Boekbespreking

"Tegengesteld"
Wiskundedidactiek op de grens van basis- en voortgezet onderwijs, toegespitst op negatieve getallen

F. Goffree & K. Buys
Uitg: Bekadidact Baarn, 1989
247 p.
ISBN 90-321-0634-1

1. Inleiding

Negatieve getallen werden - volgens Glaeser (1981) - zo'n 1600 jaar 'clandestien' gebruikt door wiskundigen, voordat zij werkelijk begrepen werden. In de historische ontwikkeling van de wiskunde was het dus een controversieel onderwerp, dat stof deed opwaaien. Allerlei kwalificaties werden eraan gegeven. Er werd gesproken van 'absurde' getallen of 'valse' getallen door auteurs van wiskunde boeken, zo lezen we in het boeiende historische hoofdstuk 12 in "Tegengesteld". Het waren getallen om te omzeilen, omdat mensen er nu eenmaal geen vertrouwen in hadden, wanneer het bekende negatief werd. Of ze gaven aanleiding tot allerlei storende paradoxen, zoals:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots ,$$

wat voor $x=1$ met in het rechterlid de termen twee aan twee samengenomen $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots\ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots\ldots$ opleverde zo meende Guido Grandi uit Pisa, een tegenstrijdigheid die men toen (17e/18e eeuw) als storend ervoer.

Wat mathematisch een obstakel vormde zal didactisch de nodige zorg vergen! Het valt daarom toe te juichen dat een auteursgroep van acht wiskunde-didactici (Tineke Brinkman, Kees Buys, Willem Faes, Fred Goffree, Ed de Moor, Pieter Terlouw, Jaap Vedder en Arie Timmermans) hun doordenking van de didactiek van de negatieve getallen in de vorm van het boek in bespreking voor het onderwijs beschikbaar hebben gesteld.

Het werk is voorbeeldig in meerdere opzichten. De diverse hoofdstukken - van gesprekken met kinderen over hun noties van negatieve getallen tot en met de reeds genoemde historische beschouwing - weerspiegelen als het ware de diverse bronnen waaruit men kan putten voor het verrichten van een grondige mathematisch-didactische analyse. In dit opzicht kan het werk ten voorbeeld gesteld worden voor nieuwe didactische uitgaven over andere onderwerpen.

In deze bespreking zal ik eerst een beknopt overzicht van de inhoud van het boek geven. Vervolgens beperk ik mij tot de kwestie van de vermenigvuldiging van een negatief getal met een negatief getal ('min-maal-min-is-plus'). Daarop kan de bespreking zich toespitsen, omdat daarin alle problemen die zowel historisch als didactisch rezen worden samengebald. Het is dé kwestie waar het om draait bij de negatieve getallen.

2. De inhoud van "Tegengesteld"

In het eerste hoofdstuk wordt verslag gedaan van gesprekken met kinderen uit groep 8 van de basisschool. Het gaat om de soorten getallen die zij kennen. In deze gesprekken werden ook vragen gesteld over "Getallen die eigenlijk niet bestaan". Een interessante uitkomst van deze gesprekken was, dat de opvattingen van sommige kinderen over kommagetallen interfereerden met die over negatieve getallen. 0,1; 0,2 ; 0,3 ... enz werden opgevat als getallen 'onder nul', een zienswijze die ook verderop in het boek bij andere kinderen nog terugkeert (effect van het onderwijs?). Eén belangrijke conclusie van de auteurs betreft het formaliseren. "Het ontwikkelen van een geschikte didactiek voor die overgang naar de meer formeel-wiskundige werkwijze met negatieve getallen vereist meer *en kan niet zonder meer afgeleid worden uit de didactiek behorend bij het realistisch reken/wiskundeonderwijs van het basisonderwijs*" (p.24; curs.L.S.). Hierop zullen we bij onze bespreking nog nader ingaan.

In het volgende hoofdstuk zijn er opnieuw ervaringen met kinderen en negatieve getallen (lift en etages beneden de begane grond), waarna een beschrijving volgt (derde hoofdstuk) van het effect op wat langere termijn van het onderwijs in negatieve getallen in de brugklas met de zgn. Wageningse methode[1].

