Sinusfuncties in ontwikkelingsonderzoek: een gedachtenexperiment

L. Streefland
Freudenthal Instituut/CD-ß
Rijksuniversiteit Utrecht

Summary
The conditions have not been fullfilled to carry out long term developmental research in The Netherlands. Yet it would be interesting to experiment with spreading out the topic of sinefunctions in secondary education over a period of six years. In stead of that this is tried in the present contribution by means of a thought experiment.

I will try to sketch a framework for a learning strand (for 12-18 years) on sinefunctions. The publications mentioned in the introduction will serve as a source of both inspiration and provision. From the wealth of phenomena and contents the model of the turning wheel with constant speed will play a leading role as a source for mathematical activities. Of course the reality of mathematics instruction itself will and must be more many sided.
In the present case the content serves here as the vehicle for performing developmental research in a thought-experiment, which includes a thought learning process. Scenario's for reconstructive learning by the pupils that is for reconstructible instruction by the teachers can be derived from the fruits of such reseach.

Starting point will be: taking into account possible input by the pupils and thinking along with them as the learning strand to be unfolded will reflect in advance. Since internal testing prevails in such developmental research, at the same time indications for tests and testing methods can assume an external character in the scenario's for reconstructible instruction.

1. Inleiding en overzicht
In de geïndustrialiseerde Westerse landen is herwaardering van het wiskunde-onderwijs aan de orde van de dag: nieuwe doelen en inhouden worden voorgesteld. Als nasleep van de middenschoolbeweging krijgt de gedachte aan basiseducatie in Nederland concreet gestalte. Passende einddoelen zijn daarvoor geformuleerd en becommentarieerd. De invoering ervan lijkt niet ver meer weg. In het Ontwerp Eindtermen-Basisvorming wordt voor wiskunde bij onderdeel V5 'Relaties, grafieken en functies' onder andere genoemd:

Herkennen en beschrijven van verbanden: bijvoorbeeld lineaire, kwadratische, hyperbolische, periodieke en exponentiële.

Het plan van de COW (Commissie Ontwikkeling Wiskunde) voor wiskunde 12-16 jaar (1989, p.27) vermeldt periodieke functies niet expliciet. In de uitwerking van de zogenoemde geïntegreerde wiskundige activiteiten komen ze echter wèl voor (Van den Brink, 1990).

De zogenaamde 'Standards' van de NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (1988, p.183-187) dicht periodieke verschijnselen in de realiteit samen met de wiskundige middelen om ze te organiseren en te beschrijven, toe aan de 'grades 9-12'. Het voorbeeld van het reuzenrad op de kermis wordt gebruikt om vier niveaus van wiskundige activiteiten voor leerlingen in dit verband te duiden. Het begint met een grafisch-numerieke beschrijving van enkele speciale standen van één gondeltje aan het rad en het eindigt met een formeel mathematische beschrijving van het geheel door middel van een sinusfunctie. De ontwerpers van de 'standards' beklemtonen *het lange termijn karakter* van dit onderwerp zoals zij het zien. Zij stellen in dit verband (l.c.p. 186):

Seldom would any student progress through all levels within a single unit of study.

Dat wordt echter, weliswaar noodgedwongen, wèl verwacht van leerlingen die met HEWET- of HAWEX-materiaal werken[1]. In het HEWET-project werden afzonderlijke boekjes ontwikkeld als 'Periodieke Functies' (dit is zo'n 'single unit of study') en 'Sinus' (De Lange & Kindt 1985, 1984), waarin de dwarsverbindingen met onderwerpen zoals Differentiëren II (Kindt & De Lange, 1985; zie ook De Lange, 1987) nogal incidenteel zijn. Binnen het HAWEX-project werd het boekje 'Sinus en Co' (Kindt, 1989) ontwikkeld. Er komen zowel periodieke bewegingen als trigonometrische functies in voor.

In deze boekjes is dus dit lange termijn onderwerp zodanig *gecomprimeerd* dat aan de vier niveaus zoals deze in de 'Standards' werden onderscheiden te weinig recht kon worden gedaan, nogmaals: onder dwang van de omstandigheden waarin de ontwikkeling plaatsvond en van het schoolsysteem waarvoor ze bedoeld was.

In hun beschouwing over functies en grafieken voor de basisvorming verwoorden Freudenthal en Kemme (1989, p.22) het standpunt van de 'Standards' over sinusfuncties op hùn manier:

Sinusfuncties is niet één hoofdstuk om zo maar achter elkaar af te werken zoals gonio vroeger was. Het is een leerlijn om om de beurt te laten vieren en weer aan te halen, naar gelang van wat de andere ermee verstrengelde leerlijnen toelaten of eisen, een leerlijn waarvan de feitelijke lengte door elke leerling afzonderlijk mag en moet worden bepaald. [2]

De omstandigheden in Nederland laten ontwikkelingsonderzoek over lange termijn niet toe. Toch zou het interessant zijn een onderwerp als sinusfuncties over de zes jaren van het voortgezet onderwijs 'uit te smeren'. Om zoiets toch enigszins mogelijk te maken doen we dit - het uitsmeren van sinusfuncties in ontwikkelingsonderzoek - in een gedachtenexperiment.

In deze bijdrage zal ik daarom trachten een geraamte te schetsen voor een leerlijn (12-18 jaar) voor sinusfuncties, dus zeker geen uitgewerkte leergang (§2). Voor de inhoud van deze leerlijn zullen de reeds genoemde en nog andere publikaties dienst doen als inspiratiebron en als bron om uit te putten. Uit de rijkdom aan verschijnselen en inhouden kiezen we het model van het met constante snelheid draaiende wiel als exemplarische bron voor de wiskundige activiteiten. In de werkelijkheid van het onderwijs zal men stellig veelzijdiger te werk gaan. De inhoud dient hier vooral om in gedachten een ontwikkelingsonderzoek te verrichten en het verloop van een gedacht leerproces te onderzoeken. In §4 worden enkele gedachten hierover ontvouwd. Zo'n ontwikkelingsonderzoek heeft dus niet echt plaatsgevonden.

Men richt zich ook op scenario's voor het inrichten van het 'gewone' onderwijs, ter navolging. Daarbij wordt gebruik gemaakt van de opbrengst van dergelijk onderzoek (o.a. een prototype van een leergang) (§5).

De mogelijke inbreng van de leerlingen (§3) als ook het met hen meedenken speelt een centrale rol in onderwijsexperimenten binnen ontwikkelingsonderzoek. De te ontvouwen leerlijn zal hiervan op voorhand al blijk geven. De inhoud ervan is bijvooorbeeld uitgelijnd naar niveaus, dat wil zeggen dat er sprake is van het in toenemende mate afstand nemen tot de concrete bronnen. Anders gezegd: er is sprake van toenemende formalisering, blijkens het allengs inruilen van (context-) inhoud voor (wiskundige) vorm.

In werkelijk ontwikkelingsonderzoek wordt er *intern* heel veel getoetst. In feite is alles aan toetsing onderhevig mede dank zij het nauwgezette onderzoek naar het verloop van de individuele leerprocessen die zich voltrekken binnen het opgezette onderwijsexperiment. In ons denken erover dienen we dus voor het toetsen ook een plaats in te ruimen. Aanwijzingen voor toetsen en methoden van toetsen kunnen later een extern karakter krijgen in de afgeleide scenario's voor reconstrueerbaar onderwijs (§6). Een conclusie rondt het geheel af (§7).

2. Een leerlijn voor sinusfuncties (12-18 jaar)

2.1. Een rijke bron

De aanwezigheid van periodieke verschijnselen is overdadig:
- golvend touw;
- steken van een zig-zag naaimachine;
- een voor zijn wachthuisje heen-en-weer lopende schildwacht;

- een draaiend wiel (kermisrad, waterrad);
- de openingstijden van een winkel;
- daglengte;
- de slinger (een schommel, een metronoom);
- foto's (van golven in het water, trillende veren of snaren, akoestische golven zichtbaar gemaakt in een zandpijp, stemvork);
- enzovoort.

Uit deze overdaad dient het eenparig draaiende wiel (het reuzenrad op de kermis of het waterrad) met een lichtend punt op de rand als paradigma voor het, in grove trekken, uitwerken van de leerlijn voor sinusfuncties.

2.2. Exploratie (13-15 jaar)

kern

Wanneer het wiel eenparig rondgaat dan neemt het oog, gesitueerd in het vlak van het wiel en gefixeerd op een (lichtend) punt op de rand (of op een gondeltje van het kermisrad) een op-en-neer-gaande beweging waar. Het lichtend punt lijkt harmonisch te trillen: de hoogte boven een basisvlak als functie van de tijd. Het model waarmee dit bewerkt wordt is buitengewoon flexibel dank zij de vier parameters waarvan het afhankelijk is:
- de diameter van het wiel;
- de draaisnelheid;
- de hoogte van het middelpunt boven de basislijn (de waterspiegel);
- de beginhoogte van het lichtend punt (op tijdstip 0).

In het onderwijs wordt het model gebruikt om:
- de grafiek van de beweging uit te zetten (de hoogte als functie van de tijd), wat op bijzondere tijdstippen gedaan kan worden via meetkundige berekening (Pythagoras), in het algemeen door te meten en ook nog door gebruik te maken van de sinus-toets op een rekenmachientje. Dit betekent dat de sinus zowel kinematisch als empirisch wordt geïntroduceerd. Bij gegeven wiel met straal 1, draaiend met (hoek) snelheid 1, kan de *tijd* geïdentificeerd worden met òf met de (hoek) hoogte van een punt, òf met de bijbehorende boog, en de *sinus* met de verticale hoogte van het punt boven het middelpunt van het wiel.

