

Groepsopgaven bij wiskunde: enkele resultaten van het project Adaptief Groeps-Onderwijs voor 12- tot 16-jarigen

J. Chr. Perrenet¹

ISOR - Afdeling Onderwijsonderzoek
Rijksuniversiteit Utrecht²

Summary

This article presents some of the results of the project AGO 12-16 (Adaptive Group Education for students with age 12 to 16). The goal of the project is to develop and evaluate a mathematics program for mixed ability teaching. A comparison is made between an experimental program, based on the AGO-model, and a more traditional program. Implementation of the program has a positive effect on learning results. Cooperation in small groups as part of the program proves to be an important factor in explaining this effect. Examples of the problems the heterogeneous groups worked on are given. Former Dutch research in mixed ability mathematics teaching for small groups heavily leaned on the presentation of mathematics in real-life situations. In this study the positive effect can be attributed to the use of other kinds of problems, such as simultaneous solving of isomorphic problems within the small group.

1. Inleiding

In de jaren 1987-1990 werd het project Adaptief Groeps-Onderwijs voor 12- tot 16-jarigen uitgevoerd aan de Rijksuniversiteit Utrecht³. Doel van het project was het ontwikkelen en toetsen van het AGO-model, een instructiemodel voor adaptief onderwijzen en coöperatief leren (bij wiskunde) in heterogene klassen van de onderbouw in het voortgezet onderwijs. In heterogene klassen worden de verschillen tussen de leerlingen vaak als hinderlijk ervaren. De opzet van het AGO-model is die verschillen juist te gebruiken.

De onderzoeksresultaten zijn zowel wat betreft de uitvoerbaarheid als wat betreft de effectiviteit bemoedigend. In dit artikel wordt eerst een overzicht gegeven van de opbouw van het model, de onderzoeksopzet en de resultaten. Een meer gedetailleerde beschrijving is te vinden in het eindrapport (Herfs, Mertens, Perrenet & Terwel, 1990). Vervolgens wordt aandacht besteed aan een element van het model dat vooral succesvol bleek: groepswerk. Verschillende typen groepsopgaven worden besproken. De uitkomst van het onderzoek wordt tenslotte gerelateerd aan een eerder model met groepswerk, het zgn. model Freudenthal.

2. Het AGO-model

Schets van de AGO-cyclus

Onderwijs volgens het AGO-model betekent het doorlopen van cycli van ongeveer 10 lessen over hetzelfde onderwerp (bijvoorbeeld een hoofdstuk uit een leerboek)⁴.

Elke cyclus bestaat uit een aantal fasen:

1. klassikale introductie
2. samenwerken in kleine heterogene groepen
3. diagnostische toets
4. alternatieve leerwegen:
instructie in remediërende groep of
individueel werken (in groepjes) aan verrijkende opgaven
5. individueel werken in kleine heterogene groepen op verschillende niveaus
6. klassikale reflectie en vooruitblik
- (7.eindtoets)

De *klassikale introductie* (ongeveer 1 les⁵) is bedoeld om de leerlingen te motiveren, om een overzicht te geven van het voorliggende hoofdstuk en om de benodigde voorkennis op te halen.

De tweede fase (ongeveer 3 lessen) bestaat uit het *samenwerken in kleine heterogene groepen* aan de basisstof van het hoofdstuk. Deze stof is gemeenschappelijk voor alle leerlingen. In de groepsopgaven wordt gebruik gemaakt van de verschillen tussen de leerlingen. (Met name op deze groepsopgaven wordt later in dit artikel ingegaan.) De docent begeleidt de groepjes en voegt zonodig klassikale momenten in.

Elke leerling maakt vervolgens individueel een *diagnostische toets* over de gemeenschappelijke leerstof; de docent kijkt de toets na en bespreekt de resultaten. Het resultaat is bepalend voor de indeling van de leerlingen over de verschillende leerwegen binnen de cyclus.

Als vervolg op de diagnostische toets beginnen enkele *alternatieve leerwegen*. De leerlingen, die de basisstof onvoldoende beheersen, krijgen (ongeveer 1 les) extra instructie van de docent (remediërende groep). De anderen werken zelfstandig aan individuele opdrachten op hoger niveau (meer differentiatie is hierbij mogelijk). Zij kunnen elkaar onderling helpen.

Na de extra instructie gaan de leerlingen uit de remediërende groep terug naar hun oorspronkelijke groepjes. Er volgt een fase met *individueel werken in heterogene groepen* (ongeveer 3 lessen). Ieder krijgt taken op het eigen niveau. Onderlinge hulp vindt plaats naast de begeleiding door de docent.

De cyclus wordt afgesloten met een *klassikale reflectie en vooruitblik* (ongeveer 1 les). Naast de gemeenschappelijke stof komt ook leerstof van de verschillende leerwegen aan de orde. Eventueel volgt dan een *eindtoets*⁶.

3. Achtergrond van het model

De reden om de ontwikkeling van een uitvoerbaar en effectief model voor het onderwijs in heterogene klassen ter hand te nemen, is het gegeven, dat in het algemeen klassen slechter functioneren bij een grotere proportie zwakke leerlingen (Terwel, 1986). Met andere woorden: homogene klassen zijn wel goed voor sterke leerlingen, maar niet voor zwakke. Het onderzoek onder leiding van Terwel aan de Rijksuniversiteit Utrecht is gericht op het ontwikkelen van een onderwijsmodel voor klassen met zowel sterke als zwakke leerlingen, waarbij allen zich kunnen ontplooiën. In de loop van een tiental jaren werd eerst een model geëvalueerd met een aantal kenmerken, ontleend aan ideeën van Freudenthal, en vervolgens het mede daarop gebaseerde AGO-model.

Het AGO-model is qua fasering een uitbreiding van het model Freudenthal (zo genoemd in Terwel e.a., 1988), dat drie fasen bevat:

1. klassikale introductie
2. samenwerken in kleine heterogene groepen
3. klassikale reflectie

Deze cyclus voltrekt zich in een of meerdere lessen. De opdrachten voor het groepswerk kenmerken zich door het gebruik van *rijke contexten* en door de aanwezigheid van *verschillende oplossingen en oplossingswegen op verschillend niveau*. De contexten hebben een motiverende functie, een modelfunctie voor wiskundige begrippen en een toepassingsfunctie. De openheid van de opdrachten is gericht op de werking van het niveauprincipe (Freudenthal, 1973): Door de heterogeniteit zijn er binnen de groepjes leerlingen op een verschillend niveau in hun leerproces. In de samenwerking ontstaat daardoor een confrontatie van oplossingen en oplossingswegen op verschillend niveau. Deze confrontatie stimuleert de reflectie onder begeleiding van de docent. En zowel de sterkere leerling op het hogere niveau als de zwakkere op het lagere profiteert daarvan. De sterkere kijkt terug op het lagere niveau en vergroot daardoor zijn inzicht, de zwakkere oriënteert zich op het hogere niveau.