Op deze wijze passeren alle ingrediënten van de mathematisch-didactische analyse van de negatieve getallen de revue. De volgende hoofdstukken gaan over negatieve getallen in schoolboeken, de exploratie van enkele contexten voor deze getallen met een individuele leerlinge (voetbaltabel, heks en treintjes; zie ook het artikel van Kemme in dit nummer), het uitlijnen van de negatieve getallen over lange termijn (longitudinale planning), de "kwestie-min-maal-min" didactisch benaderd en formeel wiskundig, de dilemma's die zich in didactisch opzicht daarbij voordoen, zoals uitgaan van contexten of wiskunde (wereld of wiskunde?), inzicht nastreven of blind regels leren (blind of ziend?) en wat de wereld betreft echt of gekunsteld (echt of kunst?).

Vervolgens wordt een klein ontwikkelingsonderzoek van studenten van de lerarenopleiding beschreven in brugklassen naar toepassing van het geleerde in een andere context dan de broncontext. Het verschijnsel "minder dan niks" wordt beschouwd binnen het kader van de onderwijstheorie die ten grondslag ligt aan 'realistische' leergangen. Dan volgt de eerdergenoemde beschrijving van de historische ontwikkeling van de negatieve getallen.

Tenslotte worden de essenties van de ontvouwde ideeën nog eens op rij gezet en in een nawoord wordt een korte beschouwing gewijd aan globale reflectie als leeractiviteit, waaronder verstaan wordt een "erbovenuit stijgende, afstand nemende" (denk-)handeling, gericht op het greep krijgen op de onderliggende globale structuur van - in dit geval - de negatieve getallen. Een mentale activiteit die kenmerkend zou zijn voor het verschil tussen rekenen/wiskunde van de basisschool en de wiskunde van het voorgezet onderwijs (p.241).

De hoofdstukken worden afgewisseld met intermezzi waarin verschillende standpunten ten aanzien van het gebodene worden beschreven alsook opdrachten worden gegeven voor didactische bezinning op bepaalde aanpakken. Ziedaar in vogelvlucht de inhoud van dit boek, dat dus stellig niet bedoeld is om een antwoord op alle vragen betreffende negatieve getallen te geven, maar vooral ook om de lezer aan het denken hierover te zetten.

3. Realistische theorie

Eerder in dit tijdschrift (1989) reageerde Broekman kritisch op een bijdrage over sluiproutes en ongewenste verkortingen bij het leren opereren met negatieve getallen van een deelgroep van de auteursgroep van "Tegengesteld" (Goffree, 1988). Zijn kritiek hield verband met: "De vraag namelijk of negatieve getallen en de rekenregels die gelden in het formele systeem (Z,+,*) te verkrijgen zijn *vanuit* de aangereikte contexten, of alleen *op te leggen* door een interpretatie aan mingetallen te geven" (p.70).

In "Tegengesteld" wordt realistisch reken/wiskundonderwijs te veel opgevat in de zin van steeds moeten beginnen met contexten die (min of meer) reëel zijn. Daardoor zou deze theorie tekort schieten als het gaat om het formaliseren, d.w.z. voor het (leer)proces van definitieve wiskundige vormgeving en het 'zuiveren' van de inhoud, wat o.a. wil zeggen het (leren) voorbijgaan aan de inhoud (= betekenis) die het wiskundige construct vanuit de context heeft meegekregen. Dit nu is een misvatting omtrent de realistische theorie die "Tegengesteld" doortrekt en die Broekman met zijn vraag opwierp.

We zullen proberen dit eerst algemeen en vervolgens aan de kern-kwestie "min-keer-min" nader toe te lichten.

Welnu, 'realistisch' in realistisch wiskundeonderwijs en in de achterliggende theorie betekent het volgende. Als dit *mogelijk* is probeer je de werkelijkheid als *model* voor een stukje wiskunde te gebruiken. Zo kunnen op het niveau van 5- à 6-jarigen het in- en uitstappen bij de bushalte, en in het algemeen de totale gebeurtenis bij de bushalte model staan voor het optellen en aftrekken van kleine natuurlijke getallen. Voor de kinderen van deze leeftijd is dit een *informele* toegang tot genoemde bewerkingen.

