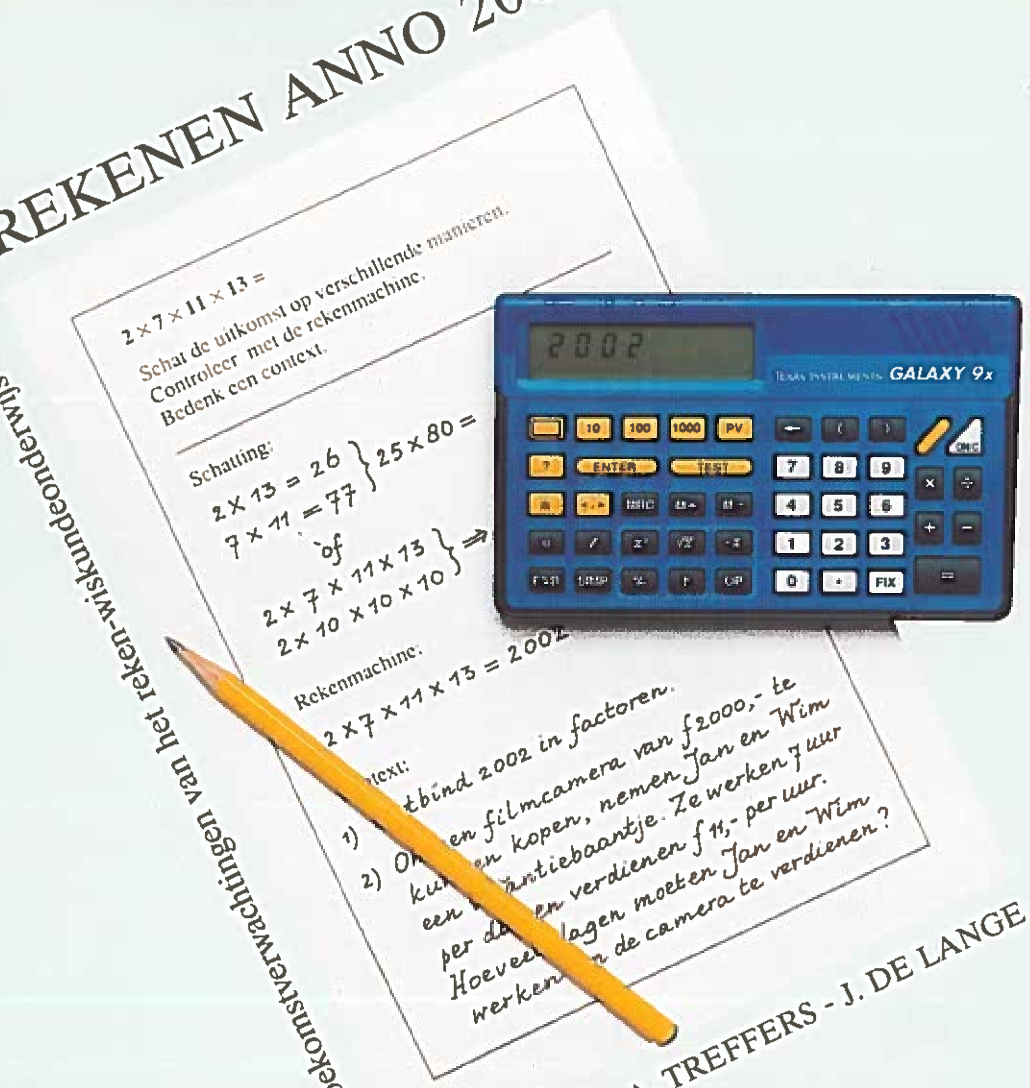
REKENEN ANNO 2002

– toekomstverwachtingen van het reken-wiskundeonderwijs –



F. GOFFREE - A. TREFFERS - J. DE LANGE

nvorwo nederlandse vereniging tot ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs

REKENEN ANNO 2002

- toekomstverwachtingen van het reken-wiskundeonderwijs -

A. Treffers
F. Goffree
J. de Lange

nvorwo

1982-1992

nederlandse vereniging tot ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs

Inhoudsopgave

Ten geleide

E. Wijdeveld
voorzitter NVORWO

'Rekenen anno 2002' is de neerslag van een symposium dat de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs (NVORWO) in november 1992 organiseerde ter gelegenheid van haar tienjarig bestaan.

Drs. J. Wallage, staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen spreekt in zijn 'Voorwoord' tot deze bundel over 'een stille revolutie', als hij constateert dat het reken-wiskundeonderwijs in Nederland de afgelopen decennia een even geleidelijke als spectaculaire ontwikkeling heeft doorgemaakt.
Welnu, drie hoogleraren, die een cruciale rol gespeeld hebben in die spectaculaire vernieuwing van het reken-wiskundeonderwijs in Nederland, geven hun karakteristieke visie op de verdere ontwikkeling van dat onderwijs naar het jaar 2002.

Prof. dr. A. Treffers, Freudenthal Instituut, en namens de NVORWO hoogleraar aan de Universiteit van Utrecht, schetst in zijn bijdrage 'Terug naar de toekomst' de kern van de ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs in de basisschool. Welke verwachtingen bestonden er in de jaren zeventig en tachtig ten aanzien van de (snelle) invoering van dat 'realistisch' reken-wiskundeonderwijs in de basisschool en hoe kijken we daar nu tegen aan: zal de onderwijspraktijk van 2002 de onderwijsdoelstelling van 1992 dekken?

Prof. dr. F. Goffree, SLO en Universiteit van Amsterdam, beschrijft in zijn artikel 'De Pabo-bv anno 2002', de ontwikkeling van het reken-wiskunde & didactiekonderwijs in de lerarenopleiding basisonderwijs. Aan de hand van examenopgaven uit verschillende perioden (en hun 'reflectieve oplossingen') schetst hij de historische ontwikkeling naar een geïntegreerd opleidingsonderwijs. Ten slotte construeert hij een Pabo-examen anno 2002 – ten aanzien van het onderdeel 'gecijferdheid' – om zijn toekomstverwachting concreet gestalte te geven.

Prof. dr. J. de Lange, Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht, laat er in 'Tussen einde en begin' geen misverstand over bestaan, dat de recent ingediende leerplanvoorstellen voor twaalf- tot zestienjarigen, niet het einde, maar de start betekenen van een fundamentele vernieuwing van het reken-wiskundeonderwijs in het voortgezet onderwijs. Wat zal de invloed worden van de technologische ontwikkeling op dat wiskundeonderwijs? Heeft elke leerling anno 2002 zijn eigen 'interactieve zak-video' om moeilijke wiskunde-opgaven op te lossen?

Gaarne beveelt de NVORWO dit symposiumboek in de aandacht aan van allen die het reken-wiskundeonderwijs een goed hart toedragen, ook nog in 2002 ...

Voorwoord

J. Wallage
Staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen

Het plaatsen van een nieuw baken op weg naar kwalitatief hoogstaand reken-wiskundeonderwijs in Nederland. Dat was het doel achter het symposium 'Rekenen anno 2002' dat de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs (NVORWO) ter gelegenheid van haar tienjarig bestaan heeft georganiseerd. Wie de hier verzamelde bijdragen doorleest, kan zichzelf ervan overtuigen dat de opzet geslaagd is. Anders gezegd: het baken staat er!

In de afgelopen decennia heeft het reken-wiskundeonderwijs in Nederland een even geleidelijke als spectaculaire ontwikkeling doorgemaakt. 'Een stille revolutie', die niet in het minst te danken is aan het baanbrekende werk, zoals dat in de jaren zeventig onder leiding van wijlen prof.dr. H. Freudenthal is verricht door het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO). In de jaren tachtig is dit werk krachtdadig voortgezet: door het Freudenthal Instituut, maar ook in de vorm van het Panama-project van de Hogeschool Midden Nederland, de activiteiten van het Instituut voor Leerplanontwikkeling (SLO) en de bijdragen van vele anderen. Ook de NVORWO heeft in de afgelopen jaren een belangrijke intermediaire rol richting scholen gespeeld.

