

Mijmeringen over mechanica-onderwijs

In plaats van een boekbespreking¹

H. Freudenthal

Summary

Reviewing Van Genderen's Ph.D Thesis¹ had been put out to a mathematician who in the course of time had become ever more involved in mathematics education. As early as 1953 he had fought the traditional teaching of mechanics as kind of applied mathematics at the modern schools in The Netherlands². Eventually mechanics was abolished as an independent subject at our schools.

This mathematician could not boast about much knowledge in theory and practice of teaching physics, except for incidental experiments with children³, and kind of research, intended to uncover misconceptions on fundamental mechanical ideas such as force. He knew, however, that many educationalists consider it as the teacher's task to expel common sense ideas, which ought to be replaced with scientific ones. In mathematics education he cherishes the opposite view. Considering mathematics itself as common sense⁴ he chose for the principle of mathematics starting and continuing as -ever refined- common sense, by "guided reinvention".

In mechanics, a fundamental idea is that of force, as proves history⁵. The thesis under review is based on the textbook developing work of PLON⁶, Physics in Themes. In the case of force their interpretation of "theme" looks like a strait-jacket and an approach on too high a level, or so it seems to the present author. Rather than a review, he has tried a didactical phenomenology of the idea of force, not unlike the one he applied to mathematical structures⁷. Here he has elaborated it all the way from the muscular experience to its mathematisation. "Wrong" ideas on force have been placed in the same context.

1. Van wiskunde- naar natuurkundendidactiek

Ziehier de mijmeringen van een wiskundige, die zich in de loop der jaren ook met het wiskunde-onderwijs bezig heeft gehouden en terloops nog met ander vakonderwijs, al mag zijn staat van

dienst in deze niet indrukwekkend heten. Allereerst een lezing², in 1953 gepubliceerd, waarin gepleit werd voor afschaffing van het toenmalige HBS-mechanica-onderwijs; in kringen van het natuurkunde-onderwijs schijnt er volgens Van Genderen (1989) geen notitie van te zijn genomen. Welnu, dit zou met de bedoeling van de spreker toentertijd kunnen kloppen: de *wiskundeleraren* in zijn gehoor ervan te overtuigen dat mechanica niet als een averechts stuk wiskunde hoort te worden onderwezen. Toch duurde het toen nog jaren eer dit vak (evenals de door hem even zeer verfoeide beschrijvende meetkunde) uit het onderwijs verdween en Wimecos de "me" (en de "cos") kwijt raakte. Incidenteel heeft hij ook de praktijk van het onderwijs in sommige natuurwetenschappen trachten te beoefenen, meestal met kleine kinderen, waarover één en ander is gepubliceerd³. Zijn literatuurkennis t.a.v. natuurwetenschappelijk onderwijs is voornamelijk bepaald tot een soort toetsonderzoek met de strekking misvattingen van leerlingen bloot te leggen, en dan misvattingen, die zich ondanks (of is het dankzij?) het genoten onderwijs tot en met het hoger onderwijs toe blijken te handhaven, hooggeleerde kringen niet uitgesloten. Er valt in deze omvangrijke literatuur niet veel afwisseling te beleven: het zijn, Piaget daargelaten, telkens dezelfde "misvattingen" die de aandacht van de onderzoekers prikkelen. Het opsporen van "misvattingen" is trouwens geen privilege van natuurwetenschappers; ook bij wiskundigen vindt men die overdreven aandacht voor fouten van leerlingen, zij het dan in de laatste tijd wat verminderd. Is deze aandacht het teken van een soort ziekelijke nieuwsgierigheid of veeleer bepaald door het grotere gemak om fout dan wel goed begrip boven water te halen?

Al moest ik me bij voorbaat excuseren met mijn gebrekkige kennis van zaken, dan was ik me toch ten volle bewust van het principiële verschil tussen wiskundig en natuurwetenschappelijk onderwijs en in publikaties heb ik er ook meermalen van getuigd⁴. Wiskunde is een kwestie van common sense (in de loop van de geschiedenis van individu en mensdom telkens verfijnde common sense): meermalen, onafhankelijk en ver van elkaar op de aardbol is het rekenen en is nogal wat wiskunde uitgevonden; dus lijkt het didactisch geen overdreven eis dezelfde kennis door de lerende - zij het dan onder leiding - te laten heruitvinden. Het principe van Archimedes, de traagheidswet, de gravitatieleer, de wet van Proust zijn één keer uitgevonden en daar ligt het

dus minder voor de hand leerlingen de rol van heruitvinders toe te bedelen. Natuurkunde is geen common sense en vaak zelfs met common sense in strijd. Aan de natuurkunde-leraar is de taak opgedragen de leerlingen de common sense uit te drijven - ik heb dit postulaat vaak genoeg horen uiten, en met bijzondere klem tijdens een conferentie in 1976 in Rome (Segre, 1979). Toch ben ik al lang en telkens na elke heroverdenking sterker aan de didactische juistheid van deze strategie gaan twijfelen - iets om straks op terug te komen.

Na mijn eindexamen ben ik met natuurwetenschappelijke schoolboeken nog maar sporadisch in aanraking gekomen. Zo bijvoorbeeld enkele jaren geleden met scheikunde. Na de aller-eerste schrik over de nogal radicale omstructurering van het onderwijs in dit vak was ik snel bekeerd - als ik het achteraf bekijk, te snel, gezien de dogmatische stijl die mij toch minder aanstond. Toen me gevraagd werd het proefschrift van Van Genderen te bespreken ben ik me voor 't eerst in het PLON-werk, in 't bijzonder wat de mechanica aangaat, gaan verdiepen - ook weer aangenaam verrast, maar dan al mijmerende steeds kritischer gestemd. Aangenaam verrast door het onderwijs in een context en kritisch toen ik functie en keuze van die context onder de loep nam. Bij Van Genderen (1989, blz. 101), staat:

"de context van een natuurkundige regel zijn de situaties waarop deze regel wordt betrokken."

Het staat er met vette letters, en in 't vervolg komt wel onderwijs binnen een context ter sprake, maar nauwelijks de aan de context toebedeelde *functie* noch zoiets als didactische *keuze*-principes. Wat de *functie* aangaat, is in het wiskunde-onderwijs, zoals door ons voorgestaan, de context in eerste aanleg er om wille van het (onder leiding) *mathematiseren* ervan door de leerling, dat al als zodanig mede leerdoel is. (Let wel, dit sluit ook in: het verdergaand mathematiseren van reeds met wiskunde verrijkte contexten.) In eerste aanleg - zei ik - want van de weeromstuit wordt de context gebied van toepassing. Ondertussen heeft Treffers het begrip van het mathematiseren verfijnd: *horizontaal*, dwz. vanuit hetgeen voor de lerende reeds de status van leefwereld heeft verworven naar wat voor hem nog symboolwereld is; *verticaal*, dwz. binnen de symboolwereld; en naar gelang van de al-dan-niet-aanwezigheid van deze componenten is hij vier ideaaltypen van wiskunde-onderwijs gaan onderscheiden. Wat *keuze* aangaat, was de onze: contextrijk wiskunde-onderwijs.

Uit het bijvoeglijk naamwoord "contextrijk" is gaandeweg "de rijke context" ontstaan - rijk, soms naar *omvang*, soms qua *gevolgen*.

Ik heb daarstraks het didactisch verschil tussen natuurwetenschappen en wiskunde breed uitgemeten - zeker te breed, want waarom zou er niet analoog aan het mathematiseren ook een *mechaniseren* denkbaar zijn (als we buiten de mechanica stappen, wellicht beter als "vakstructureren" aangeduid)? Een overbodige vraag, want het is er in elk geval en dan als activiteit van eerste uitvinders en onderzoekers, maar de vraag, zoals hier gesteld, doelt op een aan de leerling toe te stane heruitvindende activiteit. "Mechanisering" is dan uiteraard iets anders dan bij Dijksterhuis (1950), die immers op de historische weg naar het mathematiseren toe, zoals door hem begrepen, juist deze schakel overslaat. Maar mechanica is nu eenmaal binnen de natuurkunde dat gebied waar de middelen van de schoolwiskunde net toereikend zijn voor een meer dan oppervlakkige mathematisering. Ziedaar een eigenschap die de mechanica deelt met de meetkunde, opgevat als leer van de belevingsruimte, en dat verklaart in het onderwijs van beide vakken de quasi-axiomatische benadering, door Dijksterhuis als "epistemisch" geroemd (Van Genderen, 1989, blz. 44), al was in de school*praktijk* van de mechanica evenals van de meetkunde die schone *theorie* niet meer dan franje rond het trainen in het oplossen van examensommetjes.

