in het algemeen ervaren als één van de belangrijkste knelpunten in het wiskundeonderwijs op lbo/mavo niveau. Algemeen kenmerk is een mechanistisch algoritmische aanpak waarbij leerlingen worden getraind in het oplossen van formele wiskundige problemen. Leerlingen kunnen formele opgaven oplossen volgens strikte regels. Het hoe en waarom van deze regels blijft voor hen duister. Deze wiskunde is voor hen een mysterieus spel met symbolen waarvan de zin hen ontgaat. Het is kennis zonder inzicht, die in het algemeen weinig wendbaar is.

Toch is het bedrijven van wiskunde ondenkbaar zonder formele technieken. Die technieken komen op alle niveaus voor. Het rekenen met letters is er één van. In de brochure 'Vaardigheden' (Van Dormolen, e.a. 1975) wordt *vaardigheid* omschreven als routine die met inzicht gepaard gaat. Dat betekent dat leerlingen in redelijke tijd adekwaat en intentioneel kunnen handelen in situaties die betrekkelijk nieuw zijn. Dit geeft een omschrijving van het leerdoel van het onderwijs dat zich met het verwerven van vaardigheden bezighoudt. De vraag blijft welke leerstof hiervoor geschikt is. De brochure formuleert hiervoor de volgende criteria: de leerstof moet voldoende aansluiten bij de beginsituatie, moet doelgericht zijn en moet voldoende variatie bieden.

Vanuit de theorie van de cognitieve psychologie geeft Davis

(1984) aan dat de leerling aan de hand van de leerstof in staat moet zijn om een geschikte representatie van de handeling op te bouwen. Een representatie is de georganiseerde kennis van de leerling rondom het probleemveld die leidt tot een doelgerichte herkenning van de problemen, van waaruit ideeën over oplossingsstrategieën worden geleverd en die de leerling in staat stellen de verworven informatie te verwerken.

In de gangbare wiskundemethodes worden de eerste stappen van het letterrekenen doorgaans gezet aan de hand van het oplossen van lineaire vergelijkingen. De vraag doet zich voor of dit een geschikte keuze is in het licht van de hierboven geschetste criteria. Er zijn uiteraard meer motieven die de keuze van 'vergelijkingen' in de onderbouw rechtvaardigen. Bijvoorbeeld het aspect van het horizontaal mathematiseren: een realistische situatie leren weergeven in een formeel symbolische gedaante. Bij de wiskundige didactische analyse van 'vergelijkingen' zal ik me echter concentreren op het aspect van het rekenen met letters.

Het idee van vergelijkingen sluit goed aan bij de 'stip'-sommen waarmee leerlingen in het basisonderwijs hebben kennisgemaakt. De vraag daarbij is welk getal op een stip moet worden gezet om een som kloppend te krijgen. In die zin is er een goede aansluiting bij de beginsituatie van brugklasleerlingen mogelijk. Vergelijkingen geven haast van nature goede mogelijkheden voor een duidelijke doelgerichte aanpak: het gaat immers om het vinden van een onbekend getal. Lineaire vergelijkingen komen in vele verschillende typen voor: met of zonder breuken, met negatieve oplossingen, zonder oplossingen, alle getallen als oplossing, vergelijkingen met alleen +-tekens, vergelijkingen in de gedaante .... = 0,... Dit gegeven biedt zeer veel mogelijkheden tot variatie.