Men kan ook zeggen dat het omgekeerde gebeurt, namelijk dat een stukje wiskunde vertegenwoordigd wordt in een stukje werkelijkheid of context. Maar daarmee is niet gezegd dat dit altijd kàn of móét gebeuren. En, laten we maar meteen met de deur in huis vallen: met de negatieve getallen *gaat dit niet*, zoals de historie heeft uitgewezen (met name met het vermenigvuldigen niet). Het 'clandestiene' gebruik van de negatieve getallen hield definitief op toen Hankel (1867) weigerde - zoals daarvoor steeds wél gebeurd was - naar een concreet model of een context voor de negatieve getallen met bewerkingen te zoeken.

Hankel vatte negatieve getallen op als formele constructen. Hij verliet de weg van de grootheidsinterpretatie van deze getallen en stelde de eis van hun algebraïsche consistentie. Negatieve getallen zouden zich bij het bewerken zó moeten gedragen, dat de distributieve wet van het vermenigvuldigen over het optellen gerespecteerd bleef, dat wil zeggen, dat deze wet ook voor negatieve getallen zou blijven gelden:

$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$

dus bijv. $(4+-3)(5+-4)= 4x5+4x-4+-3x5+-3x-4$.

Om linker- en rechterlid van deze gelijkheid met elkaar in evenwicht te doen zijn moet gelden, dat $-3x-4=+12$, omdat het linkerlid gelijk is aan 1.

Dit principe van Hankel is bekend geworden onder de naam "permanentieprincipe". Waar in de historische ontwikkeling geen concrete, aan grootheden gerelateerde oplossing voor de kernkwestie van de negatieve getallen gevonden wordt, moet men op grond van de aangehangen realistische theorie dit evenmin proberen. De historische beschrijving had daarom meer naar voren gehaald kunnen worden in het boek of zelfs helemaal voorop geplaatst, zodat de lezer van meet af aan geweten zou hebben waaraan hij toe was. Bovendien zou dan de betrekkelijke waarde van activiteiten met negatieve getallen in contexten voor het leren op lange termijn wat meer benadrukt zijn. Het is niet gezegd dat de auteurs van "Tegengesteld" zo'n verbinding tussen realiteit en operaties proberen af te dwingen, maar er is wel naarstig naar gezocht.

De gesuggereerde tegenstelling (zie bv. p.24, 131 en 24) tussen de wiskunde in het voortgezet onderwijs en rekenen/-wiskunde op de basisschool, waardoor behoefte aan een nieuwe didactiek zou ontstaan, gaat voorbij aan de niveautheoretische component binnen de realistische theorie. Dat wil zeggen, wanneer men met de leerlingen de concrete onderlaag voor begrippen en operaties de rug gaat toekeren (zie het artikel van Kemme) ten gunste van het formaliseren, òf - zoals in dit geval - men zo'n concrete oriënteringsbasis node moet missen, omdat die er gewoon niet is, dan dient de oplossing voor het formaliseren gezocht te worden op het niveau, dat tussen het concrete en het formele inligt.

In dit geval bestaat die oplossing uit het *in het leerproces* ontwikkelen van wiskundige gereedschappen waarmee de leerlingen de sprong naar het formele onder begeleiding van hun leraar min of meer zelfstandig kunnen maken. Of, anders gezegd, gereedschappen aanreiken waarmee de leerlingen problemen op een *lager niveau dan het formele* kunnen oplossen.

Diverse van die gereedschappen (of probleemsituaties zo men wil) zijn van dien aard, dat daaruit afgeleid kan worden dat negatieve getallen niet even behandeld moeten of kunnen worden in één hoofdstuk, maar dat het wenselijk is op de lange termijn aan de ontwikkeling van begrip van en bewerkingen met negatie-

ve getallen te werken, lang vóór en nog lang ná de grens tussen basisschool en voortgezet onderwijs.
Hiermee wordt dan overigens wel het gestelde in de ondertitel van het boek in bespreking ter discussie gesteld. Tevens wordt hiermee een andere kijk gesuggereerd op de hele kwestie van de globale reflectie die geciteerd werd. Binnen het kader van de beknopt geschetste niveautheorie is bedoelde globale reflectie ook inherent aan het bedrijven van rekenen/wiskunde op het niveau van de basisschool. 7- à 8-jarigen kunnen op eigen kracht orde scheppen in situaties met bushaltes, knikkers in en naast het kuiltje, klanten vóór en ná de kassa in de supermarkt, kegels omgeworpen en rechtop, door deze in verband te brengen met de bewerkingen optellen en aftrekken en deze te beschrijven met passende symbolen en schema's. Dit is een voorbeeld van globale reflectie *op dit niveau.*