Indien men nu in het mechanica-onderwijs aan de context de functie zou willen toekennen van het laten mechaniseren van die context door de leerling zelf, vraag ik me stilletjes af of er niet ook alle aanleiding zou zijn voor een verfijning à la Treffers: horizontaal, van de leef- naar de symboolwereld; verticaal binnen de symboolwereld.

Ik heb, wat wiskunde aangaat, herhaaldelijk gewezen op de behoefte aan didactische fenomenologie en er een aanzet toe beproefd (Freudenthal, 1983). Mij lijkt de vraag gewettigd of iets dergelijks niet ook in de natuurkunde zou zijn aan te bevelen. Ik ken daar wel voorbeelden van, historische alsook epistemologische fenomenologie (Mach, 1912), maar niet van didactische. Misschien bestaat er al zo iets, zo niet expliciet dan toch impliciet, maar bij Van Genderen noch PLON⁶ heb ik er enige invloeden van kunnen achterhalen, althans niet bij de didactiek van "kracht", een begrip dat als geen ander ten behoeve van zijn ontwikkeling door onderwijs om didactisch-fenomenologische

uitdieping vraagt. Dit gebrek uit zich dan in de instap op een naar mijn smaak veel te hoog methodisch niveau. Al is het bij PLON⁶ aanzienlijk lager dan wat me als traditioneel mechanica-onderwijs bekend is, toch ben ik me er niet zeker van of de ontwerpers zich wel bewust waren van de overmaat aan impliciete en dus voor hen vanzelfsprekende mechanica in contexten zoals zij de leerlingen aanbieden. De benadering vertoont nog steeds, om het met Treffers te zeggen, overwegend structuralistische trekken (en dit in tegenstelling tot de empiristische tendentie van het Nuffield-project en tot realistisch evenwicht, zoals wij in de wiskunde nastreven, tussen horizontale en verticale componenten).

Laat ik de gedetailleerde toelichting hierop uitstellen en overgaan tot een ander punt waarop de aan Van Genderen (1989) en PLON impliciete filosofie van de onze verschilt: de keuze van contexten. De titel van de PLON-boeken luidt "Natuurkunde in thema's", en voor mechanica is dat er dan telkens één: in klas 3 "Bruggen" en in klas 3/4 "Verkeer en Veiligheid" en het laatste dan nog nauw geïnterpreteerd - weer iets om nog op terug te komen. Ook wij organiseren leerprocessen soms bij wijze van thema's, maar dan voor elk afzonderlijk deelgebied met een rijke verscheidenheid van aanbod en bovendien in gedurige afwisseling of zelfs verstrengeling onderling terwille van het ook voor de toepassingen dienstige inzicht in isomorfieën alsook van het losraken van te specifieke contexten - de afwisseling van het flexibel heen- en weerschakelen tussen verschillende thema's. Van Genderen en PLON daarentegen spannen zich in - het lijkt angstvallig - binnen het kader van één thema te blijven, een enkele zijsprong naar buiten daargelaten. Zodoende verwordt het thema, in wezen als context bedoeld, tot keurslijf. "Oogkleppen" is een ander beeld dat hier opduikt, en dan oogkleppen die de ontwerpers zelf beletten de instap op een te hoog niveau, zoals straks aangeduid, als zodanig te onderkennen. Ik heb deze geesteshouding ook wel systeemdwang genoemd. De ontwerpers hebben zich er niet aan kunnen onttrekken, maar evenmin aan het inzicht dat er hier iets mis is. In "Natuurkunde in thema's, 2b, blz. 57, voelen ze zich tot een excuus verplicht (een - misplaatste - poging om het gezicht te redden?)

"Krachten is geen thema, maar een blok. Dat betekent, dat je er natuurkunde uit verschillende thema's in kunt terugvinden..."

Neen, een blok, zoals hier bedoeld, is van geheel andere opzet en strekking dan alleen maar dat er wat uit andere thema's in wordt teruggevonden. De ontwerpers hebben zichzelf voor het blok gezet. Voor de thema's "Bruggen" en "Verkeer en Veiligheid", die me door hun veelzijdige benadering buitengewoon hebben gecharmeerd, vind ik dat reuze jammer. Hoeveel gemiste kansen!

2. Didactische fenomenologie van "kracht" - statisch

Om mijn argumenten kracht bij te zetten, waag ik, met een stille, hoewel misschien misplaatste hoop op zegen, een poging van didactische fenomenologie. Om misverstanden te voorkomen teken ik aan dat de hier gekozen volgorde geenszins ondubbeltzinnig de didactische sequentie moet bepalen. Vast en zeker zullen de hier getrokken lijnen in de praktijk van het onderwijs onderling worden verstrengeld.

Van de fundamentele grootheden in de mechanica (en de fysica) zijn lengte en tijd op het hier relevante niveau geen didactisch probleem, massa is dat wel, maar in bescheiden mate, waarop ik nog terugkom. Ook afgeleide grootheden hoeven geen grote problemen op te leveren. Denk aan frequentie, snelheid, zelfs versnelling, ook aan dichtheid (speciaal aan te bevelen als toegang tot massa). Bij "kracht" heeft men, zoals door Van Genderen fraai uiteengezet, allereerst met alledaags-semantiche narigheden te kampen, maar ook in de natuurkundetaal is dit begrip pas na langdurig weifelen gefixeerd, al is zelfs nu nog de centrifugaalkracht als "schijnkracht" de natuurkundige wereld niet uit. Bij zijn behandeling van de elementaire werktuigen, noemt Descartes kracht wat tegenwoordig arbeid heet, en uit kinematisch oogpunt is kracht voor Descartes én Leibniz⁵ een functie (zij het dan niet dezelfde) van snelheid. Dat bleef ten dele nog zo tot in de 19e eeuw - denk maar aan de wet van "behoud van kracht"! Trouwens, in de wetenschappelijk getinte omgangstaal weet men van windkracht (een snelheid) alsook van de kracht van een aardbeving op de schaal van Richter (naar ik meen de log van een energie), men spreekt van krachtcentrales (veeleer door vermogens te kenmerken), arbeidskrachten, koopkracht, groei-kracht, krachtvoer en - ga zo maar door!

Voor lengte, tijd, massa en heel wat afgeleide grootheden hebben we voor de hand liggende en in velerlei situaties overtuigend toepasbare meetinstrumenten - zelfs zijn er snelheidsme-

ters - maar bij kracht lijkt dit minder eenvoudig. Er komt nog iets bij, essentieel voorafgaande aan het meten. Lengte, tijd, massa - zelfs snelheid - lijken rechtstreeks zintuigelijk waarneembaar, in tegenstelling tot al hetgeen van de leerling gevraagd wordt als kracht te begrijpen. Wil men aan de fenomenologisch didactische eis voldoen om uit te gaan van het direct waarneembare (en er zolang mogelijk aan vast te houden) dan ligt een beroep op de spierkracht voor de hand (de eigen alsmede de minder direct waarneembare van een ander), al hoeft dit dan uiteraard niet echt een experimenteel beroep te zijn. Meestal zal kunnen worden volstaan met gedachte-experimenten, door tekeningen geïllustreerd. Het blijve in het midden of in de didactische praktijk de dan opduikende "krachten" ook meteen door pijlen moeten worden verantwoord. Alvorens krachtmeting aan de orde is geweest, kan dat, hoe dan ook, niet anders dan informeel.