Biedt het onderwerp ook voldoende mogelijkheden voor de leerlingen om een eigen adekwate representatie van het oplossingsproces op te bouwen? Centraal bij het oplossen van vergelijkingen staat het idee om links en rechts van het =-teken dezelfde bewerking toe te passen. Op zich is het niet zo moeilijk om leerlingen deze handelingen bij te brengen. Gebruikelijk gebeurt dit door de bewerkingen: 'getallen naar rechts en letters naar links brengen'. Dit is een formeel symbolische manipulatie volgens strikte regels, waarbij op geen enkele manier zichtbaar blijft op welke wijze de gelijkwaardigheid van de vergelijkingen blijft bestaan. Van een kale uitleg van dit algoritme om tot een oplossing te komen, kan dan ook alleen maar verwacht worden dat die een formeel symbolische betekenis geeft aan het oplossingsproces en aan de oplossing. Vanuit een didactisch standpunt is dit zeer ongewenst. 'Vergelijkingen oplossen' is één van de basisvaardigheden van de wiskunde die in de meest uiteenlopende typen vergelijkingen te pas komt. Uitleg in alleen formeel symbolische betekenis zal leiden tot een groot aantal verschillende algoritmen, voor elk type vergelijking een ander. Een omvattend concept zal ontbreken. Dit zal leiden tot gefragmenteerde receptmatige handelingen, waarbij het zicht op de basisvaardigheid zal ontbreken. In de eigen constructies van een adekwate representatie zal de ontwikkeling van omvattende basisconcepten van 'vergelijking' en 'vergelijking oplossen' dus een belangrijke rol moeten spelen.

De basisvaardigheid 'vergelijking oplossen' zal zich kunnen ontwikkelen volgens de volgende vragen:
- wat is een vergelijking?
- wat is een oplossing van een vergelijking?
- hoe los je een vergelijking op?

Deze vragen staan niet los van elkaar. De betekenis van een vergelijking wordt mede bepaald door wat je ermee kunt doen, dus door de oplossing en het oplossingsproces. De vragen hebben een sterke onderlinge samenhang. Door de keuze van een geschikte context moet het mogelijk zijn deze vragen gelijktijdig en in samenhang actueel te maken.

In Moderne Wiskunde (hoofdstuk 4, deel 2, 5e editie) wordt de weegschaalcontext gebruikt om vergelijkingen te leren vereenvoudigen. Doel van de uitleg is het kunnen herleiden van lineaire vergelijkingen tot een gedaante waarin je de oplossing zo ziet zitten. Het gaat om vergelijkingen van het type:

$$3x - 12 = 4 - 5x.$$

De getallen en de coëfficiënten voor x kunnen ook breuken zijn. In het voorbeeld wordt links en rechts $5x$ bij de vergelijking opgeteld:

$$8x - 12 = 4$$

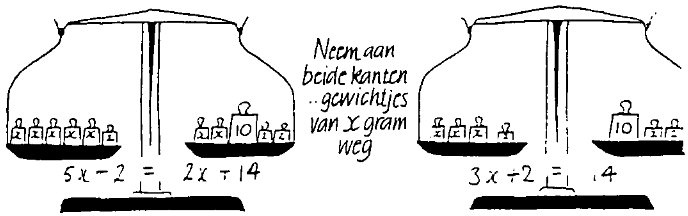
De vergelijking kan nu worden opgelost door op de plaats van

$8x$ een bordje te denken en je af te vragen wat daar voor getal op zou moeten staan om de zaak kloppend te krijgen. Dat levert direkt dat $8x = 16$ en dus $x = 2$. Het is ook mogelijk om één stap verder te gaan door links en rechts 12 bij de vergelijking op te tellen. Ook dat levert $8x = 16$.

Als er breuken in de vergelijking voorkomen, wordt eerst een getal opgespoord waarmee linker- en rechterkant kunnen worden vermenigvuldigd om de breuken kwijt te raken.

7 In de vergelijking $5x + 2 = 2x + 14$ komt de veranderlijke (in dit geval x) links én rechts van het gelijkteken voor.
De bordjes manier van Marian helpt nu niet meteen. In zo'n geval kunnen we de waarmaker van de vergelijking vinden met behulp van een weegschaal. Op de linkerschaal staan 5 gewichtjes van x gram en een gewicht van 2 gram. Op de rechterschaal staan 2 gewichtjes van x gram, één van 10 gram en twee gewichtjes van 2 gram. De weegschaal is in evenwicht. De weegschaal blijft in evenwicht als je aan beide kanten evenveel weghaalt of erbij doet.

