

# Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen onderzocht

## Kanttekeningen bij inhoud en methode

J. van den Brink  
Rijksuniversiteit te Utrecht  
Vakgroep OW&OC

### Summary

*It is a principle of realistic instruction in general, and in particular with regard to arithmetic, to have children 'realising' their own ideas. Following their own ideas, experiences and imaginations children create visual or mental situations matching the arithmetical tasks they are given. This chaos of different ideas, languages and mathematical models we call 'realistic context'.*

*In the context of 'Buses' this means plays, scenes and stories about people who are boarding and getting off buses, in which the pupil performs one time as an actor or story-teller and another time as a spectator or listener. It appeared that young children don't think the way adults do about buses and in other contexts. Even on counting and numbers they nourished quite different ideas.*

*To make young children displaying their deviating ideas the method of mutual observation is initiated and applied: the researcher gave the subject all details of the report he was writing down during the observation: so while being dealt with as a research subject one discovered that the text as it was written concerned oneself, and thus started meddling into the research itself, as it was as a co-researcher.*

### 1. Inleiding

In dit artikel wordt verslag gedaan van een onderzoek van het rekenonderwijs in groep drie van de basisschool. De leerlingen zijn zes à zeven jaar. Twee aspecten uit dit onderzoek worden nader belicht, namelijk de invloed van verschillende contexten op het leren rekenen en het *wederzijdse observeren* als onder-

zoeksmethode. Moet je in het onderwijs rekening houden met bepaalde contexten? Wat is hun rol, hoe functioneren ze, zijn er verschillen in prestaties te verwachten bij gebruik van speciale soorten contexten? En welke contexten zijn dat dan? Wat het observeren betreft: zou je het observeren van kinderen anders moeten doen dan het observeren van bijvoorbeeld machines of systemen, omdat die dingen zich wezenlijk van kinderen onderscheiden? Waarin schuilen die verschillen en hoe zouden we ze vruchtbaar kunnen gebruiken in het onderzoek van het onderwijs? Deze aspecten vormen een problematiek die wellicht verder reikt dan de basisschool.

## **2. Onderzoek - opzet en enkele resultaten**

Een vergelijkend onderzoek werd uitgevoerd tussen het realistische rekenonderwijs waarin onder andere 'gespeelde autobusritjes' centraal staan en het traditionele mechanistische rekenonderwijs met onder andere het gebruik van 'rekenstaafjes' om het optellen en aftrekken te leren. Het onderzoek werd gedaan op de realistische Dr.W.Dreesschool in Arnhem en op de traditionele Nieuwlandsschool in Dieren (Van den Brink, 1989). De beide typen onderwijs verschilden hoofdzakelijk op drie punten: in de contexten, de rekentalen en de oefenvormen. De bedoeling was om de onderlinge verschillen tussen de beide soorten onderwijs over het voetlicht te krijgen: waarin onderscheidden ze zich van elkaar en waarin functioneerde de ene beter dan de andere?

### *Opzet*

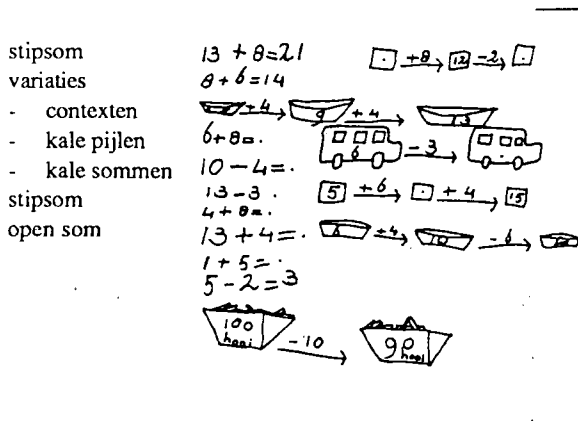
Gedurende één leerjaar werden met elke leerling regelmatig gesprekken gehouden van circa tien minuten. Er werd gebruik gemaakt van de methode van wederzijdse observatie (zie hieronder punt 4) om nauwkeurig idee te krijgen van hoe de kinderen dachten. Bovendien werd op beide scholen het respectievelijke realistische en traditionele rekenonderwijs gedetailleerd geregistreerd. Dagboeken, metingen van de onderwijstijden, de voorbereidingstijden en tellingen van het aantal aangeboden en gemaakte rekentaken, stelden ons in staat om de prestaties van de leerlingen vanuit het onderwijs te begrijpen.

### *Resultaten*

Welke verschillen zagen we in de prestaties van de betreffende leerlingen van beide scholen ten aanzien van de contexten?

- Op de realistische Dreesschool was in één dag zowel het optellen als aftrekken bij de kinderen bewust te maken met behulp van gespeelde autobussituaties. De traditionele aanpak met al of niet getekende voorwerpen en de rekenstaafjes vergde een periode van minimaal zeven weken. Hierin moesten alleen optellingen worden geleerd. Daarna mochten de kinderen met de aftrekkingen beginnen.
- De kinderen op de traditionele Nieuwlandsschool konden na zes weken voorbereiding zelfstandig opgaven maken met de staafjes uit de rekenkist. De Dreesschoolkinderen maakten direct na de introductie van de autobuspijlen die de gespeelde ritten door de klas symboliseerden, zelfstandig pijlenopgaven.
- De belangrijkste eigenschap van de autobuspijlentaal was overduidelijk het feit dat de pijlen versierd kunnen worden. Niet alleen met bijvoorbeeld wieltjes en haltebordjes om te verwijzen naar de autobuscontext, maar vooral ook naar de contexten die de kinderen zelf bedachten. Op die wijze werden de pijlen 'toepassenderwijs geabstraheerd'. Niet door van betekenissen af te zien (zoals 'abstraheren' vaak wordt gedefinieerd), maar juist door kinderen nieuwe betekenissen voor de pijlen te laten bedenken werd de pijlentaal geabstraheerd. Er ontstonden kale pijlen, die goed konden worden toegepast (zie fig. 1).