Door af te zien van de context wordt wiskundige eenheid gebracht in de opgesomde situaties, anders gezegd, de verrichte *unificatie* komt tot stand op basis van *abstractie* en *generalisatie.* Soortgelijke ervaringen kunnen zich ook voordoen bij het leren zien van de algoritmen voor de vier hoofdbewerkingen met natuurlijke getallen als een eenheid, nl. alle berustend op een vorm van optellen. Weer een stapje verder doet zo'n ordening zich voor bij de breuken, kommabreuken, verhoudingen, procenten en schaal, allemaal meer algemene dan wel bijzondere middelen om relaties te mathematiseren.

Ik kom tot de slotsom dat met de beschikbare realistische theorie ook de kwestie van de niveauverhoging die aan wiskundige formalisering voorafgaat alsook het formaliseren zelf, verantwoord kunnen worden. Een nieuwe didactiek is hiervoor niet vereist.

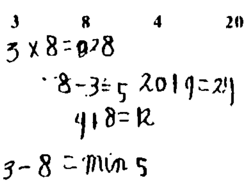
4. De kwestie min-keer-min

Op grond van onze analyse is het duidelijk dat Hankel's permanentie principe dé oplossing biedt voor het formaliseren van de operaties met negatieve getallen. Het niveautheoretische uitgangspunt leert, dat er naar middelen gezocht zal moeten worden om het *tussenniveau te stofferen* en dat die middelen van wiskundige aard zullen zijn. Een gevolg hiervan is weer, dat de negatieve getallen veel meer in de tijd 'uitgesmeerd' zullen (moeten) worden dan veelal het geval is in de gebruikte leerboeken.

In de vorige paragraaf kwam de niveautheoretische component in de realistische theorie ter sprake. Wat houdt die in? Het ging over autobussen, compleet met in- en uitstappen bij de halte, als informele toegang tot het optellen en aftrekken van kleine natuurlijke getallen. Autobussen en allerlei andere contexten zijn de concrete situaties waarop 5- à 6-jarigen zich oriënteren voor de natuurlijke getallen en de eerste prille noties van de bewerkingen ermee. Aan het einde van de basisschool zijn de leerlingen - wanneer hun leerproces goed geweest is - zó vertrouwd met deze getallen met bewerkingen en eigenschappen, dat men zou kunnen stellen dat hiermee één van de concrete onderlagen voor de algebra gelegd is. Op het tussenniveau - in de middenklassen - hebben de leerlingen onder gebruikmaking van allerlei schema's, visuele modellen en notatievormen de gelegenheid gekregen de sprong van het concrete naar het formele rekenen met natuurlijke getallen te maken. Echter, wat eerst als formalisering van het rekenen met natuurlijke getallen werd nagestreefd wordt nu de 'concrete' basis of onderlaag voor de algebra. Anders gezegd: voor de algebra als wiskunde van hogere orde is de verzameling van de natuurlijke getallen één van de bouwstenen voor het eerste of concrete niveau. Er vindt dus als het ware een herwaardering van het bereikte niveau plaats. Men zou ook van reductie of terugval kunnen spreken. Dit is inherent aan de beschouwing van niveaus binnen de realistische theorie. Laten we daarbij dus aansluiting zoeken voor de gestelde kernkwestie.

Enkele suggesties:

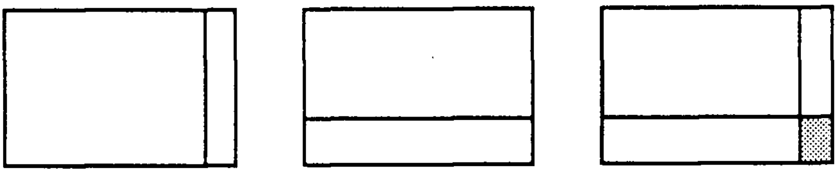
* Bij het aftrekken onder elkaar blijken kinderen van vrij jonge leeftijd (6 à 7 jaar) al methoden te ontwikkelen die gebaseerd zijn op het werken met tekorten, wanneer zij daartoe de gelegenheid krijgen (zie bijv. Treffers e.a., 1988) Bovendien kunnen zij zich bewust zijn van het verschil tussen bewerkingsmin en toestandsmin, zoals uit de illustratie van het werk van een 8-jarige blijkt. (De opdracht luidde: maak sommen met de getallen 3, 8, 4 en 20).