Die inspanningen hebben onder meer geleid tot de publikatie in 1989 van de 'Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool' (prof.dr. A. Treffers e.a.). Hierin zijn de kerndoelen voor het reken-wiskundeonderwijs voor de basisschool vervat, zoals de SLO die in 1988 formeel bij het ministerie van Onderwijs en Wetenschappen heeft ingediend. Daarmee werd de grondslag gelegd voor een 'realistisch' reken-wiskundeonderwijs, dat inmiddels reeds op meer dan tachtig procent van de basisscholen is ingevoerd. De periodieke peilingen van het onderwijsniveau (PPON) geven een positief beeld van de resultaten van het 'realistisch' reken-wiskundeonderwijs. In de door de SLO en de Commissie Herziening Eindtermen in opdracht van het ministerie van Onderwijs en Wetenschappen opgestelde kerndoelen rekenen-wiskunde voor het basisonderwijs, die aansluiten bij de gangbare methoden, is de 'Proeve ...' verwerkt. Het verheugt mij dat de vele inspanningen hebben geleid tot een hoge kwaliteit van het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs, zoals blijkt uit het onlangs gepubliceerde OESO-rapport 'Education at a glance'.

Voor wat betreft de eerste fase van het voortgezet onderwijs: inmiddels heeft ook de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs, onder leiding van prof.dr. J. de Lange, mij haar adviezen aangeboden voor nieuwe examenprogramma's *C* en *D* en een nieuw leerplan. Ook dit zijn vruchten van het werken met een 'realis-

Terug naar de toekomst*

reken-wiskundeonderwijs voor de basisschool 1972-2002

A. Treffers
Freudenthal Instituut

1 Inleiding: prognoses, procenten, professoren

1.1 denkend aan ...

Het is mei 1992. Professor Andrew Hacker ziet de toekomst niet zo somber in. Weliswaar laaien rassentegenstellingen op in de Verenigde Staten van Amerika en teisteren onlusten Los Angeles, toch meent hij dat de raciale scheidslijnen vervagen. Hacker pakt zijn procentengommetje en vlakt.

> In 1950 bedroeg het aantal vaderloze zwarte gezinnen 17,2 procent, tegen 5,3 procent bij de blanken (3,2 keer zo veel zwarten als blanken). In 1990 bedroegen de cijfers 56,2 procent voor de zwarten en 17,3 procent voor de blanken (eveneens 3,2 keer meer zwarten dan blanken). Het is duidelijk dat dit verschijnsel niet zozeer te maken heeft met verschil in ras.

figuur 1: Volkskrant, 6.5.1992

Anders gesteld:

Vaderloze gezinnen

	1950		1990	
Wit	5,3%		17,3%	
		×3,2		×3,2
Zwart	17,2%		56,2%	

figuur 2

En 'dus' heeft het verschijnsel vaderloze gezinnen niet zozeer met verschil in ras te maken, want de verhouding is dezelfde gebleven ..., aldus Hacker.

*) Met dank aan Edu Wijdeveld en Rob de Jong voor hun commentaar op het manuscript, wat me zeer heeft geholpen bij het maken van de definitieve versie.

Ofwel:

	1950		1990	
Wit	1,7 %		16 %	
		× 9,9		× 9,9
Zwart	16,8 %		158 %	

figuur 5

Daarnaast plaatst Brouwer nog enkele kanttekeningen bij een banentabel van Hacker over twee kwesties die mij kennelijk waren ontgaan: (1) over het relatieve aandeel van de beroepsbevolking, en (2) over het middelen van percentages.

Aantal zwarte werknemers per honderd banen			
	1970	1990	percentage zwarten in *nieuwe* banen:
Dokters	2,2	3,0	3,8
Advocaten	1,3	3,2	4,3
Professoren	3,5	4,5	6,3
Elektriciens	3,0	6,2	12,7
Bankpersoneel	4,3	9,9	16,3
Buschauffeurs	14,3	24,4	33,6
Politieagenten	6,3	13,5	41,1
Totale beroepsbevolking	9,6	10,1	11,0

figuur 6

We moeten, stelt Brouwer, de percentages van de beroepsbevolking in 1970 en 1990 (respectievelijk 9,6% en 10,1%) niet absoluut nemen, zoals Hacker doet, maar relatief beschouwen. En afgemeten aan de percentages van de zwarte bevolking, die van 10,9% in 1970 naar 11,9% in 1990 is gestegen (fig.7), zien we helemaal geen vooruitgang, integendeel.

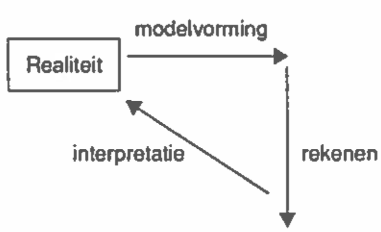
	1970	1990
Zwarte beroepsbevoking	9,6 %	10,1 %
Zwarte bevolking	10,9 %	11,9 %

figuur 7

Het lijkt me echter dat de politicoloog hier zelf in de fout gaat.

1.2 terug naar de toekomst

Bij het doen van voorspellingen blikt men vaak terug op een bepaalde periode uit het verleden, signaleert vandaar een trend naar het heden en tracht vervolgens die lijn naar de toekomst door te trekken.
Vaak, zoals bij Hacker, maakt men daarbij gebruik van mathematisch verworven getalgegevens - percentages, verhoudingen, grafieken, en dergelijke - die ertoe kunnen bijdragen die trends beter te leren doorzien. Dit laatste aspect is zeker niet voorbehouden aan mathematici, integendeel, het is een algemeen menselijke activiteit. Maar als men ziet welke vergaande conclusies Hacker verbindt aan foutieve interpretaties van die getalgegevens, dan worden naast de *mogelijkheden* van een mathematiseringsproces ook de *beperkingen* pijnlijk duidelijk.
Mogelijkheden, omdat de wiskunde kennelijk in staat is getalrelaties aan de werkelijkheid te onttrekken, die kunnen bijdragen tot een beter doorzien van die werkelijkheid (11,9% van de zwarte beroepsbevolking bezet 10,1% van de banen). Beperkingen, omdat die getalrelaties verabsoluteerd kunnen worden ('de cijfers tonen aan dat ...') of erger, als in het geval van Hacker, fout geïnterpreteerd kunnen worden.
Mathematiseren is een ordenende activiteit met wiskundige middelen, die ertoe kan bijdragen de werkelijkheid beter te beschrijven, te begrijpen of zelfs te voorspellen. Daartoe 'verschralen' we de werkelijkheid tot een mathematisch model, rekenen binnen dat model en 'verrijken' vervolgens die werkelijkheid weer - in bovenstaande relatieve zin - met onze wiskundige zienswijze.
Ziehier de kern van het mathematiseringsproces als menselijke activiteit: 'verschralen om te verrijken'. In dat proces kunnen we drie componenten herkennen: een horizontale (de modelvorming), een verticale (het rekenen) en een diagonale (de terugvertaling en interpretatie van het resultaat in de werkelijkheid).[6]



figuur 10

En zoals Hacker nu aan het eind van dat mathematiseringsproces ernstige fouten maakt, zo heeft het onderwijs dat eeuwenlang aan het begin gedaan: de schoolwiskunde losweken van de alledaagse werkelijkheid.
Wiskunde op school beperkte zich in hoge mate tot de verticale component en dan ook nog vanuit een eng, mechanistische opvatting. En als er al sprake was van toepassingen, dan was de relatie met de 'echte' werkelijkheid vaak minimaal.

'Beleefd en uitgeleefd ... in een geïntegreerd onderwijs', ik zoek voor deze gelegenheid een voorbeeld van geïntegreerd onderwijs dat:

- recent is en maatschappelijk relevant,
- over procenten gaat,
- iets met prognoses van doen heeft,
- voldoende denkwerk van de lezers vraagt,
- en ook in het vervolg van mijn beschouwing een functie kan vervullen.