In het project Interne Differentiatie 12-16 werd een curriculum geëvalueerd van de SLO, dat op deze principes gebaseerd was. Er werd een klein positief effect gevonden op de leerprestaties in vergelijking met een meer traditionele aanpak (Terwel e.a., 1988). Een conclusie was echter ook, dat in het model tijdige diagnostische en remediërende maatregelen ontbraken om te voorkomen dat zwakkere leerlingen te veel achterbleven.

Het AGO-model is een ontwerp, dat aan de noodzaak van passende maatregelen voor achterblijvers tegemoet komt, zonder dat die maatregelen ten koste gaan van de sterkere leerlingen. Uitgaande van het model Freudenthal is aangesloten bij het begrip adaptief onderwijs van Corno en Snow (1986) en bij theorievorming en onderzoek omtrent coöperatief leren (Slavin, 1985). Onderwijskundige kenmerken van het model zijn (zie ook §2):

- a. aansluiting bij de voorkennis van de leerlingen door een diagnostische tussen-toets en het gebruik van alternatieve leerwegen gebaseerd op de toetsresultaten
- b. flexibele groepeeringswijzen:
 - klassikale introducties en reflecties
 - individueel werken aan taken
 - samenwerken in kleine heterogene groepjes
 - gerichte instructie door de leraar in homogene groepen
- c. frequente en directe feedback en remediërende activiteiten
- d. variatie in de leertijd met het oog op het bereiken van een zo hoog mogelijk beheersingsniveau voor alle leerlingen
- e. variatie in didactische methode en materiaal.

Het AGO-model is meer dan een Basisstof-Herhalingsstof-Extrastof model: de fases kunnen niet los gezien worden van de didactische invulling volgens de kenmerken van het model Freudenthal. Het model omvat ook veel meer dan alleen het werken in groepen.

4. De vertaling van het model in de klaspraktijk

Een aantal wiskundeleraars met heterogene tweede klassen werd gevraagd volgens het AGO-model les te geven. De verandering van het onderwijs werd tot stand gebracht via het leerlingenmateriaal en via een docenthandleiding in combinatie met een training. (De verandering liet de wiskundige inhoud onaangetast.)

Voor het leerlingenmateriaal werden twee hoofdstukken van een bestaande wiskundemethode, Wiskunde Lijn (Van Bodegraven e.a., 1987) aangepast volgens de kenmerken van het model. Het betrof een hoofdstuk over spiegelen, draaien en verschuiven en een hoofdstuk over het systematisch oplossen van eerstegraads vergelijkingen. De genoemde groep docenten (de AGO-groep) werkte na een korte training met het aangepaste materiaal volgens de richtlijnen van het AGO-model; een tweede groep (de Niet-AGO-groep) werkte zonder training op de voor hen gebruikelijke wijze verder met het oude materiaal.

De hoofdstukken van Wiskunde Lijn hebben een globale opbouw die goed bij het AGO-model aansluit: een gemeenschappelijke kern, een diagnostische toets, een vervolg bestaande uit drie zogenaamde kleuren (blauw: herhaling en alternatieve uitleg van de kernstof, gekoppeld aan opgaven van de diagnostische toets; grijs: uitbreiding van de kernstof op vergelijkbaar niveau en wit: uitbreiding van de kernstof op abstracter niveau) en een eindtoets. Kern en kleuren bevatten ieder een korte vooruitblik en terugblik op de betreffende leerstof. De methode kan op verschillende manieren worden gebruikt. In de Niet-AGO-groep werkte men voornamelijk individueel, zonder diagnostische toets en naast de kern meestal aan twee kleuren. De keuze van de kleuren voor

een bepaalde leerling werd door de docent gemaakt; in het algemeen lag deze keuze na enige tijd vast.

De wijzigingen van het bestaande materiaal betroffen vooral de kernstof van beide hoofdstukken van Wiskunde Lijn⁷. De oorspronkelijke verzameling van veelal individuele opgaven werd voor een aanzienlijk deel geherstructureerd en aangepast tot een verzameling opgaven voor groepswerk.

Naast het leerlingenmateriaal werd ook de docentenhandleiding gewijzigd. In de AGO-handleiding staan aanwijzingen hoe met het materiaal om te gaan, aanwijzingen betreffende de klassikale introductie van elk onderwerp (met een overzicht van vereiste voorkennis), uitleg van de verschillende mogelijkheden bij open opgaven en voorbeelden van vragen als uitgangspunt voor een klasdiscussie, zoals vragen die een gevolgde werkwijze ter discussie stellen of die een relatie leggen met een ander onderwerp uit de leergang. Voorbeelden van de laatste categorie staan ook in het boekje 'Met AGO op weg' (Perrenet, Herfs & Terwel, 1988) dat op de docenttraining werd gebruikt. Verder worden daarin onder meer de volgende onderwerpen behandeld:

- de rol van de leerkracht bij het groepswerk (inhoudelijke begeleiding en procesbegeleiding van de groepjes, het inlassen van klassikale momenten)
- het gebruik van het onderwijsleergesprek met Socratische kenmerken (geen vragen stellen met een kort goed of fout antwoord, inventariseren van verschillende antwoorden en doorvragen)
- het gebruik van eigen producties bij een klassikaal opgesteld overzicht van de stof aan het eind van een hoofdstuk (de leerlingen moeten zelf verschillende typen opgaven bedenken van verschillende moeilijkheidsgraad⁸).

5. De opzet van het onderzoek

Het onderzoek werd uitgevoerd in heterogene tweede klassen. Het tweede leerjaar is interessanter dan het eerste. Terwijl de SLO heterogeniteit in die fase goed mogelijk acht (SLO, 1985), ontraden Treffers en Van der Blij in het advies van de Wetenschappelijke Raad voor het Regeringsbeleid juist het langer dan een jaar bijeen houden van de leerlingen (WRR, 1986).

De keuze voor de methode Wiskunde Lijn was geen principiële keuze. Zij was gebaseerd op het materiaal dat we in de heterogene klassen aantreffen van de scholen die bereid waren met het onderzoek mee te doen⁹. De keuze voor de leerstof werd gemaakt op grond van praktische overwegingen betreffende de periode van de onderzoeksactiviteiten in de klas. In de gekozen onderwerpen 'meetkundige afbeeldingen' en 'eerstegraads vergelijkingen' komen verschillende aspecten aan bod van de leerstof wiskunde in de onderbouw.