Figuur 1: Anoek



Ook het is-teken kon als versiering aan de pijlen worden toegevoegd, waardoor de overgangen van en naar de opgaven in de traditionele rekentaal (de is-taal) mogelijk werden (zie fig.2). Vooral rekenzwakke kinderen hadden hiervan profijt.

Figuur 2: Xenia



- De traditionele rekentaal, de 'is-taal' met het is-teken, zoals op de Nieuwlandsschool van begin af aan gebezigd, bleek alleen toepasbaar in opgaven met rijen identieke figuurtjes of met rekenstaafjes, dus in voorwerpcontexten (zie punt 3) en in kale sommen.
- De gespeelde toneelstukjes bleven zeker drie tot vijf maanden in de herinnering van kinderen aanwezig en konden later goed gebruikt worden als toepassingsgebied.
- De opdracht om een rekenboek te maken voor kinderen die het volgende jaar de eerste klas zouden bevolken bleek de rekenvaardigheid van de kinderen positief te beïnvloeden: in de zelf bedachte sommen voor de rekenboeken maakten ze minder fouten dan in de rekentaken die officieel voor het oefenen bedoeld waren. De opdracht gaf zowel de kinderen op de Dresschool, als op de Nieuwlandsschool een zin om geen fouten te maken.

### 3. Contexten

Over de invloed van contexten op het leren rekenen zijn al eerder verschillende vermoedens geuit, nog afgezien van wat we onder 'context' verstaan. Carpenter, Hiebert en Moser (1981) schreven naar aanleiding van hun onderzoeksresultaten met redactie-opgaven, dat de opgaven soms transparanter werden voor de kinderen, als ze in andere woorden werden geformuleerd. Maar omdat het onderwijs in hun onderzoek niet als variabele grootheid was opgenomen, werd het helaas niet mogelijk de herkomst van de geschikte woorden en de daarmee samenhangende contexten na te trekken. Het vermoeden rees dat

sommige contexten meer duidelijkheid konden verschaffen bij het verwerven van wiskundige begrippen dan andere. Donaldson (1978) heeft bijvoorbeeld aangetoond dat een kaal en onoplosbaar probleem voor zeer jonge kinderen goed op te lossen was, als we het binnen een - laten we zeggen - 'speelgoedcontext' plaatsten. En Bell (1983) merkte, dat eenzelfde bewerking gebruikt in verschillende contexten niet meer precies dezelfde bewerking was voor kinderen. Jonge kinderen hebben blijkbaar de neiging om getallen en bewerkingen aan contexten te binden, die hen vertrouwd zijn (Vergnaud, 1982; Von Glasersfeld, 1983; Van den Brink, 1984; Cobb, 1987; Streefland, 1988). Met sommige contexten gaat dat gemakkelijk, met andere erg stroef. Contexten kunnen blijkbaar een blokkade vormen, omdat nieuwe kennis niet past bij hetgeen de leerling al weet. Het is al met al van belang onderzoek in te stellen naar 'contexten'. Allereerst: wat verstaan we eronder?

#### *Wat verstaan we onder 'context'?*

Er zijn verschillende definities in omloop over wat we onder 'context' moeten verstaan. Zo worden bijvoorbeeld de achtergrondaanname, die bewust of onbewust tot stand komen bij een opgave, als context beschouwd (Hofstädter, 1985). Anderen zien in een context het begrensde toepassingsgebied van wetmatigheden die ze willen onderzoeken. Weer anderen beschouwen niet expliciet de contexten, maar meer de contextproblemen (Treffers & De Moor, 1984) in de overtuiging, dat men meer over deze aanbodzijde kan zeggen, dan over de context zelf. Ook wordt wel een verband gelegd tussen contexten en noties van kinderen. Voor Cobb (1987) bijvoorbeeld is een context hetzelfde als het geheel van 'kinderlijke noties'. Dat wil zeggen: het geheel van persoonlijke ervaringen, ideeën en fantasieën, dat elk afzonderlijk kind heeft. De ervaring met klassen jonge kinderen leert dat een context inderdaad bestaat uit een chaos van verschillende ideetjes. Toch vinden we de omschrijving van Cobb voor de onderwijspraktijk te beperkt. De context bestaat namelijk niet alleen uit de 'kinderlijke noties', maar ook uit de rekenmodellen, die kinderen moeten leren en uit rekensituaties, waarin dat leren plaats kan vinden. Cobbs omschrijving accentueert slechts de feitelijke ontwikkeling van noties per individu en niet wat er in het onderwijs op moet volgen. Daarentegen benadrukt Vygotsky (1964) dat het onderwijs ook vooruit moet lopen op de feitelijke

ontwikkeling, ofschoon ze niet van de noties mag vervreemden. Dat is overigens ook niet nodig, als we ons op het standpunt stellen dat wiskundige begrippen zich in allerlei verschijningsvormen manifesteren (Freudenthal, 1984). Dus ook in de noties van de kinderen. Gaan we ervan uit dat de rekenmodellen en dergelijke die we moeten aanleren reeds bij verschillende kinderen in de klas in een bepaalde vorm aanwezig zijn, dan moeten die dingen slechts gewekt, ontdekt, herontdekt of voor sommige kinderen klassikaal geconstrueerd worden. Startend vanuit een 'conglomeraat' van vage, individuele ideeën, ervaringen en fantasieën richten wij ons op *die* noties die we als 'versierde rekenmodellen' kunnen opvatten.