U had het al begrepen, die lange inleiding ...

In de tijd van Freudenthals prognose wemelden de Wiskobaspublikaties en de internationale IOWO-snapshots van geïntegreerde thema's en projecten, die het uitgangspunt van het mathematische handelen, het mathematiseren, zochten in voor de leerlingen betekenisvolle situaties en contexten. En het moet gezegd: er ging toentertijd een enorme innovatieve werfkracht van uit. Wat zeg ik? Er gaat ook nu nog steeds ... moet dat natuurlijk zijn. Want juist in deze rijke thematische verbinding komt wiskunde als menselijke activiteit tot z'n recht en wordt het contrast met het schrale mechanistische rekenen scherp zichtbaar. Dat rekenen iets met de realiteit van doen heeft was namelijk in de lange historie van het traditionele rekenonderwijs steeds meer uit het zicht geraakt. Om over de 'New Math' die eind jaren zestig internationaal opgang maakte nog maar te zwijgen: verzamelingen, relaties, transformaties, talstelsels, logiblokken, ...

2.2 horizontale periode (1972-1982)

Freudenthals prognose van een geïntegreerd reken-wiskundeonderwijs dient dan ook mede vanuit deze nieuwe visie op wiskunde en realiteit begrepen te worden. We zouden dit de 'horizontale' zienswijze op mathematiseren kunnen noemen die toentertijd opgang maakte. Horizontaal vanwege de sterke verbinding met de realiteit, maar met (te) weinig zicht op een natuurlijke verbinding met de 'verticale' opbouw van leergangen, leidend naar het vaksystematisch opereren. En met name ook horizontaal, omdat er toen nog geen scherpe kijk was op de functie die contextproblemen en modelsituaties bij die verticale opbouw zouden kunnen vervullen.

Indicatief zijn in dit verband de leergangen van het cijferen en de breuken. Bij het leren cijferen bijvoorbeeld speelden contextproblemen nauwelijks een rol (delen uitgezonderd). Bij breuken werden de leerlingen wel van meet af aan met een fenomenale hoeveelheid contextopgaven geconfronteerd waarin allerlei aspecten van het breukbegrip besloten lagen. Maar een duidelijke verticale verbindingslijn met het formeel opereren was niet zichtbaar.

Kortom, er was toentertijd bij het ontwikkelen van de meeste leergangen, enkele uitzonderingen daargelaten, geen duidelijk zicht op een evenwichtig samenstel en samenspel van de componenten horizontaal en verticaal mathematiseren. Toch groeide allengs het besef dat juist daarin de kern van het realistische rekenwiskundeonderwijs was gelegen (Treffers, 1978; De Lange, 1979, 1987).

Waarom fungeert nu juist dit voorbeeld als paradigma voor het uitlijnen van leergangen. In traditionele methoden zal men zo'n probleem niet aantreffen. Maar zòu het erin staan, dan was het louter bedoeld als toepassing.
Hier echter staat de opgave juist aan de basis van een zelf te construeren algoritme. Het bijzondere eraan is namelijk dat de oplossingen van de leerlingen in feite al de hele toekomstige leergang weerspiegelen.

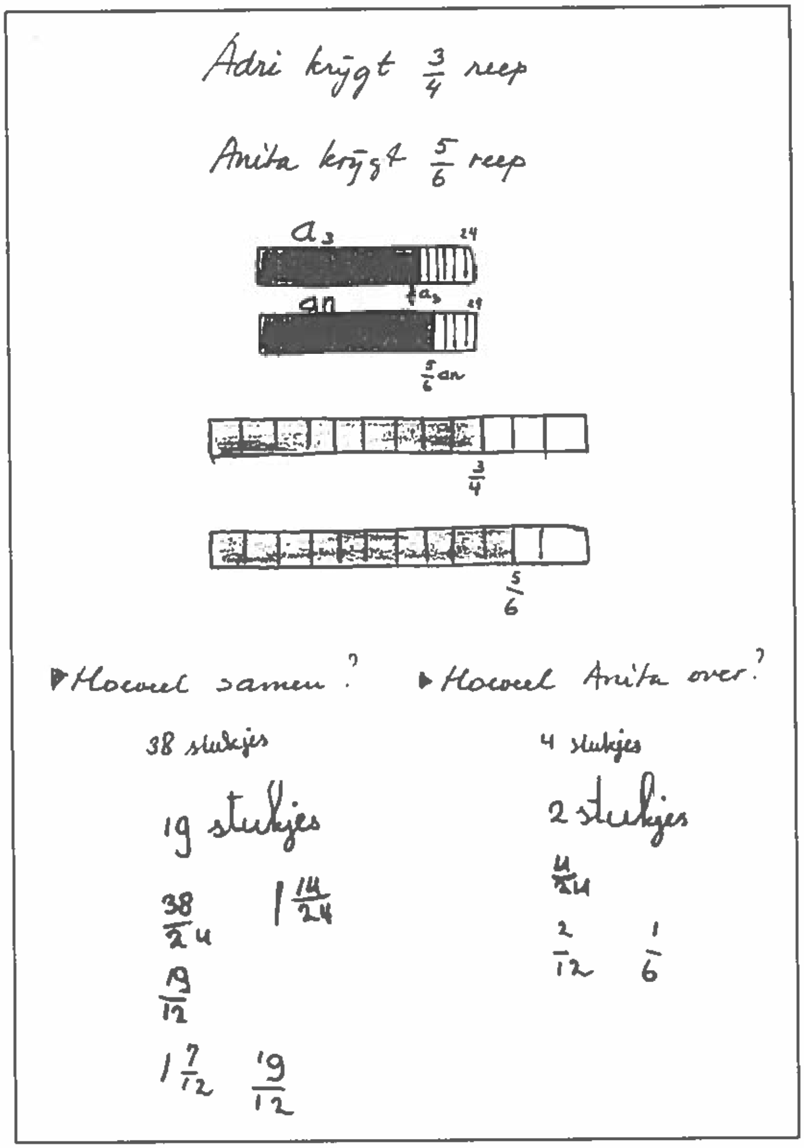
```
36/1128\                  36/1128\                36/1128\
   360   10 bussen           720   20               1080   30
   768                       408                      48
   360   10 bussen           360   10                 36    1
   408                        48                      12   (1)
   360   10 bussen            36    1
    48                        12   (1)
    36    1 bus
    12   (1 bus)

  (a.)                      (b.)                    (c.)
```

figuur 11

Met andere woorden: in dit voorbeeld komt tot uitdrukking hoe elementaire contextproblemen als concrete oriënteringsbasis voor het verticale mathematiseren kunnen fungeren. Dus hoe kinderen zelf, zij het onder leiding, de standaardprocedure van de staartdeling kunnen construeren. Ze stellen zich zo bij het rekenen namelijk werkelijk iets voor: de rekenhandelingen krijgen door de vervoerscontext betekenis. Omgekeerd verleent die context zin om de betreffende rekenhandeling te verkorten en te schematiseren. Ook kale rekenopgaven over delen kunnen door middel van die betekenisverlening (in dit geval via een vervoersprobleem) opgelost worden.
Algemener geformuleerd laat dit voorbeeld zien op welke wijze een ideale leergang vanaf het informele contextgebonden rekenen naar het formele vakmatige opereren loopt, via het intermediair van een contextsituatie die als denk- en rekenmodel dienst kan doen. Nog algemener gesteld: in realistisch reken-wiskundeonderwijs zoeken we naar modelsituaties die als brug kunnen fungeren tussen het informele contextgebonden werken en het formele vakmatige opereren.

Kinderen lossen contextproblemen contextafhankelijk op, althans op een bepaald niveau in het onderwijsleerproces. Maar vaak bieden die werkwijzen geen duidelijk perspectief, omdat ze zich niet laten verkorten en schematiseren tot procedures die binnen het vak gangbaar zijn. Het zoeken van ontwikkelaars en onderzoekers richt zich nu op problemen die dergelijke oplossingswijzen juist wel kunnen genereren; zie het genoemde voorbeeld.