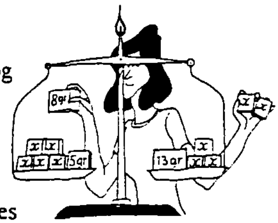
Het gelijkteken



Door vergelijkingen op te vatten als een symbolische weergave van de weegschaalsituatie met onbekende gewichten, wordt onmiddellijk duidelijk wat de oplossing is en hoe je die kunt vinden. Wat bij de plaatjes gebeurt, is onmiddellijk terug te vinden in de vergelijkingen. Door de analogie met de weegschaal wordt verwezen naar een bestaande situatie waarin die bewerkingen vanzelfsprekend zijn. Het evenwicht moet gehandhaafd blijven en dat kan alleen maar gebeuren door de linker en de rechterschalen op dezelfde wijze te veranderen. Ook het zoeken van een oplossing is heel vanzelfsprekend: het gaat om het bepalen van het gewicht van een onbekend voorwerp. Hoewel de leerlingen waarschijnlijk nog nooit met een weegschaal hebben gewerkt, is deze situatie volkomen duidelijk voor hen en heeft geen verdere uitleg nodig. Ze kan dus functioneren als een verklaringsmiddel voor het betrekkelijk nieuwe verschijnsel van vergelijkingen.

De context van de weegschaal bevat meer regels dan nodig zijn voor een adekwate ontwikkeling van het algoritme. Zo kun je bij een weegschaal ook zoveel elementen toevoegen tot links en rechts precies hetzelfde op de schalen staat. Het links en rechts toegevoegde moet dan ook gelijk aan elkaar zijn. Dat levert een nieuwe situatie op die soms ook direkt is op te lossen. In het boek komt deze situatie eenmaal in een opgave voor.

55 Leonie moet de vergelijking $5 \cdot (x + 1) = 3 \cdot x + 13$ oplossen. Eerst gaat ze herleiden:
$5 \cdot x + 5 = 3 \cdot x + 13$
Ze vindt dat een vergelijking wel wat op een weegschaal lijkt: de 5 gewichtjes van x gram plus nog 5 gram zijn net zo zwaar als de 3 gewichtjes van x gram plus nog 13 gram.
Ze denkt: als aan beide kanten dezelfde gewichtjes liggen, is de weegschaal ook in evenwicht.
Daarom legt ze links 8 gram bij en rechts 2 gewichtjes van x gram.
Toen ze dat deed zei ze: 'Ik zie het al, de waarmaker van de vergelijking is 4.'
Klopt haar antwoord? Hoe heeft ze het gevonden?



Een dergelijke aanpak heeft echter geen weerspiegeling in de gebruikelijke formele aanpak om een vergelijking op te lossen. Het is dus geen wonder dat de auteurs hier niet op doorgaan. Alleen de regels uit de context worden gepresenteerd die relevant zijn voor de ontwikkeling van het formele analogon.

In een volgende fase zal de analogie moeten worden losgelaten. Het gaat immers om vergelijkingen, niet om weegschalen. De methode kiest voor een geleidelijke overgang. Er komt steeds meer nadruk op de vergelijkingen te liggen en de bijbehorende plaatjes verdwijnen uiteindelijk. Er is één ogenblik waarin de grenzen van de analogie expliciet aan de orde worden gesteld. Niet iedere vergelijking laat zich consistent interpreteren als een situatie op een weegschaal. De vergelijking $5x + 8 = 3x + 2$ laat zich interpreteren als een weegschaal met links 5 zakken met x knikkers en 8 losse en rechts 3 zakken met x knikkers en 2 losse knikkers. De oplossing $x = -3$ is echter rechtstreeks in strijd met een interpretatie van een weegschaal. De methode

neemt daarmee afstand van de weegschaalcontext en legt het accent op het oplossen van vergelijkingen:
"We hoeven niet altijd aan echte zakken met knikkers te denken. De weegschaalmethode betekent alleen : doe steeds links en rechts van het gelijkteken hetzelfde."

Bij vergelijkingen met negatieve coëfficiënten is zelfs de rechtstreekse interpretatie door een weegschaal al niet meer mogelijk. Plaatjes met weegschalen komen dan niet meer voor. Wel blijft de notatie gehandhaafd waarbij links en rechts de bewerking op of binnen een vergelijking wordt aangegeven.

