Fouten bij het oplossen van wiskundeproblemen en de invloed van groepswerk

Een analyse van de schriftelijke antwoorden van 600 tweedeklassers op zeven opgaven over meetkundige afbeeldingen[1]

J.Chr.Perrenet
Vakgroep Ontwikkelingspsychologie
Rijksuniversiteit Utrecht.

Summary

This article reports the results of a study in which 600 students solve a set of mathematical problems about translation, reflection and rotation. The errors which occur in the written solutions are described and categorized. A majority of students shows difficulties with formal notation. A comparison is made between the results of two subgroups. The first subgroup has been taught about the subject using small-group cooperation, the second by using an individual work method. The cooperation group performs best, especially on the more difficult problems. In the individual group the frequency of notation errors is much higher. The difference can be explained by (lack of) experience with cooperative problem solving.

1. Inleiding

In een eerder artikel in dit tijdschrift (Perrenet, 1991) werd verslag gedaan van het project Adaptief Groepsonderwijs voor 12- tot 16-jarigen. Een experimenteel wiskunde-deelcurriculum, gebaseerd op het zgn. AGO-model voor heterogene groepen, werd in tweede klassen onderzocht op uitvoerbaarheid en effectiviteit. Een belangrijk kenmerk van het experimentele curriculum was het gebruik van groepswerk (andere kenmerken staan beschreven in Herfs e.a., 1991). De leerresultaten werden vergeleken met die van een controlegroep met een curriculum met voornamelijk individueel werk. De leerstofinhouden waren in beide gevallen dezelfde: meetkundige afbeeldingen en eerstegraads vergelijkingen. De controlegroep gebruikte twee hoofdstukken uit de methode Wiskunde Lijn (Bodegraven e.a., 1987), de experimentele groep een bewerking daarvan. In beide groepen was het eerste deel van elk hoofdstuk bedoeld voor alle leerlingen: de basisstof; daarna was er een differentiatie.

Het groepswerk in de experimentele groep vond met name plaats bij de behandeling van de basisstof. De behandeling van een hoofdstuk duurde ongeveer 12 lessen, waarvan in de experimentele groep gemiddeld ongeveer een derde deel aan groepswerk werd besteed[2]. De vorm van het groepswerk met o.a. vergelijking van verschillende oplossingsmethoden en onderlinge controle staat beschreven in Perrenet (1991). De resultaten van het onderzoek toonden een groter leereffect voor de leerlingen van de experimentele groep. Het effect kon in belangrijke mate worden toegeschreven aan het gebruik van groepswerk. Het leereffect kwam tot uiting op een wiskunde-eindtoets.

Een deel van de wiskunde-eindtoets staat centraal in dit artikel, te weten zeven opgaven over het onderwerp meetkundige afbeeldingen. In een ander artikel zal een aantal opgaven over het andere onderwerp, eerstegraads vergelijkingen, behandeld worden. In beide gevallen betreft het basisstof. De opgaven werden gemaakt door bijna 600 leerlingen uit 23 klassen met 13 leerkrachten op 6 scholen. Bij de analyse gaat het om de volgende vragen:

1. *Welke fouten maken de leerlingen en in welke mate?*
2. *Is er verschil tussen de experimentele en de controlegroep voor wat betreft de soort en het aantal fouten dat wordt gemaakt?*
3. *Kunnen eventuele gevonden verschillen vanuit het werken in groepen worden verklaard?*

In dit artikel gaat het er vooral om wèlke fouten worden gemaakt, niet over de relatieve ernst van de gemaakte fouten. Uitgangspunt is dat de leerlingen serieus geprobeerd hebben de opgaven op te lossen. Deze positie is gerechtvaardigd daar de toets tevens als proefwerk meetelde.