Het onderzoek kende twee rondes. In de eerste ronde werd de *uitvoerbaarheid* van het model onderzocht. Er werkten 2 scholen (2 docenten, 8 klassen) met het vernieuwde materiaal (de AGO-conditie) en 1 school (4 docenten, 6 klassen)

met het bestaande materiaal (de Niet-AGO-conditie). Het materiaal werd bijgesteld op grond van de ervaringen in de eerste ronde. In de tweede ronde werd (op grotere schaal) de *effectiviteit* van het model onderzocht. Nu werkten 4 scholen (9 docenten, 15 klassen) met het vernieuwde materiaal en 2 scholen (4 docenten, 8 klassen) met het bestaande.

Om vast te stellen in hoeverre er in de AGO-conditie volgens de bedoelingen van het model werd lesgegeven en in hoeverre er een contrast was met de Niet-AGO-conditie werden naar de onderwijsprocessen drie soorten metingen verricht. Ten eerste via de leerlingen met de zogenaamde PERCIA-vragenlijst (Perceptie van het Curriculum in Actie), ten tweede via de docenten met een vragenlijst achteraf en ten derde via de onderzoekers met een observatiecategorieënsysteem. Bij het laatste type procesmeting zat de observator achterin de klas met een microcomputer en scoorde elke 30 seconden op een aantal observatiecategorieën zoals werkvorm, interactie leerkracht, taakgerichtheid van de klas en dergelijke. In de eerste ronde werden bovendien kwalitatieve observaties met bandrecorder en notitieblok uitgevoerd; op grond van deze observaties en op grond van interviews met leerkrachten en leerlingen werd het materiaal na de eerste ronde bijgesteld.

De centrale vraagstelling van het onderzoek luidde: *leidt onderwijs, dat is gerealiseerd volgens de kenmerken van het AGO-model, tot significant betere effecten (cognitief en affectief) dan onderwijs dat die kenmerken niet heeft?*

Om de effectiviteit van de AGO-onderwijs te bepalen werd enerzijds de houding ten opzichte van de wiskunde van de leerlingen gemeten, vlak voor en aan het eind van de periode dat beide hoofdstukken werden behandeld: een affectieve effectmeting. Voor deze meting werd de Belevingsschaal voor Wiskunde gebruikt (Martinot, Kuhlemeyer & Feenstra, 1988). Dit instrument bestaat uit vier subschalen: Plezier in wiskunde, Angst & moeilijkheid, Inzet, Nut & relevantie.

Anderzijds werd aan het eind van elk hoofdstuk een toets over de leerstof afgenomen (cognitief effect). Binnen het onderzoek werden beide scores samengevoegd tot één eindtoetsscore¹⁰. Vlak voor de onderzoeksperiode werd bovendien een toets voor wiskundige begaafdheid afgenomen, teneinde bij de analyse van de leerresultaten voor beginverschillen te kunnen corrigeren¹¹. Dezelfde meetinstrumenten werden gebruikt in beide condities.

6. Enkele resultaten

In de AGO-groep als geheel beantwoordde het feitelijke onderwijs naar verwachting meer aan het totaal der kenmerken van het AGO-model dan in de Niet-AGO-groep. De implementatie was dus geslaagd, zij het niet in alle klassen en voor alle kenmerken even goed. In figuur 1 is de mate van implementatie schematisch weergegeven. De verticale streepjes staan voor klassen met boven de horizontale as de klassen van de AGO-conditie. De mate van

implementatie is bepaald door de gecombineerde resultaten van de procesmetingen over de verschillende AGO-kenmerken (zie §5). De uiteinden van de horizontale as staan voor 'AGO volledig gerealiseerd' en 'AGO volledig niet gerealiseerd' (zie verder Herfs e.a., 1990).

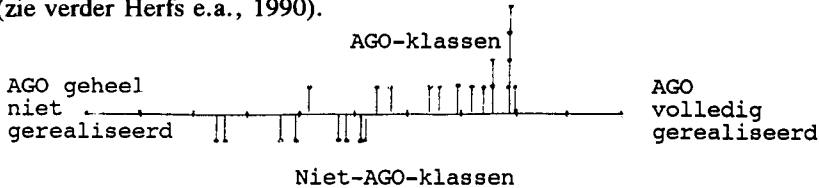


Fig.1. Schema voor de mate van implementatie van het AGO-model in de verschillende klassen

De verschillen in de gewenste richting traden vooral op bij de volgende kenmerken: samenwerken (in groepen), gebruik van diagnostische toets, alternatieve leerwegen (remediërende groep naast individueel werken in groepjes) en bij hoeveelheid individueel werken. Op de eerste drie genoemde kenmerken scoorde de AGO-groep het hoogst. Op het kenmerk individueel werken scoorde de Niet-AGO-groep naar verwachting veel hoger.

Op het voorkomen van klassikaal werken was er weinig verschil tussen de beide groepen, waarbij moet worden opgemerkt dat de werkvorm onderwijsleergesprek vrijwel nergens werd gesignaleerd¹². Op het AGO-kenmerk 'wiskunde in contexten' scoorde de Niet-AGO-groep verrassenderwijs significant hoger (zie verder §8).

De te toetsen hypothese betreffende de effectiviteit was: AGO leidt tot betere resultaten dan onderwijs waarin de AGO-kenmerken niet (of in mindere mate) zijn gerealiseerd. Bij de resultaten werd onderscheid gemaakt tussen affectieve resultaten (de houding) en cognitieve resultaten (het leerresultaat).

Uit de analyse - deze bestond uit regressie-analyse en multi-niveau analyse - kwam als eerste naar voren dat AGO nauwelijks invloed had op de houding van de leerlingen. AGO-leerlingen vonden het onderwijs niet leuker en het vak niet nuttiger, maar ze gaven in het algemeen ook geen negatiever oordeel dan Niet-AGO-leerlingen.

Wat betreft het leerresultaat was de uitkomst positief. Er bleek te gelden: in klassen, waarin volgens het AGO-model werd gewerkt, zijn de leerresultaten gemiddeld beter dan in klassen, waarin dat niet is gebeurd.

Eerst wordt de vergelijking tussen de twee condities gepresenteerd. In tabel 1 staan de gemiddelden en standaarddeviaties voor de eindtoets en de toets voor begaafdheid voor beide condities.

Tabel 1: Gemiddelden en standaarddeviaties op wiskundige begaafdheid en eindtoets

	AGO-conditie			Niet-AGO-conditie		
	N	gemidd.	st.dev.	N	gemidd.	st.dev.
eindtoets	384	24.97	9.68	198	19.36	6.62
wisk.bghd	401	53.87	6.80	194	52.76	6.59

Er lijkt een behoorlijk verschil te zijn tussen de gemiddelden op de eindtoets; de leerlingen van de AGO-conditie scoren gemiddeld hoger. In de volgende analyse is getoetst of het verschil significant is en daarbij is ook rekening gehouden met reeds bestaande verschillen tussen beide groepen op wiskundige begaafdheid. In tabel 2 zijn de resultaten van een regressie-analyse gepresenteerd.