Deze persoonlijke methoden van de kinderen kunnen met hen ook in de context van de negatieve getallen beschouwd worden

* 15x 26=(20-5)(30-4) We representeren de gegeven vermenigvuldiging met een rechthoek van 20 bij 30.

Deze is dan 4 centimeter te lang. In gedachten wordt een strook van 4 bij 20 afgescheurd; dit geeft 600-80= 520; vervolgens wordt een strook van 30 bij 5 weggedacht omdat de gegeven rechthoek ook 5 te breed is, dus 520-150= 370, dus 15x26=370. Bij controle blijkt echter dat 15x26=390. Conflict! Waar is die 20 gebleven?



Vermenigvuldiging onder elkaar van 20-5 en 30-4 maakt samen met de rechthoek en het vouwen *plausibel* dat -5x-4=+20 (in de rechthoek werd het rechthoekje van 5 bij 4 ten onrechte twee maal afgetrokken door het successief vouwen en in gedachten afscheuren). Verder dan dit plausibel maken zouden we heel lang niet moeten gaan.

* Ook een tabel met de tafels van vermenigvuldiging leent zich voor dergelijk permanentieonderzoek:

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
-16	-12	-8	-4	0	4	8	12	16	4
-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	3
-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	2
-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
				0	-1	-2	-3	-4	-1

* Grafieken lenen zich eveneens voor permanentieonderzoek. Sawyer (1969) noemt als mogelijkheden: uitbreiding van de grafiek voor x+y= 4 in het eerste kwadrant naar bijv. het vierde kwadrant.
Onderzoek van de grafieken voor y=2x en y=-2x, ook voor negatieve getallen.

* Onderzoek van de grafieken voor y=x en $y=x^2+4-4x$ in het eerste kwadrant. In het laatste geval ontstaat wat "meer grafiek". Verschuiving van de top van de tweede grafiek naar de oorsprong laat zien, dat y=x nog in het tweede kwadrant zou kunnen doorlopen. Acceptatie van dit verschijnsel betekent, dat negatieve getallen vermenigvuldigd met zich zelf een positief resultaat moeten opleveren. Zou men dit niet accepteren, dan wordt het in het volgende geval nog gekker: $y=x^2+5-6x$; de grafiek hiervan valt uiteen in verschillende delen, bijv. een deel onder de x-as en een deel in het eerste kwadrant. Bij het

verwerpen van de negatieve getallen zullen we in dit geval dus het grafiekgedeelte onder de x-as anders moeten beschrijven dan het deel dat boven de x-as terecht komt. Hieraan valt een aardig motief te ontlenen om de negatieve getallen nu juist niet te verwerpen. Sawyer (1969, p.331) zegt het zo: "Steeds weer opnieuw worden we in de wiskunde door het gebruik van negatieve getallen in staat gesteld twee dingen harmonisch met elkaar te verbinden die we anders apart hadden moeten behandelen." Wanneer eenmaal ruime ervaring met dergelijke voorbeelden is opgedaan zouden redeneringen als die van Euler, ook in "Tegengesteld" vermeld (p.220-221), met de leerlingen beschouwd kunnen worden. Euler vergeleek -ax-b met -ax+b en concludeerde dat het eerste product wel positief moet zijn bij positieve a en b omdat het tweede niet anders dan negatief kan zijn.

En zo kunnen we doorgaan. De teneur van dit betoog moge duidelijk zijn. De middelen aftrekken onder elkaar, eigenschapsrekenen, vermenigvuldigingstabel, rechthoeken als oppervlaktemodel voor vermenigvuldigen, grafieken van lineaire en kwadratische functies etc. worden aangewend om het tussenniveau met betrekking tot het opereren met negatieve getallen te vullen voordat dit geformaliseerd wordt tot de bekende, deels formeel-logische regels. Daarmee wordt dan in de geest van Lakatos' "Proofs and refutations" het historische leerproces rationeel gereconstrueerd onder vermijding van allerlei geforceerde pogingen om in een context te concretiseren wat niet als zodanig concretiseerbaar is.