2. Beschrijving van de opgaven

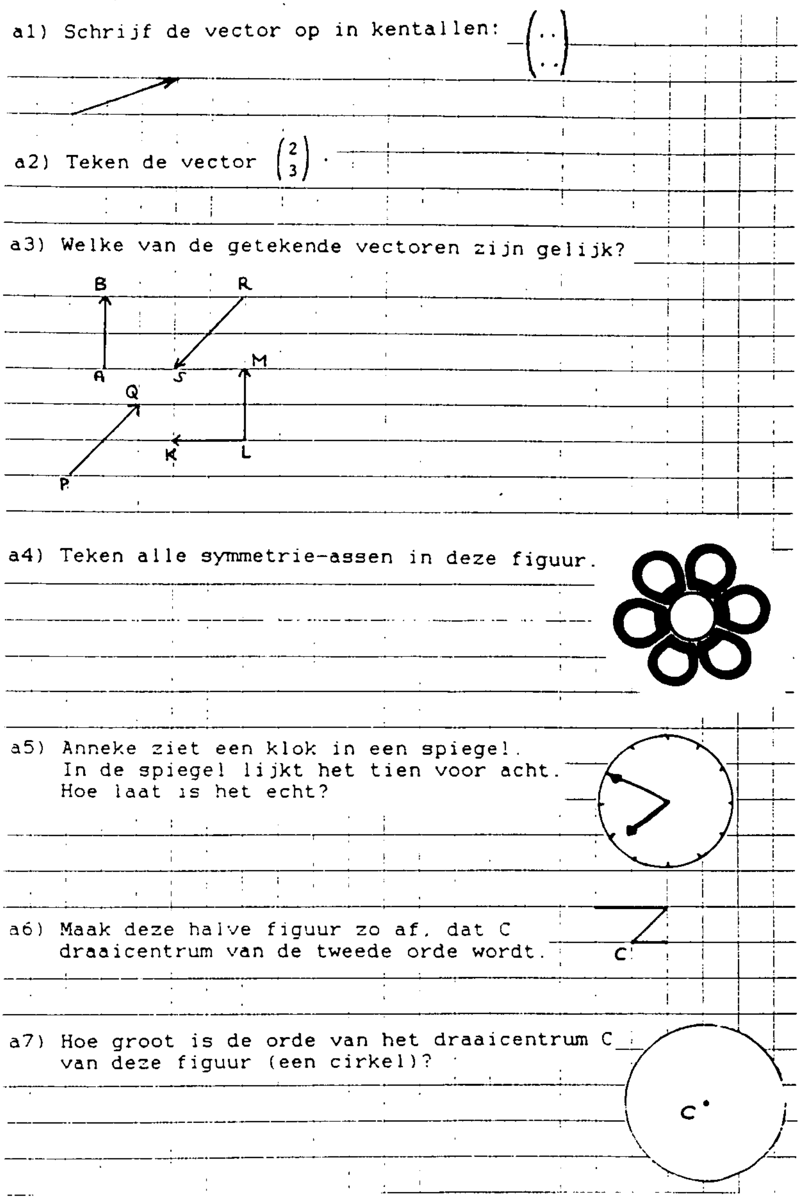
De opgaven werden geconstrueerd in overleg met docenten, die met de methode Wiskunde Lijn goed bekend waren. De leerdoelen van de basisstof waren: figuren spiegelen in een lijn, symmetrie-assen van figuren opsporen, de orde van draaicentra bepalen, een translatie over een vector uitvoeren, bij een translatie de vector opschrijven, vectoren schrijven met pijlen en met kentallen, gelijke vectoren tekenen en opzoeken, vectoren optellen (Van Bodegraven e.a., 1987; Perrenet, 1988).

In figuur 1 zijn de opgaven afgebeeld[3]. De opgaven a1 tot en met a5 lijken veel op de opgaven uit beide curricula; a6 en vooral a7 staan iets verder van de stof af. De opgaven bestrijken een belangrijk deel van de opgesomde leerdoelen.

3. Resultaten over de totale groep

Een eerste indruk van de resultaten per opgave wordt gegeven in tabel 1, waarin de percentages goede oplossingen zijn afgedrukt. De opgaven zijn met trefwoorden aangeduid omwille van de herkenbaarheid binnen dit artikel. We zien dat de opgaven a3 en a7 relatief moeilijk zijn. Voor a7 is dat te

begrijpen, aangezien het geen standaardopgave is. Voor a3 echter valt het resultaat als standaardopgave tegen.



a1) Schrijf de vector op in kentallen: $\begin{pmatrix}..\\..\end{pmatrix}$

a2) Teken de vector $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

a3) Welke van de getekende vectoren zijn gelijk?

a4) Teken alle symmetrie-assen in deze figuur.

a5) Anneke ziet een klok in een spiegel.
In de spiegel lijkt het tien voor acht.
Hoe laat is het echt?

a6) Maak deze halve figuur zo af, dat C draaicentrum van de tweede orde wordt.

a7) Hoe groot is de orde van het draaicentrum C van deze figuur (een cirkel)?

