

Revisiting Mathematics Education

(China Lectures)

H.F. Freudenthal

Uitgave: Kluwer Academic Publ., Dordrecht

ISBN: 0-7923-1299-6

pp. 200

1. Inleiding

Toen ik toezegde dit boek te bespreken, kon ik niet vermoeden dat dit het laatste grote werk van Freudenthal zou worden. Dat geeft aan dit boek een bijzonder gewicht, en maakt de bespreking extra moeilijk. Ik ontleen hieraan de vrijheid om deze bespreking uitvoeriger te laten zijn, dan gebruikelijk voor een boek van deze omvang. Als een soort posthume hulde aan Freudenthal's gedachtengoed.

Waarover gaat dit laatste werk? In een "Apology and Explication" geeft Freudenthal aan dat er niets nieuws in staat. Het poogt slechts een "updating" te zijn, door selectie en stroomlijning, van al zijn didactische denken. Niets meer en niets minder. Op zich dus eigenlijk precies wat je van een laatste boek zou willen.

Het werk is opgebouwd uit drie delen. In het eerste deel, getiteld "Mathematics Phenomenologically" gaat hij in op wat, didactisch gezien, wiskunde eigenlijk is, welke fenomenologische basisstructuren daaraan ten grondslag liggen en hoe deze in een proces van mathematiseren ontstaan. In het tweede deel, "Didactical Principles", komen zaken als "guided reinvention", rijke contexten en (lange termijn) leerprocessen aan de orde. In het derde deel wordt tenslotte "The landscape of Mathematics Education" geschilderd, waaronder zowel de theorie, het onderzoek als de praktijk wordt verstaan. Ik zal de inhoud van deze drie delen nu zo goed mogelijk proberen samen te vatten. De rijkdom van Freudenthal's gedachten staat daarbij echter een al te grote beknoptheid in de weg.

2. Deel 1: Mathematics Phenomenologically

Wat is wiskunde? Deze vraag beantwoordt Freudenthal, onder verwijzing naar Stevin's wisconst, als "the science of what is certain". Zelfs voor gewone mensen is zekerheid het kenmerk van wiskunde, waarschijnlijk als gevolg van onderwijs waarin wiskunde als een stel algoritmen wordt onderwezen. Echter, diè zekerheid is niet de gewenste. De zekerheid van de wiskunde zou gebaseerd moeten zijn op de "primordial certainty of common sense". Of iets common sense is blijkt

bijvoorbeeld uit of en hoe het verwoord wordt in gewone omgangstaal. In de natuur- en scheikunde lijken veel wetenschappelijke ideeën juist tegen common sense in te gaan. Maar voor de wiskunde is dat anders. De gehele getallen vormen het meest opvallende voorbeeld van wiskunde die direct geworteld is in common sense, en zich daarom gezamenlijk met en uit de omgangstaal laat ontwikkelen. Met behoud van de daaraan verbonden zekerheid. "The tree of knowledge, rooted in common sense, has sprouted arithmetic as it were as a branch in its own right, it did so in history as it still does in individual life histories. As things go on, common sense generates common habitudes, in particular, as far as arithmetic is concerned, algorithms and patterns of actions and thoughts, initially supported by paradigms which in the long run are superseded by abstractions. These products of common sense acquire in turn the behavioural status of common sense, while their common sense ancestry may even be forgotten".

Als dit ontwikkelingsproces echter geforceerd wordt, bijvoorbeeld doordat een algoritme niet verkregen wordt door verkorting en stroomlijning van eerdere common sense activiteiten, maar wordt opgelegd, dan ontstaat er een breuk. Voor sommigen, de "algorithmically gifted ones", is dat geen probleem, maar voor de meerderheid wel. "They fail because once in the past they were asked mental jumps exceeding their mental force". Zelfs al leren ze het algoritme foutloos, dan nog zullen ze het in de werkelijkheid, waar het gaat om common sense, niet gebruiken. Onderzoekers hebben dit, aldus Freudenthal, wel opgemerkt en er zich over verbaasd, maar het niet gediagnostiseerd als een gevolg van instructie.