1. Twee mensen tegenover elkaar in een "krachtmeting" die elkander wederzijds met borst en schouder of met de voorhoofden of met de handen achteruit trachten te duwen - met gelijke en tegengestelde krachten dan zolang als er geen krimp wordt gegeven en met het bewijs van grotere kracht voor wie het wint. (Twee bokken die met de koppen tegen elkaar ingaan, mag ook).
2. Twee die touwtrekken, waarbij zolang er geen beweging in komt, gelijkheid van de tegengestelde krachten gewaarborgd lijkt, en naarmate dit wel het geval is, een rangorde in grootte. Er is hier een intermediair ingeschakeld tussen de twee menselijke aangrijpingspunten, het strak gespannen touw, en met het woord "gespannen" schrijft men aan elk van zijn deeltjes "overdrachtelijk" dwz. in het (meetkundig en begripsmatig) verlengde van de menskrachten, tegengestelde krachten toe - aan elkaar gelijk zolang als er geen beweging in komt. Mocht er toch een van de twee loslaten dan slaat de ander achterover, door zijn eigen kracht geveld. Idem voor allebei als het touw knapt. Trouwens, ook een enkeling kan tussen beide handen een touw spannen, zijn spierkracht in spankracht omzettende.
3. Eén persoon en een tegenstrevend "onderdrukt" voorwerp, zoals bijvoorbeeld een spiraalveer of het deksel van een kookpan, of dat uitgerekt wordt, bijvoorbeeld een spiraal-

- veer of een elastiek - ook hier weer spierkracht, "overdrachtelijk" ingezet tegen kracht vanuit het voorwerp.
4. Nog eens een touw, maar nu verticaal gespannen, aan het boven einde door een hand die het vasthoudt en aan het onder einde door de zwaarte van een gewicht, ook weer overdrachtelijk als kracht geïnterpreteerd, dat als het touw wordt losgelaten of ergens doorgeknipt, door te vallen aan die kracht gehoorzaamt. De spierkracht die de zwaartekracht net zo hard tegenwerkt als nodig is om de val van het gewicht te beletten, kan echter ook worden uitgeoefend door het gewicht - bijvoorbeeld met de hand - te ondersteunen.
 5. Dezelfde steun kan ook worden verstrekt door zo iets als een tafel waarop het gewicht wordt geplaatst. Weer overdrachtelijk wordt aan die tafel een opwaartse kracht toegekend, opgewekt door het gewicht en net zo sterk om de zwaarte van het gewicht tegen te gaan. Voor het eerst is nu de spierkracht geëlimineerd, maar waar komt ineens de kracht van de tafel vandaan? Iets om later uit te zoeken.
 6. De val van het gewicht aan het ene eind van het touw kan in plaats van door spierkracht ook worden tegengehouden door een gewicht aan het andere eind indien het touw over een rol is geleid - een "gelijk" gewicht uiteraard. Dus weer het gespannen touw met al zijn bijzonderheden, maar dan niet meer door spierkracht gespannen.
 7. Een ander instrument om zwaartekracht door "omkering" tegen te werken is de hefboom. Hoe doet hij dat? Ook iets om op terug te komen.
 8. Een met de uiteinden op verschillende punten vastgemaakt touw of ketting hangt verticaal. Aansprakelijk voor de typische hangvorm zijn krachten, die bij het doorknippen onthuld worden: twee stukken die elkaar te voren hadden vastgehouden, met tegengesteld gelijke krachten, zij het dan van punt tot punt variërend.
 9. Hetzelfde hangende touw, thans door een gewicht strak getrokken. Waar dit gewicht opgehangen is, zie je drie krachten werken die het samen tegen elkaar moeten opnemen: de twee die de delen van het hangende touw spannen en als derde de zwaarte van het opgehangen gewicht. Heden ten dage is de vectoroptelling vroegtijdig in de wiskunde aan de orde. Indien er al met pijlen is gewerkt om krachten uit te beelden ligt het voor de hand de aan het drietal

krachten beantwoordende pijlen zo te tekenen dat de meetkundige som "opgaat" - iets voorbarig als er van krachtmeting nog geen sprake is geweest, maar het mag best. In elk geval is het weer iets nieuws, vergeleken bij aldoor maar die paren van tegengesteld gelijke krachten, hoewel het nog complexer kan en moet.

10. Een voorwerp - zeg eens een houten kubus - wordt doorgezaagd - horizontaal, verticaal of hoe dan ook. Dat het voorwerp ineens anders op uitwendige ingrepen reageert - op duwen, op optillen, op drukken, op de zwaartekracht - heeft te maken met de oorspronkelijke krachten op het zaagvlak die als gevolg van de scheiding gewijzigd of zelfs verdwenen zijn en mogelijk achteraf door samenlijmen - enigszins of alleszins - worden hersteld. Binnen een lichaam heersen krachten die zijn deeltjes bij elkaar en uit elkaar houden: op elk deeltje (of zeg maar: in elk punt) krachten in elke richting, die zolang als er rust heerst, elkaar opheffen, bijvoorbeeld, door paarsgewijs tegengesteld gelijk te zijn; en hetzelfde geldt voor lichamen die elkaar raken en zodoende samengestelde lichamen vormen.
11. Een loopplank die onder een last doorbuigt: het krachtenstel binnen de plank wordt dankzij het doorbuigen zo gewijzigd dat de krachten in de plank elkaar wederom opheffen. Hoe dit in details in zijn werk gaat wordt nu vagelijk verklaard door het voorbeeld 9 aangaande het los tussen twee punten hangende en achteraf belaste touw. Ook de vraag 8 hoe het ene eind van de hefboom "weet" wat aan het andere gebeurt is hier enigszins te beantwoorden.

3. Tussentijdse balans

Uit het voorafgaande blijkt - naar ik meen - wat ik daarstraks met het verwijt bedoelde van instap op een te hoog methodologisch niveau. In plaats van de common sense, het gezond verstand, uit te willen drijven, houde men er veeleer rekening mee en kieze men het als punt van instap, om het begeleidend op te voeden. Men late de leerlingen niet *mechanica* leren maar het *mechaniseren*. In de dwangbuis van een "thema" kan dit echt niet, zelfs als het zo aantrekkelijk is als "Bruggen" en "Verkeer". De niet aan den lijve ondervonden krachten blijven spoken. Bij een goede leerling die volgens "Natuurkunde in thema's" (2a) heeft gewerkt, heb ik geen enkel begrip van

kracht kunnen achterhalen dat verder rijkt dan "Bruggen". Laat ze dan maar tot deel 2b wachten - dachten de ontwerpers misschien. Inderdaad, daar komt dan heel eventjes de spierkracht ter sprake, ná de auto's met hun remmen en "versnellingen", maar als ze daaraan toe is heeft ze nog steeds geen rijbewijs en zit ze in de ouderlijke auto nog op de achterbank of in de achterbak. De fiets mag nog net van de ontwerpers, maar de voetganger is geen "Verkeer" meer. "Vervreemding" is de socio-psychologische term voor dit verschijnsel. Nu dit woord eens een keer is gevallen, schiet er me nog iets uit deel 2b te binnen, dat ik in de gauwigheid niet kan achterhalen: een waarschuwing de kracht waar je mee op rem- of gaspedaal trapt niet te vereenzelvigen met die die op de auto als zodanig werkt. Zou het niet een prachtgelegenheid zijn geweest om het keurslijf even te laten verslappen en de grenzen van de thema's te overschrijden (denk maar aan werktuigen!)? Maar neen, het blijft bij die kale waarschuwing; er wordt met geen woord van gerept hoe die krachten - vooral bij het remmen - met elkaar samenhangen en wat er wel bij de fiets aan beantwoordt.

Ik ben te ver afgedwaald. Laat ik de draad weer opnemen bij de reductie tot één thema (of laat het er dan twee of drie zijn). "Thema" lijkt een begrip van moderne didactiek. Maar zoals hier vertolkt, zet het gewoon een oude, diep gewortelde didactische traditie voort. Ik bedoel dan de systeemdwang, al eerder door mij in het wiskunde-onderwijs gesignaleerd (Freudenthal, 1973). Volwassen wetenschap is liefst systematisch geordend en dat hoort zo, maar impliceert deze norm dan het onderwijzen *van* het systeem als zodanig of ook maar *volgens* het systeem, zoals de traditie wil en zoals zelfs tegenwoordig nog in alle ernst gesuggereerd wordt door boektitels als "La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné"? (Chevallard, 1985). In elk geval is zo iets strijdig met de opvatting van het leerproces als geleide heruitvinding.