Fig.1. De geanalyseerde opgaven over meetkundige afbeeldingen

Tabel 1: Percentages goede oplossingen in totale groep (N=596)

opgave	percentage goede oplossingen
a1/kentallen?	94
a2/tekening?	76
a3/vectoren	25
a4/blaadjes	63
a5/klok	81
a6/afmaken	48
a7/cirkel	28

In het vervolg zullen de resultaten per opgave nader bekeken worden. Aan de hand van figuur 2 en 3 geven we per opgave een overzicht van de meest gemaakte fouten. Bij elk type fout wordt het percentage leerlingen gegeven dat de fout heeft gemaakt. Eenzelfde leerling kan soms binnen één opgave fouten maken uit meerdere categorieën; de percentages kunnen daarom samen meer dan 100 bedragen. Bij opgave a1/kentallen? bijvoorbeeld kwam het antwoord met de kentallen -1 en 3 voor; dat is te begrijpen als combinatie van verwisseling van kentallen (kolom 2) en een tekenfout (kolom 4).

De voorbeelden in figuur 2 en 3 zijn zo gekozen, dat een bepaald type fout zo zuiver mogelijk zichtbaar wordt. De voorbeelden binnen een categorie zijn in het algemeen in volgorde van frequentie geplaatst. Zo komt bijvoorbeeld bij opgave a1 de telfout met de kentallen 3 en 2 vaker voor dan de telfout met de kentallen 4 en 1.

Foutenanalyse per opgave

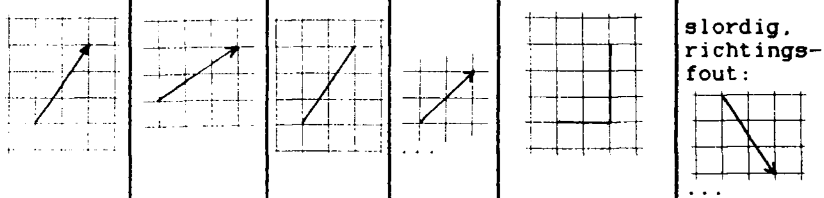
- a1/kentallen? (zie fig.2): 94% maakt de opgave geheel goed. 3% van de leerlingen maakt de fout de kentallen om te wisselen. Verder worden er door 3% telfouten gemaakt (een kental is één te groot of één te klein). Een kleiner groepje (1%) maakt fouten met tekens (verwisseling van de positieve en negatieve richtingen in het vlak; meestal bij de x-richting). Bij 'diversen' (1%) zijn enkele voorbeelden van vaak unieke afwijkende fouten gegeven.
- a2/tekening? (fig.2): 76% maakt geen fouten. 14% verwisselt de kentallen ('kentallen omgewisseld'). 7% tekent geen vector maar een ongericht lijnstuk ('pijlpunt weg'). 3% vertelt zich in het aantal horizontale en/of verticale stapjes (een telfout: één te veel of één te weinig). 2% tekent alleen de horizontale en verticale stapjes en niet de vector zelf. Onder 'diversen' (4%) is een fout geplaatst die sterke overeenkomst vertoont met de teken(s)fout van opgave a1: de vector is verkeerd gericht.

a1/kentallen?

geheel goed 94%	kentallen omgewisseld 3%	telfout 3%	teken(s) fout 1%	diversen 1%
$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ ...	$\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ ...	$\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ ...

a2/tekening?

geheel goed 76%	kentallen omgew. 14%	pijlpunt weg 7%	telfout 3%	alleen vert. en horiz. 2%	diversen 4%
			...		slordig, richtingsfout: ...



a3/vectoren

geheel goed 25%	notatie anders 59%	ongelijke vect. 18%	andere gelijke 14%	meer gelijke 8%	ook ongel. 4%	div. 3%
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{LM}$, $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{LM}$	(zie onder)	$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{RS}$ ...	$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}=\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{ML}$ ...	$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{LM}$ èn $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$ ...	$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{LM}$ èn $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{RS}$ ...	geen ...

vectornotaties

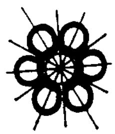
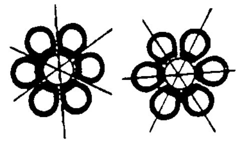
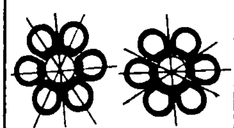
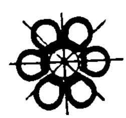
goed 41%	pijl weg 40%	kl. letters 21%	ipv de pijl 12%	3tal 7%	kolommen 2%	andere pijl 2%	diversen 2%
$\overrightarrow{AB}$	AB	$\overrightarrow{ab}$ $\overrightarrow{aB}$ ...	A-B A,B van A naar B A en B A+B A.B (A,B) A/B A B (A B)	$\overrightarrow{KLM}$	$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}B\\A\end{pmatrix}$ B A $\begin{pmatrix}\overrightarrow{A}\\\overrightarrow{B}\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\overrightarrow{B}\\\overrightarrow{A}\end{pmatrix}$	$\overleftarrow{BA}$ $A \rightarrow B$ $\overrightarrow{\overrightarrow{A}\overrightarrow{B}}$ $\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}$ $\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}$ $\overline{\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}}$ $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$	$\begin{pmatrix}A+B\\=\\L\\+\\M\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}B+a\\m+L\\k+L\end{pmatrix}$ (B,a m,L) ...