Bijna alle leerlingen tekenen de repen; in figuur 12 staan twee voorbeelden. Slechts een enkeling rekent al vrijwel direct zonder enige visuele ondersteuning.



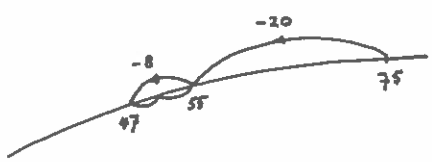
figuur 12

De grote differentiatie in antwoorden verschijnt pas bij de serie 'hoeveel'-vragen. Sommige leerlingen beantwoorden alle vragen met aantallen stukjes, dus met gehele getallen. Anderen antwoorden in termen van breuken, dus met delen van een reep. In bovenstaande figuur geven we enkele antwoorden op de vragen: 'Hoeveel samen?' en 'Hoeveel Anita over?'

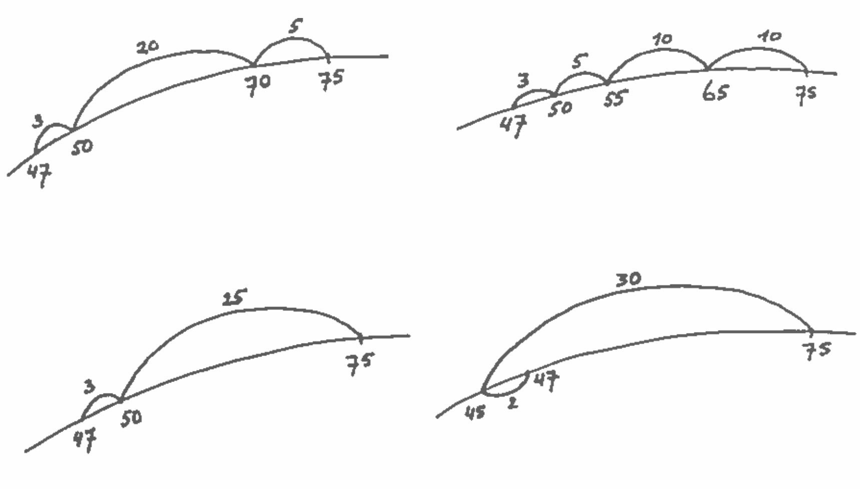
Welnu, vanaf omstreeks 1980 zijn leergangen ontwikkeld die globaal dezelfde realistische basisstructuur bezitten als zojuist geschetst voor de staartdeling en voor de breuken (fig.14).
Essentieel in deze opbouw van relatieve leerniveaus is, dat men de kinderen een belangrijke constructieruimte biedt waarbinnen ze zich tamelijk vrij kunnen bewegen.[7] Zo past het bijvoorbeeld in het geheel niet bij deze basisstructuur als men de kinderen bij het rekenen tot honderd het krachtige middel van de lege getallenlijn presenteert om ze vervolgens direct voor te schrijven hoe ze daarop optellingen en aftrekkingen moeten maken. Want het is nu juist de bedoeling dat ze die methodiek zelf ontwikkelen en verkorten, volgens een aangepast tempo (fig.15). Interactief onderwijs bevordert vervolgens de voortgang naar een steeds hoger niveau, dit uiteraard vergezeld van gepaste uitleg en steun van de onderwijsgevende: de kinderen leren van elkaar en van de onderwijsgevende.

75 – 28

Voorgeschreven:



Vrij:



figuur 15

3.1 leerboeken

In de jaren zeventig ontwikkelde Wiskobas met verve een voorbeeld van een gedetailleerd uitgewerkt programma, zeg een experimentele methode. Een samenvatting daarvan verscheen in de vorm van een voorbeeld-schoolwerkplan (die term had in 1976 een andere betekenis en inhoud dan nu). En het was maar de vraag of de educatieve uitgeverijen het zouden aandurven Wiskobas te volgen. Juister gesteld, of de Wiskobasideeën in het onderwijsveld voldoende zouden aanslaan.
Omstreeks 1980 was dat nog allerminst duidelijk. Weliswaar waren er verschillende realistische reken-wiskundemethoden in ontwikkeling, maar de meest spectaculaire marktgroei kwam toentertijd op conto van de gereviseerde traditionele methode 'Naar zelfstandig rekenen'. Terwijl verschillende gerenommeerde methoden van realistische snit nog geen uitgever gevonden hadden.
Wiskobas leek afgedaan te hebben. En dat was in feite ook de vrees die uit mijn prognose sprak: maar 20% marktaandeel, in plaats van de 50% in 1986. (De Jong, 1986) en de 75% in 1990, zoals het werkelijk bleek te gaan. En dan te bedenken dat ik in die tijd tot een kleine groep van grote optimisten behoorde! Hoe kon ik er zo naast zitten? Onderschatte ik de kracht van de nieuw ontwikkelde visie, of zag ik toen nog niet zo goed in, dat we de toekomst soms, binnen zekere grenzen, voor een belangrijk deel zèlf kunnen maken?

3.2 1982: NVORWO en 'Proeve ...'

Twee gebeurtenissen uit 1982 - precies tien jaar geleden - illustreren dit.
De eerste is de oprichting van de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs (NVORWO), de Gideonsbende van het realistische reken-wiskundeonderwijs.
Met name de Panama najaarsconferenties die onder auspiciën van de NVORWO georganiseerd worden, vervullen een belangrijke opiniërende functie voor opleiders, begeleiders, leerplanontwikkelaars, onderzoekers, schoolboekauteurs, leraren, inspecteurs en beleidsmakers (De Moor (ed.), 1983 e.v.).

De tweede ingrijpende gebeurtenis uit 1982 heeft betrekking op de 'Proeve ...'. In die tijd werd namelijk het idee geboren een soort nationaal leerplan voor het reken-wiskundeonderwijs te ontwikkelen. Aanleiding daartoe waren de moeilijkheden die scholen met realistische reken-wiskundemethoden ondervonden bij de regionale 'bovo'-toetsen voor de overgang van basis- naar voortgezet onderwijs. Veel van wat in die nieuwe methoden werd behandeld, behoorde namelijk niet tot het gangbare pakket. Anders gezegd: het gemis aan een nationaal leerplan werd steeds nijpender en de kloof tussen mechanistische en realistische leerdoelen steeds duidelijker.
De Moor en ik vatten toen het plan op een 'nationaal plan' te ontwerpen. In 1984 gaven we daaraan uitvoering, tezamen met vele honderden deskundigen, leraren basis- en voortgezet onderwijs, opleiders, begeleiders, inspecteurs, onderzoekers

- mede onder invloed van Proeve-III zullen de leergangen voor breuken, kommagetallen, procenten en verhoudingen een andere basisstructuur krijgen, althans in enkele methoden;
- de positie van de meetkunde zal in het programma nog wat onduidelijk blijven, maar Proeve-IV zal daarin vanaf 1996 geleidelijk verbetering brengen.

Of in de nieuwe handleidingen nu eindelijk eens wat leerlingenwerk zal worden opgenomen, alsook enkele uitgebreide beschrijvingen van ideale kernlessen per leerjaar, daar zet ik nog even een vraagteken bij. Wel zal het zo zijn, mede door de voorbeeldfunctie van een enkele methode in de jaren tachtig, dat de kwaliteit van de nieuwe handleidingen in het algemeen beter zal zijn dan de huidige.

Of de infrastructuur van het reken-wiskundeonderwijs intact zal blijven en de afstemming van werkzaamheden zo goed gehandhaafd kan worden, meen ik te moeten betwijfelen. Panama zal als project helaas verdwijnen, naar het zich thans laat aanzien, en dat zal zeker z'n sporen nalaten. Maar de naam Panama zal blijven bestaan en de gelijknamige conferenties zullen in het komende decennium ook wel doorgang vinden. De inhoud ervan zal echter nogal verschuiven: attractieve onderwerpen als meten en meetkunde zullen het zwaarwichtige breuken- en procentenwerk geleidelijk verdringen. Nationale programma's voor de opleiding en de nascholing zullen terecht conferentietijd opeisen en de 'rekenspecialist' zal bij de Panama conferenties wellicht in een nieuwe hoedanigheid zijn waar te nemen.
De grote uitdaging voor de komende tien jaar echter, wat de verspreiding van ideeën en materialen aangaat, ligt bij de verbinding met het speciaal onderwijs. Ik wil die relatie niet met een prognose belasten, maar dat het hier een gigantisch karwei betreft, lijkt me duidelijk.