23 In de vergelijking $3x + 2 = -2x + 12$ komt de veranderlijke x zowel links als rechts voor.
Marijke wil het minteken uit de vergelijking wegwerken.
Zij telt links en rechts hetzelfde op. In dit geval $2x$.
Kijk maar naar het blaadje hiernaast.

$$\begin{array}{rcr} 3x+2 & = & -2x+12 \\ +2x & & +2x \\ \hline 5x+2 & = & 12 \end{array}$$

a Los de vergelijking $5x + 2 = 12$ op.
b Controleer de gevonden waarmaker in de vergelijking $3x + 2 = -2x + 12$

Bij het gelijknamig maken van breuken in een vergelijking en het wegwerken van de breuken door links en rechts met eenzelfde getal te vermenigvuldigen, gaat deze methode niet meer op. De leerlingen worden daarmee feitelijk gedwongen deze los te laten en te verkorten tot een rechtstreekse aanpak waarbij in gedachten de bewerkingen dienen te worden uitgevoerd en alleen het resultaat wordt opgeschreven.

Samengevat zien we dat de context van de weegschaal voldoende mogelijkheden moet bieden tot het opbouwen van een adekwate representatie van het oplossingsproces van lineaire vergelijkingen. Deze representatie bestaat uit een progressieve opbouw van een analogie tussen een weegschaal en het formele oplossingsproces. Er is een bijna visuele overeenkomst tussen plaatjes van weegschalen en vergelijkingen. Het =-teken functioneert hierin als een symbool voor evenwicht. Dit gegeven geeft een direkte sturing van en verklaring voor de handeling van het vereenvoudigen door links en rechts hetzelfde te doen.

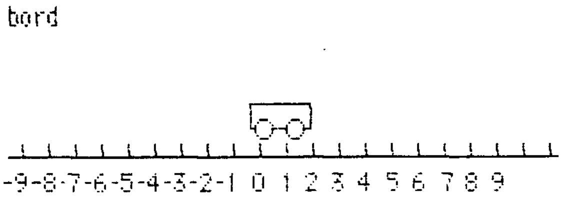
5. Treinen in de klas

Tot zover is alleen vanachter het bureau naar de verschillende contextsituaties gekeken. Het wordt tijd om ook eens te zien hoe dat in de klas toegaat. Helaas is er geen materiaal beschikbaar over de heks in de klas. In dit verband kunnen we alleen maar verwijzen naar de observaties van Goffree (1986), waar Annemarie in een bijlessituatie op heel natuurlijke wijze de heksencontext als verklaringsmiddel hanteert.

In het volgende lesfragment komt de treintjes-context aan de orde.

Klas: Brugklas, mavo, havo,atheneum.
Methode: Moderne Wiskunde, 4 de editie.
Th is de docent.
Het huiswerk was opgave 38 t/m 43.
De antwoorden van opgave 38 zijn door de leerlingen beurtelings voorgelezen.

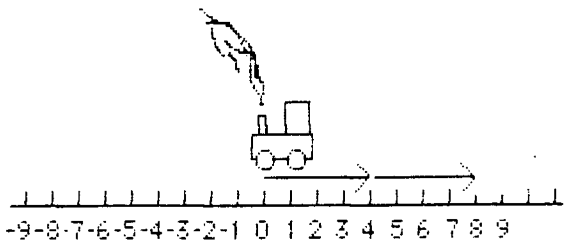
1. Th: Opgave 39. Dat ging over dat negatieve treintje, daar werd gevraagd om in een tekening duidelijk te maken hoe je -3 x -2 uit kunt rekenen. Hoe heb je dat gedaan Remco?
2. R: Eh ja, je schrijft het gewoon als 3 x 2.
3. Th: Hoe heb je dat getekend? Je moest er een tekening bij maken.
4. R: Dat heb ik niet.
5. Th: Dat staat er toch [leest voor]: "Maak een tekening waaruit je de uitkomst van deze vermenigvuldiging kunt aflezen." Met behulp van zo'n treintje.
6. R: Dat heb ik niet gedaan.
7. Th: Sandra?
8. S: [onverstaanbaar]
9. Th: Ik zal hem tekenen. [Pakt geodriehoek, tekent getallenlijn op het bord, geroezemoes.]
   OK. Margriet, hoe heb je het gedaan? [Verbetert de tekening op aanwijzingen van de leerlingen.] Ja. OK, iedereen even zijn mond dicht.
10. M: Ik heb er een treintje ingetekend.
11. Th: Ja. [Tekent op het bord.]
12. Wat voor treintje is het?
13. M: [onverstaanbaar]
14. Th: Welke kant staat de voorkant op? Die kant? [wijst naar rechts.] Hij gaat naar links hè, -3 x -2 [wacht]. [Naam] zegt dat er -6 uitkomt, -3 x -2. Wie is het daar niet mee eens? Ja? [Naam]
15. A: 6.