Fig.2. Antwoordcategorieën en voorbeelden bij a1, a2 en a3

- a3/vectoren (fig.2): Slechts 25% maakt deze opgave geheel goed. Veel leerlingen (59%) gebruiken niet de conventionele vectornotatie ('notatie anders'). We zullen later nader ingaan op de wèl gehanteerde notaties. 18% van de leerlingen wijst in plaats van de juiste vectoren ongelijke, meestal tegengestelde, vectoren aan ('ongelijke vectoren'). 14% noemt in plaats van de juiste vectoren andere gelijke vectoren, die echter niet in de tekening gegeven zijn ('andere gelijke'). Verder worden soms de juiste vectoren wel genoemd, maar daarnaast ook gelijke, niet getekende vectoren ('meer gelijke', 8%) of ook ongelijke (4%). Bij 'diversen' (3%) komt het antwoord voor, dat er geen gelijke vectoren zijn.
- a4/blaadjes (zie fig.3): Door 63% worden de juiste symmetrie-assen getekend. Bij 22% zijn alleen de assen tussen of alleen de assen door de blaadjes aangegeven. 10% geeft wel beide soorten assen aan, maar één of meer assen missen ('2 soorten assen, niet compleet'). Bij 3% - categorie 'andere lijnen' - lijkt het alsof tijdens het tekenen de oorspronkelijke figuur is vergeten: de tekening bestaat uit een soort assenkruis van twee correcte symmetrie-assen met daarbij de schuine deellijnen van dat assenkruis. Onder 'diversen' (3%) vallen de zeer slordige en afwezige tekeningen.
- a5/klok (fig.3): Deze opgave blijkt relatief eenvoudig; 81% doet het geheel correct. De opgave was als gesloten bedoeld, maar een enkele leerling wijst erop, dat de stand van de spiegel ook anders dan verticaal kan zijn[4]. Sommige leerlingen (11%) plaatsen de spiegel kennelijk horizontaal, maar zien niet dat de stand van de kleine wijzer dan onmogelijk is ('afleesfout'). Anderen (7%) plaatsen de spiegel wel verticaal, maar vertellen zich, vooral bij de grote wijzer ('telfout'). Antwoorden als 10 voor half 2 (3%) zijn te begrijpen als een puntspiegeling, gecombineerd met een afleesfout (weer een onmogelijke stand van de kleine wijzer). Bij antwoorden als 10 voor 4 is slechts één der wijzers gespiegeld (onder 'diversen', 3%).
- a6/afmaken (fig.3): Door 48% van de leerlingen wordt deze opgave foutloos gemaakt. 29% vult de figuur zo aan dat deze wel een rotatiecentrum van de tweede orde krijgt, maar een centrum ongelijk aan het getekende punt C ('ander rotatiecentrum'). 11% maakt er een spiegelsymmetrische figuur van, meestal met een horizontale as door C. Bij een aantal leerlingen (9%) is moeilijk te begrijpen welke gedachtengang tot de vele verschillende zeer afwijkende figuren heeft geleid ('afwijking groot'). Bij anderen (2%) is duidelijk sprake van een onnauwkeurigheid bij het tekenen ('afwijking klein'). Onder 'diversen' (2%) zijn onder meer gerekend de leerlingen die niets of zeer slordig hebben getekend.
- a7/cirkel (fig.3): Deze opgave kan als transferopgave worden aangemerkt (verticale transfer, zie bijvoorbeeld Perrenet, 1985): een begrip als 'oneindig' is formeel nog niet behandeld. Toch geeft 28% van de leer-

lingen een antwoord, dat getuigt van inzicht. 21% geeft als antwoord 1, waarbij een enkeling een toelichting geeft in de trant van "hij blijft altijd hetzelfde" en "want er zitten geen vierguurtjes (!) in", maar ook "als de C erbij hoort". Verschillende kleine tot middelgrote getallen worden door