4 Realisering

Een voorspelling die velen tien jaar of langer geleden al maakten en die nu eens wèl is uitgekomen, is de volgende:

> 'Het realistische reken-wiskundeonderwijs zal in de praktijk van alledag meestal niet gerealiseerd worden als bedoeld door de methodenontwerpers; het nieuwe realisme zal nog vaak door de oude traditionele mechanistische bril worden bekeken en conform die zienswijze worden uitgevoerd.'

Een voorspelling trouwens die ook voor 2002 nog een goede prognose oplevert. Want het gaat, zoals De Jong (1986) terecht stelde, uiteindelijk niet om realistisch reken-wiskundeonderwijs *in* methoden maar om realistisch reken-wiskundeonderwijs *met* methoden. *In* methoden vormt weliswaar een noodzakelijke voorwaarde voor de realisering, maar voldoende is die niet. Met name de bevindingen uit het More-project zijn in dit verband onthullend (Van den Heuvel-Panhuizen, 1992; Gravemeijer e.a., 1993).

Natuurlijk zijn de ontwikkelingen en toestanden in de Verenigde Staten niet zonder meer vergelijkbaar met die in Nederland - zie bijvoorbeeld de getallen over vaderloze gezinnen en de buitenechtelijke geboorten die Andrew Hacker opvoerde. Maar dat ook in Nederland de specifieke onderwijstaak van de school steeds meer onder druk komt te staan, evenals de betrokkenheid van het gezin bij het schoolwerk (waaronder het huiswerk) lijkt me buiten kijf.

> **Veilig vrijen en rekenen**
>
> Mijn dochter krijgt sexuele voorlichting op school in veilig vrijen. Nu vraag ik u; ze is pas 14.
> Mijn mening is: dat moet kunnen in 1988. Alleen één kanttekening. Is veilig vrijen in de plaats gekomen van het vak rekenen? Hoe is het bijvoorbeeld met hoofdrekenen? Dat is net iets te moeilijk.
> Tel uit je winst!

figuur 16: Helmonds Dagblad, 16.12.1988

De vakinhoudelijke gerichtheid van de onderwijsgevende op onder meer het reken-wiskundeonderwijs zal ook in de toekomst tamelijk zwak blijven, uitgezonderd de relatief kleine groep rekenspecialisten wellicht, die mogelijk in de komende jaren kan worden opgeleid. We moeten ons wat dat betreft niet teveel illusies maken. Met het reken-wiskundeonderwijs kunnen we natuurlijk niet tegen de brede maatschappelijke stroom oproeien; sociaal-pedagogische, organisatorische en beleidsmatige taken zullen ook in de nabije toekomst veel tijd van de schoolteams vergen.

4.2 realistische didactiek

Wat stemt mij dan toch (gematigd) optimistisch, gelet op de voorgaande remmende invloeden op de typische onderwijstaken van de school? Daar is een aantal redenen voor aan te wijzen.

- Ondanks de wat zorgelijke geluiden die ik eerder liet horen, meen ik in de eerste plaats dat we er toch in zullen slagen de kern van de realistische didactiek en de grondstructuur van realistische leergangen steeds duidelijker over te brengen. En bij 'we' denk ik dan vooral aan onderwijsontwikkelaars, leerboekenauteurs, docenten en begeleiders, plus eventueel de nieuwe rekenspecialisten. Ook denk ik dat de leraren op hun beurt de nieuwe, doorzichtige leergangen van die neo-realistische benadering beter in praktijk zullen kunnen brengen dan de oude.

figuur 17: De kleine man

Wijdeveld spreekt over de NVORWO liever als over een parlement dat een controlerende functie vervult, instemming en toestemming verleent, ontvankelijk is voor ideeën uit het veld en bijdraagt aan de verspreiding ervan. Hij heeft gelijk.[11] Ik wens de NVORWO dan ook een vruchtbaar, nieuw parlementair decennium toe. Dat het streefgetal van 2002 leden in 2002 gehaald moge worden. Maar hierover doe ik liever geen pikante prognose.

Inmiddels is het september 1992, de definitieve versie van dit artikel is net klaar. In Rostock (Duitsland) zijn rellen; rechts-radicalen belagen asielzoekers. Bestuurders willen het lakse optreden van de politie niet goedpraten, maar ze wijzen er wel op dat ... En weer vliegen de procenten over tafel.
Maar laten we in eigen (onderwijs) land blijven.

In de hoofdstad kwamen er de afgelopen drie jaar drie witte scholen bij, terwijl het aantal witte kinderen op de totale populatie onder twaalf jaar afnam van 53 naar 50 procent. Daartegenover stond de groei van de zwarte groep schoolkinderen met 5 procent. En een toename van het aantal zwarte scholen met liefst 25 procent, in diezelfde periode van 1988-'91.
Het gaat er niet om met doem-scenario's te dreigen, dat Nederland zich de spreekwoordelijke vijftig jaar later langzaam kandideert voor L.A.-taferelen. Ook zonder de geringste kans op zulke uitbarstingen is het gewoon niet eerlijk om niets te doen tegen ongelijke kansen en discriminatie.

figuur 18: Volkskrant 29.8.1992

... Denkend aan de Panama conferentie van 1992 over procenten ...
moet ik er nu toch echt mee stoppen ...

niveaus hanteer. Deze worden per gebied steeds weer opnieuw gespecificeerd, dus bijvoorbeeld voor het rekenen tot twintig en tot honderd, bij hoofdrekenen, breuken, procenten, enzovoort, en binnen die gebieden ook vaak weer voor bepaalde onderdelen. Voor de basisstructuur van grotere leergangen hanteer ik dan een grove niveau-indeling om het langlopende leerproces te typeren en voor de kleine delen meer verfijnde niveaus. Voor het onderscheid met de Van Hiele-niveaus verwijs ik naar Freudenthal (1991). Zie voorts Goffree (1992), Streefland (1992) en Treffers (1987, 1991).

8 Naast de schrijversteams van schoolboeken voor rekenen-wiskunde, de 'Speerpunt'-groep (Bokhove e.s.) en de 'Proeve'-auteurs dienen in dit verband nog genoemd te worden de bijdragen van Buys (1991) over het tellen, van Ter Heege (1989) over tafels en van Van den Brink (1989) over het aanvankelijk rekenonderwijs.

9 De 'Almanak'-boeken zijn bedoeld als algemene leidraad voor een eerste oriëntatie op het Nederlandse methodenbestand. Ze bevatten informatie, analysen en kritische beschouwingen over schoolboeken (zie bijvoorbeeld Feijs e.a., 1987).

10 *'s Nachts slaapt hij als een roosje*
in een lucifersdoosje
tot 's morgens half acht
als zijn ontbijt hem wordt gebracht.
Hij meet vijf centimeter, weegt acht en
vijftig gram.