Tabel 2: Regressie van eindtoets op begaafdheid en conditie (N=572)

stap	variabele	R ² t	F1	(df)	R ² c	F2	(df)	β
1	wisk.bghd	.25	190.0*	(1;570)				.50
2	conditie	.31	128.9*	(2;569)	.06	51.1*	(1;569)	.25

R²t = verklaarde variantie t/m de betreffende stap

F1 = F-ratio behorende bij R²tot

df = vrijheidsgraden

R²c = toegevoegde verklaarde variantie (c = charge)

F2 = F-ratio behorend bij R²c

wisk bghd = wiskundige begaafdheid

* = significant op 1 procent

De beginmeting naar de begaafdheid verklaart 25 procent van de variantie in de eindtoets; de conditie voegt daar een significante bijdrage van 6 procent aan toe. De conditie (AGO versus Niet-AGO) geeft dus een significant effect na controle voor beginverschillen op wiskundige begaafdheid. Nadere analyse leerde, dat aan het effect gelijkkelijk door beide deelttoetsen (meetkundige afbeeldingen en eerstegraads vergelijkingen) werd bijgedragen. De grootte van het effect is niet gering naar de normen van onderwijskundig onderzoek¹³.

Uit de vervolgens uitgevoerde multi-niveau analyse¹⁴ bleek dat het positieve effect van het AGO-model zowel geldt voor zwakke als voor sterke leerlingen binnen een klas. Met de multi-niveau analyse kon ook worden nagegaan in hoeverre het positieve effect van AGO te danken was aan de verschillende kenmerken van AGO. Er bestonden immers verschillen in de mate waarin de verschillende kenmerken in de klassen waren gerealiseerd (of *niet* gerealiseerd in de Niet-AGO conditie).

De resultaten vertoonden het duidelijkste beeld voor de volgende drie kenmerken: samenwerken (in groepjes), individueel werken en alternatieve

leerwegen. De eerste werkvorm bleek een positief effect te hebben op de leerresultaten van alle leerlingen (wel leken de relatief sterke leerlingen in een klas meer te profiteren dan de relatief zwakke). Veel individueel werk toonde een negatief effect op de leerresultaten. Deze beide uitkomsten waren in overeenstemming met de verwachtingen van de onderzoekers.

Bij het kenmerk alternatieve leerwegen werd echter een negatief effect gevonden: hoe meer tijd aan deze werkvorm werd besteed des te lager de leerresultaten. Bij de andere kenmerken bleek geen effect aanwijsbaar.

Aangezien het groepswerk zo duidelijk als positieve factor uit de analyse naar voren kwam is de volgende paragraaf gewijd aan de vormgeving van die werkvorm in het leerlingenmateriaal. Het negatieve effect van de alternatieve leerwegen zal in §8 worden besproken.

7. Voorbeelden van gebruikte groepsopdrachten

In deze paragraaf worden van verschillende karakteristieke groepsopdrachten voorbeelden gegeven (zie ook Herfs e.a., 1990). De opdrachten zijn in het algemeen gebaseerd op de meestal individueel gerichte opdrachten uit de kerngedeeltes van beide hoofdstukken van Wiskunde Lijn. Ook een aantal van deze oorspronkelijke opdrachten zal worden getoond ter vergelijking.

In de volgorde van presentatie is een verloop van 'lichte' naar 'zware' samenwerking, gekenmerkt door de mate waarin de groepsleden elkaar nodig hebben voor het eindresultaat. Aanwijzingen voor de samenwerking zijn in de opgavetekst met hoofdletters aangegeven.

De wiskundige inhoud van de opgaven is sterk bepaald door die van de opgaven van Wiskunde Lijn; om onderzoeksmatige redenen moest de inhoud van beide curricula gelijk blijven.

a. *Opgaven met gemeenschappelijke controle*

Bij sommige opgaven bleef de samenwerking beperkt tot gemeenschappelijke controle. Het ging om gesloten opgaven, d.w.z. opgaven met één goede oplossing. De opgave wordt dan eerst individueel gemaakt. Dit type opgaven met een lichte vorm van samenwerking is opgenomen teneinde ook het individueel werk te oefenen. De toetsen moeten immers individueel worden gemaakt.

b. *Opgaven met verschillende antwoorden en verschillende oplossingsmethoden*

Problemen, die op verschillende manieren op te lossen zijn en/of verschillende uitkomsten hebben, zijn vruchtbaar voor groepsdiscussie. Of verschillende oplossingsmethoden zullen optreden is onder andere afhankelijk van verschillen in leerwegen tussen de groepsleden.

De opgave van figuur 2 komt voort uit het AGO-materiaal.

AGO



Hoeveel weegt een rammelaar?

Fig.2. Opgave met verschillende oplossingsniveaus

De opgave kan algoritmisch worden opgelost met een meer of minder formele vergelijking (bijv. $3900 + 2x = 4100$ of $3900 + ? + ? = 4100$ of een vergelijking met getekende rammelaars), verbaal redenerend of proberenderwijs. Deze oplossingsmethoden verschillen van niveau. In de oorspronkelijke tekst van Wiskunde Lijn worden de verschillende methoden in oefeningen na elkaar behandeld als samenvatting van voorgaande stof. In het AGO-materiaal worden ze met elkaar geconfronteerd door de openheid en extra vragen zoals 'Op welke manieren kun je de vergelijking opschrijven?'.

In figuur 3 is een opgave weergegeven die op meerdere niveaus kan worden opgelost en bovendien meerdere oplossingen heeft.

AGO

MET DE GROEP.

Maak een figuur met een draaicentrum van de 5e orde.

Je mag passer, liniaal, kleuropotloden, hoekmeter en overtrekpapier gebruiken.

DENK ER EERST APART OVER NA EN BESPREEK DAN HOE HET MOET.

Fig.3. Open opgave met meerdere oplossingsniveaus

De benodigde draaihoek van 72 graden kan al proberend benaderd worden of vooraf berekend. Veel verschillende figuren zijn mogelijk. De pendant uit Wiskunde Lijn is een opgave waarin van een serie figuren de orde van het draaicentrum en de grootte van de bijbehorende draaihoeken wordt gevraagd.

Open opgaven werden onder andere verkregen door een techniek van omkering. Zie figuur 4 met rechts de AGO-versie; niet de oplossingen, maar de vergelijkingen worden gevraagd. (Op de 'vorige' pagina, waarnaar verwezen wordt in figuur 4, is het oplossingsalgoritme in een aantal stappen behandeld.)

WISKUNDE LIJN

Los x op uit de volgende vergelijkingen. Kijk goed naar de voorbeelden op de vorige bladzijde en schrijf je berekening net zo op.