Bovenstaande vormt, m.i., een fundamenteel uitgangspunt in Freudenthal's denken, vandaar dat ik dit zo uitvoerig heb weergegeven. Wiskunde heeft zich in een voortdurend proces van systematisering en structurering "continu" ontwikkeld vanuit haar common sense wortels. Een proces dat, in tegenstelling tot dat van de natuurwetenschap, niet gepaard is gegaan met revoluties, maar er een is geweest van voortdurende evolutie. Daardoor kan, voor diegene die dit proces (na)volgt, ook gesproken worden van een ontwikkeling van steeds hogere orde common sense. Deze ontwikkeling beschrijft Freudenthal als een stapsgewijs proces "omhoog", in een voortdurende opeenvolging en afwisseling van reflectie op vorm (structuur) en inhoud. Het is dit proces dat in onderwijs moet worden nagevolgd, in stappen zo groot als de lerende kan nemen, (be)geleid door de leraar, maar niet geforceerd.

Een ander fundamenteel thema van Freudenthal is de visie op wiskunde, niet als een kant en klaar product, maar als "an activity of discovering and organising in an interplay of content and form". Een activiteit die zich afspeelt in "common realities". "I prefer to apply the term reality to that what at a certain stage common sense does experience as real". In de wiskunde kun je allerlei

structuren onderscheiden, zoals: rijke en arme, relationele en algebraïsche, kleine en grotere, etc. De grootste structuur is die van de wiskunde zelf. Deze structuur is het meest volledig in kaart gebracht door Bourbaki. Het is de structuur van de bestaande wiskunde, hiërarchisch geordend van arm naar rijk, van het algemene naar het bijzondere. Die structuur gaat dan ook niet uit van de werkelijkheid en toepassingen van de wiskunde. Cognitieve ontwikkeling, echter, gaat juist omgekeerd van het bijzondere naar het algemene, door generalisatie en structurering van liefst paradigmatische situaties. Vandaar dat "structure of science"-curricula niet geschikt zijn als een middel om onderwijs te structureren. In het onderwijs moet het juist andersom: "offering non-mathematical rich structure, structuring, impoverishing structures, mathematising, so that he may discover the powerful poor structures in the context of the rich ones, in the hope that by this approach they will also function in other - mathematical as well as non-mathematical - contexts".

Dit plaatst dus alle nadruk op het proces van mathematiseren. Daarin onderscheidt hij aspecten als: modelleren, generaliseren van paradigma's, stroomlijnen en kortsluiten, en reflectie op eigen activiteiten. Tenslotte wordt hier de onderscheiding horizontaal en verticaal mathematiseren aan toegevoegd. "Horizontal mathematising, which makes a problem field accessible to mathematical treatment versus vertical mathematising, which effects the more or less sophisticated mathematical processing". Een onderscheid dat hij slechts na lange aarzeling als bruikbaar is gaan waarderen.

3. Deel 2: Didactical principles

Dit deel heeft als uitgangspunt: "doing didactical justice to the results of the phenomenological analysis". Het eerste principe is dat van "guided reinvention", geleide heruitvinding, een centraal geloofsartikel van Freudenthal. "Inventions, as understood here, are steps in learning processes, which fact is accounted for by the "re" in reinvention, while the instructional environment of the learning process is so by the adjective "guided" ". Daarbij komt hij tot de vraag: "Is it too farfetched to assume that with some support every normal child might be able to reinvent as much mathematics as it should master in its future everyday life?" Een vraag die hij uiteraard met nee beantwoordt, ook al is de huidige onderwijspraktijk, die immers nog grotendeels uitgaat van ready made wiskunde, anders. "Children should repeat the learning process of mankind, not as it factually took place but rather as it would have done if people in the past would have known a bit more of what we know". Ook al is dit nog niet zo eenvoudig te verwezenlijken.