De relatie met de sinus-toets wordt gelegd door de meetkundige berekeningen en de resultaten van meting te vergelijken met de resultaten verkregen met een rekenmachientje. Op een hoger niveau kan de sinustafel zoals het rekenmachientje die voortbrengt theoretisch gefundeerd worden.

suggesties voor het onderwijs op dit niveau (13-15 jaar)

Er vindt een (gedacht of echt) experiment plaats met een draaiend wiel met straal 1 en (hoek- of boog-) snelheid 1 (fig.1). Mogelijke activiteiten:

- het zich voorstellen van het draaiende wiel met de beweging van een lichtend punt op de rand; het oog in het vlak van het wiel (of erachter); Opmerking: te denken valt aan de opstelling in een donkere ruimte, van een (draaiend) fietswiel met een lampje in de velg met een spiegel loodrecht op het wielvlak en het oog (van de leerlingen) in het wielvlak;

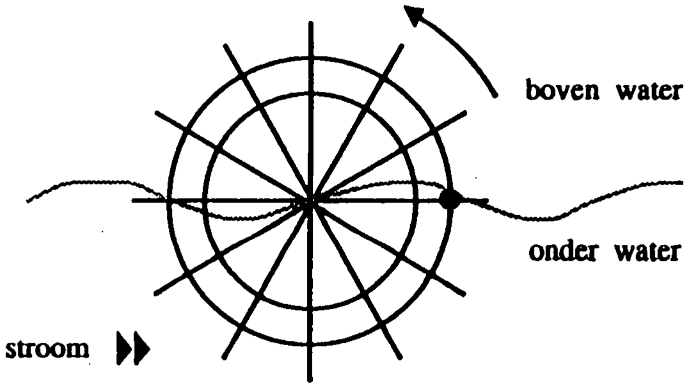

Fig.1. Waterrad

- het voorspellen en beschrijven van de beweging van het lichtend punt (en eventueel experimenteel verifiëren), het kiezen van variabelen voor de beschrijving; belangrijk hierbij is een *kwalitatieve* instap, waarbij de denkbeelden van de leerlingen geconfronteerd worden met vragen als: "maar wat gebeurt er wanneer de diameter nu eens groter/kleiner zou zijn? of .... het wiel sneller/langzamer gaat draaien? etc.
- het bedenken van een grafische voorstelling voor deze beweging, dat wil zeggen het voorspellen van de grafiek, zijn vorm: wat zal er gebeuren na 1 rondgang?, 2, 3, ...rondgangen?
- het numeriek specificeren van het grafisch beeld: waar zal het hoogste punt zijn, op welke hoogte?, en nul?, het laagste punt?, hoe laag?; meetkundige berekeningen na ½ rondgang, ¼, 1/8, 1/3, 2/3, 1/6, 1/12, ... (Pythagoras); het uitzetten van de resultaten;
- het meten van de hoogte van andere punten en het uitzetten van de resultaten;
- het controleren van de resultaten van meetkundige berekening en meting met een rekenmachientje;
- het voltooien van de grafiek (fig. 2)[3].

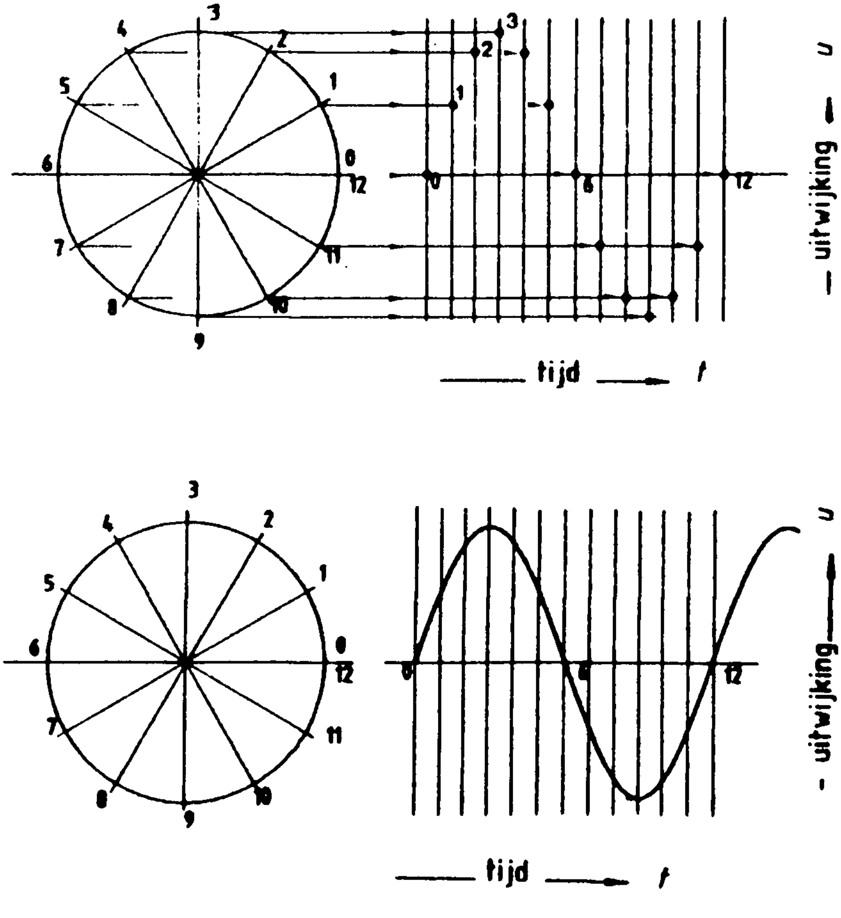

Fig.2. Wiel en grafiek samen

De vier parameters waarop het model berust bieden de gelegenheid om de leerlingen met het model te laten *spelen*. Nadat één grafiek geconstrueerd is kan men vragen deze voor andere gevallen te schetsen. Wanneer het om het waterrad gaat kan men afzonderlijk of tegelijk verandering aanbrengen in:

- de doorsnede (groter en kleiner);
- de draaisnelheid (vlugger en langzamer);
- de diepgang (dieper en minder diep);
- het punt op de rand.

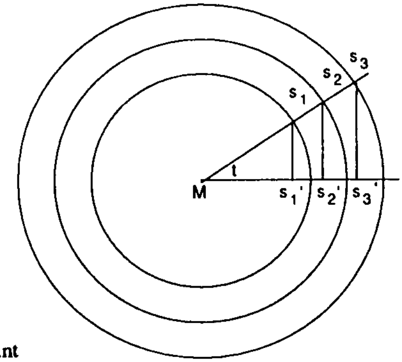

Fig.3. $\sin t = \frac{S_iS_i'}{MS_i}$ is constant

Opmerking: Het ligt voor de hand de kwestie van de 'sinus als constante verhouding' (van tegenoverliggende rechthoekzijde en schuine zijde van een vaste hoek in een variabele, rechthoekige driehoek) in verband te brengen met het variëren van de doorsnede van het wiel (fig.3).

Na dit spel met de parameters van het model kan de sinusfunctie geïntroduceerd worden; h=sin t, met h=hoogte en t=de draaihoek van het bewegend punt op de rand van het wiel. Het spel met het model heeft een kwantitatief vervolg:
- het verdubbelen en halveren van de diameter;
- het verdubbelen en halveren van de hoeksnelheid;
- het halveren en vierendelen van de diepgang;
- enzovoort.

Dit kan worden vervolgd met
- het omzetten van deze transformaties in grafieken en formules, wat leidt tot uitdrukkingen als;
  2 sin t
  sin ½ t
  a ± sin t
  sin (t ± ..).
- het vaststellen van perioden en amplituden;
- het uitbreiden van de grafiek en de geldigheid van de formule in het geval van meer draaiingen;
- het beschouwen van tegengestelde draaiingen (hoe zit het met de draaihoek?).

In al deze gevallen speelt het rekenmachientje een belangrijke rol als rekenhulp en als object van exploratie. (Hoe zit het bijvoorbeeld met het bereik van de sinus-toets: na hoeveel draaien links- of rechtsom verschijnt er ERROR in het venster?).

De introductie van de sinus kan meteen vervolgd worden met de cosinus. Deze functie vertegenwoordigt de *horizontale* beweging van het punt op de rand van het wiel. Zij kan op verschillende manieren geïntroduceerd worden, bijvoorbeeld door het (gedachte) experiment van het begin te herhalen, maar nu van bovenaf gezien als wiel aangedreven door een waterval (fig.4). (Een vergelijkbare standpunt verandering krijgt men door van boven naar de draaiende propeller van een vliegtuig te kijken in plaats van en profiel; De Lange, 1980; De Lange & Kindt, 1985).