16. Th: Hoe heb je het getekend dan?
17. A: Ik heb het niet getekend, maar 3x2 is 6 en het is twee keer min.
18. Th: Jawel, maar dat heb je nog niet gehad.
19. A: Mijn vader zei, min , min is plus. [onverstaanbaar]
20. Th: Ja maar dat doe je bij optellen en aftrekken, maar dit is vermenigvuldigen. [Naam]
21. B: Ik dacht -3 naar links en dan -2 keer de andere kant opdoen.
22. Th: [Wacht] Wat komt er dan uit? Je zegt het een beetje onhandig. Ja?
23. C: Moet min keer min plus zijn?
24. Th: Ja dat klopt wel maar dat krijg je straks pas, dat heb je niet gehad, het is de vraag hoe je dat met dat treintje moest tekenen. Als je nou 3 x -2 had, hoe tekende je dat? Met dat treintje? [wacht] Ja?
25. D: [onverstaanbaar]
26. Th: Ja. Dat ging dus 3 keer, dan ging het min-treintje vooruit. [Tekent pijlen in de figuur.] En als je nou -3 x -2 hebt ,wat zou je dan doen Harold?
27. H: Dan gaat ie de andere kant op.
28. Th: Dan rijdt ie achteruit, inderdaad. Dit treintje rijdt 3x2 achteruit. Dan kom je bij 6 terecht. Ja? [Wacht, kijkt rond] Is dat duidelijk? Wie heeft daar nog vragen over? [Geen reacties] OK, dan doen we er gewoon nog eentje. Als ik -2 x -4 heb.
[Schrijft -2 x -4 op het bord] Peter! Wat krijg je dan?
29. P: -8 achteruit.
30. Th: -8 achteruit?
31. P: Nou, hij gaat naar -8.
32. Th: Hij gaat naar -8, -2 x -4?

33. P: Oh, 8.
34. Th: Hij rijdt inderdaad 2x4 achteruit. Dus [tekent 2 pijlen]:

bord



Ja? Goed laten we naar som 40 kijken. Zien of je dat wel goed gedaan hebt.

[Leerlingen lezen beurtelings de goede antwoorden op tot opgave k. Deze opgave krijgt een nadere uitleg.]

35. Th: Wat heb je uit -4 x - $\frac{1}{4}$?
36. E: Die heb ik niet.
37. Th: Als je die met het treintje doet, wat doet die dan?
38. E: Achteruit.
39. Th: Hoe vaak gaat die achteruit?
40. E: Ja dat weet ik niet.
41. Th: Wie kan me dat vertellen? [Wacht] Alfons misschien?
42. Alf: Som k?
43. Th: Ja som k.
44. Alf: -1
45. Th: -1? [Wacht]. OK, wie is het daar niet mee eens? Rita?
46. Ri: [onverstaanbaar]
47. Th: Er komt 1 uit, ja. Hoe kun je dat, als je dat nog niet zo kunt, hoe kun je dat met het treintje doen dan? Kijk er staat -4 keer -$\frac{1}{4}$. Als het tweede getal negatief is, gebruik je het negatieve treintje. Ja? Het positieve treintje gebruik je als het tweede getal positief was. Je hebt dus een afstand van $\frac{1}{4}$. Er staat - 4 keer $\frac{1}{4}$, dus hij gaat 4 keer $\frac{1}{4}$ achteruit. Nou waar komt die dan terecht? Remco?
48. Re: Eh, -6.
49. Th: Nee ik heb het nog steeds over de letter k.