Op de vraag: "guiding - whereto?", luidt het antwoord: "to mathematising and its various aspects". Wat moet de lerende dan mathematiseren? "The learner's own reality as laid open to him by his guide". En dat kan op allerlei manieren.

Op de vraag "Guiding - how?" volgen vijf principes die daaraan richting kunnen geven, meer of minder expliciet gebruikt in de beschrijving van hoe het proces van heruitvinden voor verschillende onderwerpen zou kunnen plaatsvinden.

Het tweede principe benadrukt het belang van paradigma's, voorbeelden, die de band met de werkelijkheid leggen. In het wiskunde-onderwijs kan men toe met een klein aantal van zulke paradigma's, dit in tegenstelling tot onderwijs in de natuurwetenschappen. Maar deze voorbeeldwerking van paradigma's faalt, d.w.z. er volgt geen transfer, als ze opgelegd worden, in plaats van heruitgevonden.

Als volgend didactisch principe wordt aandacht gevraagd voor het observeren van leerprocessen. Het meeste onderzoek focusteert op toestanden, maar zelfs een in de tijd dichte beschrijving van toestanden heeft niet de waarde van een procesbeschrijving. Waarom? Omdat het bij de observatie van leerprocessen gaat om het leren zien van discontinuïteiten. Daarin ligt de grote didactische waarde. Dit herkennen van "jumps" in leerprocessen is uiterst moeilijk. Het vraagt om communicatie, bijvoorbeeld in kleine groepen. Het blijkt dan dat wiskundige leerprocessen gekenmerkt worden door opeenvolgingen van perspectiefwisselingen, die opgeroepen en versterkt moeten worden door de "guides".

Dit komt neer op een niveauctuur. De aard van deze niveauctuur heeft zich in Freudenthal's denken ontwikkeld van een structuur in leerstof naar een structuur in leeractiviteit, verbonden door een proces van bewustmaking en reflectie, als niveauverhogend mechanisme. In deze nadruk op reflectie zit het verschil met de Van Hiele niveaus. "When I hit on reflection as responsible for the jumps in the learning process, the road was prepared for as many discontinuities and levels in a manifold of learning processes as there are significant occurrences of reflection". De conclusie is dan ook dat het onderwijs veel meer op het oproepen van zulke reflecties gericht moet zijn.

Het vierde didactische principe betreft de noodzaak van het plannen van lange termijn leerprocessen. Traditioneel gezien wordt in productgericht wiskunde onderwijs veel geleerd "om te vergeten". Reflectie kan bewerkstelligen dat essentiële stappen in leerprocessen juist niet vergeten worden, zodat niet alleen het eindproduct maar ook de weg er naar toe telt. Dat is een belangrijke voorwaarde voor inzicht: "having the learner reflect on his learning process". Inzichtelijk leren betekent overigens niet dat er geen training zou mogen plaatsvinden, veeleer gaat het om: "training integrated with insightful learning". Hoe dit te organiseren? Door de niveauctuur in leerprocessen te respecteren, evenals de daarbij horende spontane differentiatie; door voortdurend prospectief en retrospectief leren te organiseren en verschillende leerlijnen met elkaar te verweven; en door actief leren. Opdat er als resultaat een wiskundige houding wordt ontwikkeld.

4. Deel 3: The Landscape of Mathematics Education

De eerste vraag waar Freudenthal op in gaat is die naar een mathematisch-

didactische theorie, maar zover is de wiskunde-didactiek nog niet. "As I see it a theory should pursue understanding in a reasonably coherent and consistent way and it should in principle provide its adepts with guidelines how to tackle questions, relevant to that domain, and how to answer them by unequivocal explanations or by proposing appropriate instruments for action". Die hebben we dus nog niet al wordt er over wiskunde onderwijs wel veel getheoretiseerd. Freudenthal prefereert voor de stand van zaken de zwakkere term "theoretic frameworks", "more or less connected wholes of theoretic statements and conceptual tools".