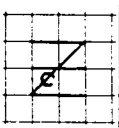
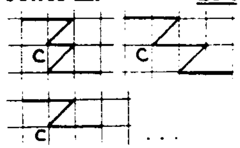
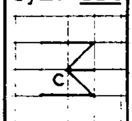
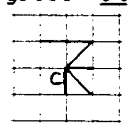
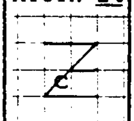
a4/blaadjes

geheel goed 63%	slechts één soort assen 22%	2 soorten assen, niet compleet 10%	andere lijnen 3%	div. 3%
		 ...	 ...	slordig, niets

a5/klok

geheel goed 81%	aflees-fout 11%	telfout 7%	puntspiegeling 3%	diversen 3%
10 over 4 (...)	10 over half 11 ...	10 over 5 10 over 3 ...	10 voor half 2 ...	10 voor 4 10 over 8 ...

a6/afmaken

geheel goed 48%	ander rotatie-centrum 29%	spiegel-sym. 11%	afwijking groot 9%	afwijk. klein 2%	div. 2%
	 ...	 ...	 ...	 ...	niets slordig ...

a7/cirkel

geheel goed 28%	1 21%	beperkte getal. 10%	grote get. 9%	draai-hoek 9%	0 6%	geen 6%	div. 11%
ontelbr., oneindig, zoveel je wilt, ...	1	4, 2, 6, 8, 10, 3, 7, 12, 24 28	360, 100, ...	360° ...	0	kanniet, geen.... (zonder uitleg)	niets ...

Fig.3. Antwoordcategorieën en voorbeelden bij a4, a5, a6 en a7

10% als antwoord gegeven ('beperkte getallen'). Deze antwoorden zijn in het algemeen moeilijk te interpreteren; een paar leerlingen hebben stralen in de cirkel getekend om een orde vast te leggen, één geeft aan de hokjes om de cirkel te hebben geteld. Grote getallen als 360 en 100 wijzen op het alleen in hele graden denken bij 9% van de leerlingen (soms worden dan bovendien nog fouten in het aantal graden van de cirkel gemaakt). De antwoorden 360° en dergelijke ('draaihoek', 9%) geven antwoord op een andere vraag dan de gestelde; ze worden soms in combinatie gegeven met het antwoord 1. 6% geeft als antwoord 0, mogelijk te verklaren als de vertaling in een getal van de antwoorden uit de volgende categorie: geen orde, e.d. ('geen', 6%). Relatief vaak tenslotte vullen leerlingen niets in. Dat type antwoord is geplaatst onder 'diversen' (10%).

Analyse globaal

Opvallend is, dat er bij elementaire opgaven, zoals a1/kentallen? en a2/tekening? toch fouten voorkomen.

Globaal gezien valt de grote *diversiteit* aan onjuiste antwoorden op. In de schema's zijn slechts voorbeelden gegeven van de meest frequente antwoorden. Onder diversen vallen vele, vaak unieke, oplossingen, die niet expliciet zijn vermeld. En bovendien zijn de vele combinaties van fouten uit het leerlingenwerk voor de duidelijkheid zo veel mogelijk vermeden in de beide schema's.

Een ander kenmerk van de fouten is de *universaliteit*. Het merendeel van de categorieën bleek in vrijwel elk van de 23 klassen vertegenwoordigd. Of de fouten ook universeel ten opzichte van het gebruikte leerboek zijn is uit de gegevens natuurlijk niet af te leiden: alle leerlingen kregen onderwijs uit een bepaalde methode en een bewerking daarvan.

Vectornotaties

De moeilijkste opgave, a3/vectoren, laat vooral zien hoe weinig leerlingen de conventionele vectornotatie gebruiken (41%). In figuur 3 zijn verschillende notaties getoond, die leerlingen hanteren. Maar liefst 40% laat de pijl eenvoudig weg ('pijl weg'). 21% gebruikt kleine letters, ook door elkaar met hoofdletters. 12% van de leerlingen verbinden de letters voor begin- en eindpunt van de vector (A en B) op andere wijze dan met een pijl, bijvoorbeeld door een minteken of een komma ('i.p.v. de pijl'). Een groep van 7% voert de 'vector' van K naar M op via L (geen vector, maar een route). 2% gebruikt een verticale notatie die aan kentallen doet denken ('kolommen'). Nog eens 2% gebruikt een pijl (of meerdere pijlen) op ongewone wijze ('andere pijl'). Onder 'diversen' (2%) tenslotte zijn de ingewikkelder constructies verzameld; zie enkele voorbeelden in figuur 3.

4. Verschillen tussen beide subgroepen

In het artikel over het AGO-project in TD-ß (Perrenet, 1991) werd reeds vermeld, dat de experimentele groep (met veel groepswerk) over afbeeldings- en vergelijkingsopgaven samen gemiddeld significant beter scoorde dan de controlegroep (met veel individueel werk). Aan het verschil werd in gelijke mate bijgedragen door de score op beide soorten opgaven. We beperken ons hier weer tot de afbeeldingsopgaven en daarbinnen weer tot de toetsopgaven over de basisstof.