Over de kentheoretische status van natuurwetenschappelijke termen, begrippen, regels, wetten, theorieën is veel gefilosofeerd; ook in het proefschrift van Van Genderen wordt ervan getuigd. Het verstandigste, naar ik meen, hieromtrent is eens door J. Delboeuf gezegd al heeft het weinig weerklank gevonden: men tracht de natuurverschijnselen te begrijpen door ze op te splitsen in *ideaal geval* en *storing* - denk eens aan de eenparige traagheidsbeweging of de eenparig versnelde vrije val aan de ene

kant en storing door de weerstand aan de andere! Veelal valt er ook ten behoeve van de storing een ideaal geval te concipiëren, dat van zijn kant weer wordt verstoord (zoals bij voorbeeld de luchtweerstand door turbulentie) en - ga zo maar door! Wat zijn er niet van al die idealen: statica, star lichaam, puntmassa's, kabels verbeeldende lijnstukken, hefboomarmen zonder massa, en wat dies meer zij! De hele meetkunde, indien als leer van de belevingsruimte opgevat, is zulk een - grif aanvaard - ideaal geval, waar de geodeet dan voor storingen moet gaan corrigeren. In de mechanica is de "juiste" scheidslijn tussen ideaal geval en storing minder gemakkelijk te trekken, getuige de grote moeite die de traagheidswet gekost heeft en nog steeds kost.

Door het systeem wordt de leerling met netjes geprepareerde ideale gevallen geconfronteerd, ook daar waar het - bewust of onbewust - uit de context prepareren ervan beter aan hem zelf zou worden overgelaten. Door Van Genderen (1989, blz. 123) wordt er van getuigd

"hoe de schoolmechanica begripsvernavend kan werken door haar eenzijdige aandacht voor starre lichamen"

maar bij PLON heeft dit inzicht geen sporen achtergelaten. Wel wordt een keer toegegeven (zij het dan in het "grijs") (PLON-vereniging, 1988, blz.33):

"elk stukje van het brugdek ondervindt een zwaartekracht."

Maar,

"bij elk stukje brugdek een pijltje tekenen heeft geen zin.

De ene pijl die in het zwaartepunt begint, geldt voor alle pijltjes tegelijk."

Wordt er dus over al die andere pijltjes gezwegen alleen omdat ze niet te tekenen zijn?

Vaksystematici zullen er wellicht van geschrokken zijn hoe roekeloos ik in mijn fenomenologische analyse daarstraks de grenzen van de statica negeerde. Maar ook de dynamica van starre lichamen is niet te begrijpen als men niet tussendoor van het starre lichaam afstand weet te doen. Om erop vooruit te lopen: Hoe dan toch de botsweg van de bal op het biljart te rijmen met de traagheidswet indien lichamen per se star zijn? Descartes, in "harde" lichamen gelovend, verhief het behoud van absoluut impuls tot wet; op de eerste na zijn al zijn botsingswetten triviaal fout. Leibniz, die voor het eerst in dit verband het woord "elastum" gebruikte (al is het niet van hem afkomstig) ontdekte dankzij het inzicht in de elasticiteit de wet van

behoud van vectorimpuls (waarmee hij zelfs nog Huygens overtrof), trouwens ook van "kracht" (in de zin van mechanische energie)⁵.

4. Didactische fenomenologie van het meten

Constitutief voor het meten van fysische grootheden zijn in wezen drie dingen:

- een equivalentie-begrip: om aan equivalente voorwerpen een zelfde maat toe te kennen,
- een samenvoeging van voorwerpen waaraan bij de maten optelling beantwoordt,
- een maateenheid.

Ik heb me hier tot "extensieve" grootheden beperkt. Aan de optelling van dichtheden, decibellen, frequenties, temperaturen beantwoordt geen fysische realiteit (wel van temperatuurverschillen), en optellen om wille van middelen is veeleer een wiskundige bewerking. Meetwaarden kunnen scalair zijn (bij voorbeeld voor lengte, volume, tijdsduur, massa) of wel vectorieel (voor weg, snelheid, kracht, tijdsverloop); de maateenheid is in elk geval een scalair.

Met een verwijzing naar mijn "Phenomenology" (Freudenthal, 1983, Chap.1 & 13) sla ik lengte, oppervlakte en tijd over en behandel ik volume alleen in verband met gewicht en massa. Gewicht wordt allereerst als kracht ervaren; iets als een weegschaal in de klassieke zin met bijbehorende "gewichten" is tegenwoordig veeleer een museumstuk. Wel bestaat er voor het rekenonderwijs een leermiddel in de vorm van een waagbalk met aan beide zijden equidistante en op volgorde genummerde haakjes voor het ophangen van (even zware) gewichtsplaten; met het evenwicht illustreert men optel- en vermenigvuldigssommen. Wat het alledaagse wegen aangaat, heeft inmiddels het aflezen van een wijzer op een schaal al het veld geruimd voor digitale electronica - wie denkt nog aan de veer binnenin als het feitelijk wegende onderdeel?

De symmetrie van de weegschaal demonstreert ad oculos de voor het gewicht constitutieve equivalentie van voorwerpen, direct of indirect (via gewichten), en ook het samenvoegen is een concrete act. Het autoritair gegeven van de schaalverdeling op de veerbalans worde door herijking met gewichten geverifieerd.

Eénzelfde aard van samenvoeging van voorwerpen is voor

volume én gewicht constitutief; het lineaire verband tussen de betrokken maten bij gelijksoortige voorwerpen lijkt evident; numeriek wordt het beschreven door het "soortelijk gewicht", zo genoemd omdat het in't algemeen voor verschillendsoortige voorwerpen verschilt. Dat het ene voorwerp weleens "naar verhouding" zwaarder is dan het andere wordt vanouds aan dichtere stofpakking toegeschreven. Cruciale ervaringen daaromtrent, zoals bij het samenpersen van materie of bij het kofferpakken opgedaan, verdienen het bewust te worden gemaakt, de weg effenende naar "dichtheid" en "massa". "Massa = volume maal dichtheid" laat wel iets bespeuren van wat met massa bedoeld is, al is het in zichzelf toch een wat te opzichtig logisch kringetje. Het probleem met "massa" is dat alsnog naast de constitutieve "samenvoeging" (dezelfde als bij volume en gewicht) het constitutief equivalentie-begrip lijkt te ontbreken. Ik kom er nog op terug; ondertussen is het wachten op de kinematica.

Toch kan men hier al het netelig vraagstuk aan zien komen van het verband en het verschil tussen gewicht en massa. Het gaat om het inzicht dat, anders dan de scalaire massa, het gewicht een vector is, te weten een kracht. Laat ik de discussie dan inleiden met de ervaring van een 5½-jarige, die na een groot aantal wegingen met een kleine veerbalans geheel per toeval en tot zijn uiterste verbazing ontdekt dat hij door eens zelf aan de haak van de veerbalans te trekken (en in elke richting die hem belijft), het schuifje elk gewenst "gewicht" kan doen aanwijzen. Wie in hemelsnaam trok dan tijdens het wegen aan de haak? - aldus de suggestieve vraag van de proefleider, even suggestief door hemzelf beantwoord: "De aarde, en dat noem je dan de zwaartekracht." (Jammer genoeg heeft hij toen verzuimd ook het wegen op een hellend vlak aan te kaarten.)

Laten we dit verhaal, gezien de tussentijdse levenservaringen, uit didactisch fenomenologisch zicht omkeren: via spierkrachtervaringen het inzicht laten groeien dat de veerbalans een *kracht* meet - ook een tik of ademtocht, op een elektronische brievenweger gericht, mag er als voorbeeld bij. Heel eventjes komt zo iets in "Natuurkunde in thema's (2b) te pas, maar dan veel en veel te laat. Ik maak er ook uit op dat er al in newton geijkte veerbalansen zijn. Zodoende zou de leerling al vroeg de zwaarte van 1 kg massa in newton kunnen meten, voor de afwisseling ook op een hellend vlak, en de leraar kan erbij

vertellen wat er zoal bij de evenaar, de polen en op de maan gebeurt. Ouderwetse balansen *vergelijken* massa's met elkaar; veerbalansen moet men, willen ze dezelfde massa's aanwijzen, telkens waar men komt *herijken*.

In de natuurkunde worden krachten gemeten in newton (spreek uit njoeton). De afkorting daarvan is een N. Op aarde werkt op elke kilogram een *zwaartekracht* van 9,81 N. Meestal wordt dat op 10 N afgerond. Op de maan is de *zwaartekracht* op 1 kg maar 1,6 N. Dus op de zelfde hoeveelheid stof (1 kg) werkt daar een veel kleinere *zwaartekracht*.