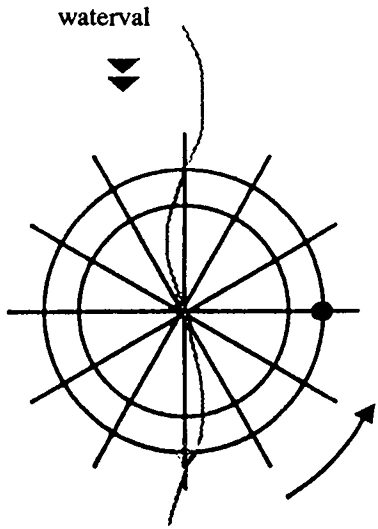

Fig.4. Wiel in waterval

De gesuggereerde activiteiten van het begin zouden - indien nodig - met de cosinus herhaald kunnen worden, dat wil zeggen het voorspellen van grafieken, het uitvoeren van meetkundige berekeningen enzovoort.
Het blijkt dat cos t op sin t vooruit loopt n.l. $\frac{1}{2}\pi$, dus $\cos t = \sin(t + \frac{1}{2}\pi)$. Er zal een nieuwe gelegenheid zijn om met het model te spelen om de invloed van de verandering van de vier parameters, op zowel grafieken als formules, te onderzoeken, afzonderlijk en tegelijk. Tenslotte kan in heel eenvoudige gevallen de vraag onder ogen worden gezien een passend wiel en een formule te vinden bij een gegeven grafiek en omgekeerd.

Na het uitvoeren van voldoende handwerk kunnen voorgaande activiteiten met eèn computer herhaald worden op een wat meer geformaliseerd niveau.

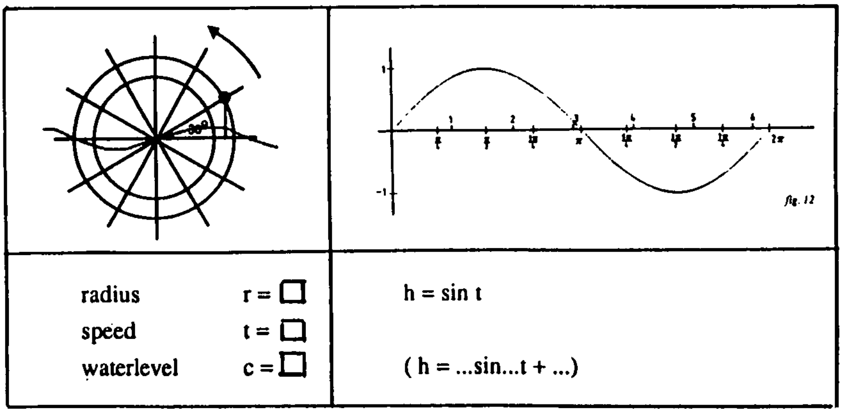

Fig.5. Computerscherm

Omwille van het rekenen telt een hele draai 360^0 of zijn lengte 2π (afstand en tijd worden met elkaar in 2π geïdentificeerd). Het - overigens ook gedachte - computerprogramma voorziet in het spelen met het model (fig.5). De gevolgen van dit spel voor het wiel, de grafiek en de formule, en omgekeerd, worden zichtbaar gemaakt op het scherm. De mate van sturing van het programma zou kunnen variëren van het geven van opdracht na opdracht tot en met het gelegenheid bieden tot vrij experiment.

De exploratiefase zou kunnen worden afgesloten - of de volgende fase geopend - met een toets.

toets: de schildwacht

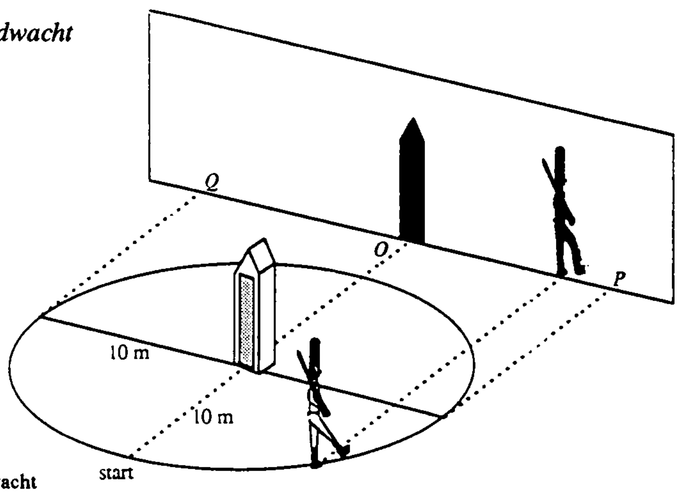

Fig.6. De schildwacht

De schildwacht loopt in een cirkel rondom zijn wachthuisje met constante snelheid en zijn schaduw op de muur loopt met hem mee (fig.6). Dit model wordt in de toets onderzocht.
Met het volgende experiment zou de toets geïntroduceerd kunnen worden:
- het lopen van de wacht en de beweging van zijn schaduw kunnen eventueel worden nagebootst door enkele koppels leerlingen (bij voorkeur in een situatie, waarin de schaduw ook echt aanwezig is); de overige leerlingen observeren nauwlettend terwijl de deelnemers aan het experiment nauwgezet verslag doen van hun ervaringen; wordt het experiment goed gedaan, dan ervaart de 'schaduwleerling' de gedurige verandering van de snelheid heel duidelijk.

De vragen die *hoe dan ook* getoetst gaan worden zijn:
- het vergelijken van de schildwacht met het waterrad (analogie?, isomorfie?);
- beschrijving van de beweging van de schildwacht (in radialen) en het verloop van zijn schaduw ten opzichte van de lijn SO (Start, O = de schaduw van het wachthuisje) (sinusfunctie); grafiek en formule;
- het behandelen van de veranderingen in grafiek en formule, wanneer de schildwacht:
  - een grotere/kleinere cirkel loopt; een twee keer zo grote/kleine cirkel;
  - sneller/langzamer loopt, maar wel met constante snelheid; twee keer zo snel/langzaam;
  - een ander startpunt neemt, bijvoorbeeld $\pi/2$ verder.

En verder:
  - technische kwesties als het onderzoeken van relaties tussen $s(t) = s(t+kp)$ en $s(t+k.\frac{1}{2}p)$ in concrete gevallen ($s(t)$ is de plaats van de schildwacht op tijdstip t; p = de periode);
  - het verwoorden en in algemene termen formuleren van dergelijke relaties als $s(t) = s(t+kp)$(waarbij kp een veelvoud van de periode p is), wat inhoudt ook voor 'andere' schildwachten,

en tenslotte:
  - het onderzoeken van het geval van twee schildwachten die elkaar met dezelfde snelheid volgen op een afstand van $\frac{1}{4}\pi$ (fig.7), dat wil zeggen het beschouwen van de beweging van de schaduw van beiden tegelijk ten opzichte van SO, grafiek en formule inbegrepen.

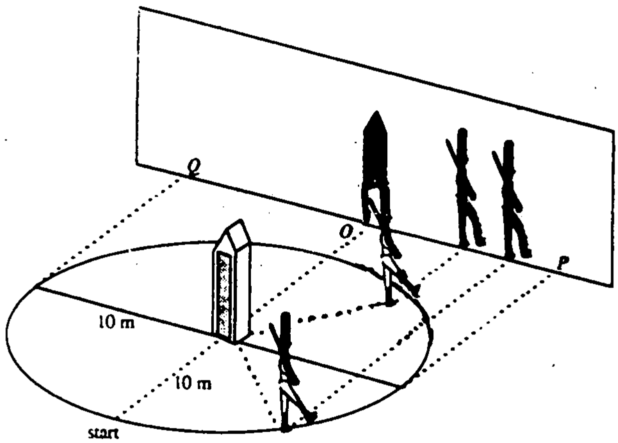

Fig.7. Twéé schildwachten

Tot zover de toets (zie ook §6).

2.3. Verdieping (15-16 jaar)

Het is duidelijk dat de kwestie van de twee schildwachten vooruitgrijpt op de samenstelling van twee sinusfuncties met dezelfde periode, in dit geval sin t+cos t, mits de straal van de omloop van de schildwacht gelijk aan 1 verondersteld wordt. Dit probleem kan meer algemeen uitgewerkt worden[4].

Om trouw te blijven aan de gemaakte keuze, zal het draaiende wiel ook hier ons model zijn.

Het laatste probleem van de toets houdt de vraag in: zal sin t+cos t ook weer een periodieke functie zijn?, zo ja, bepaal het wiel en de grafiek die erbij passen. Inderdaad, wanneer twee wielen met dezelfde snelheid worden

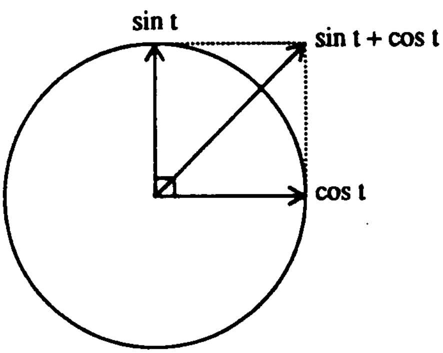

Fig.8. sin t + cos t

beschouwd (fig. 8) dan produceert de vectoropstelling de rotatie van een derde wiel met een straal $\sqrt{2}$ en dezelfde draaisnelheid, dus de som functie heeft dezelfde periode en een amplitude van $\sqrt{2}$. Dat de cosinus $\frac{1}{2}\pi$ vóór is op de sinus betekent dat $\cos t = \sin(t+\frac{1}{2}\pi)$. Dus $t \rightarrow \sin t + \sin(t+\frac{1}{2}\pi)$ zou ook kunnen dienen als beschrijving van deze somfunctie. Op grond van de grafieken van sin t en cos t kan hun som grafiek eenvoudig worden geschetst. De nulpunten zitten precies tussen die van sin t en cos t in. In het vervolg kan een verscheidenheid aan problemen worden aangepakt. Bijvoorbeeld:

- onderzoeken of de som functie van twee periodieke functies met dezelfde periode periodiek is;
- verifiëren door tekenen en beargumenteren dat $\sin t + \frac{1}{2}\sin(t-\alpha)$ weer periodiek is met dezelfde periode.