Tabel 2: De percentages goede oplossingen voor beide groepen

opgave	pct.goed in exper.groep (N=396)	pct.goed in contr.groep (N=200)	verschil in pct.	pct.goed in totale groep (N=596)
a1/kentallen?	94	94	0	94
a2/tekening?	77	73	4	76
a3/vectoren	31	12	19*	25
a4/blaadjes	65	60	5	63
a5/klok	84	76	8*	81
a6/afmaken	54	37	17*	48
a7/cirkel	33	19	14*	28

* = significant op 0.05

In tabel 2 zijn de percentages goede oplossingen van tabel 1 uitgesplitst over beide subgroepen. Bij elke opgave is het percentage goede oplossingen in de experimentele groep groter of gelijk aan het percentage in de controlegroep. Uit de laatste twee kolommen van tabel 2 blijkt, dat het verschil tussen beide groepen toeneemt met de moeilijkheid van de opgaven (rangcorrelatie rho=.75, significant op niveau 0.05 bij rechtseenzijdige toetsing). De leerlingen van de experimentele groep maken vooral minder fouten bij de relatief moeilijke opgaven. Multivariate toetsing (Mellenbergh, 1976) van de verschillen levert op dat bij de opgaven a3/vectoren, a5/klok, a6/afmaken en a7/cirkel het verschil significant is op niveau 0.05: de Chi-kwadraat waarden zijn respectievelijk 12.92, 9.81, 14.78 en 12.29 bij één vrijheidsgraad (Hayes, 1981).

Verschillen binnen opgaven

We gaan nu de verschillen bij de vier opgaven a3, a5, a6 en a7 nader onderzoeken. In figuur 2 en 3 werd een overzicht gegeven van verschillende soorten fouten bij de diverse opgaven. De controlegroep maakt meer fouten op de opgaven a3, a5, a6 en a7. De vraag is nu of het verschil binnen die opgaven over alle soorten fouten gelijkmatig is verdeeld of dat er alleen bij bepaalde fouten grote verschillen zijn. Het blijkt dat de percentages van de diverse categorieën in beide groepen meestal vergelijkbaar zijn; in enkele gevallen echter is het percentage in de controlegroep veel hoger dan in de experimentele groep. In tabel 3 zijn bij elk der vier opgaven de percentages gegeven van de categorie met het grootste verschil tussen beide groepen.

Tabel 3: Fouttypen met grootste percentageverschillen tussen beide groepen

opgave	fouttype	pct. in exper. groep (N=396)	pct. in contr. groep (N=200)	verschil in pct.	pct.in totale groep (N=596)
a3/vectoren	notatie anders	50	78	28*	59
a5/klok	afleesfout	10	14	4	11
a6/afmaken	ander centrum	26	34	8	29
a7/cirkel	1	19	26	7	21

* = significant op 0.05

Net als bij tabel 2 zien we, dat het verschil tussen beide groepen toeneemt naarmate er meer fouten worden gemaakt (vergelijk kolom 5 en 6 van tabel 3). Na multivariate toetsing blijkt alleen het verschil bij opgave a3 significant (Chi-kwadraat = 40.48 bij één vrijheidsgraad). In de controlegroep worden dus veel meer fouten met de vectornotatie gemaakt dan in de experimentele groep.

5 Conclusies en discussie

Een aantal fouten op opgaven over meetkundige afbeeldingen is in kaart gebracht. Leerlingen maken veel verschillende fouten (diversiteit van het foutenpatroon). Dezelfde fouten komen in veel verschillende klassen voor (universaliteit van het foutenpatroon). Overal maken leerlingen alle fouten die men kan bedenken en nog veel meer, zou men kunnen stellen. Ook in elementaire standaardopgaven worden fouten gemaakt. Een groot aantal leerlingen heeft moeite met de conventionele notatie van een vector door middel van twee hoofdletters en een pijl. De experimentele groep produceert bij vrijwel alle opgaven naar verhouding meer goede oplossingen dan de controlegroep. Het verschil tussen beide groepen komt vooral tot uiting bij de relatief moeilijke opgaven. In de experimentele groep wordt veel vaker de conventionele vectornotatie gebruikt dan in de controlegroep.