Men geeft krachten op aarde ook wel in kilogram aan. Natuurkundig gezien is dat wel slordig, maar het voordeel is dat je je er meer bij kunt voorstellen. Iedereen weet uit eigen ervaring hoe de *zwaartekracht* (op aarde) op een kilogram ongeveer voelt. Omdat dit een natuurkundeboek is, wordt de grootte van een kracht altijd in newton gegeven.

Hoe komt men aan die eenheden kg en N - iets dat men ook al omtrent m en s mag vragen, maar over het "hoe en waarom" van eenheden is tot nu toe gezweven. Welnu, bij die doodgewone m, s en kg mocht dat ook best, maar als die vraag toch aan de orde wordt gesteld, lijkt het me wel verstandig het verhaal zwart op wit te vertellen, dus niet in het grijs zoals in "Natuurkunde in thema's" (2a, blz. 17, zie hiernaast) geschiedt. Helaas, het leven is ook hier sterker dan de leer: op blz. 43 worden krachten toch maar "slordig" in kg gemeten. Het verhaal zoals het er echt bij hoort, historisch van aard, kan toch pas na de formule $F = ma$ goed uit de verf komen. Inmiddels laten we voor later gebruik de *evenredigheid van massa en gewicht* (dit scalair geïnterpreteerd) goed onthouden.

Na het scalair meten stel ik het vectoriële aan de orde - wel te verstaan, zonder iets omtrent de didactische sequentie te prejudiceren. Ik begin met grootheden die veeleer van meetkundige dan van mechanische aard zijn,
weg, snelheid, versnelling,

waarbij ik heel beknopt De Lange (1980) volg: Een vliegtuig vliegt op kompas van A naar B:

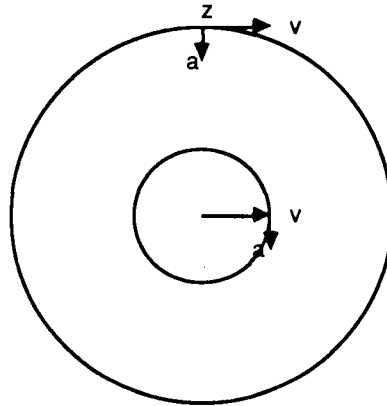
vluchtweg = kompasweg + windweg,

vluchtsnelheid = motorsnelheid + windsnelheid,

vluchtversnelling = motorversnelling + windversnelling.

Daarbij mag de gemiddelde snelheid voorafgaan aan de instantane; ook kromme wegen worden op den duur toegelaten. Als equivalentie-relatie voor de diverse grootheden is translatie constitutief; voor samenvoeging het "meeslepen".

Alvorens krachtmeting systematisch te behandelen sluit ik, gezien hun puur meetkundig karakter, hier twee opmerkingen aan. Ten eerste, bij elke rechtlijnige beweging zijn weg-, snelheids- en versnellingsvector lineair afhankelijk. Ten tweede, bij een eenparige cirkelbeweging wijst de versnellingsvector naar het middelpunt. Dit blijkt met één oogopslag uit de volgende tekening:



Immers, denken we ons de snelheidsvector v vanuit z verplaatst naar het middelpunt, dan doorloopt zijn pijlpunt tegelijk met z eenparig ook een cirkel, waarvan de raakvector a - de versnelling - loodrecht staat op v , dus tegen de radius vector in is gericht. (De tweede opmerking laat zich trouwens generaliseren tot elke eenparige beweging langs een vlakke of ruimtekromme: de versnellingvector wijst langs de normaal.)

In tegenstelling tot de voorafgaande, veeleer meetkundige, vectoriële grootheden is kracht een bij uitstek mechanische. Inzake "massa versus gewicht" was terloops al van krachtmeting sprake. Na het simpel schatten door de spierkracht zijn de in de schoolpraktijk voornaamste principes van krachtmeting de zwaartekracht en de veerkracht. Er zijn er voor allebei instrumenten en van hun equivalentie overtuigt men zich door herijking. Daarbij zij aangetekend dat ook op zwaarte werkende meetinstrumenten geschikt zijn te maken voor het meten van hoe dan ook gerichte krachten (via hellende vlakken, rollen enz.)

De voor krachtmeting constitutieve equivalentie-relatie is translatie langs de draaglijn: het punt waar je aan het touw trekt, doet er niet toe. Aangezien krachtmeting meer inhoudt dan zomaar meetkunde, moet hard worden gemaakt waarom de

vectoriële optelling wel beantwoordt aan de constitutieve samenvoeging van krachten in een punt. Dit kan met een klassiek toestel: op een metalen cirkel als as als het ware, zijn drie rollen gemonteerd en via touwen erover heen grijpen gewichten aan in een punt dat het middelpunt van de cirkel moet blijven innemen.

5. Didactische fenomenologie van kracht - kinematisch

Wat ik daarstraks het "roekeloos overschrijden van de grenzen van de statica" noemde wordt nu met een vloeiende overgang van het statische naar het kinematische aspect van kracht beloond, anders dan bij Van Genderen en het PLON waar een kloof gaapt tussen kracht in "Bruggen" en kracht in "Verkeer". Aldus luidde mijn betoog eer ik kennis kon nemen van "Natuurkunde in thema's", 2b, blz. 59/60 waar verschil wordt gemaakt tussen liefst vier verschillende soorten krachtwerking, zonder - voorzover ik zie - ook maar een poging er één van te maken. De eerste onder de vier soorten is die de "vorm verandert", wel bekend uit "Bruggen", maar verwaarloosd hoewel nu onmisbaar - de eerder geciteerde begripsvernauwing als gevolg van de beperking tot starre lichamen (Van Genderen, 1989). Natuurlijk blijven dan het zich afzetten bij het lopen en springen, het versnellen en remmen in het verkeer en wat dies meer zij, krachten die niets te maken hebben met die in "Bruggen".

In mijn lijst voorbeelden daarstraks volgde op het niet of niet meer compenseren van een kracht gedurig een *beweging in de richting van die kracht*. "Meer kracht" veroorzaakt "meer beweging" - het ligt voor de hand, maar vraagt toch om precisering: wat betekent hier "meer beweging"?

In die voorbeelden zijn twee "versies" van kracht te onderscheiden: momentele kracht (ruk of duw) en kracht die door blijft werken (zwaarte- en spankracht); spierkracht hoort tot beide. Ook bij worp en stoot lijkt de (spier)kracht te blijven doorwerken - hoe dat zomaar op afstand kon, was voor twee millennia een probleem echt om mee te worstelen. Het historische antwoord was de traagheidswet, al was dit antwoord in wezen al besloten in het relativiteitsprincipe, waarop Galilei en Huygens zich bij tijd en wijle beriepen: dat de bewegingsverschijnselen zich op een schokvrij varende boot net zo afspelen als aan de wal; je kunt daar net zo biljarten, tennissen, balletjes opgooien en een voorwerp balanceren als op de vaste

grond. In het onderwijs zou ik dat principe bepaald niet willen missen, zo niet als bron, dan wel als bekroning van leerweg en betoog. Evenals in de wiskunde - dunkt me - loont het zich veelzijdig de leerweg op te stappen; en zeker zulk een weg als die naar de wet $F = ma$.

Maar waar was ik toch in "Natuurkunde in thema's" de traagheidswet tegengekomen? Ik heb vele malen heen- en teruggebladerd. Of heb ik me dan vergist? Ten langen leste vond ik het. Het was goed weggestopt: deel 2b, blz. 95. Afgeleid uit $F = ma$! Als er geen kracht is (dus $F = 0$, maar $m = 0$ kan niet, dus $a = 0$), is er ook geen versnelling, dus is de snelheid constant. De traagheidswet afgeleid uit een mathematische formule! En ik maar peinzen over een fenomenologische weg van de fysische traagheidswet naar de *mathematische* formule $F = ma$!