4. Besluit

Vanzelfsprekend rijzen er nu allerlei vragen,zoals:
- Hebben de auteurs van "Tegengesteld" Hankel dan niet gezien? ;
- Hebben zij zich niet gerealiseerd, dat het om het formaliseren gaat?;
- Zijn zij zich niet bewust geweest van ......?

In feite zijn dit allemaal retorische vragen. Hankel staat uitvoerig in het boek. Voor het formaliseren wordt zelfs de beschikbaarheid van een (nieuwe) didactische theorie geëist zoals we hebben laten zien. En zo kunnen we doorgaan. Vanwaar dan dit verhaal? Wel, er is door de auteurs weliswaar een rijkdom aan suggesties verzameld, die leraren noodt tot zelf proberen en die daartoe ook de nodige ruimte geeft. Daarvoor past waardering. Waarom het mij in deze bespreking echter te doen is, is het theoretische fundament, waarvan de voorgestelde didactiek een operationalisatie is, ter discussie stellen. Ik heb willen laten zien dat de realistische theorie voorziet in de kwestie van het formaliseren *op alle niveaus*. Wanneer uitkomst van ontwikkelingsonderzoek voor de breuken bijv. uitwijst dat het vullen van het niveau tussen het concrete en het formele van levensbelang is om tot formaliseren te komen dan kan deze ervaring met haar didactische uitwerking model staan voor de negatieve getallen en dat is hier ook gebeurd, in theoretisch opzicht wel te verstaan (zie ook Streefland, 1988).

In wezen illustreert het boek hoe moeilijk het is met een groep van acht mensen, elk een gedeelte voor zijn of haar rekening nemend, te zorgen voor de nodige eenheid. Ook in dit opzicht is het voorbeeldig. Over allerlei onderdelen en details zou nog veel gezegd kunnen worden, zoals de wijdlopigheid van de beschrijvingen van de gesprekken met kinderen, het voorbijgaan aan de impliciete interpretatie van negatieve getallen als geordende paren bij bepaalde benaderingen, het niet vermelden van mogelijkheden tot zulk een benadering vanuit bepaalde voor het basisonderwijs genoemde contexten enz. Ik zal er verder over zwijgen. Ondanks mijn hoofdbezwaren is het besproken boek de moeite waard, of misschien wel 'dank zij', omdat het daardoor kan bijdragen aan ons eigen (didactische) leerproces.

Noot

1. Van de zgn. 'Wageningse Methode ' bestaan twee versies, namelijk een experimenteel aandoende versie, bestaande uit losse boekjes per onderwerp (Uitg. Stichting De Wageningse Methode, Oosterbeek) en een versie in boekvorm met als ondertitel 'Wiskunde voor HAVO en VWO (Uitg. Educaboek, Culemborg).

Literatuur

Broekman, H.G.B. (1989) Sluiproutes of alternatieve wegen?, *Tijdschrift voor Didactiek der β- wetenschappen*, *7*, 1, 67-73.

Fischbein, E. (1987) *Intuition in Science and Mathematics*, Dordrecht, Hoofdstuk 8: The Practicality of Intuitive Meanings. Analysis of an Example; The Negative Numbers, 97-103.

Glaeser, G. (1981) Epistémologie des nombres relatifs, *Recherches en Didactique des Mathematiques* *2*, 3, 303-346.

Goffree, F. e.a. (1988) Sluiproutes door realistische leergangen -ongewenste verkortingen, *Tijdschrift voor Didactiek der ß-wetenschappen, 6*, 1, 5-23.
Lakatos, I. (1977) *Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery*, Cambridge: C.U.P.
Sawyer, W.W. (1969) *Aanschouwelijk algebra*, Utrecht/Antwerpen: Het Spectrum.
Streefland, L. (1988) *Realistisch Breukenonderwijs*, Utrecht: OW&OC.
Treffers, A. e.a. (1988) Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (4), *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 6*, 4, 24-47.

L.Streefland
Vakgroep OW&OC/CD-ß
Rijksuniversiteit te Utrecht