De autobuscontext kan als voorbeeld dienen. Deze context bestaat uit alle noties die de individuele kinderen over autobussituaties in de rekensituatie aan de orde stellen en waarvan slechts enkele een rekenmodel representeren. Voorbeelden:

- een veranderingsmodel: de autobus die herhaald stopt en waarbij in- en/of uitgestapt wordt;
- een deel-geheel-model: de dubbeldekker; de rijen stoelen, links en rechts;
- een vergelijkingsmodel: de 'haltesommen', waarbij per halte zowel in-, als uitgestapt wordt;
- het dozenmodel: het getal dat de collectie van gedeeltelijk onzichtbare mensen in de bus aangeeft;
- het pijlenmodel dat aanvankelijk als autobuspijlentaal geldt, waarin autobusritten worden geregistreerd, maar dat later een eigen leven gaat leiden;
- de overgangsnotaties van autobuspijlen, via refererende en kale pijlentaal naar de notaties met het is-teken (zie fig. 3).

Onder rekenmodel verstaan we dus dat onderdeel van de context dat we in het onderwijs kunnen gebruiken om de kinderen op een bepaalde rekenactiviteit te richten. Het rekenmodel is niet kaal, maar via de noties van de leerlingen gebonden aan de context en als zodanig 'versierd' bij kinderen aanwezig. Niet alleen de modellen, ook de rekensituatie zelf (dat wil zeggen de praktische uitvoering van de rekenles in de klas) is op die 'versierende' wijze gebonden aan de context. Om de versierende invloed van noties van kinderen op modellen en rekensituaties veilig te stellen, geven we binnen het rekenonderwijs de volgende omschrijving van context: *de context is een conglomeraat van*

Figuur 3: 'Van , via , naar'

Van



+3

via  $5 \text{ -----} \rightarrow = 8$ naar  $5 + 3 = 8$ .

*rekenmodellen die in een rekensituatie bestaan als versierde noties van kinderen.* Met 'conglomeraat' bedoelen we het chaotische geheel van noties zoals dat in de klas tot uiting komt en waarbinnen de verbanden nog diffuus zijn. De versieringen zijn de middelen waarmee de leerlingen de rekenmodellen en de rekensituatie contextgebonden maken, bijvoorbeeld met reisverhalen over een busrit, situatietekeningen en dergelijke.

In ons onderzoek hebben we soorten contexten verzameld in het rekenboek dat de eerste klassers maakten voor de kinderen die het volgende jaar de eerste klas zouden bevolken. We spreken van mens-diercontexten, speelgoedcontexten, illustrerende voorwerpcontexten en dergelijke, afhankelijk van wat er in de context sterk als versiering belicht werd. Naast soorten contexten zochten we ook naar het antwoord op de vragen 'Welke contexten zijn geschikt om het optellen en aftrekken vlot aan te leren?' en 'Hoe kan zo'n context tot stand komen bij jonge kinderen?'

### *Soorten contexten*

Onder andere vonden we in de rekenboeken van kinderen de volgende soorten contexten:

- conflictsituaties
- zingevende en zin ontnemende contexten
- voorstellingen van kinderen en rekentoneelvoorstellingen
- beeldende contexten: mens-diercontexten, illustrerende voorwerpcontexten, apparaatcontexten en speelgoedcontexten
- rekencontext
- rekenlessituatie
- dynamische en statische contexten.

*Conflictsituaties*

Neem bijvoorbeeld deze paddestoel (zie fig. 4).

Figuur 4: Paddestoel



In het traditionele rekenmateriaal is het de bedoeling dat de leerlingen het aantal stippen op de hoed tellen en noteren. Dat is een vast aantal. Maar niet alle stippen op de hoed van de paddestoel zijn zichtbaar. Het totale aantal is dus niet voor iedereen hetzelfde. Hiermee is een conflict geboren dat in het traditionele onderwijs nauwelijks werd gezien, maar met interessante gevolgen voor het rekenen. Door namelijk rekening te houden met de onzichtbare stippen kan men het maken van splitsingen (tussen zichtbare en onzichtbare stippen) op een zinvolle manier inleiden.

Het kernpunt van zo'n 'wiskundige conflictsituatie' is dat kinderen in deze situatie opzettelijk in contact worden gebracht met het *tegengestelde* of met een *uitbreiding* van te leren wiskundige begrippen, activiteiten of eigenschappen. Het gaat om verrassende of grappige omstandigheden of veronderstellingen (zoals de onzichtbare stippen op de hoed) die de wiskundige begrippen, activiteiten of eigenschappen (zoals het vaste aantal zichtbare stippen) storen of uitbreiden.