50. F: 1.
51. Th: 1, ja. OK.
[Er is weinig aandacht tijdens de uitleg. De les gaat verder met de behandeling van opgave 41.]

We zien dat hier regelmatig sprake is van de door Goffree c.s. (1988) geschetste sluiproutes. Leerlingen komen er gewoonweg niet toe -3 x -2 uit te rekenen met behulp van treintjes (zie uitspraken 2, 17, 23). Hetzelfde geldt voor andere opgaven van deze vorm. Tijdens de uitleg van de docent met behulp van treintjes verslapt de aandacht. Leerlingen die een beurt krijgen weten niet meer over welke som het eigenlijk gaat (42, 48). Het is duidelijk dat in deze les de treintjescontext niet werkt. Leerlingen hanteren bij dit soort opgaven de bekende formele regels (2, 17, 19, 23). Trouwens, ook de docent herleidt het probleem tot een vermenigvuldiging met positieve getallen (28, 47). De weg tot dit resultaat is echter lang en ingewikkeld. Met name de stap naar het links 'kijkende' treintje bij -3 x -2 neemt veel tijd (14-29). Dit is volledig in overeenstemming met de theoretische analyse. Het is geen wonder dat de leerlingen de voorkeur geven aan een kortere weg die ook tot het goede resultaat leidt.

6. Vergelijkingen in klas 2 Mavo en Atheneum

De Chr.Scholengemeenschap de Waezenburg in Leek is een school voor mavo, havo en vwo. De brugklas is gemeenschappelijk voor alle leerlingen. Pas aan het eind van de brugklas vindt een selectie plaats naar de drie schooltypen. Dat betekent dat alle leerlingen hetzelfde wiskundeprogramma volgen in de brugklas. Daarbij wordt gebruik gemaakt van de methode Moderne Wiskunde, 4e editie. Ook in de tweede klas volgen de leerlingen hetzelfde wiskundeprogramma, hoewel ze dan in verschillende schooltypen zitten. Daarbij wordt gebruik gemaakt van Moderne Wiskunde, 5e editie. Deze methode streeft een inzichtelijke opbouw van het oplossen van vergelijkingen na vanuit een contextrijke aanpak zoals in paragraaf 4 is geschetst. Om na te gaan wat het effect is van een dergelijke aanpak op de verschillende schooltypen, zijn de situaties vergeleken tussen een mavo- en een atheneumklas, bij één leraar en bij hetzelfde onderwerp. In beide klassen is een les op de video opgenomen. Dit materiaal is verwerkt in protocollen.

Wat allereerst opvalt is *het verschil in tempo* tussen mavo en atheneum. De atheneum-les vond plaats op 11 december, de mavo-les op 9 januari. Rekening houdend met de kerstvakantie, is dit een verschil van ruim twee weken (≈ 6 lessen). Ook in het protocol is dit verschil in tempo terug te vinden. De behandeling van opgave 25 a t/m f duurt bij de atheneum klas 8 minuten, bij de mavo-klas duurt de behandeling van 25 c t/m f circa 10 minuten. Opgave 28 a t/m f neemt bij atheneum 5 minuten, bij mavo 13 minuten. In beide klassen laat de docent de gemaakte huiswerkopgaven door leerlingen op het bord schrijven. In de atheneum-klas volgt een korte controle en, indien nodig, korte toelichting door de docent. In de mavo-klas wordt iedere uitwerking nog eens volledig nabesproken. Opvallend is ook dat veel mavo-leerlingen de opgave verkeerd uit het boek hebben overgeschreven. Dit komt in totaal 4 keer voor. Hoewel deze verkeerd opgeschreven opgaven toch goed worden opgelost, kost het uiteraard extra tijd om ook nog de oorspronkelijke opgave te behandelen.

Tussen beide klassen is *geen significant verschil in het aantal gemaakte fouten* in de door leerlingen op het bord geschreven opgaven (≈ 25%). Wel opvallend is het *verschil in de gehanteerde oplossingsmethode*. In de mavo-klas worden 80% van de gepresenteerde opgaven opgelost met behulp van de 'weegschaal'- en de 'bordjes'-methode. Bij de atheneum-klas is dat 30%. Karakteristiek voor dit verschil zijn de volgende uitwerkingen.