Inderdaad, wanneer twee wielen met verschillende doorsneden maar met gelijke draaisnelheid worden beschouwd (fig. 9), dan zal door vector optelling een derde wiel worden voortgebracht met een andere diameter maar met dezelfde draaisnelheid als de beide andere wielen. Sin t loopt een tijdsinterval α *vóór* op $\sin(t-\alpha)$ en de som zit er tussen in. Bij wijze van uitbreiding kunnen eenvoudige gevallen van optelling van twee functies met verschillende perioden worden beschouwd als bijvoorbeeld $\sin t + \sin 2t$, of het optellen van een periodieke en een lineaire sin (t-a) functie, zoals $\sin t + t$.

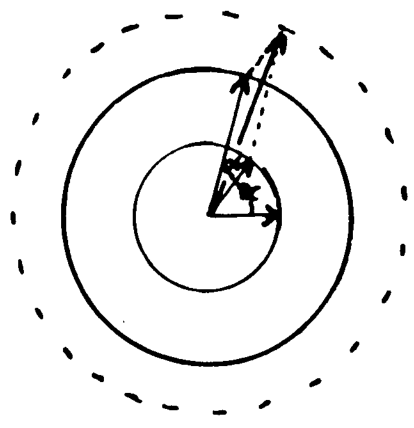

Fig.9. sin t+sin(t-a)

Om het handwerk te completeren kan op dit niveau opnieuw van een computerprogramma gebruik worden gemaakt , een programma dat voorziet in het manipuleren met wielen (het optellen van vectoren) en het samenstellen van periodieke functies en hun grafische beelden; dat wil zeggen een programma dat dezelfde geest ademt als dat aan het eind van de exploratie fase (2.2.).

2.4. Afronding (17-18 jaar)

Opnieuw kan het waterrad als model dienst doen in dit stadium, namelijk voor het invoeren van de afgeleiden van sinusfuncties. Uitgangspunt is het eenheidswiel met een constante hoeksnelheid ω = 1rad/sec (fig.10):

- de tijden vaststellen voor ¼, ½ en een hele draai, achtereenvolgens t = $\pi/2/1$, $\pi/1$ en $2\omega/1$, en T = $2\pi/\omega$ in het algemeen, v = 1 (omdat v = Rω, R = 1 and ω = 1).

  Nadenken over de raaklijn: De snelheid v staat loodrecht op de straal R (1). Na t seconden is een draaiend punt, dat tegen de klok in beweegt, in (cos t, sin t), omdat in dit geval x = t (x = ωt en ω = 1), dus R (cos t, sin t), omdat v = 1, is de lengte van vector v ook 1. De bijbehorende vector v loodrecht op R is v = (- sin t, cos t), wat volgt uit (1). De enige andere mogelijkheid v = (sin t, - cos t) moet verworpen worden omdat de beweging tegenkloks is. v kan ook ontbonden worden in v_x en v_y. Inderdaad is (R,v) = 0, dus v_x = - sin t en v_y = cos t en ook dx/dt = v_x en dy/dt = v_y (de afgeleide van de afstand is de snelheid), wat betekent (cos t)' = - sin t en(sin t)' = cos t.

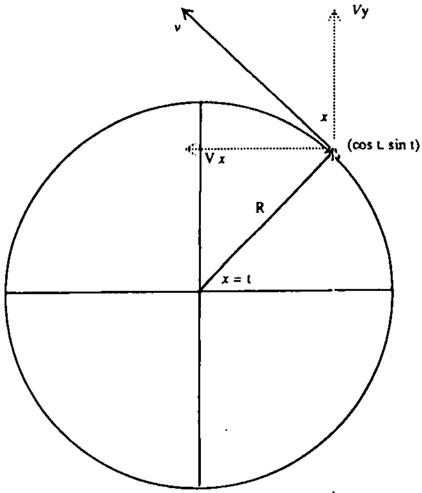

Fig.10. Naar de afgeleide

In plaats van met deze fysische verklaring kan de kwestie van de afgeleiden ook op een meer meetkundige manier benaderd worden (fig. 11). Wanneer het punt op de rand van het wiel slechts een heel kleine boog (BC) 'opschuift', zal deze boog bij benadering gelijk zijn aan het lijnstuk BC. OB staat loodrecht op de cirkel (OB ⊥ CB) dus de kleine hoek bij C is nagenoeg gelijk aan t radialen. In driehoek BCD is cos C = CD/CB of cos t = y/t , wat betekent dat (sin t)' = cos t (De Lange & Kindt, 1984).

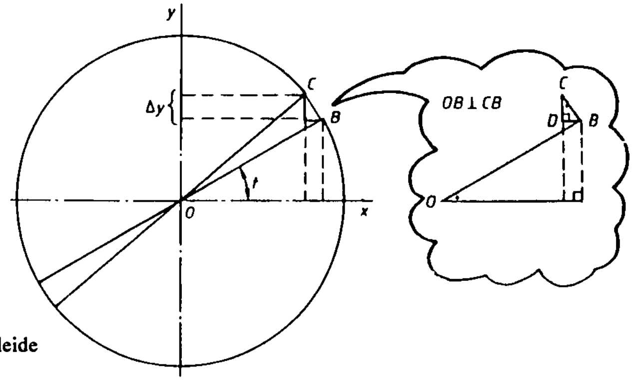

Fig.11. De afgeleide

De voorgaande resultaten kunnen gemakkelijk verondersteld worden, op grond van;

- de grafieken van sin t en cos t;
- het feit dat de cosinus $\frac{1}{2}\pi$ op de sinus vooruit is, dus cos t = sin (t + $\frac{1}{2}\pi$);
- de overweging dat de afgeleide van sin t nogal op die van sin (t + $\frac{1}{2}\pi$) moet lijken, en tenslotte
- het resultaat van een globale kijk op de grafiek van sin t, bijvoorbeeld, samen met de helling van de raaklijn in enkele speciale punten (fig.12)[5].

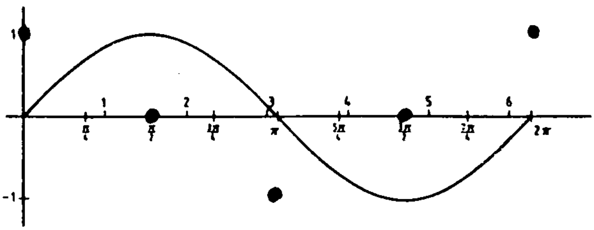

Fig.12. Gissing van de afgeleide

We keren opnieuw terug naar het waterrad. Ook hier kan recht worden gedaan aan het spel met de parameters, bijvoorbeeld, door de invloed van:

- het verdubbelen van de hoeksnelheid (fig. 13); er blijkt dat (sin 2t)' = 2 cos 2t en (cos 2t)' = - 2 sin 2t.
- idem, voor verschillende gevallen;
- het afleiden hieruit van een algemene regel voor (Rcos ωt, Rsin ωt), T = $2\pi/\omega$ en v = Rω, dat is (Rcos ωt)' = - ωR sin ωt en (Rsin ωt)' = ωRcos ωt.
- het differentiëren van allerlei samenstellingen van sinusfuncties (en samenstellingen van sinusfuncties met andere functies, zoals lineaire of een eenvoudige tweede en hogere graadsfuncties);

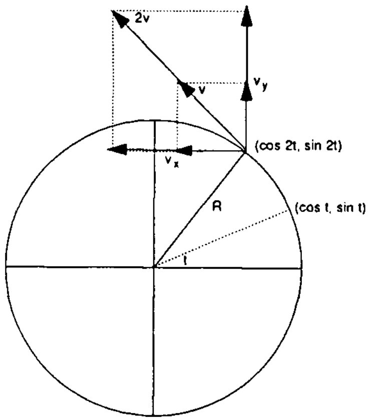

Fig.13. Snelheid verdubbelen

- het maken van toepassingen, bijvoorbeeld, het oplossen van problemen die verband houden met de tijd-plaatsgrafiek van de beweging van de schaduw van de schildwacht, wat inhoudt (fig. 14):
- het bepalen van formules, het berekenen van de snelheid op verschillende momenten en van de topsnelheid; het bepalen van de functie voor de versnelling, het bepalen van de tijdstippen zonder versnelling (Kindt, 1989, hoofdstuk 9)[6].

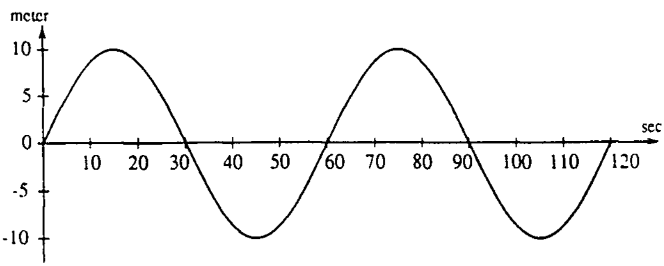

Fig.14. De tijd-plaats grafiek van de schildwacht

Ziehier hoe een leerlijn voor sinusfuncties zou kunnen worden ontvouwd. Het accent op sinusfuncties in het voortgezet onderwijs in plaats van op andere functies, biedt verscheidene voordelen. De mogelijkheid de neiging tot het verwarren van de afstand-tijd grafiek met de afgeleide te onderdrukken, werd al genoemd[3]. Bovendien noemen Freudenthal en Kemme (1989, p. 22):

> '...Het geometrisch-kinematisch ontstaan van sinusfuncties dat fel afsteekt tegen het min of meer formeel-statische van al die andere,' en:
> '... de rijkdom van de afzonderlijke sinusfunctie en de grote verscheidenheid in de hele familie.'