Conflictsituaties steunen op het idee, dat begrippen dan pas gevormd worden, indien we ze confronteren met andere omstandigheden of met andere veronderstellingen. Ze vragen van de leerling iets nieuws te ontwerpen: een clou, een oplossing, een verrassing en vormen aldus een kern van het mathematiseren, namelijk gebruik te maken van vertrouwde structuren in nieuwe probleemsituaties.



Nog wat voorbeelden

- Sommen bij de bushalte (groep 2 en 3)

"Voor de halte zitten er acht passagiers in de bus, na de halte drie passagiers. Maar er zijn geen vijf passagiers uitgestapt. Wat kan er gebeurd zijn? Speel het eens na".

Terug van schoolreisje duiken sommige kinderen weg onder de banken in de bus een typisch grapje van kinderen. Kun je nu toch nagaan hoeveel kinderen er in de bus zitten?

"3 passagiers in de bus en 2 stappen erin". Is dat hetzelfde als:

"2 passagiers in de bus en 3 stappen erin"? (Is "instappen in de bus" commutatief?).

- Dubbeldekker

In een dubbeldekker zitten 5 passagiers. Hoe kunnen ze verdeeld zijn? Weet iemand nog een andere manier? Op hoeveel manieren kan het?

- Poppenkast

Figuur 5: Poppenkast



Dit plaatje (fig. 5) brengt de kinderen op een één-één-correspondentie tussen poppen en poppenkastspelers die afwijkt van de gebruikelijke. Ze vinden er allerlei oplossingen voor. In de bovengenoemde voorbeelden krijgen de kinderen oog voor één-één-correspondenties, strategieën en symbolisering en ontwerpen, commutativiteit. Deze begrippen worden dan pas gevormd onder

afwijkende omstandigheden of veronderstellingen. Bell (1983) en Balacheff (1985) wijzen in dit kader op het leereffect van respectievelijk de 'conflict discussion' en het 'socio-cognitieve conflict', wanneer in een groepsactiviteit verschillende conflictuerende oplossingen naar voren worden gebracht.

### *Zingevende en zin ontnemende contexten*

Sommige contexten kunnen een zin aan het mathematiseren geven, andere juist een 'tegenzin' oproepen. Er zijn contexten die er bij uitstek voor zorgen, dat kinderen nut, noodzaak of bedoeling van het mathematiseren ervaren. Met 'zin' ('het waarom') bedoelen we een bestaansgrond in de ogen van een leerling van een rekenhandeling, rekenobject of rekenterm binnen een context. Het komt erop neer, dat die handeling, dat object of dat woord 'past'. Er zijn allerlei voorbeelden te noemen:

- Het in- en uitstapmodel bijvoorbeeld is passende kennis binnen de context van kinderlijke noties over de autobus.
- Een gespeelde of vertelde autobusrit is gemakkelijker mét de pijlentaal als steun na te vertellen, te onthouden of te analyseren dan zonder die taal. Dat maakt de pijlentaal zinvol voor kinderen. Ze is van persoonlijk nut voor een leerling: hij of zij kan erdoor beter onthouden.
- Ook bij kegelen in de klas blijkt het moeilijk te zijn om te bepalen wie de winnaar is, als we geen pijlentaal gebruiken.
- Bij het zoeken van het totaal aantal verdelingen van vijf passagiers in een dubbeldekker is een systematiek te ontdekken. Een op de situatie toegesneden notatie, de dubbeldekker-notatie, blijkt daarvoor nuttig te zijn.
- Apparaten (rekenmachines, weegschalen) die niet doen wat kinderen verwachten, stellen de kinderen voor de noodzaak om te mathematiseren. Bijvoorbeeld: Maak je zwaarder op een weegschaal; reken uit  $4 \times 5 - 4 \times 5 =$  op een rekenmachine.
- Het maken van eigen produkties in de oefenfase werd door eerste-klassers als vanouds gewaardeerd, maar hun inbreng werd zinvoller, toen ze als auteurs moesten optreden van een rekenboek voor de kinderen die het volgend jaar naar de eerste klas zouden gaan. Door deze bedoeling kwamen de eigen produkties in een ander licht te staan. De schoolsituatie werkte als een zingevende en daardoor stimulerende context. In het ontworpen rekenboek werden vrijwel geen fouten gemaakt.

In de voorbeelden spraken we over nut, noodzaak en bedoeling. In ons onderzoek bleek de pijlentaal 'nuttig' voor kinderen om een busrit te onthouden of een winnaar van een kegelwedstrijd aan te wijzen. Bij 'noodzaak' gaat het om een noodsituatie: de kinderen moesten op de weegschaal een verschil maken tussen gewicht en arbeid. Een 'bedoeling' voor de eigen produkties werd gevonden in het grotere verband van de echte school.

Kort samengevat zijn de eigenschappen van een zingevende context dat de context 'echt' moet zijn, dat wil zeggen, hij moet niet louter illustratief zijn, maar eigen wetmatigheden hebben en de kinderen moeten er een persoonlijk belang bij hebben.