Het idee van horizontaal en verticaal mathematiseren wordt vervolgens gebruikt om vier typen wiskunde onderwijs te onderscheiden: mechanistisch, empiristisch, structuralistisch en realistisch, die ieder voor zich gekoppeld kunnen worden aan verschillende achterliggende filosofieën. Algemeen onderwijskundige instructie-theorieën roepen vooralsnog zijn wantrouwen op, omdat "mathematics is different, .., there is no didactical analogue to guided reinvention in other fields". Als voorbeeld wordt Galperin's theorie besproken en beoordeeld als een "extreme example of mechanism". Ook de huidige modeterm "constructivism" wordt zowel in haar filosofische als psychologische context als niet relevant beoordeeld. Didactisch gezien luidt de conclusie: "if "constructivism" shall mean anything didactical, it must stand for a programme, and then a programme, the philosophy of which grants learners the freedom of their own activity". Hetgeen neerkomt op geleide heruitvinding.

Vervolgens komt het onderzoek van wiskundeonderwijs aan bod. De cruciale vraag daarbij is: "what is the use of it". Veel onderwijskundig onderzoek, vooral het kwantitatief vergelijkende en test onderzoek, kan Freudenthal's toets niet doorstaan. Zijn antwoord op de vraag naar het nut van onderzoek is dat het een motor moet zijn voor "Change". Ontwikkelingsonderzoek is daarvoor de aangewezen weg, ook al kan dit de goedkeuring van veel onderwijskundigen (nog) niet wegdragen. Vormgeven en observeren van leerprocessen, daarop en op het eigen leerproces reflecteren en dit als procesbeschrijving rapporteren. Zulk onderzoek past niet in een R.D.& D. model, maar vraagt om cyclische voortgang in een organische koppeling van onderzoek en ontwikkeling. "Developmental research means: experiencing the cyclic process of development and research so consciously, and reporting on it so candidly that it justifies itself, and that this experience can be transmitted to others to become like their own experience". Hierin zit ook het idee van disseminatie verborgen, uitzaaiing; dit ter onderscheiding van implementatie, alsof er een klaar product kan zijn dat op de markt gebracht moet worden. Immers, ontwikkelingsonderzoek, tenslotte, "is itself a long term learning process".

Tenslotte de praktijk van het wiskunde-onderwijs. Daarin is niet zoveel verschil in verschillende landen. "The big lie" van ons (en van vele andere) onderwijs-

systeem is het grote verschil tussen wat werkelijk geleerd wordt en wat onderwezen wordt. Onderwijskundige ontwikkelingen als het populaire expert-novice model, de computer of de curriculumtheorie, hebben daar tot nu toe weinig aan kunnen veranderen.

Wie zijn eigenlijk dan wèl mogelijke "agents of change"? Dat zijn de onderwijsontwikkelaar, alhoewel niet zonder problemen; de leraar, alhoewel die geneigd is te onderwijzen hoe en wat hem onderwezen is (mechanistisch dus); of de leraar in opleiding. Dat vraagt dan wel om een gelijkheid in status van de vakwetenschappelijke en de vakdidactische component in hun opleiding. Een parallel tussen wiskunde leren en wiskunde leren onderwijzen als leidend principe, waarbij het tweede moeilijker is dan het eerste. "Teacher students, in general, belong to the large group of adults where the sources of what they once learned by insight - be it much or little- are likely to have been clogged by the knowledge and skills acquired meanwhile.(...) So they have to undergo remediation: relearning such facts while teaching children and observing their learning processes". Naast leren in de praktijk is dit het allerbelangrijkste

Tenslotte de leerboekschrijver. In leerboeken is weliswaar veel veranderd, maar nog niet genoeg. Het marktprincipe vormt daarvoor een sta-in-de-weg. Vooral metavragen, gericht op reflectie moeten meer plaats krijgen in de leerboeken. En dit alles om een verandering naar "mathematics for all" te verwerkelijken.