- (a) $x + 8 = 3$
 (b) $x - 9 = 8$
 (c) $x - 6 = 2$
 (d) $x - 9 = 2$
 (e) $x - 2.2 = 5.1$
 (f) $6x = 84$
 (g) $11x = -264$
 (h) $2x = 24$
 (i) $\frac{1}{2}x = 12$
 (j) $\frac{1}{3}x = -8$

AGOMET DE GROEP.

Bespreek bij (a), (b), (c) en (d) eerst wat de eerste stap moet zijn en los dan de vergelijking op. Doe het net zo als bij de voorbeelden op de vorige bladzijde.

- (a) $x + 8 = 3$
 (b) $x - 6 = -2$
 (c) $11x = -264$
 (d) $-x = -8$
 (e) **BEDENK ELK** een vergelijking met oplossing 2 .
 (f) **BEDENK ELK** een vergelijking, waarbij je als eerste stap 4 kunt aftrekken aan beide kanten.
 (g) **BEDENK SAMEN** een vergelijking met oplossing 2 , waarbij je als eerste stap 4 kunt aftrekken aan beide kanten.
 (h) **BEDENK SAMEN** een vergelijking met oplossing 2 , waarbij je als eerste stap door 2 kunt delen aan beide kanten.
 (i) **BEDENK SAMEN** een vergelijking met oplossing 5, waarbij je als eerste stap door -2 kunt delen aan beide kanten.
 (j) **BEDENK SAMEN** een vergelijking met oplossing 5, waarbij je als eerste stap met -3 kunt vermenigvuldigen aan beide kanten.

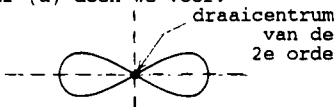
Fig.4. Open opgaven door omkering

Ook zogenaamde eigen producties (Treffers, 1987) vormen een type open opgaven. De leerlingen bedenken zelf opgaven en wel van verschillend moeilijkheidsniveau. Zie figuur 5, met rechts de AGO-versie. Op het bijbehorende werkblad (niet afgedrukt) staat een serie rotatie- en/of spiegelsymmetrische figuren.

WISKUNDE LIJN

Pak het werkblad erbij.
 Bekijk de figuren (a) t/m (j) één voor één.
 - Is er een draaicentrum?
 Vul de orde ervan in.
 - Zijn er spiegellijnen? Teken ze.

Figuur (a) doen we voor:

AGO

Pak het werkblad erbij.
KIES IEDER TWEE FIGUREN, STEEDS ANDERE, ALS DAT KAN. NU IEDER VOOR ZICH.
 Bedenk bij de ene figuur een makkelijke vraag en bij de andere een moeilijke. (Natuurlijk wel vragen die met dit hoofdstuk te maken hebben.)
NU MET DE GROEP.
 Schrijf bij elke figuur de vraag op en beantwoord ze samen.

Fig.5. Opgave met eigen producties

De leerlingen hebben eerder opgaven gehad met vragen zoals in de oorspronkelijke opgave (links in figuur 5).

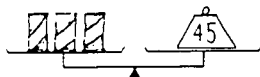
c. Parallel werken aan gelijkvormige opgaven

Een verzameling gelijkvormige opgaven wordt verdeeld, gemaakt en samen besproken. In figuur 6 is links de opdracht uit Wiskunde Lijn afgedrukt en daarnaast de AGO-opdracht.

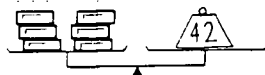
WISKUNDE LIJN

Schrijf de balansverhalen zo kort mogelijk op. Gebruik daarbij ?
Los daarna de vergelijkingen op.

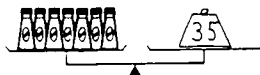
(a) ? ? ?



(b) ??? ???



(c) ????????



(d) ? ? ? ?

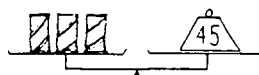


AGO

MET DE GROEP. VERDEEL DE OPGAVEN
(a), (b), (c), (d).

Schrijf de balansverhalen zo kort mogelijk op als vergelijking.
Los daarna de vergelijkingen op.

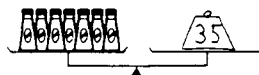
(a) ? ? ?



(b) ??? ???



(c) ????????



(d) ? ? ? ?



BESPREEK MET DE GROEP

(e) Wat was hetzelfde bij de vergelijkingen; wat was anders?
(f) Wat moest bij alle vergelijkingen gebeuren om de oplossing te vinden?

Fig.6. Parallel werken aan gelijkvormige opgaven

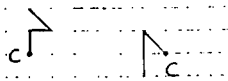
Het parallel werken aan gelijkvormige opgaven is geïnspireerd door onderzoek van Lesh (1981). Aanbieding van gelijkvormige problemen, gevolgd door gemeenschappelijke controle, haalt de relaties tussen de problemen naar voren. Onderzoek van die relaties draagt ertoe bij dat leerlingen het conceptueel model, dat de problemen gemeenschappelijk hebben, ontdekken, aldus Lesh. In de AGO-opgave van figuur 6 wordt expliciet naar de relaties gevraagd.

Een mogelijke uitbreiding van dit type opgave is de volgende. In de opgave van figuur 7 (rechts) wordt de verzameling gelijkvormige opgaven door de groepsleden gecreëerd. Uit de opgave van Wiskunde Lijn (links) is een element verwijderd, dat door elke leerling op eigen wijze weer moet worden ingebracht⁵.

WISKUNDE LIJN

Neem deze halve figuren over en maak ze af. C is het draaicentrum van de 2e orde.

(a) (b)

AGO (eerste versie)

DOE EERST IEDER VOOR ZICH.

Neem de figuur over op roosterpapier.

Teken op je eigen figuur een stip C (niet allemaal op dezelfde plek).

Verander nu je figuur zo, dat C het draaicentrum van de 2e orde wordt.

LAAT ELKAAR DE FIGUREN ZIEN.

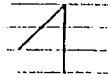


Fig. 7. Creatie van gelijkvormige opgaven

In het geval van algoritmische opgaven is de samenwerking soms opgevoerd door stapsgewijs gelijk op te werken. Ieder groepslid voert op hetzelfde moment dezelfde stap van het algoritme uit, maar elk met andere elementen. Zie figuur 8 met rechts de AGO-versie. (De genummerde stappen duiden op het verzamelen en samenvoegen van letter- en getaltermen.)

WISKUNDE LIJN

Vereenvoudig deze vormen.

Controleer je antwoord door voor n een getal in te vullen.

- (a) $5n + 8 - 2n - 3$
 (b) $6n - 4 + 9 + 2n$
 (c) $8n - 3 - 7 + 4n$
 (d) $2n - 4 + 6 + 5n$
 (e) $9n - n - 2 - 4$
 (f) $7n - 3 + n + 8$

AGO

Vereenvoudig deze vormen.