### *Voorstellingen*

- Met 'voorstellingen van kinderen' bedoelen we de noties: de herinneringen, fantasieën en ervaringen, die een kind zich voor de geest kan halen, zich kan 'realiseren' (vandaar de naam 'realistisch' rekenonderwijs).
- Met 'voorstellingen in de klas' zijn de rekentoneelvoorstellingen bedoeld, de min of meer showachtige entourage van het onderwijs. Deze manifestaties hebben zoals gezegd twee zijden: de kinderen zijn toeschouwer én ze zijn toneelspeler. We stellen ons op het standpunt dat dit twee verschillende manieren van leren zijn. De sensomotorische activiteiten (hetzij actuele, hetzij door kinderen voor de geest gehaalde activiteiten) zoals bijvoorbeeld een autobusrit door de klas, worden door veel onderzoekers als beginactiviteiten voor het leren rekenen beschouwd. Ze laten het leren rekenen beginnen vanuit het 'actor's perspective' oftewel vanuit het gezichtspunt van de uitvoerder, de actor, met een daadwerkelijke uitvoering of voorstelling daarvan. Eén en ander impliceert dat de 'actor' de wereld anders kent dan de 'observer', haar met andere zintuigen kent (Cobb & Von Glasersfeld, 1984). Het rekentoneel omvat deze beide gezichtspunten: nu eens is de leerling uitvoerend acteur, dan weer beschouwend toeschouwer.

Het verschil tussen actors- en observersperspectief is overigens niet alleen te onderscheiden in activiteiten van leerlingen. Ook bij onderzoekers zorgen deze standpunten voor ingrijpende verschillen in het onderzoekswerk (zie bijvoorbeeld hierna punt 4: Wederzijds observeren).

*Beeldende contexten*

Contexten die bij het rekentoneelspel aan de orde komen kunnen we beeldende contexten noemen. Het gaat om situaties die buiten het kale rekenen liggen en die bij kinderen gemakkelijk beelden oproepen. Ervaringen uit de bloedeigen wereld van het kind en vooral uit de buitenschoolse wereld zijn van belang, omdat daarmee gedeelten van de 'echte' wereld binnen de school worden gehaald.

Een onderscheiding tussen ervaringen uit de echte wereld en een door kinderen bedachte wereld is daarbij relevant voor zover hij tot onderlinge discussies leidt. In verhalen over een bedachte wereld komen elementen voor die uit ervaringen met de 'echte' wereld stammen, dus de zintuiglijk waarneembare omringende wereld. Anderzijds vertellen kinderen echt gebeurde ervaringen met veel fantasie. De beïnvloeding van 'sprookjeswerelden' en de 'echte' wereld is wederzijds.

We onderscheidden vier beeldende contexten in het onderwijs: mens-diercontexten, illustrerende voorwerpcontexten, apparaatcontexten en speelgoedcontexten.

**a. Mens-diercontexten**

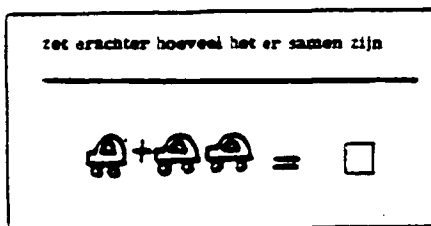
Contexten die ruimte laten voor noties van kinderen zochten we niet in het traditionele rekenmateriaal, maar in de menscontexten, zoals de autobuscontext, waarin de kinderen zelf als objecten participeerden. Verschillende onderzoekers hebben gewezen op het belang van menscontexten voor het verwerven van wiskundig inzicht. Het zijn namelijk contexten en situaties waarvan de kinderen zelf deel uitmaken en die ze met persoonlijke bijdragen gezamenlijk scheppen. De menscontext is open en steeds verder uit te breiden. De sociale wetten en de rekenwetten die er gelden, zijn van meet af aan aan elk kind bekend. In dergelijke situaties van onderhandeling en overleg (Bauersfeld, 1983) ontwikkelen de leerlingen op grond van hun noties eigenmachtig een gezamenlijke overeenstemming, een eerste aanzet van inter-subjectieve origine tot een rekenbegrip of rekenactiviteit.

**b. Illustrerende voorwerpcontexten**

Deze bestaan uit aan te leren handelingen met voorwerpen waarmee de rekenoperaties geïllustreerd worden (rekenstaafjes, fiches en dergelijke). Dit in tegenstelling tot de mens-diercontexten, waarin de kinderen zelf als object fungeren (als passa-

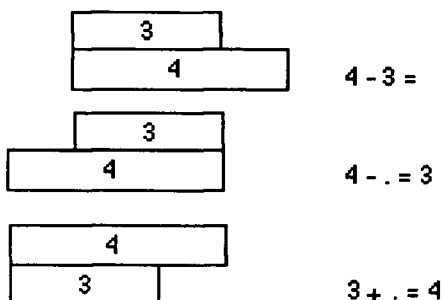
gier, klant, dier). Kern is dat de gebruiksregels voor de rekenstaafjes van buiten af door de onderwijsgevende aan de kinderen worden opgelegd. In het traditionele rekenonderwijs laat men plaatjes (zie fig. 6) en houten rekenstaafjes (zoals Cuisenaire-staafjes) gebruiken om bijvoorbeeld het optellen en aftrekken te leren.

Figuur 6: Plaatjessom



Een maand lang bestaat het rekenonderwijs uit dergelijke sommen en worden met de rekenstaafjes, die elk hun eigen kleur hebben, zogenaamde 'rekenhandelingen' aangeleerd per type som (zie fig. 7).

Figuur 7: Rekenstaafjessommen



De koppeling van de sommen aan de daarbij behorende 'legsels' rekenstaafjes is voor de kinderen moeilijk te onthouden. In ons onderzoek duurde het zeker een maand eer alle kinderen zelfstandig rekentaken konden maken met deze staafjes. Voor de rest van het leerjaar was het oefenen geblazen tot de leerlingen de sommen zonder staafjes konden oplossen.