MAVO

$$\begin{array}{l} -7z + 2 = -9z + 10 \\ \underline{+9z \qquad\qquad +9z} \\ 2z + 2 = 10 \\ \boxed{8} \\ 2z = 8 \\ z = 4 \end{array}$$

Atheneum

$$\begin{array}{l} -7z + 2 = -9z - 10 \\ 2z + 2 = -10 \\ 2z = -12 \\ z = -6 \end{array}$$

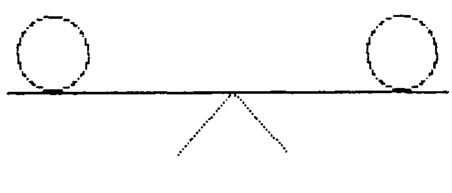
Bij de 'weegschaal'-methode komt de weegschaal zèlf niet meer ter sprake. De oplossingsmethode ziet er formeel uit, waarbij de toe te voegen of af te halen elementen consequent onder het linker en rechterlid van de vergelijking worden geschreven. Uit het protocol valt af te leiden dat de rechter-uitwerking een verkorting is van de linker. Regelmatig treedt verwijzing op naar het in gedachten links en rechts erbij tellen van elementen, in gedachten proberen te bepalen welk getal op een bepaalde plaats hoort te staan. De volgende fouten in de Atheneumklas zijn mogelijk een gevolg van te snelle verkorting:

$7 + 21x = 6 \dashrightarrow 21x = 6$
$3 = 3x - 6 \dashrightarrow 3x = -9$
$2x + 7 = 13 \dashrightarrow 2x = 13:2 = 7$

Slechts één keer komt de weegschaal expliciet aan de orde. Dat gebeurt in de atheneum-klas als de docent uitlegt waarom je een vergelijking met breuken mag vereenvoudigen door die links en rechts met 18 te vermenigvuldigen.

1. Rij: Maar goed, waarom ga je nu alles keer 18 doen? Dan ben je al die breuken kwijt.
2. N: Ja.
3. Rij: Mag dat zomaar?
4. O: Waarom niet?
5. P: Ja.
6. Q: Je hebt wel een hele andere vergelijking.
7. Rij: Je hebt wel een hele andere vergelijking, dat wel ja. Mag dat zo maar?
8. O: Ja.
9. P: Ja wel beide.
10. Rij: Wat zeg je?
11. P: Als je beide met 18 vermenigvuldigt wel.
12. Rij: Ja hoe beide, hoe beide? Waar vergelijken we dat ook weer mee zo'n vergelijking?
    Met een weegschaal hé. [Tekent op het bord.]
13. P: Ja je hebt beide evenveel bijgebracht.

bord



14. Rij: Als hier iets opstaat en daar staat iets op en ik maak die 18 keer zo groot en ik maak die 18 keer zo groot, blijft er dan evenwicht?
15. Q: Ja.
16. U: Ja.
17. Rij: Ja hé. Dus dat mag?
18. V: Nee.
19. Rij: Nee?
20. V: Op één voorwaarde.
21. Rij: Op één voorwaarde.
22. V: Als je [onverstaanbaar]
23. Rij: Uiteraard [onverstaanbaar] maar dat is zo, kijk maar daar staat een =-teken, hè.
24. W: Ha!Ha!Ha!

Gezien de reacties van de leerlingen is er niet zoveel behoefte aan deze uitleg. Ze zijn al zo vertrouwd met het idee dat je vergelijkingen mag veranderen door links en rechts hetzelfde te doen, dat het vanzelfsprekend is dat dat ook geldt voor vermenigvuldigen. Ze hebben dat waarschijnlijk ook al gewoon gedaan, hoewel dat nog niet expliciet in de methode aan de orde is gesteld.

Samengevat zien we dat de weegschaal-analogie functioneert als een verklaringsmiddel *ter introductie* van een algoritme voor het oplossen van lineaire vergelijkingen. Het functioneert niet als verklaringsmiddel achteraf, maar als middel waarbij de vanzelfsprekende regels worden overgedragen op een nieuw gecreëerde formeel-symbolische wereld. Is dit eenmaal bereikt, dan wordt het middel losgelaten en ontwikkelen nieuwe regels zich vanzelf, naar analogie van reeds bestaande, binnen deze nieuwe omgeving.