In de leerlijn, als geschetst, is gepoogd het 'meetkundig-kinematische' aspect zoveel mogelijk in een 'visueel-motorisch' te vertalen, zoals genoemde auteurs eerder bepleitten. Aan het laatste voegen ze, wat de leerling aangaat, dan nog toe:

> '..., heb er vrede mee als hij daarop reageert en dring niet op meer aan als hij er niet aan toe is!'

In de volgende paragraaf komt de leerling in het vizier.

3. Meedenken met de leerlingen in hun leerproces

De geschetste leerlijn voor sinusfuncties is bedoeld als voorlopige benadering van een stuk realistisch wiskundeonderwijs. Het is een hypothetisch voorontwerp ondanks het feit dat vele van de erin opgenomen suggesties al eerder zijn uitgewerkt om door leerlingen gedaan te worden. Voor een deel is van dit materiaal gebruik gemaakt.

Is de intentie om uit te gaan van de geschetste verschijnselen en contexten als bron voor de wiskunde en als *toepassingsgebied* voldoende om van 'realistisch wiskundeonderwijs' te kunnen spreken? Ik meen van niet. De aanwezigheid van de genoemde verschijnselen is op zichzelf een te oppervlakkig criterium. Waar het uiteindelijk om gaat is: *wie* brengt de wiskunde voort, *wie* legt het verband tussen de toepassingen en de bijbehorende wiskunde, of anders gezegd *wie* zorgt er voor de *wording* van de wiskunde.

Wat dit aangaat laat het geraadpleegde materiaal in zijn huidige uitwerking(zie §1) nog veel te wensen over, vooropgesteld dat men dit ideaal zou willen nastreven. Het biedt niet veel ruimte voor de leerlingen om *onder leiding van de leraar* (!) zelfontdekkend bezig te zijn. Dit kan gemakkelijk verklaard worden. Beslissingen worden genomen en keuzen gedaan bij het ontwikkelen van materiaal voor het wiskundeonderwijs. Met betrekking tot de voortgang van het onderwijs-leerproces neemt de schoolboekauteur beslissingen voor zowel leraren als leerlingen (de keuze van problemen, van wiskundige gereedschappen, van stappen in het mathematiseringsproces, enz.). Iets dergelijks doet de ontwikkelingsonderzoeker voor de schoolboekauteur en de beleidsmaker voor de ontwikkelingsonderzoeker, door bijv. dergelijk onderzoek voor sinusfuncties over langere termijn op voorhand uit te sluiten.

De leerlingen staan in deze hiërarchie onderaan. Volgens de traditie moeten zij meedenken met de leraar en de wiskunde reproduceren die hij voordoet. Echter, de leraar die zijn leerlingen wil laten delen in de verantwoordelijkheid voor de wording van de wiskunde - dat is *hun eigen* wiskunde - door herontdekking, handelt tegenovergesteld: hij denkt mee met zijn leerlingen. Hoe kan zoiets worden bereikt?

Het onderwijs met het nog verder uitgewerkte onderwerp en de individuele leerprocessen die zich eraan voltrekken zouden op elkaar moeten worden afgestemd. Dat is wat er in ontwikkelingsonderzoek gebeurt. Een hypothetisch voorontwerp van nog onaf materiaal wordt daartoe in een onderwijs experiment verder uitgewerkt en beproefd. Tegelijkertijd worden de individuele leerprocessen en het groepsleerproces heel zorgvuldig geobserveerd en onderzocht. Het experimentele, nog onaf materiaal en de leerprocessen zullen elkaar wederzijds (kunnen) beïnvloeden op grond van de vergaarde onderzoeksgegevens. Meedenken met de leerlingen kan niet gerealiseerd worden met materiaal dat vooraf 'gladgestreken' is, met andere woorden, dat al in hoge mate gemathematiseerd is. Is dit wel het geval dan is het enige wat er voor de leerlingen overblijft, het meedenken met de leraar: reproduceren wat hij demonstreert. Meedenken met de leerlingen betekent dat ze zèlf mathematiseren, dat ze wiskundig actief worden, dat zij zelf de wiskunde construeren, produceren, (her) scheppen, (her) uitvinden.

Nogal wat wiskundigen, onder wie Polya en Freudenthal, hebben dit bij herhaling gepropageerd, bij wijze van navolging van het historische leerproces van de mensheid. Freudenthal (1983, p. 35) stelde dat het historische leerproces zich heuristisch voltrok:

> '... by searching, at random and intentionally, by finding by serendipity or systematically. This then, is heuristics: the scribblings, as opposed to the clean copy as it is printed.'

Wanneer het meedenken met de leerlingen serieus genomen wordt is een leerboek in de betekenis van 'clean copy' principieel onjuist. Integendeel, het moet onaf zijn of voorlopig in die zin, dat er voorzien wordt in een groot aantal mogelijkheden tot het maken van 'kladjes' (scribblings) voor de leerlingen, waarop de vruchten van hun wiskundige activiteiten worden vastgelegd. Daar immers komen de specifieke kenmerken en symptomen ervan aan de oppervlakte? De 'kladjes' brengen de voorkeuren van de leerlingen aan het licht. Ze tonen de gebruikte wiskundige werktuigen, de gemaakte fouten, de bereikte niveaus van mathematiseren, enzovoort. De kladjes laten de voertuigen van het denken van de leerlingen zien. Deze kunnen bewust gemaakt worden en gebruikt als startpunten voor het bereiken van hogere niveaus van mathematiseren. Hoe kan dit gerealiseerd worden?

Dit zullen we in de volgende paragraaf laten zien, toegelicht met enkele voorbeelden uit de geschetste sinuslijn. In het kort komt het hierop neer:

> 'In his mind the teacher has prepared a clean copy, which he expects the learner to produce, and even a somewhat vague series of scribblings leading to the clean copy - a plan, which in the actual experiment must be modified according to the student's

cooperation. This is what from olden times they called heuristic instruction, ...' (Freudenthal, 1983, p. 41).

In ontwikkelingsonderzoek wordt de 'vague series of scribblings' nader van inhoud voorzien zoals dat ook met het voorlopige onderwijsmateriaal het geval is. Beide dienen als bouwstenen voor een *prototype* van een leergang, een exemplarisch uitgewerkte leerlijn, ingebed in een theorie voor het onderwijzen en leren van het betreffende onderwerp, in dit geval sinusfuncties.

4 Ontwikkelingsonderzoek in gedachten

4.1. Het meedenken met de leerlingen in de leergangschets

De manier waarop de leergang voor sinusfuncties is uitgelijnd waarborgt - tot op zekere hoogte - de inbreng van de leerlingen. Er is voorzien in constuctieruimte voor hen. Dit principe is niet alleen van belang voor afzonderlijke lessen. Ook op de langere termijn van de leergang als geheel speelt het een rol. De leergang voorziet bijvoorbeeld in de mogelijkheid van begin tot eind met de parameters van het gekozen model van het draaiende wiel te spelen. De wiskundige consequenties van het manipuleren met het model worden telkens opnieuw nader beschouwd en beschreven, althans zo is het bedoeld. De gang van zaken zal steeds dezelfde zijn:
- spelen met de parameters van het model;
- het overwegen van de wiskundige consequenties ervan, gevolgd door grafische beschrijving, van
- grof kwalitief tot en met numerieke precisie (meetkundige berekening, meten, rekenmachine (computer), (veel later) gevolg door
- abstraheren, generaliseren en formaliseren.

Geleidelijk aan wordt het wiskundige niveau hoger, wat inhoudt dat de afstand van de wiskunde (en de wiskundige activiteiten) tot de voortbrengende bronnen gestaag toeneemt. Er is nog een ander kenmerk dat de leerlijn doortrekt, namelijk de voortgebrachte wiskunde wordt telkens opnieuw verbonden met de fysische bronnen, bijv. omzien naar het draaiende wiel etc.. Tegelijkertijd echter wordt op de toekomstige wiskunde geanticipeerd. Of anders gezegd: de geschetste leerlijn is zo opgezet dat deze het kenmerk in zich draagt van omzien om te vóórzien.

In de volgende paragrafen zullen deze zaken met voorbeelden uitgewerkt worden. Dit zal provisorisch gebeuren. Het gaat immers om een gedachten experiment. In echt ontwikkelingsonderzoek zal de 'vague series of scribblings' van de deelnemende leerlingen zijn vaagheid verliezen, met als gevolg dat meer verantwoorde keuzen hiervoor kunnen worden gedaan, maar.....

Men kan zoeken naar evenwicht tussen de mate waarin de leerkracht stuurt (in bedoeld onderzoek bepaald door de autoriteit van de ontwikkelingsonderzoeker) en de vrijheid van de (her) ontdekkende leerlingen (zie Freudenthal, 1991). Het lijkt voor de hand te liggen dat aan deze balans tussen sturing en vrijheid een bijdrage geleverd kan worden door de concrete bronnen voor activiteiten ten volle te benutten in dienst van het zelf construeren door de leerlingen. Dan immers wordt de sturing door de leerkracht ondergeschikt gemaakt aan de (her)uitvinding door de leerlingen. Ontwikkelingsonderzoek - dat betekent o.a. diep graven in leerprocessen - is er voor om te onderzoeken wat er werkt en hoe het effectief kan zijn voor het wiskundeonderwijs in het algemeen.