### c. Apparatencontexten

Het realistisch rekenonderwijs wordt soms ten onrechte beperkt tot de eerder genoemde mens-diercontexten, omdat alleen die uit de werkelijkheid zouden stammen. We dienen echter niet te vergeten, dat ze toch meestal kunstmatig en in een enkel geval kunstzinnig, het onderwijs moeten worden binnengehaald. Met de apparaatcontexten zoals bijvoorbeeld de personenweegschaal, telefoon, rekenmachines en dergelijke, ligt dit anders. Die zijn en blijven een stukje van de 'echte wereld' met een eigen specifieke en verborgen structuur. Van die onbekendheid zouden we in het rekenonderwijs dankbaar gebruik moeten maken. De vraag bijvoorbeeld 'Maak je zwaarder op deze personenweegschaal' schept een conflictsituatie waarin de grootheden gewicht en arbeid onder andere ter sprake komen. En het feit dat verschillende rekenmachines verschillende antwoorden uit  $4 \times 5 - 4 \times 5 =$  krijgen, toont dat deze apparaten de gelegenheid geven om het rekenen toe te passen in (een stukje van) de 'echte wereld' die buiten het onderwijs bestaat.

De apparaatcontext (het geheel van modellen en noties dat we erop na houden over een apparaat) is gesloten: hij is niet vatbaar voor een ongebreidelde uitbreiding met noties van kinderen, in tegenstelling tot de mens-diercontexten. Hij stemt daarin met de illustrerende voorwerpcontext overeen. Die is namelijk ook gesloten. De gebruiksregels en de daarmee samenhangende wiskundige structuren zijn in het apparaat voorhanden, maar dienen nog door de kinderen te worden ontdekt. De apparaatcontext is als zodanig een beeldende context. Hij roept naar aanleiding van de ervaringen ermee, ideeën en suggesties op bij kinderen. Op dit punt wijkt de apparaatcontext af van de illustrerende voorwerpcontext, waarin de structuur zo gedetailleerd mogelijk gedemonstreerd wordt.

### d. Speelgoedcontexten (spel en spelen)

In de speelgoedcontexten kunnen de spelregels willekeurig gekozen worden in het overleg tussen de leerlingen onderling, zoals bij het knikkeren of kegelen. Per kegelspel moet bijvoorbeeld worden afgesproken of de omgevallen kegels geteld worden, dan wel de gewonnen punten. Een kwestie van optellen of aftrekken. De context is primair; het rekenen is eraan ondergeschikt.

Andere voorbeelden van speelgoedcontexten zijn de symbolisering van mens-diercontexten (bijvoorbeeld de fiches als

buspassagiers), waarbij aan de voorwerpen door de kinderen een betekenis wordt toegekend. In tegenstelling tot het gebruik van illustrerende voorwerpcontexten ontwikkelt zich in speelgoedcontexten een structuur van binnenuit. De context sluit aan op ideeën van kinderen en is uit te breiden. In ons onderzoek bleek bijvoorbeeld, dat door de kinderen verschillend versierde contextgebonden pijldiagrammen te laten ontwerpen voor het rekenboek, zij de pijlentaal toepassenderwijs abstraheerden.

### *Rekencontext*

Met het woord 'rekencontext' is het gewone, formele rekenen bedoeld, dat wil zeggen het geheel van contextvrije getallen en beweringen, de weetjes en rekenmanieren die niet door beeldende contexten, maar via rekenregels worden gefundeerd (vandaar: 'contextvrije' getallen en bewerkingen).

Het pijlenmodel, voortgekomen uit verschillende beeldende contexten, is een voorbeeld van hoe een model zelf een formele rekencontext kan worden, waarin de kinderen bijvoorbeeld redenerend kunnen rekenen en die ze in tal van situaties kunnen toepassen.

### *Rekenlessituatie*

De situatie in de klas tijdens een rekenles vormt zelf ook een context. Kinderen herinneren zich sommige lessituaties immers nog levendig. Ze konden ze bij het leren opnieuw oproepen. In de klasserekenboeken werden bijvoorbeeld veel schetsen van rekensituaties aangetroffen (zie fig.8). Dergelijke tekeningen van klassesituaties vindt men vrijwel niet in officiële rekenmethoden.

### *Dynamische en statische contexten*

Van bijzonder belang is de indeling van contexten naar enerzijds de interne of contexteigen activiteiten en anderzijds de externe activiteiten ofwel activiteiten die met de context of het model worden uitgevoerd. Een veranderingsmodel, zoals het autobusmodel, appelleert aan activiteiten die binnen de autobuscontext gegeven zijn: het in- en uitstappen.

Bij vergelijkingsmodellen (bijvoorbeeld de haltesommen of het balansmodel) en bij deel/geheel-modellen (bijvoorbeeld het dubbeldekkermodel) zijn deze interne activiteiten niet bij voorbaat gegeven. De leerling zelf moet bedenken wat hij met het model gaat doen en dat kan tot verschillende interpretaties leiden.

Figuur 8: Manfred tekent een klasesituatie: juf voor het bord, de leerling met een boek en uitgesproken tekst in de lucht)



Dergelijke statische contexten of modellen zijn als conflictsituaties in het onderwijs goed te gebruiken.