Verschillen tussen atheneum- en mavo-leerlingen zijn er niet in de mate waarop het middel wordt losgelaten. Wel zijn er aanzienlijke verschillen geconstateerd in de snelheid waarop verkortingen in de ontwikkelde procedures optreden waarbij mavo-leerlingen langer een visuele vorm hanteren die rechtstreeks verwijst naar de weegschaal.

7. Conclusies

De bestudeerde contexten vertonen sterke overeenkomsten met elkaar. Ze hebben alledrie betrekking op een gefantaseerde wereld. Het zijn alledrie contexten ter introductie van formele begrippen en notaties. Het doel is van het begin af aan om de context los te laten. Het visuele aspect speelt een belangrijke rol in de presentatie. Desondanks zien we grote verschillen in effect:

- de heksencontext en de weegschaalcontext hebben wel een verklarende waarde bij de formeel symbolische handelingen,
- de treintjescontext heeft geen verklarende waarde.

Als mogelijke verklaring voor de verschillen tussen de heks en de weegschaal enerzijds en het treintje anderzijds hebben we geconstateerd dat de vertalingen van de formele notatie naar de context in beide situaties nogal verschillen. Bij de heksencontext en de weegschaalcontext zijn de gebruikelijke interpretaties van de symbolen in de context terug te vinden. Bij de treintjescontext is dat niet het geval. De context leidt niet op een vanzelfsprekende manier tot de andere gewenste interpretatie van de symbolen. Zo onstaat de situatie dat de interpretatie van de symbolen zèlf aangepast dient te worden vóórdat een vertaling naar de context betekenis kan hebben. Op een betekenis-niveau laat analyse van de gebruikte analogieën bij de treintjescontext zien dat er te weinig structurele overeenstemming is en dat de 'vertaal'-problemen dus onvermijdelijk zijn bij deze keuze van context.

Van mavo-leerlingen zou je verwachten dat ze langer gebruik blijven maken van de weegschaal-analogie bij het oplossen van vergelijkingen dan van atheneum leerlingen. Dat verschil is niet terug te vinden in de geobserveerde klassen. Bij beide groepen speelt de analogie geen expliciete rol meer bij het oplossen. De toegepaste algoritmes zijn voor beide groepen formeel-symbolisch van karakter. Alleen treden bij de atheneum leerlingen sneller verkortingen op in de algorithmes en werken ze doelgerichter naar de oplossing toe.

Literatuur

Broekman, H. (1989) Sluiproutes of alternatieve wegen? *Tijdschrift voor Didactiek der ß-wetenschappen*, 7, 1, 67-72.

Davis, R.B. (1984) *Learning Mathematics*, New York: Routledge.

Dormolen, J. van, e.a. (1975) *Vaardigheden*, Utrecht: Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Dormolen, J.van (1987) Metaforen als taalkundig hulpmiddel bij het leren van wiskunde, *Tijdschrift voor Didactiek der ß-wetenschappen, 5*, 1, 1-15.

Goffree, F. (1986) Annemarie, de eredivisie, een heks en de NS, *Euclides, 62*, 4, 97-103.

Goffree, F., J. Vedder & K. Buys (1988) Sluiproutes door realistische leergangen-ongewenste verkortingen, *Tijdschrift voor Didactiek der ß-wetenschappen, 6*, 1, 5-23.

Goffree, F., K. Buys, e.a. (1989) *Tegengesteld*, Baarn: Bekadidact.

Lange, J. de (1987) *Mathematics, Insight and Meaning*, Utrecht: OW&OC.

Pimm, D. (1988) *Speaking Mathematically*, London: Routledge & Kegan Paul.

Polya, G. (1945) *How to solve it*, Princeton: Princeton University Press.

Treffers, A. & F. Goffree (1985) Rational Analysis of Realistic Mathematics Education. In: L.Streefland (Ed.). *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Utrecht: OW&OC.