KIES IEDER één van de opgaven (a) tot en met (f) en werk gelijk op:

-schrijf eerst je eigen vorm over
 -doe dan allemaal stap 1

-doe dan allemaal stap 2

-controleer allemaal door voor n een getal in te vullen.

Als het bij iemand niet klopt, ONDERZOEK dan SAMEN wat er is misgegaan.

- (a) $5n + 8 - 2n - 3$
 (b) $6n - 4 + 9 + 2n$
 (c) $8n - 3 - 7 + 4n$
 (d) $2n - 4 + 6 + 5n$
 (e) $9n - n - 2 - 4$
 (f) $7n - 3 + n + 8$

Fig. 8. Stapsgewijs gelijk op werken

De groepsleden vinden onderling steun bij het uitvoeren van de stappen. De aandacht wordt verplaatst van de concrete opgave naar de oplossingsmethode.
 d. *Samen spelen of samen iets maken*

Een spelvorm die werd gebruikt was het spel 'Autorace'. Op een plattegrond met wegen, voorzien van een rooster, moet elke speler zo snel mogelijk van start naar finish komen. De race-auto's zijn fiches, die zich verplaatsen volgens vectoren. Voor elke verplaatsing moeten de kentallen van de vector opgeschreven worden. In figuur 9 is een opgave getoond (rechts) waarbij om de beurt aan de opbouw van een rotatie-symmetrische figuur wordt gewerkt.

WISKUNDE LIJN

(a) Neem deze figuur over op roosterpapier.



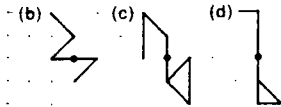
De figuur heeft geen draaicentrum van de 2e orde.



Teken dit lijntje erbij.

Nu is er wel een draaicentrum van de 2e orde. Controleer het met overtrekpapier.

Neem de volgende figuren over op roosterpapier en teken er één lijntje bij, zodat de stip het draaicentrum van de 2e orde wordt.

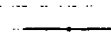
AGO

MAAK DEZE OPGAVE MET DE GROEP.
PER GROEP ZIJN EEN PAAR GROTE
VELLEN ROOSTERPAPIER NODIG.
Leg een vel roosterpapier in het
midden van de groep.
Iemand begint door een stip te
zetten en een streepje eraan vast.

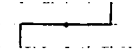
De volgende zet er een streepje bij
zo, dat de stip draaicentrum
van de 2e orde wordt.



De volgende zet er een streepje bij
zo, dat er geen draaicentrum
van de 2e orde meer is.



De volgende zorgt dat er weer wel
een draaicentrum van de 2e orde is.



ENZOVOORT.

Telkens als je de groep rond bent,
stop dan en neem allemaal de figuur
over die er dan staat. Zet erbij
of er op dat moment wel of geen
draaicentrum van de 2e orde is.

Fig.9. Samen een figuur opbouwen

Het eindproduct kan de moeite waard zijn om aan de wand van het klaslokaal te hangen. In de schriften van de leerlingen worden de tussenresultaten vastgelegd.

Aanvullend klassikaal en individueel werk

Wanneer daartoe aanleiding was, kon de docent het groepswork onderbreken met een klassikale discussie. Reden kon zijn een gemeenschappelijke moeilijkheid of het confronteren van interessante verschillen tussen groepjes in oplossingen en oplossingswijzen.

Het materiaal voor het samenwerken in groepjes, fase 2 van het AGO-model, bestond niet uitsluitend uit groepsopgaven. Per les was het meestal als volgt gestructureerd: 1) klassikale inleiding, 2) groepsopdrachten en 3) ook individueel uitvoerbare opdrachten. De laatste categorie bleek nodig omdat anders geen opdrachten als huiswerk gegeven konden worden. Door huiswerk konden optredende tempoverschillen worden opgevangen.

De benodigde tijd

Bij de aanpassing van het materiaal is er naar gestreefd de totaal benodigde tijd gelijk te houden. Groepsdiscussie en uitleg aan de zwakkere leerlingen

drukken het tempo in vergelijking met dat van een individuele gemiddelde leerling. Om tijd te winnen werden daarom uit series gelijksoortige oefenopgaven van Wiskunde Lijn delen weggelaten. Het verlies aan oefening wordt gecompenseerd doordat de mogelijkheden van het werken met een groep op gevarieerde wijze didactisch worden uitgebuit.

6 Conclusie en discussie

De belangrijkste genoemde resultaten zijn: het AGO-model is uitvoerbaar gebleken. Onderwijs volgens het AGO-model heeft geen effect op de houding van de leerlingen t.a.v. het vak wiskunde, ondanks de verandering in vormgeving van het materiaal en organisatie van het onderwijs. Onderwijs volgens het AGO-model heeft een positief effect op de leerresultaten van de leerlingen. Dit effect geldt voor zowel sterke als zwakke leerlingen binnen een klas. Vooral het groepswork draagt bij aan het positieve AGO-effect. Sterke leerlingen binnen een klas lijken daar meer van te profiteren dan relatief zwakke leerlingen.

Het AGO-model vergeleken met het model Freudenthal

Zowel het AGO-model als het model Freudenthal hadden als geheel een positief effect op de leerresultaten bij een vergelijking met 'normaal' onderwijs. Maar bij het AGO-model was het effect duidelijk groter¹⁶. Zoals gezegd heeft het AGO-model het effect vooral te danken aan het gebruik van groepswork en zeker niet aan het gebruik van de werkvorm alternatieve leerwegen. Bij beide conclusies zijn echter kanttekeningen te plaatsen.

Negatief effect van alternatieve leerwegen?

De resultaten lijken erop te wijzen dat het geven van extra aandacht aan de zwakke leerlingen door gebruik van een remediërende groep een slechte invloed heeft op het leerresultaat van de klas als geheel. Bij nader inzien is het mogelijk, dat de onderzoeksopzet minder geschikt was om het effect van deze werkvorm te onderzoeken. Niet in alle klassen van de AGO-groep werd deze werkvorm toegepast: soms waren er heel weinig leerlingen die onvoldoende scoorden op de diagnostische toets. Hoe meer achterblijvers, des te meer tijd waarschijnlijk aan de werkvorm alternatieve leerwegen met speciale maatregelen voor achterblijvers werd besteed. Uit de analyse volgt een negatief verband tussen de hoeveelheid tijd besteed aan de werkvorm alternatieve leerwegen (remediërende groep naast individueel werken) en de resultaten van de klas als geheel. De lagere resultaten van de klas als geheel moeten waarschijnlijk eerder als de oorzaak dan als het gevolg van het in grotere mate toepassen van de betreffende werkvorm worden gezien. Mogelijk zouden de resultaten in klassen met achterblijvers nog slechter zijn geweest bij afwezigheid van die speciale maatregelen. Dat valt echter achteraf niet meer na te gaan.