Stel hij bestaat, die kleine man van 5 centimeter, kan hij dan 50 gram wegen? We zouden dit kunnen nagaan door zo'n mannetje (van plasticine) te maken. Maar ook louter redeneren kan uitsluitsel geven: vergroot het figuurtje met een factor tien, dan is hij vergelijkbaar met een pasgeboren baby (van ongeveer 50 centimeter). Het gewicht van de vergrote 'kleine man' is dan circa duizend keer zo groot geworden, dus ruim 50 kilogram - en dat kan niet, want onze baby weegt hooguit 5 kilogram, een factor tien keer zo klein. (Dat het gewicht met een factor van circa duizend toeneemt als het figuurtje tien keer zo groot wordt, kan duidelijk worden gemaakt met zijn bed, het lucifersdoosje, waarvan de inhoud $10 \times 10 \times 10$ keer zo groot wordt.)
Bij vergroting verandert de verhouding tussen lengte (omtrek), oppervlakte en inhoud, met alle biologische gevolgen vandien. En dit verklaart waarom een olifant relatief gezien lang niet zo sterk is als een muis, waarom de kleine veldmuis zoveel eet (zijn eigen gewicht aan voedsel), waarom baby's zo snel afkoelen of warm worden ..., waarom de kleine man niet 's nachts kan slapen als een roos 'tot 's morgens half acht als zijn ontbijt hem wordt gebracht', omdat hij dan uitgehongerd zal zijn.

11 Uit een persoonlijk schrijven, met toestemming aangehaald.

literatuur

Bokhove, J. e.a. (1991).
Tellen en rekenen tot twintig.
Rekenen tot honderd.
Hoofdrekenen en schattend rekenen. 's Hertogenbosch: KPC.

Brink, J. van den (1989). *Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen.* Utrecht: OW&OC (diss.).

Buys, K. (1991). *Telactiviteiten voor kleuters.* Baarn: Bekadidact.

Caplan, N., M.H. Choy & J.K. Whitmore (1992). Indochinese Refugee Families and Academic Achievement. *Scientific American,* (februari), 18-24.

Cobb, P., E. Yackel & T. Wood (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(1), 2-33.

De Pabo-bv anno 2002

reken-wiskunde & didactiekonderwijs 1952-2002[1]

F. Goffree
SLO; Universiteit van Amsterdam

1 Inleiding en overzicht

In het zicht van de eeuwwisseling is het de tijd van *voorspellingen*. Waarschuwingen op velerlei gebied worden gedaan om mensen tot orde te roepen. Kommer en kwel is ons lot als we ons niet matigen, de omgeving niet sparen, de ozonlaag niet in stand houden, aids niet bestrijden, de wao niet onder controle houden, de economie niet laten groeien, de landbouw niet beschermen, het aantal snelwegen niet uitbreiden.
Gedegen onderzoekingen en indrukwekkende rapporten worden ten grondslag gelegd aan verschillende toekomstbeelden. Wat voorspeld wordt, is in het niet-science fictiongebied vaak een extrapolatie van de huidige situatie, soms gekleurd door inzichten van de onderzoekers zelf en beperkt door hun specialismen. Maar de getallen liegen er niet om (vierenentwintig miljoen aidspatiënten in het jaar tweeduizend, een wereldbevolking van ... miljard in de jaren vijftig van de volgende eeuw, ...) en politici beschikken ermee over materiaal om hun beleidsvoorstellen kracht bij te zetten.
Soms moeten eerst andere groeperingen uit de bevolking in actie komen om hen wakker te schudden. En als men wakker is en het beleid omgebogen wordt, dan is tegelijkertijd een nieuw toekomstbeeld geschapen.

Wie met betrekking tot de opleiding van leraren basisonderwijs een blik in de toekomst wil werpen, heeft slechts getallen tot zijn beschikking als het om aantallen leraren gaat. Het schijnt dat men op basis van het aantal Pabo-studenten nu, de bevolkingsopbouw en het verloop in het lerarenbestand kan uitrekenen hoeveel leraren er over enige tijd tekort zijn. Stoomcursussen uit het verleden en verkorte opleidingen heden ten dage laten evenwel zien dat het reken-raamwerk niet altijd even eenvoudig is.
Als het gaat om een voorspelling met betrekking tot de inhoud van de opleiding, liggen de zaken heel anders. Onderwijsontwikkelingen gedragen zich niet volgens natuurwetten en laten zich niet met rekenregels beschrijven, zelfs niet als men zich tot het lesrooster met aantallen contact-, begeleidings- en andere uren zou willen beperken.[2]

Mag ik me dan aan een blik in de toekomst anno 2002 wagen? Wat kan ik zeggen van het vak rekenen-wiskunde & didactiek over tien jaar? Niet veel zinnigs natuurlijk, als ik mezelf buiten beschouwing zou laten.

tieve oplossingen geven al aan dat deze beschouwing een persoonlijke kleur zal krijgen. Het wordt nog sterker. Voor het onderzoek zal ik me namelijk beperken tot de eigen boekenkast. Dit betekent dat de gekozen mijlpalen een zeer persoonlijk karakter hebben.

Ten slotte laat ik me bij de keuze van de vraagstukken leiden door het thema van de Panama conferentie 1992: *procenten*[5], als het zo uitkomt geplaatst in het wijdere verband van de verhoudingen. Dat voornemen zal niet in alle gevallen slagen, en waar het wel lukt, houdt het nauwelijks een beperking in.

1.1 de aanloop

Een mooi begin vormt straks het jaar 1954. Toen werd het op één na laatste rekenexamen van de Kweekschool oude stijl gehouden. Op de Hervormde Kweekschool te Amsterdam was ik hierop voorbereid door mijn leraar E.H. Schmidt, de latere mavo-inspecteur. We maakten gebruik van het onvolprezen leerboek van P. Jansen en G.W. van Brink: 'Beknopte Theorie der Rekenkunde', waarvan de eerste druk reeds in 1927 was verschenen.

De volgende mijlpaal staat in 1966, het jaar dat 'Rekenen en Didactiek'[6] verscheen. Het was een poging om de didactiek van het rekenen, voor 1954 voornamelijk in de pedagogiekles onderwezen, te integreren met de rekenkunde. Althans met datgene wat van de rekenkunde was overgebleven. Mijn collega van de Rijkskweekschool te Hengelo, Auke Hiddink, die eerder bij professor Léon van Gelder in Groningen een scriptie over rekenen had gemaakt, verzorgde het didactische element. Jan Dijkshoorn, rekendocent aan de Christelijke Kweekschool te Almelo, gaf ondersteuning bij het rekentheoretische deel. Wie het boek goed bekijkt zal bemerken dat de 'New Math' ook sporen heeft achter gelaten.
Schriftelijk examenwerk uit die tijd bestaat niet. De examens werden mondeling afgenomen en slechts de overlevering kan ons hier enig inzicht verlenen in de eisen die in de jaren zestig en zeventig aan de leerlingen/studenten op het eind van hun studie werden gesteld.

Overigens vond ik ook nog een belangrijk stencil in mijn boekenkast. Het is een gift van Fri van de Molengraaf, frater-rekendocent aan de Bisschoppelijke Kweekschool te Oudenbosch (en later hoofdauteur van de methode 'De wereld in getallen'). Het stencil heet 'Theorie en Praktijk. Vragen en opdrachten over rekendidactiek' en bestaat uit 41 lessen, voorzien van Fri's aantekeningen. Het is ongedateerd, maar bij lezing wordt duidelijk dat het in de jaren na 1954 ontwikkeld en gebruikt is.
Hetzelfde geldt voor het stencil van Jan Nieland, rekendocent aan de RK Kweekschool te Hilversum, in kweekschoolkringen eerder bekend als frater Isidorus. Dit boekwerk is geschreven voor de kwekelingen/studenten onder de titel: 'Organisch rekenen. Theoretische, methodische en didactische richtlijnen voor het wiskunde-onderwijs in de basisschool'. Het is, dat laat de ondertitel zien, van la-

2.2 het onderwijzersexamen rekenen in 1954

Tijd: 1 uur 45 minuten.

Het is geoorloofd voor opgave 1 gebruik te maken van papier, waarop de vereiste liniatuur is aangebracht.

1 Bepaal het saldo volgens de Staffel-methode van een rekening-courant met de volgende gegevens:

Datum van opening: 10 Juli. Datum van sluiting: 31 December.
Maand op het juiste getal dagen stellen. Het jaar op 360 dagen.
Debet-rente $4\frac{1}{2}$ %. Credit-rente $1\frac{1}{2}$ %.