4.2. Vaardig omgaan met sinusoïdes

De geschetste leerlijn voorziet niet of nauwelijks in het trainen van vaardigheden. Veronderstel bijvoorbeeld eens, dat in de fase van de verdieping (§ 2.3.) aandacht besteed zou worden aan de verwerving van vaardigheden als:

- het tekenen van een sinusoïde bij een gegeven formule; en
- het opstellen van een formule bij een gegeven grafiek (fig. 15):

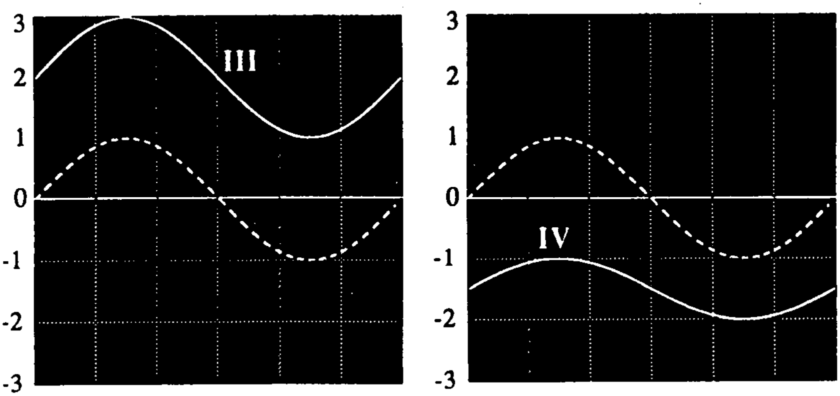

Fig.15. Een formule opstellen

Het onderzoek zal dan moeten uitwijzen met welke frequentie deze vaardigheden geoefend moeten worden en hoeveel training er nodig is. Heel veel hangt af van de manier van oefenen. Bovengenoemde kwestie zou men bijvoorbeeld kunnen benaderen, uitgaande van de taal die de leerlingen in deze gebruiken, om zo hun inbreng te garanderen. Hoe kan Grafiek IV (fig.15) bijvoorbeeld uit het grondmodel van de sinusfunctie worden afgeleid? (Wat is er veranderd aan de gestippelde grafiek om grafiek IV te krijgen? Wat gebeurde er?). Nou, de toppen van de golven werden lager, de golfdalen werden ondieper en de waterspiegel zakte (amplitude en basisniveau). Anders gezegd: de grafiek is wat 'naar beneden opgeschoven' en 'afgeplat'. In plaats van dit informele, relatieve taalniveau kan men - in eerste instantie - zelfs zuivere aanwijstaal accepteren: de grafiek is van 'hier' naar 'daar' verschoven, enzovoort.

Het is een groot voordeel de leerlingen toe te staan de beoogde veranderingen aan de grafiek en zijn plaats kwalitatief te beschrijven. Aan de andere kant, wanneer men veranderingen in het oog vat, dient men ook te letten op wat niet verandert (de afstand tussen de punten waar de golftoppen overgaan in golfdalen blijven op hun plaats (periode, frequentie).

Op de veronderstelde taalkundige inbreng van de leerlingen kan met vrucht worden voortgebouwd (functionele beschrijving met conventionele variabelen en symbolen). De leerlingen kunnen de passende vragen hiervoor zèlf stellen. Hoeveel is de hoogte van de golven verminderd en hoeveel werden de golfdalen ondieper? Wat veranderde er niet? Het juist beantwoorden van deze vragen zal op vrij natuurlijke manier resulteren in $y = \frac{1}{2}\sin x - 1\frac{1}{2}$.

Onderlinge vergelijking van de diverse grafieken zal ook moeten gebeuren. Hieruit zal de bekwaamheid ontstaan om in één oogopslag te zien, dat de formules bij de grafieken III en IV noodzakelijkerwijs een *factor* 2 moeten verschillen en een *constante* van $3\frac{1}{2}$. Het abstraheren en generaliseren van de verschillende formules in $y = a\sin x + c$ kan ook door de leerlingen worden gedaan. Amplitude (a) en basisniveau (c) zijn in de activiteiten van de leerlingen onderscheiden als wat zij noemden 'het hoogtegetal voor de golven' en 'het getal voor de waterspiegel'. Het onderzoek zal uitwijzen of de beoogde vaardigheden op deze manier kunnen worden ontwikkeld of niet.

Merk op dat de progressie in taalniveaus lijkt op het eerst genoemde principe van de leerlijn (§4.1.). In het onderhavige geval is de constructieruimte die aan de leerlingen wordt toegedacht wel erg beperkt; het lijkt erg op de klassieke geval-voor-geval behandeling. Daar is op zichzelf niets tegen. Het betekent alleen dat sturing door de leraar (dat opnieuw zou gebeuren op last van de ontwikkelingsonderzoeker) sterk aanwezig zou zijn. In de volgende paragraaf zal echter blijken dat de constructieruimte voor de leerlingen aanzienlijk kan worden uitgebreid.

4.3. Sinusoïdes algemeen geformuleerd

Een ander dominant kenmerk van de geschetste leergang is de voortgaande formalisering. Dit geldt bijvoorbeeld het spel met de parameters: het formele karakter ervan neemt op den duur toe. Ook dit kenmerk kan in dienst worden gesteld van het oefenen van vaardigheden. Voorbeeld (fig. 16):

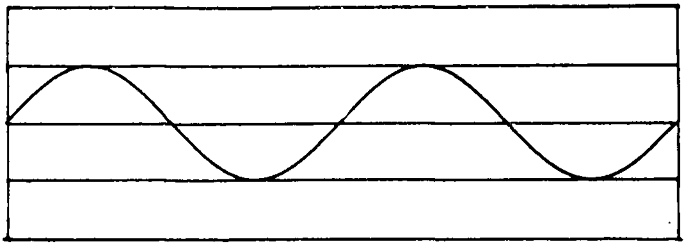

Fig.16. Zo maar een grafiek van een sinusoïde?

Amplitude en periode kunnen vrij worden gekozen op voorwaarde dat recht wordt gedaan aan hun verhouding. De schalen op de assen van het coördinatenstelsel kunnen dus nog met een zekere mate van vrijheid worden ingevuld. Is dit eenmaal gebeurd dan kan de wiskundige beschrijving van de gegeven sinusoïde verder worden uitgewerkt. Deze produktiekwestie - want dat is het - kan een echte uitdaging zijn voor de leerlingen. Het stellen van het basisniveau op 1 en van de amplitude op 1 - en dus, vanwege de verhoudingen - van de periode op π, zal resulteren in (fig. 17):

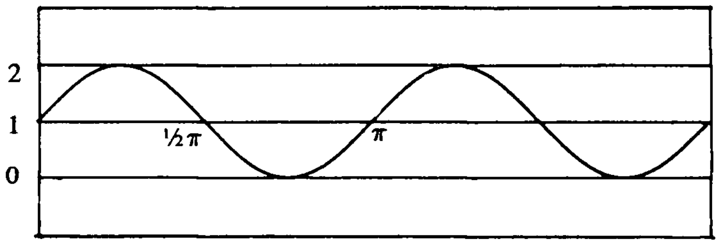

Fig.17. $y = \sin 2x + 1$

Keuze echter, van ½ voor de amplitude, dus ½π voor de periode met hetzelfde basisniveau, zal resulteren in (fig. 18):

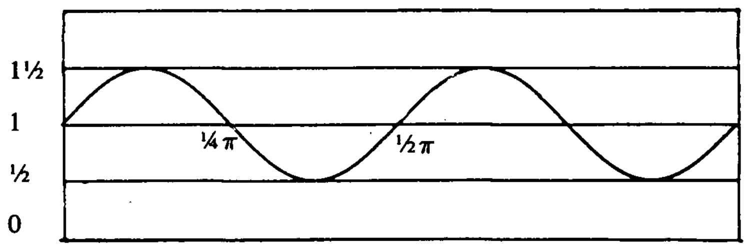

Fig.18. $y = \frac{1}{2}\sin 4x + 1$ Enzovoort.

Op deze manier zou een klas leerlingen hele families van sinusfuncties kunnen voortbrengen, door om te zien naar één van de concrete bronnen en met de parameters te spelen. De vaardigheid in het bepalen van formules bij grafieken zal hiermee ontwikkeld worden. De training heeft niet alleen waarde op zich maar dient tegelijkertijd een hoger doel. Het geproduceerde materiaal kan namelijk op een nog hoger niveau van abstractie en generalisatie georganiseerd worden, uitgedrukt in formules als $y = a \sin bx + c$.

Omgekeerd kan men de leerlingen families van sinusfuncties laten produceren (of hun grafieken) die voldoen aan bepaalde voorwaarden.

Is hiermee het laatste woord over het oefenen van vaardigheden gezegd? Stellig niet. De geschetste benaderingen (§4.2 en §4.3) zullen ongetwijfeld invloed hebben op de voorgestelde computerprogramma's (§2.2 en §2.3), voor wat betreft het gewicht van hun plaats in het uiteindelijke prototype en omgekeerd. Het vaststellen van het evenwicht tussen de verschillende methoden om vaardigheden te trainen kan in ontwikkelingsonderzoek in parallelklassen gedaan worden. Dit biedt de mogelijkheid om verschillende uitgebalanceerde programma's voor het oefenen van vaardigheden te vergelijken. Welke het beste voldoet kan dan in het prototype worden opgenomen.