5. Reflectie

Tot zover een (te?) lange beschrijving van de inhoud van dit boek. Deze beschrijving is zo lang omdat het, zoals gezegd, een bijzonder rijk boek is waarin zeer veel in kort bestek wordt besproken. Het bestrijkt het hele spectrum waarop de vakdidactiek werkt: reflectie op wiskunde, didactiek, onderwijsontwikkeling, onderzoek, verspreiding, opleiding en praktijk. En dat alles vanuit een perspectief gericht op verandering. Daarmee weerspiegelt het, lijkt me, zo volledig mogelijk de rijke inhoud van Freudenthal's denken, en laat het ook de oorspronkelijkheid daarvan zien. De opbrengst van een creatief en productief denker, die zich weinig aantrok van gevestigde reputaties en gebaande paden, maar met grote overtuiging zijn eigen weg is gegaan. De in het boek opgenomen bibliografie van Freudenthal's didactisch werk maakt dit overduidelijk.

Het sterke in Freudenthal's betoog is de consistentie, uitgaande van een analyse van wiskunde als wiskundige activiteit en het geloof in "guided reinvention" volgt de rest eigenlijk vanzelf, als een vanzelfsprekende nadere uitwerking. Het concept van progressief mathematiseren vertrekkend vanuit rijke contexten, niveaugewijs uitgelijnd met reflectie als motor is steeds toepasbaar, op welk niveau je je ook met onderwijs, onderwijsontwikkeling of onderzoek bezig houdt.

Inderdaad is het zo dat onderwijskundige theorievorming hier weinig aan toe te voegen heeft. Of het staat te ver van het onderwijs en is dus daarvoor weinig relevant, of het is strijdig met de uitgangspunten van Freudenthal. Zijn boek is een benijdenswaardige samenvatting van het theoretisch raamwerk voor een realistische reken-wiskunde didactiek en misschien wel al iets meer. Benijdenswaardig omdat, naar mijn idee, de wiskundedidactiek hierin duidelijk voorop loopt in vergelijking met andere β -didactieken. Het boek laat ook zien hoe essentiël het is voor de ontwikkeling van een vakdidactiek dat iemand die zich daarmee bezig houdt een werkelijk diepe kennis heeft van het vak zelf en van zijn historische en filosofische ontwikkeling en achtergrond. Als die iemand dan ook nog, net als Freudenthal, de eruditie en ruimdenkendheid heeft om datzelfde vak vanuit een vernieuwend pedagogisch perspectief te kunnen doordenken, dan kan er iets ontstaan dat werkelijk de moeite waard is. In vergelijking daarmee is het meeste van wat tegenwoordig doorgaat voor vakdidactisch en onderwijskundig onderzoek inderdaad niet veel meer dan irrelevant handwerk.

Empirische onderbouwing van zijn beweringen ontbreken overigens volledig in dit boek, maar echt missen doe ik het eigenlijk niet. In die zin houdt hij zich wel aan zijn eigen credo dat rapportages gewoon overtuigend moeten zijn. Dat neemt echter niet weg dat deze empirische onderbouwing wel degelijk zeer gewenst is, al moet die dan maar door anderen gedaan worden en, naar ik begrepen heb, gebeurt dat momenteel ook.

Hoe zit het nu met de transferwaarde van Freudenthal's ideeën naar andere vakdidactieken, zou men zich kunnen afvragen, bijvoorbeeld naar die van de natuurkunde om dicht bij (mijn) huis te blijven?

Dat is moeilijk te zeggen. Een van de probleempunten die ik zie is Freudenthal's nadruk op wiskunde als georganiseerde common sense. Nu kan ik niet goed beoordelen of dit voor de wiskunde inderdaad het geval is, alhoewel ik dacht dat Freudenthal's empirisch-intuïtieve visie op wiskunde zeker niet algemeen geaccepteerd is onder wiskunde-filosofen. Kun je deze common sense gedachte, bijvoorbeeld, ook toepassen op het gebied van de statistiek? Is het niet zo dat het wiskundige kansbegrip net zo zeer het omvormen van allerlei intuïtieve ideeën vraagt als, bijvoorbeeld, het fysische krachtbegrip? Maar wat betekent het dan, zoals hij zelf ook zegt, dat deze worteling in common sense voor de natuurkunde niet opgaat, gezien het historische revolutionaire ontwikkelingsproces? Kortom, deze grondstelling is in het boek, hoe interessant ook, voor mij toch niet voldoende helder uitgewerkt.