De Bank brengt f 11,- onkosten in rekening.

Debet.		Credit.	
f 2 500,-	per 19 Aug.	f 3 472,83	per 10 Juli.
f 6 743,34	per 10 Sept.	f 8 321,67	per 25 Oct.
f 2 304,95	per 14 Nov.	f 1 216,79	per 30 Nov.

2 Een fabrikant begroot de kosten van de fabricage van 3800 liter vruchten-limonadesiroop als volgt:

a Grondstoffen

1 75 kg suiker	per 100 l.	à	f 0,80 per kg.
2 liter vruchtensap	per 100 l.	à	f 1,25 per l.
3 $1\frac{1}{2}$ kg citroenzuur	per 100 l.	à	f 2,85 per kg.
4 0,6 liter citroenessence	per 100 l.	à	f 16,50 per l.

5 verdere ingrediënten à f 0,50 per 100 l.

b Kosten bij de fabricage:

1 Water, brandstoffen, electriciteit, afschrijving machines .... f 400,-
2 Flessen, kurken, capsules, etiketten, enz. .... f 1250,-
3 Arbeidslonen, met inbegrip van sociale lasten .... f 512,50

c Algemene kosten:
De algemene kosten worden geraamd op 5% van het gezamenlijk bedrag der kosten genoemd onder a en b.

Gevraagd wordt:

1 Indien het aantal verkregen flessen 5000 bedraagt, de kostprijs per fles (in centen afgerond naar boven).
2 Welke prijs hij per fles moet bedingen, indien hij 15% wil winnen en de verkoopkosten 10% van de totale verkoopprijs bedragen (antwoord in centen afgerond naar boven).

3 Een getal van 5 cijfers, waarbij het cijfer van de duizendtallen een 0 is, is deelbaar door 375. Vermindert men dit getal met de som van de cijfers van het getal, dan is het verschil deelbaar door 11. Bepaal de getallen, die aan deze opgave voldoen.

4 In een evenredigheid wordt de eerste term met 66 en de derde met 121 vermeerderd, waardoor een nieuwe evenredigheid ontstaat. Van de oorspronkelijke evenredigheid is de som der voorgaande termen 221 en het product der volgende termen 3234. Bepaal de oorspronkelijke evenredigheid.

Zie voor reflectieve oplossingen pag.59 e.v.

'revolutie' van 1952. De wiskundeleraren uit die tijd hadden het moeilijk om een link te leggen tussen rekenen op de lagere school, de algemene didactiek en de rekenkunde. Diverse docenten keerden de opleiding daarom de rug toe; degenen die bleven en zij die de gelederen kwamen versterken, baanden zich een eigen weg. Velen ontwierpen zelf materiaal in stencilvorm en enkelen publiceerden rekendidactiekboeken voor de Kweekschool, die na 1968 Pedagogische Academie ging heten.

3.2 vijf rekendidactieken

Ik sla de eerste jaren van de nieuwe Kweekschool over en richt me op de jaren zestig en begin zeventig, als het vak rekenen door de inzet van rekendocenten en de visie van directies op diverse PA's twee lesuren per week krijgt toegewezen. Ik put uit boeken van Meijer: 'Theorie en Praktijk', Jansen, Reijnders & Snijders: 'Gefundeerd Hoofdrekenen', Nieland: 'Organisch Rekenen', Goffree, Hiddink & Dijkshoorn: 'Rekenen en Didactiek' en Woestenenk: 'Rekendidactiek'.

Een inschatting van (mondelinge) examenvragen is op basis van deze materialen niet moeilijk te maken. Gelukkig kan ik ook nog putten uit eigen ervaring.[14] Bedenk daarbij echter wel dat een rekenles op het examen destijds werd bekeken in het perspectief van de rekenkundige theorie, die als het ware het boven de stof staan moest garanderen.

1 (Jansen e.a., pag.130)

> Je hebt een les over procenten gegeven. Wat vind je van deze uitspraak: 'We moeten op school niet slechts mededelen 1% = $\frac{1}{100}$, maar dit begrip door aanschouwing en handeling inleiden.' Welk klassikaal hulpmiddel kun je gebruiken? Hoe werkt dat? Kun je de kinderen ook individueel aanschouwelijk laten werken? Hoe laat je de kinderen uitrekenen $12\frac{1}{2}$% van 80? Hoe vind je de aanpak volgens 1% van 80 is 0,8; $12\frac{1}{2}$% van 80 $= 12\frac{1}{2} \times 0{,}8 = 25 \times 0{,}4 = 10$? Hoe weten de kinderen nu dat $12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$? Kun je dat zo wel zeggen? Welke eigenschap heb ik zojuist ($12\frac{1}{2} \times 0{,}8 = 25 \times 0{,}4$) toegepast? Kun je die bewijzen? Weet je nog een toepassing? Hebben we in het gewone leven veel met procenten te maken? Noem eens een voorbeeld. Wat is rente eigenlijk? Bedenk eens een som over interest. Leg die uit voor klas 6.

2 (Nieland, pag.9-1)

> Jij hebt een les gegeven over de invoering van breuken. Vertel maar. Weten de kinderen nu wat breuken zijn? Weet jij dat goed? Wat is er mis met de volgende definitie: de breuk $\frac{a}{b}$ is een getal dat met b vermenigvuldigd, a oplevert? Moet je een definitie geven van breuken? Hoe komen breuken intuïtief tot stand? Wat doen wiskundigen in het verlengde van het intuïtieve breukbegrip? Hoeveel oplossingen heeft de open bewering $5 \times \ldots = 17$? Kun je onderscheid maken tussen breuknaam en breukgetal? Hoe? Waarom zou je dat doen? Laat eens zien dat breukrekenen steunt op structuurrekenen. Hoe zie je dat bijvoorbeeld in de oplossing van $\frac{3}{4} : \frac{5}{8}$?

tiek. Dit betekent: rekenen op eigen niveau beoefenen in het perspectief van het onderwijzen ervan. En ook omgekeerd: het onderwijzen als motief voor het bestuderen van de didactiek en het verhogen van de eigen rekenvaardigheid. In 'Rekenen en Didactiek' van 1966 was een poging gedaan om deze gedachte te realiseren. Maar als gevolg van de programma's van voor 1952, had rekenkunde daarin een te dominante plaats gekregen.

4 Verandering en ontwikkeling: 1968 - 1980

4.1 Wiskobas en Pedagogische Academie

De naamsverandering, die bij aanvaarding van de wet van 1952 al klaar lag, werd in 1968 een feit: de Kweekschool heet in het vervolg Pedagogische Academie en kwekelingen werden studenten. Er veranderde veel meer in de opleiding van onderwijzers, hoewel dat voor het grootste deel de vormgeving betrof: de visie op het opleiden bleef in grote lijnen hetzelfde, evenals de inhoud van de vele vakken. Alleen voor het vak rekenen braken grote tijden aan via het Wiskobasproject.

Van meet af aan, beginnend in 1968, werden alle PA-docenten voor rekenen en enkele van hun collega's voor pedagogiek, bij het ontwikkelwerk betrokken. Dit ontwikkelwerk gold aanvankelijk het reken-wiskundeonderwijs op de lagere school (later ook het kleuteronderwijs). De PA-docenten maakten in groten getale gebruik van de gelegenheid om in conferenties en werkgroepen de opbrengst van Wiskobas te bestuderen en te becommentariëren.

In de jaren 1975 tot en met 1980 werd aan de Christelijke PA 'Juliana van Stolberg' te Gorinchem een opleidingsexperiment rekenen en wiskunde gehouden (Goffree, 1979). Tijdens het werken met de rekendidactiekdocenten, studenten, mentoren en basisschoolleerlingen, bij het voorbereiden en nabespreken van lessen, ontstond geleidelijk een visie op het opleiden van onderwijzers die aansloot op de leidende gedachte achter 'Rekenen en Didactiek' van tien jaar eerder.[15] En natuurlijk leverde het Wiskobasproject ook veel bruikbaar opleidingsmateriaal op, zowel praktisch als theoretisch.