Ook een goocheltruc waarbij de onderwijsgevende de balletjes één voor één van de ene hoed in de andere tovert, vraagt de kinderen zich de situaties bijna beeldend voor de geest te houden om niet in conflict te komen.

De mens-diercontexten, illustrerende voorwerpcontexten, apparaatcontexten en speelgoedcontexten zijn te bekijken op hun dynamiek. Bij mens-diercontexten en speelgoedcontexten worden interne activiteiten bij de kinderen opgeroepen en deze sluiten goed aan bij hun noties. Bij illustrerende voorwerpcontexten moeten externe activiteiten eerst worden afgesproken (wat moeten we met de rekenstaafjes doen?), die vaak niet stroken met wat de kinderen denken. Bij apparaatcontexten moeten beide soorten activiteiten op elkaar worden afgestemd. Ook die leveren conflicten. Uit mijn vergelijkend onderzoek blijkt dat men met een dynamische menscontext het optellen en aftrekken bij meer kinderen tegelijk en beter oproept dan met een statische voorwerp context.



#### 4. Wederzijds observeren

In dit onderzoek werd gebruik gemaakt van het *wederzijdse observeren*, een onderzoeksmethode waarmee men vele verborgen ideeën van kinderen kan achterhalen.

##### *Ontstaanswijze*

De onderzoeksmethode ontstond door mijn gewoonte om tijdens de gesprekken allerlei zaken (gedrag, uiterlijkheden, handelingen, en dergelijke) nogal precies op te schrijven. Dit vergde veel tijd. De kinderen moesten soms lang wachten. En dat was niet terecht. Om die wachttijd te doorbreken en een ontspannen sfeer te behouden, las ik daarom voor wat ik opschreef.

##### *Gevolgen*

Deze werkwijze had verschillende gevolgen.

- Allereerst werd de bedoelde ontspannen sfeer inderdaad bereikt.
- Maar de kinderen merkten bovendien (voor sommigen tot hun verbazing) dat hetgeen werd opgeschreven over hen ging. Dat was veel kinderen blijkbaar nooit opgevallen. En ze waren er trots op dat alles wat ze zeiden of deden, werd genoteerd.
- Ze corrigeerden de onderzoeker dan ook als hij een fout had gemaakt bij het noteren.
- En om hem te helpen bij het opschrijven, realiseerden ze zich wat ze nu wèl en niet hadden gedacht of gedaan.
- Ze reflecteerden dus op hun eigen gedachten en kwamen als het ware als mede-observator naast de onderzoeker staan.
- Op deze wijze kregen de kinderen pas door wat de onderzoeker eigenlijk van hen wilde weten. Want met vragen als 'Waarom heb je dat gedacht?' en 'Hoe heb je gedacht?' was hen dat niet duidelijk te maken. Ze antwoordden dan vaak met 'Daarom!'. De bedoeling van de onderzoeker om te weten te komen hoe het kind heeft gedacht moet blijkbaar aan het kind zelf bekend zijn. Door deze methode van wederzijdse observatie wordt de proefpersoon betrokken in het eigenlijke onderzoekswerk en vat daardoor beter de bedoeling.

##### *Methoden en technieken, geïnspireerd door het onderwijs*

In ons onderzoek, dat dichtbij de onderwijspraktijk tot stand kwam, bleek dat het onderwijs dienst kan doen als bron voor nieuwe onderzoeksmethoden en -technieken. Tijdens de gesprek-

ken met de leerlingen werden bijvoorbeeld verschillende sociale technieken gevonden die bij het wederzijdse observeren konden worden aangewend en die geïnspireerd waren op didactische handgrepen uit het onderwijs.

Ik noem:

- Na verloop van enige tijd het protocol voorlezen.
- Conflicten en verrassingen gebruiken:
  - . de onderzoeker houdt zich van den domme;
  - . de onderzoeker maakt opzettelijk fouten in zijn registratie en legt die de leerling voor.
- Spelsituaties creëren:
  - . de leerling hardop laten voorlezen van wat de onderzoeker over hem opschreef;
  - . net doen alsof de onderzoeker weet wat de proefpersoon gedacht heeft door te 'bluffen' of door er een spelletje van te maken: 'Ik weet het - jij mag raden, wat ik over jouw antwoord zal denken';
  - . de rolverdeling tussen onderzoeker en onderzochte veranderen.

### *Opvattingen en discussie*

De wederzijdse observatie is een verbetering van het klinisch interview. Kenmerkend voor de verbeteringen van het klinisch interview (zoals introspectie, retrospectie, actief participerend onderzoek) was tot nu toe dat uitsluitend de opvattingen van de proefpersoon in het geding waren (Ginsburg, 1981). De interpretaties van de proefleider over die opvattingen bleven buiten schot. Als waarnemer stond hij buiten het gebeuren, stuurde slechts het gedrag van de proefpersoon met vragen (Giddens, 1979). Hij zag het aan, maar liet zichzelf niet zien (soms zelfs geheel verscholen achter een 'one-way-mirror').

De waarnemer voelde niet de behoefte om zijn proefpersoon mee te delen wat hij ervan vond of zelfs niet, wat hij meende gezien of gehoord te hebben.

Maar is het criterium bij de beoordeling van onderzoeksuitkomsten, bij de bepaling van de merites van de interpretaties van de onderzoeker, niet de mate waarin de betrokkenen zich daarin kunnen herkennen? (Stokking, 1984).