4.4. Reflectie

Zowel de voorgestelde leerlijn voor sinusfuncties als de beschouwing over het trainen van vaardigheden laten zien dat er enkele ontwerpstrategieën voor beschikbaar zijn. Bij het 'opstellen van een formule' (§4.2) kwam de toegepaste strategie neer op een beweging van het puur demonstratieve niveau van beschrijving naar dat van de conventionele variabelen en symbolen via dat van het linguïstisch relatieve niveau. Freudenthal (1978) wees deze strategie onder andere aan als een grote strategie voor het oplossen van wiskundige problemen.

In §4.2 werd deze strategie echter als *didactische* strategie in dienst van het ontwerpen van (materiaal voor het) wiskundeonderwijs toegepast. Ook voor de analyse van bestaand materiaal is deze strategie bruikbaar. Uit het feit bijvoorbeeld dat een onderwerp op het hoogste niveau van beschrijving geïntroduceerd wordt voor wie er voor het eerst mee kennismaken, kan op voorhand met vrij grote mate van zekerheid voorspeld worden, dat zoiets in het onderwijs tot mislukken gedoemd is. Met een andere didactische strategie werd de constructieruimte voor het oefenen van vaardigheden voor de leerlingen vergroot (§4.3). De vragen met betrekking tot het uitdrukken in een formule (§4.2) en omgekeerd, waren gebaseerd op een *partiële* blikwisseling, wat namelijk gegeven is en wat gevraagd wordt (gegevens en onbekenden) zijn *gedeeltelijk* tegen elkaar uitgewisseld om de voorgestelde problemen te construeren.

In het algemeen resulteert deze strategie in opdrachten tot (re)*constructie* voor de leerlingen. De in §4.3 toegepaste blikwisseling was vrijwel volledig, omdat dit keer bijna alles wat gegeven was en wat werd gevraagd, tegen elkaar waren uitgewisseld. Daardoor ontstond een opdracht tot *produktie*. De leerlingen krijgen de gelegenheid om te zien naar de concrete bronnen door aan de grafieken wat informatie over hun herkomst toe te voegen. Het gevolg is dat met het geproduceerde materiaal vooruit wordt gegrepen op toekomstige wiskunde. Bijdragen van individuele leerlingen kunnen onderling vergeleken worden; verschillen en overeenkomsten vastgesteld en geïnterpreteerd. Op grond hiervan kan de gedachte ontstaan dat het voortgebrachte materiaal wiskundig nog verder te organiseren valt door middel van één of meer formules.

Deze gang van zaken laat zien dat reflectie in lange termijn leerprocessen een iteratieve functie kan hebben: terugblik en vooruitblik in eenzelfde activiteit begrepen (vgl. Kilpatrick, 1985). De strategie van de standpuntverandering of blikwisseling is in vele toonaarden bezongen als grote strategie voor het oplossen van wiskundige problemen (zie Freudenthal, 1991). Het lijkt veelbelovend deze strategie ook op het niveau van het *didactiseren* te gebruiken. Voor het construeren van problemen met een (re)constructieve of produktieve component, werkt deze strategie in ieder geval zoals ik heb laten zien. Streefland (1991) laat de bruikbaarheid van beide strategieën ook zien voor het ontwerpen van problemen die beogen algemene doelen van het wiskundeonderwijs te toetsen (zoals bijv. denkstrategieën).

In §4.1 werd het probleem genoemd van het bewaren van het evenwicht tussen de sturing door de leraar en het (her)ontdekken door de leerlingen. De voorgestelde oplossing om de concrete bronnen volop te benutten is nu tot op zekere hoogte concreet gemaakt.

5. Ontwikkelingsonderzoek en toetsen

5.1. Toetsen in ontwikkelingsonderzoek

Het voorstel voor een toets (§2.2) bevatte allerlei kwesties om, hoe dan ook getoetst te worden. Verdere analyse van deze vragen laat zien, dat de beoogde toetsen:

- niet te onderscheiden zijn van het 'gewone' onderwijs (vergelijk ook met Clarke e.a., 1990; Gardner, in druk; De Lange & Van Reeuwijk, 1991, in druk; Webb en Briars, 1990);
- moeten bijdragen aan het leerproces; de samenstelling van twee sinusfuncties komt voor het eerst in een toets aan de orde (de twee schildwachten die elkaar volgen) (vergelijk met Van Galen e.a., 1985; De Lange, 1987; Van den Heuvel-Panhuizen, 1990);

- leerlingen in staat stellen hun kennis en bekwaamheden te tonen (strategieën en processen inbegrepen);
- in principe dekkend moeten zijn voor het gegeven onderwijs.

Om bij het laatste punt aan te sluiten, de voorgestelde toets mikt op: vaardigheden, het doen van een onderzoek; het schrijven van een essay, enz. Ontwikkelingsonderzoek is een uitstekende onderneming om dergelijke mogelijkheden intern te evalueren. We zullen ze achtereenvolgens kort bekijken.

5.2. De schildwacht toetsen

schriftelijk

Veel onderwijskundigen hebben vastomlijnde ideeën over schriftelijke toetsen: ze zouden alleen maar geschikt zijn om kennis en vaardigheden af te vragen. Het is echter helemaal niet nodig en zelfs af te raden zich hierop vast te leggen (zie ook Haylock, 1987). Er kan namelijk de eis tegenovergesteld worden die Clarke e.a. (1990; p.127) aan toetsen stelden:

> 'It is imperative that we become more selective in our use of the written test'

Dat is wat er in het MORE-project is gedaan (MORE = Methoden Onderzoek REkenen Wiskunde). Men slaagde er namelijk in schriftelijke toetsen te ontwikkelen die voldoen aan voornoemde kenmerken. Bovendien kunnen de MORE-toetsen gemakkelijk in de klassesituatie gebruikt worden (Van den Heuvel-Panhuizen, 1990). Een schriftelijke toets over de schildwacht zou de volgende kwesties kunnen bevatten:

- het vergelijken van de schildwacht met het waterrad; de gegevens moeten dan zo gepresenteerd worden, dat dit bij een schriftelijke toets past (in de MORE-toetsen zijn inhoud en vormgeving één);
- het beschrijven van de beweging van de schildwacht en zijn schaduw (grafiek, formule);
- technische kwesties betreffende de periodiciteit ($s(t) = s(t + kp), \ldots$).

(vrije) produktie

Ons toetsvoorstel voorziet slechts ten dele in een dergelijke opdracht. Een mogelijkheid is de leerlingen de wiskundige consequenties van het spel met de parameters te laten uitwerken, bijvoorbeeld, door een ander startpunt te kiezen; dit betekent dat een familie van sinusfuncties wordt geproduceerd, die alle in één opzicht van het grondmodel afwijken. Men zou dit een produktie opdracht kunnen noemen zoals het voorbeeld van §4.3.

Een alternatief is het zèlf maken door de leerlingen van een toets over het waterrad voor de volgende jaargroep leerlingen. Dit is pas een echt vrije produktie. De Lange en Van Reeuwijk (1991) gaven hun leerlingen bijvoorbeeld de opdracht een toets bij hun boekje over 'Data Vizualizations' te maken en inderdaad met veelbelovende resultaten (zie ook Van den Brink, 1987; Streefland, 1988). (Vrije) produkties zijn heel onthullend, zowel naar de individuele leerprocessen als naar het onderwijs toe. Bovendien kan het voortgebrachte materiaal naderhand gebruikt worden om toetsen voor de hele klas uit samen te stellen.

alternatieven

Het spel met de parameters van de schildwacht lijkt te vragen om een meer uitgebreide opdracht. Het maken van een essay bijvoorbeeld lijkt hier geschikt. Dit zou ook kunnen gelden voor de kwestie van de twee schildwachten, een geval om te onderzoeken. Combinaties zijn natuurlijk ook mogelijk. De Lange (1987) onderzocht bijvoorbeeld de zogenoemde twee-traps toets (en de essay toets). Het eerste deel van een twee-traps toets is een klassiek schriftelijk proefwerk op tijd. Bij de correctie wordt dit summier geannoteerd en daarna teruggegeven aan de leerlingen (alleen grove fouten worden aangestipt). Vervolgens mogen de leerlingen dezelfde opdracht nog een keer doen, maar nu vrij, bijvoorbeeld in de vorm van een essay. De bedoeling is hoe dan ook dat zij er 'iets moois' van maken. Uit De Lange's onderzoek bleek dat een aantal leerlingen in tweede instantie heel kritisch was, niet alleen ten opzichte van het eigen werk, maar vooral ook ten aanzien van de toegepaste wiskundige modellen. Zij waren toen dus nogal reflectief ingesteld. De tweede trap veroorzaakte dus belangrijke leereffecten.

In principe kunnen alle (nieuwe vormen van) toetsen in ontwikkelingsonderzoek worden toegepast en onderzocht, speciaal in dienst van het meedenken met de leerlingen (§3).

5.3. Conclusie

Toetsen kunnen worden beschouwd als onderdeel van wiskundeonderwijs dat met de leerlingen 'meedenkt' door hun denken zoveel mogelijk te onthullen. Werkelijk ontwikkelingsonderzoek naar sinusfuncties zal uiteindelijk de beste manier(en) van toetsen aan het licht brengen, bijvoorbeeld aan het einde van de fase van exploratie, door de leerlingen:

- een toets te laten maken bij het voorafgaande onderwijs over de schildwacht, dit betekent;
- hen confronteren met de schildwacht, geschreven, in (vrije) produktie of alternatief, of;
- door uit de voorgaande suggesties enige elementen te combineren.