In de voorbeelden uit de statica daarstraks werd in de staat van rust op elke extra-kracht, hoe dan ook ontstaande, met beweging gereageerd. Rust niet als tegenpool maar als grensgeval van beweging, als een niet bevoorrechte bewegingswijze - zie daar in nuce het relativiteitsprincipe. Waar het didactisch op aankomt is te doen inzien dat kracht zich uit in *wijziging van de bewegingstoestand*. De momentele bewegingstoestand uiteraard, maar wat is dat? In de oudheid wisten ze zich er geen raad mee. Zeno's paradox van de pijl, die niet op twee plaatsen tegelijk kan zijn en aldus de mogelijkheid van beweging weerlegt, werkte - omdat averechts bestreden - nog lang door en de doorbraak kwam er tenslotte pas met het inzicht dat er voor een mechanische toestandsbeschrijving naast de plaats de snelheidsvector vereist is. (Tussen twee haakjes: ik deel volstrekt niet de mening van Dijksterhuis (1950, blz. 517/8), waar hij ontkent dat Newton met motus het momentele impuls bedoelde en dat zijn tweede axioma de formule $F = ma$ behelsde.)

Kracht uit zich in wijziging van de staat van beweging, en wel in de richting van de kracht, en dat noem je ook versnelling. Voor de staat van rust spreekt het vanzelf, een vallend voorwerp is een evenzeer sprekend voorbeeld, maar bijzonder sprekend is de eenparige cirkelbeweging van daarstraks, want die wordt bijvoorbeeld onderhouden door een voorwerp aan een touw rond te slingeren, dus door de naar het middelpunt gerichtte spankracht, in het verlengde van de spierkracht van de slingeraar.

Ook onder het kinematisch aspect van kracht, dwz. kracht als

middel om beweging te wijzigen (hetgeen insluit: veroorzaken), zou ik met de spierkracht-ervaringen het leerproces willen instappen. Ik noem dan: duw, ruk, zet, rem, rek, krimp. De eerste twee zijn we al tegengekomen; ze kunnen de staat van beweging van een voorwerp direct of via een intermediair wijzigen. Met "zet" bedoel ik het zich afzetten: al liggende om te gaan zitten, al zittende om te gaan staan, al staande om te lopen of te springen - het meest indrukwekkend en verhelderend, vanaf de springplank - de trampoline is iets ingewikkelder. Je doet iets tegen een voorwerp, dat eerst zwicht, tot zekere grens toe, om dan iets terug te doen. Hoeveel kracht te zetten hangt af van het soort voorwerp, van het slap kussen tot de verende plank, van glad ijs tot ruw grind; en het "lijdend" voorwerp kan in eerste aanleg en als intermediair een voetzool of een handschoen zijn of een polsstok of een prikslee-stokje of een paal om mee te bomen - in de laatste twee gevallen is hetgeen je in beweging zet niet meer jezelf, maar het voer- of vaarttuig waar je op of in zit. Ook voetbalschoen en racket waar je de bal mee terugkaatst zijn voorbeelden van niet jezelf maar een voorwerp zich laten afzetten. De biljartbal zet zich tegen de band af - ziedaar geen spierkracht meer, maar samenspel van inwendige krachten, zoals bekend uit de statica van kracht.

Rem: het afremmen van eigen vaart doordat je je ergens tegen afzet of van die van een voorwerp dat op je afkomt (denk ook aan de trampoline) - allemaal spierkracht-ervaringen om op velerlei wijze overdrachtelijk aan voorwerpen toe te schrijven.

Spierkracht-ervaringen bij het uitrekken en laten inkrimpen van jezelf of van een elastiek of een veer, krimp en rek bij het persen en laten vieren - we zijn nu aan krachten toe die "door blijven werken", waaronder de zwaartekracht, in de statica al aan de spierkracht getoetst. Het kan ook kinematisch: de jojo en de bal die men opgooit en opvangt.

Een voorwerp valt hoe langer hoe sneller - men hoeft niets te meten; het blijkt al puur kwalitatief. Gedurig verandert het van snelheid, dus van bewegingstoestand en dat kan alleen dankzij een kracht die door blijft werken, de zwaartekracht. Overal waar het voorwerp tijdens de val komt, is het even zwaar, de kracht die zijn bewegingstoestand wijzigt, even groot. Het valt met constante versnelling. Meer te weten is niet nodig om de valwet af te leiden (en Galilei wist niet meer).

Volgens een aloude ervaring kost het meer spierkracht een

voorwerp aan de gang te brengen dan in gang te houden, meer om het van gang te doen veranderen dan om het zijn gang te laten gaan (het weerspanning karretje in de supermarkt!). Eén klap, en de bal gaat zijn gang, op asfalt verder dan in het gras, op het ijsoppervlak nog verder en in het "ideale geval" oneindig ver, rechtlijnig en met onverminderde snelheid. Dat ideale geval heet dan de traagheidswet, de storing heet wrijving of weerstand. Ook onder de gunstigste omstandigheden is er voor de overgang van rust naar beweging toch nog een *krachtdrempel*.

Het is het ideale geval dat ons in het vervolg bezig zal houden, maar een woordje tussendoor over "storing" kan geen kwaad. Want de vraag dringt zich op: maakt storing zomaar beweging zoek of waar blijft die dan wel? Behoud van impuls heet het later, maar inmiddels kan al plausibel worden gemaakt dat die zoek lijkende beweging aan het weerstrevende medium is afgestaan. Al in het stenen tijdperk wisten ze door wrijving warmte te produceren; en dat warmte zoiets als inwendige beweging is, blijkt alwaar die zich naar buiten toe uit: denk, bij wijze van voorbeelden, aan het kwik dat uitzet of aan de stoommachine.

Een voorwerp valt, hoewel de zwaartekracht gehoorzamende, uit de rijdende trein of uit het vliegtuig geenszins volgens de verticaal; veeleer neemt het de snelheid van het vehikel mee als bewegingstoestand die door de zwaartekracht (nu haaks op de aanvankelijke snelheidsvector) wordt gewijzigd. (Opgepast als je uit de rijdende trein springt!) Losgelaten vliegt de rondgeslingerde steen weg met zijn momentele snelheidsvector, dus langs de raaklijn, net als een vuiltje dat loslaat van een wentelend wiel. (Maar aan de draaiende aardbol blijven zelfs de vogels hoog boven in de lucht gehecht, dankzij de zwaartekracht, evenals jezelf, al is er een luttel verschil als je hoog dan wel laag springt.) Een wentelend wiel blijft eenparig doordraaien - hoewel door Newton erbij gehaald - geen gepast voorbeeld inzake de traagheidswet, want hier zijn wel degelijk krachten in 't spel, trekkrachten (naar we al weten naar het middelpunt toe) langs de spaken, die al wat voldoende vast zit aan de omtrek, beletten rechtlijnig eenparig weg te vliegen, dus weer krachten, haaks op de beweging en toch in staat om die beweging te wijzigen.

Alsnog een groot vraagteken bij de voorbeelden van prikslee en boot: stokje of vaarboom zetten zich *schuin* af tegen de

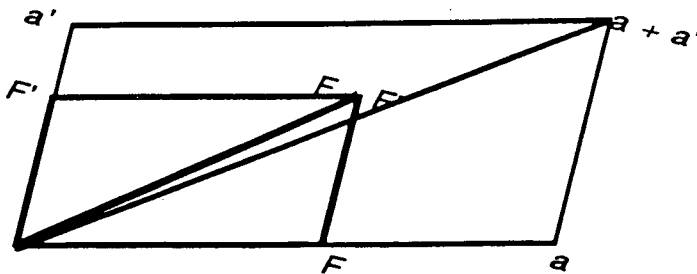
grond om het gevaarte *horizontaal* voort te stuwen. Trouwens, het k n gewoon niet anders dan *horizontaal*. En dat is dan ook het (iets simplistische) antwoord op onze vraag. Alleen van de horizontale component van de kracht kunnen we het hebben; immers, de beweging veroorzaakt door de verticale component verdwijnt in de grond. Net het tegendeel van wat de schuin tegen de band gespeelde biljartbal vertoont, waar het juist de component loodrecht tot de band is die het hem doet terwijl evenwijdig met de band gezien de bal zijn weg eenparig vervolgt (eventueel effect even buiten beschouwing gelaten).

6. $F = ma$

Men kan die formule zomaar poneren, maar men kan haar ook afleiden, en wel uit de veronderstelde

- (a) evenredigheid van massa en zwaarte,
- (b) vectoroptelling van versnellingen,
- (c) vectoroptelling van krachten,
- (d) vectorafhankelijkheid van kracht en veroorzaakte versnelling.