Vectornotaties

We gaan dieper in op het gebruik van afwijkende notaties bij opgave a3/-vectoren. In de leerdoelen (zie par. 1) wordt het schrijven van een vector met een pijl (de conventionele vectornotatie) expliciet genoemd. In bepaalde fasen van het leerproces kunnen eigen notaties van leerlingen best worden getolereerd of zelfs aangemoedigd, zeker binnen de opvattingen van het realistisch wiskundeonderwijs: ze kunnen dan onderdeel zijn van eigen constructies (Treffers, 1987). Toch zal op zeker moment naar convergentie moeten worden gestreefd, teneinde spraakverwarring te voorkomen. Ook moeten bepaalde eisen aan de eigen notaties gesteld worden:

1. De karakteristieke eigenschappen van het aangeduide object moeten vertegenwoordigd zijn;
2. Gelijkenis met notaties voor andere objecten binnen dezelfde wiskundige context moet worden vermeden.

Bij het begrip vector zijn de karakteristieke eigenschappen in dit geval de lengte (van het lijnstuk AB) en de richting (van A naar B). In het in figuur 2 beschreven geval kunnen dan sommige notaties worden toegestaan, bijvoorbeeld de notatie 'van A naar B' (onder 'ipv de pijl') en de notatie met de pijl tussen de hoofdletters (onder 'andere pijl'). Dit zijn echter geen eigen notaties van leerlingen, maar notaties die in het curriculum zijn gebruikt als aanloop op de conventionele. De meeste notaties uit het schema van figuur 2 moeten worden afgekeurd. Ze duiden slechts op verwarring van verschillende conventionele vectornotaties: het tweetal hoofdletters met de pijl erboven, de kentallenkolom met haken en de kleine letter met de pijl erboven[5]. Vooral de voorbeelden onder 'diversen' getuigen van deze verwarring.

Tabel 4: Vectornotaties in verschillende leerboeken

methode	notaties	aantal
Wiskunde Lijn	kentallen, 2 hoofdletters met pijl, 1 kleine letter met pijl	3
Sigma	kentallen, 2 hoofdletters met pijl	2
Moderne Wiskunde	kentallen, 2 hoofdletters met pijl,	4
	1 kleine letter met pijl, hoek/lengte*	2
Getal & Ruimte	kentallen, 2 hoofdletters met pijl	2
Exact	kentallen, lengte/hoek**	2

* een voorbeeld van hoek/lengte-notatie is 180°/30

** een voorbeeld van lengte/hoek-notatie is (30;180)

De resultaten bij opgave a3/vectoren doen vermoeden dat het betreffende leerboek te veel verschillende notaties binnen één hoofdstuk probeert aan te leren. In tabel 4 worden enkele leerboeken vergeleken op het punt van het aantal verschillende notaties bij de invoering van vectoren, te weten Wiskunde Lijn, Sigma (Van Bemmelen e.a., 1984), Moderne Wiskunde (Abels e.a., 1987), Getal & Ruimte (Dijkhuis e.a., 1984) en Exact (Van Alten e.a., 1988). Het blijkt, dat in andere Nederlandse methoden meestal minder verschillende notaties bij de invoering van het begrip vector worden gebruikt. In één geval echter (Moderne Wiskunde) wordt zelfs met vier verschillende notaties gewerkt. Het zou interessant zijn om te onderzoeken of de notatieverwarring in dat geval nog groter is. Het streven naar meerdere notaties voor hetzelfde begrip is op zich een goede zaak. Skemp (1971) legt uit, dat het gebruik van meerdere symbolen voor hetzelfde begrip in de wiskunde classificatie mogelijk maakt op verschillende manieren; die aspecten van het begrip kunnen benadrukt worden, die in een bepaalde situatie het meest relevant zijn.

Groepswerk versus individueel werk

Dat de resultaten in de experimentele groep over de eindtoets als geheel gemiddeld beter zouden zijn dan in de controlegroep was een hypothese van het project AGO 12-16 (Herfs e.a., 1991). Uit de analyse bleek de hoeveelheid groepswerk de belangrijkste verklarende factor voor de leerwinst van de experimentele groep. Blijft de vraag naar het verband tussen het groepswerk en de nu geconstateerde leerwinst op met name de moeilijke opgaven enerzijds en op het hanteren van een conventionele wiskundige notatie anderzijds.