De vormgeving van het groepswerk

Nog meer dan in het AGO-model speelt in het model Freudenthal het groepswerk een belangrijke rol. Het groepswerk werd echter in beide onderzoeksprojecten (Interne Differentiatie 12-16 resp. Adaptief Groeps-Onderwijs 12-16) op verschillende wijze ingevuld. Opvallend zeldzaam in het gegeven overzicht van AGO-groepsopgaven zijn de contextopgaven. In het model Freudenthal is de contextrijke wiskunde als kenmerk essentieel (naast het niveauprincipe); het AGO-model heeft meer kenmerken en op het kenmerk 'wiskunde in contexten' stuitte de aanpassing van het materiaal van Wiskunde Lijn op problemen.

Contexten kwamen wel voor in het materiaal van Wiskunde Lijn: verschuivingen werden gekoppeld aan verplaatsingen op een landkaart met rooster en de betekenis van de volgorde van termen binnen een algebraïsche vorm werd uitgelegd in de context van de voorraadcontrole in een supermarkt. Verder waren de contexten echter, vooral in het algebraïsche hoofdstuk, veelal afwezig. Er was op die plek door de auteurs van Wiskunde Lijn gekozen voor de nadruk op het oplosalgoritme (eerder in de methode was veel meer aandacht besteed het omzetten van verhalende opgaven in vergelijkingen). Het AGO-materiaal kon daar weinig aan toevoegen. Dezelfde inhoud, voorzien van veel contexten, zou in de klas veel meer tijd gevegd hebben dan het oorspronkelijke materiaal. Beide curricula maakten dus wel gebruik van contexten, maar het AGO-materiaal niet veel meer dan het materiaal van Wiskunde Lijn. Daarom konden de contextopgaven niet als typische voorbeelden van het AGO-materiaal gegeven worden.

Aan de AGO-docenten was gevraagd zo mogelijk zelf nog extra contexten in hun onderwijs te gebruiken, maar dit werd ongevraagd het meest gedaan door een der Niet-AGO-docenten (met 4 van de 7 Niet-AGO-klassen). Het gevolg was dat het kenmerk wiskunde in contexten in de Niet-AGO-conditie zelfs iets sterker was volgens de perceptie van de leerlingen (zie §6).

Het positieve effect van het groepswerk kan dus niet worden toegeschreven aan het gebruik van contexten, maar wel aan het gebruik van groepsopdrachten, zoals geschetst: contextarme groepsopdrachten ofwel - met een positieve benaming - *gestructureerde groepsopdrachten*.

Contextopgaven of gestructureerde groepsopdrachten?

Een veel gehoord bezwaar van het gebruik van contextopgaven is de taligheid. Vooral allochtonen en LBO-leerlingen kunnen grote stukken tekst niet verwerken. Dit bleek al uit de evaluatie van het SLO-materiaal voor groepswerk (Terwel e.a., 1988), maar ook op de Regionale Bijeenkomsten rond het Wiskunde 12-16 project¹⁷.

Gestructureerde groepsopdrachten bieden een mogelijkheid om ook met leeszwakke leerlingen aan groepswerk te doen. Voorwaarde is dan wel dat de uitleg hoe de opgave door de groep moet worden aangepakt kort en simpel

is. In de eerste ronde van het AGO-project bleek een vergelijkbaar taalprobleem: een relatief lange uitleg vooraf werd door veel leerlingen slecht gelezen¹⁸.

Hoewel het effect van het AGO-model niet aan het gebruik van contextopgaven kon worden toegeschreven, leverde het onderzoek toch enkele positieve resultaten voor het geven van wiskunde in contexten op. Uit de gegevens van de PERCIA-vragenlijst bleek dat een hoge mate van het gebruik van contexten bij het onderwijs gepaard gaat met een hoge waardering van de leerlingen voor de kwaliteit van de leraar, de instructie en het klasseklimaat. Ook bleek dat de leerlingen over de gehele linie graag zouden zien, dat het contextgebruik in hun onderwijs een grotere plaats zou innemen. Misschien dat de aanwezigheid van meer contexten in het AGO-materiaal naast het gevonden leereffect ook een positief houdingseffect had kunnen bewerkstelligen? Voor het werken met groepen kunnen gestructureerde groepsopdrachten een welkome aanvulling vormen op contextopgaven, vooral voor leeszwakke leerlingen.

Verdere onderzoeksvragen

Verschillende vragen kunnen door dit onderzoek niet beantwoord worden. Brachten alle geschetste opdrachten leerzame groepsprocessen teweeg? In hoeverre is het succes van het groepswerk veroorzaakt door de werking van het niveau-principe? Hoe komt het dat de sterke leerlingen in een klas relatief meer profiteren van het groepswerk dan de zwakke? De begroting en de opzet van het project voorzagen niet in een groot aantal arbeidsintensieve kwalitatieve observaties om dit te onderzoeken.

Meer onderzoek is gewenst naar het effect van de fase van de alternatieve leerwegen. Ook zou moeten worden nagegaan of bij omwerking van een groter deel van een leergang de verbanden tussen de diverse onderwerpen voldoende tot hun recht kunnen komen: is steeds weer een gemeenschappelijke start mogelijk? En kan het AGO-model even goed voor andere vakken worden uitgewerkt?

Noten

1. Met dank aan P.Herfs en J.Terwel voor het commentaar op een eerdere versie van dit artikel.
2. ISOR = Interdisciplinair Sociaal Wetenschappelijk Onderzoeksinstituut Rijksuniversiteit Utrecht. Het beschreven onderzoek werd - met steun van de Stichting voor Onderzoek van het Onderwijs-uitgevoerd aan het ISOR; de auteur is daar inmiddels niet meer werkzaam.
3. Leider van het project was J.Terwel; medewerkers waren - naast de auteur van dit artikel - P.Herfs, D. van der Ploeg en N.Mertens.
4. Het model moet overigens niet als een strak keurslijf worden opgevat; aanpassing aan de specifieke omstandigheden blijft mogelijk.
5. De docent bepaalt, afhankelijk van de situatie, de preciese lengte van de verschillende fasen.
6. Het AGO-model bevat in de oorspronkelijke opzet geen eindtoets. Volgens veel onderwijskundigen, zie bijv. Bonset (1987), verdraagt een praktijk van sterk selectieve toetsing zich slecht met interne differentiatie. Om de effectiviteit te kunnen meten moesten in het onder-