Uit (d) volgt dat de krachtvector een numeriek veelvoud, zeg dan het β -voud, is van de versnellingsvector. Dankzij (b) en (c) ziet men in één oogopslag dat de β voor hoe dan ook gerichte krachten en versnellingen dezelfde is; immers er zou anders een ontoelaatbare situatie, zoals in onderstaande figuur, ontstaan.



Volgens (a) moet β bij de zwaartekracht met m evenredig zijn. Dus zijn F en ma aan elkaar gelijk, zij het op een universele factor na , die door normering, dwz. door geschikte keuze van diverse maateenheden wordt weggewerkt.

Nog eens de massa

Om aan de voorwaarden, aan maten gesteld, te voldoen ontbrak ons nog een equivalentie-relatie voor massa. Na de wet $F = m \cdot a$ ligt voor de hand: massa's worden equivalent geacht als ze op equivalente krachten met equivalente versnellingen reageren. Met kracht is hier uiteraard mechanische kracht bedoeld en gezien de afleiding van $F = m \cdot a$ moet men zich tot puntmassa's beperken dan wel tot krachten (van het soort van de zwaartekracht) die op massa's werken als waren het massapunten.

Maateenheden

De Franse revolutie bracht een nieuwe orde in het systeem van maten en gewichten. De lengte-eenheid, de meter, zou zo worden bepaald dat de afstand pool-evenaar 10 000 km was en daarvoor moest een meridiaanboog worden gemeten, hetgeen, jammer genoeg, niet vlekkeloos geschiedde. Met de aldus bepaalde meter werd die afstand iets groter dan 10 000 km, maar hoewel kleiner uitgevallen dan bedoeld, bleef die meter toch als standaard gehandhaafd. Oppervlakte- en inhoudsmaten werden aan die lengtemaat gekoppeld. Voor het gewicht zou gelden dat 1 dm³ water (onder zekere nader bepaalde condities) 1 kg zou wegen. Wat de tijdmeting aanging bleef het bij het etmaal en zijn gebruikelijke onderdelen; dus de voor de andere maten geldende decimaliteit ging daar niet door. Inmiddels zijn met het oog op de gestage verbetering van meetnauwkeurigheid al deze maten (naast heel wat andere) telkens hergedefinieerd, bijvoorbeeld de lengte-eenheid als zo en zoveel keer de golflengte van licht behorende bij zekere spectraallijn en idem de seconde door zo en zoveel keer de trillingsperiode van zeker soort licht.

In theorie herleidt men de natuurkundige maateenheden tot die van lengte, massa en tijd, en wel liefst zo dat de formules van fundamentele natuurwetten geen overbodige numerieke factoren bevatten, bij voorbeeld de eenheden van snelheid en versnelling (m s^{-1} en m s^{-2}) tot die van lengte (m) en tijd (s).

1 kg, oorspronkelijk als eenheid van gewicht (dus van kracht) bedoeld, werd in de natuurkunde allengs als massa-eenheid geïnterpreteerd. Men zat er dus met naast elkaar kg-massa en kg-gewicht (dus kracht). Om daar een eind aan te maken definiëerde men toen als eenheid van kracht degene die bij de eenheid van massa (kg) de eenheid van versnelling veroorzaakt en gaf haar de naam newton (N), waardoor de wet $F = m \cdot a$

nu zonder enige extra-factor werd gegarandeerd, dus

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m s}^{-2}$$

In de praktijk bleef het meestal (en zeker in de dagelijkse van het wegen) bij kg-kracht, die dan in onze streken 9,81 N blijkt te zijn.

7. Averechtse krachten

De middelpuntvliedende kracht

Als de bus waar je - in vaartrichting - in zit plotseling remt, gaat je bovenlichaam voorover. Wie heeft eraan getrokken? Niemand. Wel deed de bus het - omgekeerd - aan je zitvlak waar je bovenlichaam zo flexibel aan vastzit, dat de remkracht er niet meteen vat op kreeg, waardoor dan juist het *ontbreken* van kracht als kracht werd ondervonden. Of: als de bus een rechterbocht van de weg neemt, word je, links zittende, tegen de buswand aan gedrukt. Door wie? Het is de middelpuntzoekende kracht die wel de bus, maar niet jezelf t.o.v. de bus van staat van beweging doet veranderen, en daarom als middelpuntvliedende kracht van de bus ondervonden wordt. Het touw waar een voorwerp mee rond geslingerd wordt lijkt als door een middelpuntvliedende kracht gespannen - zo voelt het voorwerp het aan, terwijl het juist de door de slingeraar uitgeoefende middelpuntzoekende kracht is die het voorwerp belet rechtlijnig weg te vliegen. Wanneer de draaimolen gaat draaien, streven de hangende gondels opwaarts (immers de enige mogelijke "vlucht-weg"), totdat er evenwicht bereikt is tussen de zwaartekracht en de trekkrachten naar de as toe, die de inzittenden als middelpuntvliedend ondervinden.

Wat men onder kracht wenst te verstaan is uiteraard een kwestie van definitie. Als we wensen dat de leerling er zich aan houdt, dan doen we er goed aan hem uitdrukkelijk te confronteren met grootheden die weleens (soms niet ten onrechte) op de naam "kracht" aanspraak maakten en dat gevoelsmatig nu nog doen. Voorkomen is beter dan genezen: bewustmaking neemt hier de rol over van het medisch prikje dat onvatbaarheid moet garanderen.

Snelheid en impuls

Het KNMI vermeldt windsterktes in meters per seconde. Het

Nieuws maakt er kilometers per uur van, dus b.v. 36 km/h in plaats van 10 m/s, blijkbaar omdat km/h - hoewel in dit geval onzin - bij het fietsende en autorijdende publiek beter overkomt. Maar hoe kan een fietser (met zijn 20 km/h) daar tegen aan trappen? Net zo als een rustige wandelaar een hollend kind aankan. Bij een botsing telt behalve snelheid ook massa. Het product van massa en vectoriële snelheid heet impuls. Maar waarom het produkt?

Voor de impuls geldt een behoudswet, die bij elastische botsingen goed te pas blijkt te komen. Bij afwezigheid van externe krachten blijft de vectorsom van alle impulsen van het systeem behouden. Voor twee massa's die op elkaar met snelheden, (absoluut) omgekeerd evenredig aan hun massa's, afkomen, is die som 0 en hij blijft 0 na de botsing; hetgeen in het geval van elastische botsing betekent dat die twee zich precies zo van elkaar verwijderen als ze aankwamen. In feite komt de wet van behoud van impuls neer op de traagheidswet, en wel toegepast op het zwaartepunt (beter: massa-middelpunt) van het systeem, waar men zich al die massa's in verenigd mag denken.

Allemaal bekende feiten, maar in deze vorm bij elkaar geen antwoord op de didactisch-fenomenologische vraag "waarom het produkt?" Ik heb er wel ideeën over hoe dit wel zou kunnen luiden, maar ben er nog niet in geslaagd vorm aan te geven.

Impuls staat bekend als het cartesische krachtbegrip - zij het dan het absolute impuls⁵, waarvoor Descartes - ten onrechte - het behoud bij botsing claimt. Maar ook tegenwoordig wordt impuls gaarne als kracht aangevoeld en niet helemaal ten onrechte: een inwendige kracht, als het ware, die men al rennende of fietsende aan den lijve ondervindt en dan min of meer overdrachtelijk aan de auto of trein waar men in zit, of ook aan al hetgeen voorbij flitst, gaat toeschrijven. Niet helemaal ten onrechte - zei ik - en dat rechtvaardigt de didactische eis er in het onderwijs expliciet op in te gaan: dat met kracht, voorzover werkzaam, niet iets bedoeld wordt dat ergens in opgepot zit (waarvoor een behoudswet geldt), maar iets dat er van buiten bij komt.

Arbeid en levende kracht

Bij Descartes vindt men nog een ander krachtbegrip, te weten *kracht maal weg*, tegenwoordig arbeid genoemd⁵. Het duikt bij de elementaire machines op in verband met wat je vroeger ook

de gulden regel noemde, een soort behoudswet, die zegt dat er met al die machines op "kracht" niet echt iets te besparen valt; bij het takelen, bijvoorbeeld, wordt het werk alleen maar uitgesmeerd: men moet de vermeende winst, aan de ene kant behaald door minder inspanning, aan de andere kant wel bekopen met een overeenkomstig langere weg om zich die inspanning te getroosten.