Riemersma (1991) wijst op het belang van feedback op het oplossingsproces bij het leren oplossen van wiskundige problemen. Veel beter dan bij alleen feedback op het eindantwoord wordt er bij feedback op het *proces* geleerd het eigen oplossingsproces te controleren en de aanpakstrategieën te verbeteren. De leerlingen van de experimentele groep in ons onderzoek hebben in het groepswerk van medeleerlingen dergelijke feedback gekregen, veel meer dan de individueel werkende leerlingen in de controle groep. Pas bij relatief moeilijke problemen is controle van het eigen oplossingsproces en een goede aanpakstrategie noodzakelijk. Dit verklaart, dat er bij relatief eenvoudige opgaven weinig verschil tussen de resultaten van beide groepen was. Steun voor deze verklaring is ook te vinden bij Schoenfeld (1987), die aangeeft dat efficiënte zelfregulatie bij probleemoplossen op natuurlijke wijze geleerd wordt in het groepswerk. In een goed functionerende groep komen meerdere gezichtspunten naar voren op een probleem, die vervolgens worden bediscussieerd. Een goede individuele probleemoplosser argumenteert met zichzelf over de beste aanpak. Duidelijk is weer dat een dergelijke *metacognitieve* activiteit vooral bij relatief moeilijke problemen zijn vruchten afwerpt. Tenslotte bespreken we het meer hanteren van de conventionele vectornotatie door de leerlingen, die in groepen hebben samengewerkt. Wanneer de leerlingen elkaars oplossingen vergelijken en bediscussiëren zullen notatieverschillen als eerste opvallen. Gebruik van een verschillende notatie maakt het moeilijker tot de oplossing zelf door te dringen. Wanneer dan de notatie ter sprake komt en voor een gemeenschappelijke wordt gekozen, zal dat vaak de conventionele zijn, die door het boek en de docent wordt gebruikt. Bij de individueel werkende leerlingen zal een afwijkende notatie zich veel langer kunnen handhaven.

De groepsprocessen, die hier als verklaring zijn opgevoerd, zijn een nadere bestudering waard.

Noten

1. Met dank aan G.Erkens, W.Groen en J.Terwel voor hun commentaar op een eerdere versie van dit artikel.
2. In beide groepen was er in de periode van de basisstof ook enig klassikaal werk.
3. De volgorde in de toets was anders dan hier omwille van de overzichtelijkheid gepresenteerd, nl. a1, a2, a5, a4, a6, a3, a7. De a staat voor afbeeldingsopgave.
4. Bij bepaalde schuine standen kunnen andere tijden worden gezien, doordat de stand van de kleine wijzer niet precies kan worden afgelezen. Er ontstaan dan oplossingen als 5 over 3, 15 over 5 en 25 over 6. In een enkel geval is zo'n antwoord gegeven.
5. Laatstgenoemde notatie werd in het deel van het hoofdstuk na de basisstof behandeld.

Literatuurlijst

Abels, M.J. e.a. (1987). *Moderne Wiskunde 2mhv, vijfde editie*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Alten, T. van e.a. (Werkgroep Zestien min - Zestien plus)(1988). *Exact, deel 2.* Amsterdam: Meulenhoff Educatief.

Bemmelen, T. van e.a. (1984). *Sigma deel 2.* Groningen: Wolters-Noordhoff.

Bodegraven, D. van e.a. (1987). *Wiskunde Lijn, deel 2a.* Groningen: Jacob Dijkstra.

Dijkhuis, J.A. e.a. (1988). *Getal & Ruimte B1.* Culemborg: Educaboek BV.

Hayes, W.L. (1981). *Statistics*. Japan: Holt-Saunders.

Herfs, P.G.P., E.H.M. Mertens, J.Chr. Perrenet & J. Terwel (1991). *Leren door samenwerken.* Forum 14, Amsterdam/Lisse: Swets & Zeitlinger B.V.

Mellenbergh, G.J. (1976). *Bekend, maar onbemind.* Amsterdam: Universiteit van Amsterdam.

Perrenet, J.Chr. (1985). Een transfertest voor wiskunde. *Euclides 61,* 137-144.

Perrenet, J.Chr. (1988). *AGO-Wiskundelijn, tweede versie. Bewerking van twee hoofdstukken Wiskunde Lijn: leerlingmateriaal en docentenhandleiding*. Utrecht: ISOR/Vakgroep Onderwijskunde, Rijksuniversiteit Utrecht. (interne publicatie)

Perrenet, J.Chr. (1991). Groepswerk bij wiskunde. *Tijdschrift voor Didactiek der β-wetenschappen 3*, 157-176.

Riemersma, F.S.J. (1991). *Leren oplossen van wiskundige problemen in het voortgezet onderwijs*. Amsterdam: Stichting Kohnstamm Fonds voor Onderwijsresearch, Proefschrift Universiteit van Amsterdam.

Schoenfeld, A.H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A.H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education*, 189-215. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Skemp, R.R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Aylesbury: Hazel Watson & Viney Ltd.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions*. Dordrecht: D.Reidel Publishing Company.