6. Het scenario voor de leraar

In ontwikkelingsonderzoek worden het onderwijzen en leren van wiskunde op elkaar afgestemd. De vruchten ervan, prototypes van leergangen, zullen dit moeten weerspiegelen. Deze bevatten een repertoire van activiteiten, problemen, voorbeeld toetsen, suggesties voor experimenten, onderzoeksgegevens, zoals voorbeelden van constructies en produkties van leerlingen en aanwijzingen hoe dit materiaal in mathematisch-didactisch opzicht te organiseren zowel als het benutten ervan voor het vervolg van het onderwijsleerproces.

Scenario's voor leergangen om in het wiskundeonderwijs te implementeren kunnen van de prototypen worden afgeleid, voorbeelden van potentieel onderwijs als het ware, neergelegd in leerboeken en handleidingen. De leerboeken zijn geen 'clean copies' maar onaf in die zin dat ze veel ruimte voor inbreng via de 'kladblaadjes' van de leerlingen bevatten. De handleidingen bevatten om zo te zeggen onderzoeksprogramma's die de leraar met zijn leerlingen kan aanpakken en die zijn uitgezet in de leerboeken. Gesteund door dit materiaal is de leraar in staat het onderwijs experiment uit het ontwikkelingsonderzoek te reconstrueren. Of anders gezegd, op deze manier is aan de voorwaarden voldaan:

> '...to have the teachers treat their instruction as free production of teaching; that is teaching also brought forth on the base of the constructions and productions of the pupils' (Streefland, 1990, p. 49).

7. Tenslotte

Enige gedachten over ontwikkelingsonderzoek naar en het toetsen van sinusfuncties werden ontvouwd. In de hele gedachtengang speelde de bijdrage van de leerlingen en hun medeverantwoordelijkheid voor de wording van de wiskunde een belangrijke rol. Enkele bouwstenen zijn genoemd voor het ontwerpen van materiaal dat aan genoemde voorwaarden voldoet, exemplarisch geïllustreerd.

Wiskunde als menselijke activiteit en hoe dit te toetsen vormden de kern, met de sinusfuncties in de rol van voertuig voor het denken. Het beschrijven ervan in prototypen en afgeleide scenario's voor het onderwijs houdt echter enkele gevaren in. In zijn artikel over het toetsen van wiskundige activiteit merkt Love (1988, p.359) in dit verband op:

> '...first, that the descriptions from the products appear to imply that particular processess must, or should have happened. These assumed processess then are used as a means to describe the activity. Mathematical activity then becomes so identified with the processess, that children will be seen as engaging in it so far as they seem to exhibit aspects of descriptions.

> Secondly, and even more disastiously, teacher's actions are affected - sothat they teach processess or strategies directly in the belief that they are then getting their pupils to act mathematically.'

Zowel de voorgestelde uitlijning van sinusfuncties als het daarmee verbonden gedachtenexperiment over ontwikkelingsonderzoek weerspiegelen het bewust zijn van deze gevaren binnen de realistische theorie en de mogelijkheden tot bezwering ervan. We herhalen ze nog eens met klem: de medewerking van de leerlingen en hun inbreng zijn onontbeerlijk. Wat rest is het creëren van zulk wiskundeonderwijs, geen sinecure, evenmin als de realisatie ervan.

Noten:

1. Het gaat om programma's voor respectievelijk de bovenbouw van het VWO en het HAVO.
2. Zie in verband met het verstrengelen van leerlijnen Streefland (1984).
3. Bij afstand-tijdgrafieken zijn leerlingen geneigd deze te identificeren met de afgelegde weg. Een neiging die op deze manier kan worden onderdrukt. Weg en grafiek zijn netjes gescheiden (fig.2). Dit is één van de redenen waarom men in het onderwijs de sinus zelfs aan de lineaire functie zou kunnen laten voorafgaan (Freudenthal & Kemme, 1989, p. 22).
4. Bijdragen vanuit de natuurkunde (bijvoorbeeld harmonische trillingen) aan de leergang zijn hier wenselijk, vanzelfsprekend. Het feit dat dit fenomeen uit het natuurkundeprogramma voor het voortgezet onderwijs geschrapt is doet hieraan niets af. Wellicht kan een geïntegreerde, constructieve benadering, als in dit artikel voorgesteld, tot een herwaardering van harmonische trillingen aanleiding zijn.
5. Kindt (1989) koos voor deze grafische benadering, afgewisseld met berekeningen. Eerst worden waarden van sin x berekend met een rekenmachientje voor waarden van x in de buurt van o; voor kleine waarden van x blijkt sin x = x te zijn. Vervolgens, nadat (sin x)' gelijk verondersteld wordt aan cos x, worden waarden van $\frac{\sin(x + 0{,}001) - \sin(x - 0{,}001)}{0{,}002}$ en cos x met elkaar vergeleken. De veronderstelling wordt bevestigd.
6. a) Door het spelen met parameters wordt de kettingregel voor het differentiëren van sinusfuncties in speciale gevallen gevonden.
   b) Achteraf kunnen de verworven inzichten numeriek geverifieerd worden door dy/dt te berekenen met behulp van een computer, bijvoorbeeld voor geleidelijk toenemende t op [0,2], bijvoorbeeld met 0,1 tegelijk (De Lange & Kindt, 1984).
   c) Vooruitgrijpen op de kettingregel kan in tweede instantie nogmaals gedaan worden door de hellingfunctie van sinusoïden met variërende perioden (frequenties) te beschouwen (Kindt, 1989, hoofdstuk 9).
   d) De leerlijn zou beëindigd kunnen worden met kwesties als de theoretische fundering van de sinustabel of de gewone differentiaal vergelijking in verband met de slinger en dergelijke.

Literatuur

Brink, F.J. van den (1987). Children as arithmetic book authors. *For the learning of Mathematics* 7, 2, 44-48.

Brink, F.J. van den (1990). De langste dag. *Nieuwe Wiskrant* 9, 3, 29-36.

Clarke, D.J., D.M. Clarke & C.J. Lovitt (1990). Changes in Mathematics Teaching Call for Assessment Alternatives, NCTM 1990 Yearbook, *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s*, 118-129.

COW (1989). *Raamplan W12-16*. Utrecht/Enschede.

Freudenthal, H. (1978). What is a mathematical attitude. In *Weeding and Sowing Preface to a science of Mathematics Education*, Dordrecht/Boston.

Freudenthal, H. (1983a). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht.

Freudenthal, H. (1983). Is heuristics a singular or a plural, In R. Hershkowitz (Ed.), *Proceedings of the seventh international conference of the Psychology of Mathematics Education*, (pp.38-50), Rehovot Israel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education China Lectures*. Dordrecht.

Freudenthal, H. en S. Kemme (1989). Sinusfuncties. *Nieuwe Wiskrant 9*, 1, 20-23.

Galen, F., e.a. (1985). *Rekenen in een tweede taal* (hierin hoofdstuk 5). Enschede. Het werken met contextopgaven, pp. 47-64.

Gardner, H., Assessment in Context: The Alternative to Standardized Testing, In B.Gifford (Ed.), *Report of the Commission on Testing and Publifc Policy*, Boston: Kluwer (in press).

Haylock, D.W. (1987) A Framework for Assessing Mathematical Creativity in Schoolchildren. *Educational Studies in Mathematics 18*, 59-74.

Heuvel-Panhuizen, M. van den (1990). Realistic Arithmetic/Mathematics Instruction and Tests, In *Contexts, Free Productions, Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education*, (pp.53-79), Utrecht.

Kilpatrick, J. (1988). Reflection and Recursion, *Educational Studies Mathematics 16*, 1-27.

Kindt, M. (1988). *Hellingen*. Utrecht.

Kindt, M. (1989). *Differentiëren*. Utrecht.

Kindt, M. (1989). *Sinus en Co*. Utrecht.

Lange, J. de (1987). *Mathematics, insight and meaning*. Utrecht.

Lange, J. de (1980). *Vlieg er eens in*. Utrecht: IOWO.

Lange, J. de & M. Kindt (1984). *Sinus*. Culemborg.

Lange, J. de & M. Kindt (1985). *Periodieke functies*. Culemborg.

Lange, J. de & M. Kindt (1985). *Differentiëren II*, Culemborg.

Lange, J. de & M. van Reeuwijk (1991). Learning and testing mathematics in context, In *The case: Data Visualization*, (in press).

Love, E. (1988). Evaluating mathematical activity, In. D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children*, (pp.249-262), London.

NCTM (Commission on Standards for School Mathematics) (1988). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. (manuscript).

Streefland, L. (1984). Dichtheden in een leerprocessen. *Tijdschrift voor Didactiek der Natuurwetenschappen* 2, 2, 72-87.

Streefland, L. (1988). Reconstructive Learning, In *Proceedings of PME XII*, Vol.I, (pp.75-92), Vesprém, Hungary.

Streefland, L. (1990). Free Productions in Teaching and Learning Mathematics, In *Context, Free Productions, Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education*, pp. 33-53, Utrecht.

Streefland, L. (1990). Testing for thinking strategies in mathematics instruction - how, if at all, is it possible?, In R. Lesh (Ed.), *Assessing Deeper and Higher - Order Understandings of Foundation-Level Mathematical Ideas*, (in press).

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education A paradigm of development al research*. Dordrecht: Reidel.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education. The Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel.

Webb, N. & D. Briars (1990). Assessment in Mathematatics Classroom, K, - 8, NCTM 1990 Yearbook, *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s*, pp. 108-117.