De methode van de wederzijdse observatie maakt daarentegen gebruik van het feit, dat de leerling niet alleen zichzelf waarneemt, maar dat hij of zij ook bij machte is om de interpreta-

ties van de onderzoeker waar te nemen - mits die maar worden meegedeeld. De proefpersoon wordt competent geacht om waarnemingen en interpretaties van de proefleider te beoordelen. De methode biedt de onderzochte de rol van waarnemer aan, erkent zijn denkbeelden en handelingen als iets eigens dat meestal afwijkt van de ideeën van de onderzoeker en tracht met allerlei sociale technieken (conflicten en verrassingen gebruiken, grappen maken, spelsituatie creëren) die afwijkingen boven water te krijgen.

De wederzijdse observatie is objectief in die zin dat zij recht doet aan het object van onderzoek en dat het de onderzoeker is die de mate van rolverdeling tussen onderzoeker en onderzochte bepaalt.

### **5. Conclusies**

Uit het wederzijdse observeren bleek dat jonge kinderen niet op onze volwassenen-manier over autobussen en andere contexten dachten. Ook over wiskundige activiteiten en begrippen zoals bijvoorbeeld tellen en getallen hielden ze er afwijzende ideeën op na. Dit is zeker geen nieuwe ontdekking, maar deze kon pas worden gedaan toen de ideeën van kinderen au sérieux werden genomen. Zonder het wederzijdse observeren waren deze noties van kinderen moeilijk te achterhalen. De rol van onderzoeker en onderzochte bij het wederzijdse observeren moet daarom niet vast liggen. Het zijn uiterste functies die afhankelijk van de situatie en het moment verdeeld worden over de leerling en de onderzoeksleider. Ook het feit dat niet alleen de blote waarneming, maar ook allerlei ideeën van kinderen bij het observeren gelden, maakt dat het observeren van kinderen anders is dan het observeren van systemen. Het wederzijdse observeren geeft daarom nieuwe perspectieven voor het waarnemen in onderwijsonderzoek.

Door rekening te houden met beeldende, zingevende en dynamische contexten, met de speelse en creatieve mogelijkheden van kinderen en door in het onderwijs daarop een beroep te doen bleek in het vergelijkend onderzoek onder andere dat het leren optellen en aftrekken aanmerkelijk sneller en inzichtelijker kan verlopen, dat het aantal oefeningen met de helft was te verminderen zonder dat de vaardigheid van de kinderen daardoor achterbleef en dat de pijlentaal al toepassend kan worden geabstraheerd. Het rekenen is door deze onderwijsopzet voor de

kinderen geen geïsoleerde schoolse activiteit, maar vormt aldus een geïntegreerd deel van hun eigen leven.

## 6. Literatuur

- Balacheff, N. (1985) Experimental Study of pupils' treatment of refutations in a geometrical context. In: *Proceedings of the Ninth International Conference for the PME*, Utrecht: OW&OC, 123-229.
- Bell, A. (1983) Diagnostic teaching of additive and multiplicative problems. In: *Proceedings of the Seventh International Conference for the PME*, Israël, Utrecht: OW&OC, 205-210.
- Brink, F.J. van den (1984) Numbers in contextual frameworks, *Educational Studies in Mathematics*, 15, 239-257.
- Brink, F.J. van den (1989) *Realistisch Rekenonderwijs aan Jonge Kinderen*, Dissertatie R.U.-Groningen, Utrecht: OW&OC.
- Carpenter, T.P., J. Hiebert & J.M. Moser (1981) Problem structure and first-grade-children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems, *Journal for Research in Mathematics Education*, 12, 27-39.
- Cobb, P. & E. von Glasersfeld (1984) Piaget's scheme and constructivism, *Generic Epistemology*, 13, 9-15.
- Cobb, P. (1987) Information-processing psychology and mathematics education - a constructivist perspective, *Journal of mathematical behavior*, 6, 3-40.
- Donaldson, M. (1978) *Children's Minds*, Glasgow: Fontanabook/-Collins.
- Freudenthal, H. (1984) *Didactische fenomenologie, vakkundige structuren*, Utrecht: OW&OC.
- Giddens, A. (1979) *Nieuwe regels voor de sociologische methode*, Baarn: Ambo.
- Ginsburg, H. (1981) The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: aims rationals, techniques, *For the Learning of Mathematics*, 1, 4-11.
- Glasersfeld, E. von (1983) Learning as constructive activity. In: *Proceedings of the Fifth Annual Meeting PME-NA*, Montreal, 41-69.
- Hofstädter, D.R. (1985) *Gödel, Escher, Bach: een eeuwige gouden band*, Zwolle: Tulp.
- Stokking, K.M. (1984) *Interpreteren en evalueren. Methodologie rondom de uitkomsten van onderzoek*, Deventer: Van Loghum Slaterus.

- Streefland, L. (1988) *Realistisch Breukenonderwijs*, Dissertatie R.U.Groningen, Utrecht: OW&OC.
- Treffers, A. & E. de Moor (1984) *10 voor de basisvorming rekenen/wiskunde*, Utrecht: OW&OC.
- Vergnaud, G. (1982) Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education. Some theoretical and methodological issues, *For the Learning of Mathematics*, 3, 31-41.
- Vygotsky, L.S. (1964) *Denken und Sprechen*, Berlin: Vygotsky Akademie Verlag, DDR.