- zoek echter toetsen worden afgenomen. Deze toetsen dienden voor de leerlingen tevens als proefwerk over het betreffende hoofdstuk. Het onderzoek is dus in feite uitgevoerd met een eindtoets bij elke cyclus.
7. Een voorbeeld van een wijziging op een andere plaats was het toevoegen van hints bij het materiaal voor de betere leerlingen die na de diagnostische toets ongeveer 1 les zonder hulp van de leerkracht moesten werken. De hints werden aan het eind van het hoofdstuk geplaatst.
 8. Volgens Treffers (1987) dwingt deze werkwijze het eigen leerproces te overzien.
 9. In veel van dergelijke klassen werd ook gewerkt met een combinatie van SLO-pakketjes en eigen materiaal.
 10. De toetsen werden door de onderzoekers opgesteld en door de leerkrachten tevens als proefwerk gebruikt.
 11. Gebruikt werd het Prüfsystem für Schul- und Bildungsberatung van Horn (1969).
 12. Mogelijk is deze onderwijsvorm te moeilijk om in een korte training aan docenten over te brengen.
 13. Een maat voor de effectgrootte is het verschil van de eindtoetsgemiddelden van beide condities in verhouding tot de standaarddeviatie van de controleconditie (Slavin, 1987), in het onderhavige geval .85. Na correctie voor beginverschillen (de effectgrootte van de test voor wiskundige begaafdheid) resulteert .68. Deze waarde slaat een goed figuur in relatie tot de resultaten bij een groot aantal vergelijkbare onderzoeken, waarvan Slavin een overzicht geeft. Vaak worden er ook helemaal geen verschillen gevonden, die aan het curriculum kunnen worden toegeschreven (Davidson, 1985).
 14. Multi-niveau analyse is een gegeneraliseerde vorm van regressie-analyse. Er wordt rekening gehouden met het 'geneste' karakter van de data: leerlingen binnen klassen binnen scholen binnen condities. Multi-niveau analyse scheidt de effecten binnen verschillende niveaus, bijvoorbeeld bij leerling en klas (er wordt voor elke klas een aparte regressievergelijking opgesteld).
 15. Deze opgave kwam in het na de eerste ronde herziene materiaal niet meer voor. Hij werd vervangen om het aantal individuele opgaven iets te vergroten.
 16. Ruim drie maal zo groot naar maatstaven zoals genoemd in noot 13.
 17. Voorlichtingsbijeenkomsten voor docenten betreffende het nieuwe wiskundeleerplan voor lbo, mavo en onderbouw van havo en vwo.
 18. Overigens hoeven contextopgaven niet per definitie talig te zijn: voor wiskunde op het niveau van de basisschool zijn toetsen ontwikkeld met contextopgaven, waarin illustraties voor een groot deel de taal vervangen (Van Galen e.a., 1986; Van den Heuvel-Panhuizen & Gravemeijer, 1990).

Literatuur

- Bonset, E.H. (1987) *Onderwijs in heterogene groepen*. (Proefschrift). Purmerend: Muusses.
- Bodegraven, D. van, C.E. van Dusschoten, A. van der Horst, A. van Streun & H. van Tijum (1987) *Wiskunde Lijn, deel 2a, Leerlingenboek*. Groningen: Jacob Dijkstra.
- Corno, L. & R.Snow (1986) Adapting Teaching to Individual Differences Among Learners. In: M.C. Wittrock (ed.) *Third Handbook of Research on Teaching*. American Educational Research Association.

- Davidson, N. (1985) Small-group learning and teaching in mathematics: a selected review of the research. In: R.E.Slavin, S.Sharan, S.Kagan, R.Hertz-Lazarowitz, C.Webb & R.Smuck (Eds.), *Learning to cooperate, cooperating to learn*. New York: Plenum.
- Herfs, P.G.P., N.Mertens, J.Chr.Perrenet & J.Terwel (1990) *Adaptief Groepsonderwijs: Implementatie en effecten van een curriculum-innovatie in het voortgezet onderwijs*. (Eindrapport AGO 12-16), Utrecht: Rijksuniversiteit Utrecht, ISOR, Afdeling Onderwijsonderzoek.
- Freudenthal, H. (1973) De niveaus in het leerproces en de heterogene leergroep, met het oog op de middenschool. In: *Gesamtschule conferentie 1973*. Amsterdam, Purmerend: APS, Muusses.
- Galen, F. van, K.Gravemeijer, J.Kraemer, T.Meeuwisse & W.Vermeulen (1986) *Rekenen in een tweede taal. Het rekenen van Turkse en Marokkaanse kinderen in Nederland*. Enschede: SLO.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den & K.P.E.Gravemeijer (1990) Toetsen zijn zo slecht nog niet. *Didaktief 10*, 13-15.
- Horn, W. (1969) *Prüfsystem für Schul- und Bildungsberatung (Handanweisung)*, Göttingen: Verlag für Psychologie Hogrefe.
- Lesh (1981) Applied Mathematical Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics 1981*, 2, 235-264.
- Martinot, M.J., H.B.Kuhlemeyer & H.J.M.Feenstra (1988), Het meten van affectieve doelen: De validering en normering van de Belevingsschaal voor Wiskunde (BSW), *Tijdschrift voor Onderwijs Research 13*, 2, 65-76.
- Perrenet, J.Chr., P.G.P.Herfs & J.Terwel (1988) *Met AGO op weg. Adaptief Groeps Onderwijs; een werkwijze voor (wiskunde)onderwijs in heterogene groepen*. Utrecht: ISOR/Afdeling Onderwijsonderzoek, Rijksuniversiteit Utrecht.
- Slavin, R.E. (1985) Team-Assisted Individualization, A Cooperative Learning Solution for Adaptive Instruction in Mathematics. In: M.C.Wang & H.J.Walberg (Eds.), *Adapting Instruction to Individual Differences*. Berkeley: C.A. Mc Cutcham.
- Slavin, R.E. (1987) Ability grouping and student achievement in elementary schools: a best evidence synthesis, *Review of Educational Research*, 57, 3, 293-336. Baltimore: John Hopkins University.
- SLO (1985) *Met het oog op de leerkracht in de praktijk van het werken met kleine heterogene groepen*. Enschede.
- Terwel, J., P.Herfs, R.Dekker & W.Akkermans (1988) *Implementatie en effecten van interne differentiatie* (Eindrapport ID 12-16). 's-Gravenhage: Instituut voor Onderzoek van het Onderwijs.
- Terwel, J. (1986) Basisvorming en het ontwerpen van onderwijsleersituaties voor 12-16-jarigen, *Pedagogisch Tijdschrift*, 11, 6, 354-365.

Treffers, A. (1987) *Three Dimensions*. Dordrecht: D.Reidel Publishing Company.
WRR, Wetenschappelijke Raad voor het Regeringsbeleid (1986) *Basisvorming in het Onderwijs*. Den Haag: Staatsuitgeverij.