Een hieraan gerelateerd probleem heb ik met het begrip "geleide heruitvinding". Ook hiervan zegt hij dat dit alleen voor de wiskunde zou gelden, want wiskunde "is different". Ook hiervoor geldt dat ik niet precies inzie waarin dit verschillend zijn nu precies zit en hoe fundamenteel dat is. Verschillend waarvan of waarin?

Dat verschil moet toch iets te maken hebben, zou ik zeggen, met de minimale grootte van de "jumps" in het leerproces. Wiskunde kun je leren als een continuïteit van (kleine?) discontinuïteiten, waardoor heruitvinding mogelijk is. Voor natuurkunde heb je soms noodzakelijk te maken met zulke fundamentele begripsmatige herstructureringen, dat de grootte van de discontinuïteit heruitvinding blokkeert. Dit is mijn interpretatie van het betoog in het boek, waar ik me overigens ook in zou kunnen vinden. Echter, in een recent artikel in het Tijdschrift voor Didactiek der β -Wetenschappen (1990) beschrijft hij een didactische fenomenologie voor het begrip kracht, waarin hij tot de conclusie komt dat ook voor natuurkunde een leerproces van geleide herontdekking mogelijk moet zijn. Dat maakt voor mij dit begrip niet duidelijker. Het lijkt me van tweeën één. Of wiskunde is niet "different", of "geleide herontdekking" is een te vaag begrip. En wat betekent dit voor het verschil (?) tussen natuurkunde en wiskunde als activiteit?

Desalniettemin lijken Freudenthal's gedachten me een prima inspiratiebron te kunnen vormen voor het zoeken naar een didactiek van realistisch natuur(kunde)-onderwijs, met name ook voor de basisschool. Veel van zijn uitgangspunten lijken niet alleen bruikbaar, maar even wenselijk voor ander β -onderwijs (en daarbuiten?), alhoewel de preciese inhoudelijke vertaling uiteraard nog wel een probleem is. Het is eigenlijk betreurenswaardig dat de verkokering in ons land zover is voortgeschreden dat er zelfs tussen didactici van verwante vakken weinig samenwerking is geweest. Daardoor hebben wij niet van Freudenthal geleerd wat mogelijk was geweest. Gelukkig begint hierin nu verandering te komen.

Laat ik eindigen met enkele kanttekeningen bij de vormgeving van het boek. De toon is soms wat betweterig, maar daar valt mee te leven; het bevat weinig concreet uitgewerkte voorbeelden; het bevat regelmatig verwijzingen naar vroeger eigen werk, waardoor het dan moeilijk te volgen is voor diegenen die dat werk niet kennen. Dit is trouwens een algemener punt. Het boek is eigenlijk alleen maar leesbaar voor diegenen die al behoorlijk vertrouwd zijn met Freudenthal's denken en, misschien nog belangrijker, met praktijkvoorbeelden van realistisch reken/wiskunde-onderwijs. Voor diegenen lijkt het me inderdaad een uitstekende samenvatting en "updating" van zijn gedachten te bieden, zoals beloofd in zijn "apology". Zelf, als half-gevorderde, heb ik het meer dan tweemaal moeten lezen, om het gevoel te krijgen dat ik het enigszins begrijp. Voor beginners, dus voor hen die hieruit de grondbeginselen van de realistische wiskunde didactiek willen leren, lijkt het me moeilijk te volgen. Dat is jammer. Desalniettemin wil ik dit boek zowel bij hen als bij u van harte aanbevelen.

Dr.P.L.Lijnse

Centrum voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen
Rijksuniversiteit Utrecht