Het is dit krachtbegrip waarmee Leibniz het cartesische (de impuls) bestrijdt, zij het met een ander uitgangspunt. Door een hellend vlak af te rollen, verwerft een massapunt net die snelheid benodigd om een ander hellend vlak tot dezelfde hoogte als waar het vandaan kwam, op te klimmen - een soort behoudswet. De "kracht", vereist om een massa m tegen de zwaartekracht in de hoogte h op te brengen, is mgh . Hoe groot is de snelheid v waarmee die massa vanuit de hoogte h beneden aankomt? Als t de voor de val benodigde tijd is, geldt, naar men weet,

$$h = \frac{1}{2} gt^2,$$

$$v = gt,$$

dus na eliminatie van t ,

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2,$$

met rechts de *levende kracht*, tegenwoordig *kinetische energie* genoemd, als tegenhanger van de *potentiële energie* in het linkerlid. Hun som blijft tijdens de val aldoor hetzelfde; voor Leibniz is dit de wet van behoud van kracht, die in de 19e eeuw onder dezelfde naam naar buiten de "ideale" mechanica toe wordt uitgebreid om de warmteleer in te sluiten.

Evenals de impuls wordt ook energie als "kracht" gevoeld, en ook weer niet geheel ten onrechte - een beurtelings opgepote en uitgevierde kracht, als het ware - en weer is het een didactische vereiste dit uit de doeken te doen.

Hoe vreemd het moge zijn om het te moeten constateren, toch lijkt "energie", waar de natuurkundigen in de historie zoveel moeite mee hebben gehad, nu in onze industriële maatschappij onder al die uit de mechanica afkomstige begrippen het meest concrete, geconcretiseerd in gas- en stroomnota's. Door de veelzijdige benadering wint het hoofdstuk "Energie thuis" van "Natuurkunde in thema's", 2a, het dan ook van het eraan voor-

afgaande "Bruggen". Maar toch mis ik ook hier, vlak bij de bron van toekomstige misverstanden, de onmiddellijke confrontatie met naburige begrippen, in casu van energie met vermogen. De verwisseling "kilowatt/kilowatturen" is een te wel bekend en - naar ik vrees - niet puur terminologisch verschijnsel. Het verband tussen die twee verdient beter dan alleen maar geponeerd, het verdient uitgediept te worden, en liefst al bij de instap, de energienota: waar betaalt men vastrecht voor? Verband en verschil tussen vermogen en energie vinden hun tegenhangers overal waar op vaste basis variabele produktie plaats vindt, waar vaste lasten tegenover gebruiksafhankelijke staan. De kijk hierop is er één ver over de grenzen van de natuurkunde heen en juist daarom de moeite waard.

Weerstand en wrijving

Averechts in andere zin dan de eerder behandelde "krachten": hoewel per definitie en van nature tegenstrevend, toch onmisbaar om vooruit te komen. Ik heb er al voldoende aandacht voor gevraagd en beperk me er nu toe de didactische behoefte aan helderheid rond die paradox te memoreren. Met starre lichamen komt men er niet; wat dit betreft, lijkt het me een gebrek van "Verkeer" dat deelnemers zoals voetgangers die zich voelbaar moeten "afzetten" om vooruit te komen, ervan waren uitgesloten, en waar dat afzetten later wel ter sprake komt er geen helderheid over wordt geschapen.

Ik heb naar een neutraal woord gezocht voor de krachten die hier in het spel zijn om de paradox te ontmantelen, maar heb er jammer genoeg geen kunnen verzinnen.

Actie en reactie

Daarentegen hebt U me dit woordenpaar niet zien gebruiken. Ik weet niet wat ik er, hoe interessant dan ook, bij al mijn belangstelling voor de historische rommelzolder, in het onderwijs mee aan moet.

8. Slotconclusie

Ik heb me op een gebied begeven dat ik eerder nauwelijks heb verkend. Hoe kon het anders of het moest bij een poging blijven, in het geheel noch in enig detail afgerond en definitief. Wat ik kon bieden is iets te illustreren dat ik een principe zou willen noemen: Mocht het waar zijn - en het valt nauwelijks te

loochenen - dat in het mechanica-onderwijs ervaringen, aan den lijve ondervonden, hinderlijk interfereren met wetenschapsbegrippen, dan is het juist zaak ze niet te onderdrukken, maar ze te erkennen door er leerprocessen mee te laten starten en ze de leerling zelf - onder leiding - te laten omvormen tot hetgeen wetenschappelijk mag heten.

In de titel heb ik al aangekondigd me op een averechtse wijze van de taak van een boekbespreking te zullen kwijten. Het was voor mij een één en al nieuwe en boeiende ervaring, kennis te maken mét en mijn positie te bepalen tegenóver Van Genderen's proefschrift en werk van het PLON. Een reden voor dankbaarheid, zoals voor alles dat je aan het denken zet. Zonder die aanleiding was ik vermoedelijk nooit in dit onderwerp gedoken.

Noten

1. Genderen, D. van (1989). Mijn artikel was vóór het verschijnen van "Natuurkunde in thema's", 2b (PLON-vereniging, 1989) geschreven, dat me om dezelfde redenen als deel 2a en zelfs nog in hogere mate aangenaam heeft verrast. Ik vond er géén aanleiding in het artikel te herschrijven, wél om het op enkele punten aan te scherpen.
2. Freudenthal (1953).
3. Onder meer: Freudenthal (1975, 1976, 1977, 1978).
4. Onder meer: Freudenthal (1989).
5. Zie Freudenthal (1985, 1986).
6. PLON 1983. PLON-vereniging 1988, 1989.
7. Freudenthal (1983)

Literatuur

- Chevallard, I. (1985) *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Dijksterhuis, E.J. (1950) *De mechanisering van het wereldbeeld*. Amsterdam: Meulenhoff.
- Freudenthal, H. (1953) Het mechanica-vraagstuk. *Nieuwe wegen bij het onderwijs in de wiskunde en de natuurwetenschappen*, 22-43. Purmerend: Muusses.
- Freudenthal, H. (1973a) *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, I -II. Stuttgart: Reidel. Vertaald:
- Freudenthal, H. (1973b) *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1975) Wandelingen met Bastiaan. *Pedomorfose* 25, 51-64.

- Freudenthal, H. (1976) Bastiaan's Lab. *Pedomorfose* 30, 35-54.
- Freudenthal, H. (1977) Bastiaan's experiment on Archimedes' principle. *Educ.Studies in Maths.* 8, 3-16.
- Freudenthal, H. (1978) Bastiaan meet zijn wereld. *Pedomorfose* 37, 62-68.
- Freudenthal, H. (1983) *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1984) *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren I*. (Ned. origineel van Freudenthal 1983.) Utrecht: OW&OC.
- Freudenthal, H. (1985) Die Gesetze des elastischen Stosses bei Leibniz. *Boethius XII* (Mathemata, Festschrift f. H.Gericke), 427-439.
- Freudenthal, H. (1986) Autour du principe de continuité de Leibniz. *Studia Leibnitiana, Sonderheft 14*, 157-168.
- Freudenthal, H. (1989) Wiskunde fenomenologisch. *PANAMA-Post* 8, 33-40.
- Genderen, D. van (1989) *Mechanica - onderwijs in beweging. Een onderzoek naar veranderingen in de didactiek van de mechanica in het voortgezet onderwijs*. Proefschrift R.U.Utrecht.
- Lange, J. de (1980) *Vlieg er eens in*. Utrecht: IOWO-RUU.
- Mach, E. (1912) *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*. Leipzig: Brockhaus.
- PLON (1983) *Verkeer*. Utrecht: Vakgroep Natuurkunde-Didactiek RUU.
- PLON-vereniging (1988) *Natuurkunde in thema's 2a*. Zeist: NIB.
- PLON-vereniging (1989) *Natuurkunde in thema's 2b*. Zeist: NIB.
- Segre B. et al. (1979) eds. *Congresso Internazionale, L'insegnamento integrato delle scienze nella scuola primaria*, Roma, 7-15 gennaio 1976. *Accad. N.Lincei* 326.