4.2 nieuwe stof, 'oude' examens

Wiskobas publiceerde veel direct bruikbaar materiaal: werkbladen, lessen, projecten en thema's. In de onderwijzersopleiding werd dit het basismateriaal voor de meeste werkstukken in het vakgebied. Op het examen werden, net als voorheen, de ervaringen ermee in de klas verteld. Van een samenhangende didactische theorie was vooralsnog geen sprake.

Maar langzamerhand kwamen er lokale theorietjes en een globale filosofie van het wiskundeonderwijs ter beschikking, gekarakteriseerd in begrippen als: wiskunde als menselijke activiteit, de 'kubus' van Treffers met zes leerstofvlakken, De eerder ontstane visie op de lerarenopleiding kreeg nu een nadere uitwerking: wiskunde op studentenniveau kon in dienst gesteld worden van het didactisch denken en handelen. De naam Wiskunde & Didactiek werd met zorg gekozen. Niet wiskundedidactiek, niet wiskunde en didactiek maar wiskunde & didactiek: de wiskunde, de wiskundedidactiek en het verwerven ervan door Pabostudenten, samengebracht in één opleidingsprogramma. In de examens komt het integratieve element tot uitdrukking in het feit dat niet alleen praktische kennis en theoretische inzichten worden afgevraagd, maar dat ook de persoonlijke opvatting over het vak rekenen en wiskunde in beschouwing komt.

Het laatste hoofdstuk van deel 3 'Welke reken/wiskundeleraar ben jij?' bestaat uit 25 examenopdrachten waarmee de vraag van de hoofdstuktitel door de studenten beantwoord moest kunnen worden. Gemikt werd op een nieuwe vorm van het eindexamen. De expertise op het gebied van rekenen-wiskunde & didactiek van een beginnend leraar basisschool was, zo meende ik, niet alleen meer te meten met de oude middelen.
In de inleiding op het hoofdstuk wordt de andere aanpak uitgelegd. Van de beginnende leraar wordt verwacht dat zij/hij:
- beschikt over een rijk didactisch repertoire;
- weet hoe en wanneer dit aan bepaalde leerlingen en groepen ten goede kan worden gebracht;
- een uitgesproken opvatting heeft over het vak rekenen en wiskunde,
- plezier heeft in het verrichten van wiskundige activiteiten en dit kan uitstralen naar de leerlingen;
- als een 'reflective practitioner' in de zin van Donald Schön in staat is op het eigen onderwijs te reflecteren en daardoor de eigen ontwikkeling in stand te houden.

Welnu, hoe kan een student in staat gesteld worden dergelijke kwaliteiten zichtbaar te maken? Bijvoorbeeld door haar/hem 'een essay te laten schrijven', 'een voordracht te laten houden', 'een les te laten ontwerpen', 'aan een discussie te laten deelnemen', 'een rol in een nagebootste werkelijkheid te laten spelen' of 'een eigen educatief ontwerp te laten toelichten'. Van de docent wordt gevraagd, om daartoe geschikte situaties te creëren en om tijdens de bijeenkomsten de inbreng van de studenten te evalueren. Ten behoeve van docent en studenten is een lijst met 35 aandachtspunten voor evaluatie bijgevoegd.

5.2 plezier, opvatting en repertoire

Naar mijn weten is er met bovenstaande wijze van examineren niet veel ervaring opgedaan. De oorzaak is te zoeken in het feit dat men op veel Pabo's niet is toegekomen aan het betreffende hoofdstuk. Bovendien worden examens op de Pabo's anno 1992 nog steeds volgens oude tradities georganiseerd. Een groepsdiscussie van zes studenten in de setting van een teamvergadering op een basisschool, past daar nog niet in.

Opgave 3 (ontwerpen)

Annemarie is het enige dochtertje van de buren. Ze is dit jaar in de brugklas gekomen. Met wiskunde leek het eerst wel goed te gaan, maar nu is het tij ineens gekeerd. Haar oude gebrek - ze kent de tafels niet goed (hetgeen de hele familie weet) - speelt haar weer eens parten in de algebrales. Nu is ze bij jou gekomen, voor bijles. Ze wil er alles aan doen, want de klas en haar vrienden en vriendinnen bevallen haar zeer goed. Jij vat het op als een uitdaging, want op jouw school zijn er niet zoveel problemen met de tafels. Je weet ook best hoe dat komt.
Maak een bijlesplan voor Annemarie.

Zie pag.63 e.v. voor reflectieve oplossingen.

5.3 horizontaal didactiseren

De aanpak van het probleem 'De cent van Adam' kan illustratief zijn voor het begrip horizontaal mathematiseren. De gegeven problematiek wordt met de beschikbare wiskundige inzichten binnen de wiskunde gebracht om daar verder bewerkt te worden met behulp van wiskundige methoden en technieken.
Freudenthal bedacht in relatie met horizontaal mathematiseren (een term van Treffers)[16] de term horizontaal didactiseren. Daarbij gaat het om een didactische problematiek, voortgekomen uit de onderwijspraktijk. Met beschikbare didactische inzichten wordt die problematiek geïnterpreteerd en zo mogelijk in een theoretisch kader geplaatst. Dan spreekt men het eigen didactische repertoire aan om tot een voorlopige aanpak te komen. De praktijk zal wel uitwijzen of nog een andere invalshoek gekozen moet worden, of dat bijstelling nodig is.
Deze opvatting van didactische theorie is een constructieve. De theorie geeft je de mogelijkheid de praktijk te interpreteren. Je didactisch repertoire helpt je de praktijk vervolgens te verbeteren.

6 Even stilstaan bij 1992

6.1 reflectief moment

We staan vlak voor onze sprong naar het examen van het jaar 2002. Een geschikt moment voor een korte terugblik.

In 1952 kwam een fundamentele verandering in de onderwijzersopleiding tot stand. De gevolgen voor het rekenen op de Kweekschool bleven nog even uit. Eerst beleefde dat rekenen nog een dieptepunt, omdat men van mening was dat kwekelingen het lagere-schoolrekenen zonder meer wel beheersten en nog slechts enkele didactische kneepjes erbij moesten leren. Eén lesuur in de vierde klas zou hiervoor wel voldoende zijn.
Dit veranderde op een groot aantal Kweekscholen/Pedagogische Academies in de jaren zestig en zeventig. Na wat vingeroefeningen van enkele rekendocenten van het eerste uur, ontstond een fragmentarisch ingerichte praktische rekendi-

Past bij een dergelijke visie op en invulling van de opleiding, nog wel het traditionele examen? Die vraag is nog niet beantwoord. Wel wordt in deel 3 van 'Wiskunde & Didactiek' een idee opgeworpen om wiskunde & didactiek anders te evalueren. De vraag aan de student is dan: 'Welke reken-wiskundeleraar ben je geworden?'
Over examineren en tentamineren in ons vakgebied op de Pabo is tot nu toe niets expliciet gezegd. In het jaar 1992 gebeurde dat wel. Daarom willen we ook daar nog even bij stilstaan.

6.2 een unieke cursus, een zelftoets en een PUIK project

een cursus voor docenten ...
In het jaar 1990 werd een cursus gestart voor wiskunde & didactiekdocenten aan Pabo's. Het was voor het eerst in de geschiedenis van de onderwijzersopleiding dat een dergelijke cursus tot stand kwam.[19] De cursus was ontworpen ten behoeve van pas beginnende Pabo-docenten wiskunde & didactiek. Van de twintig cursisten, die in september 1990 aantraden, had het merendeel wiskunde gestudeerd, maar geen opleidingservaring. Bij een klein aantal was die ervaring wel aanwezig, maar de betreffende cursisten hadden die opgedaan in een ander vakgebied.

In de jaren voorafgaand aan deze cursus, is in de Pabo's veel energie gestoken in het ontwerpen van rekenvaardigheidscursussen. Over het algemeen moeten studenten nu in de eerste twee jaren van hun studie een bepaalde rekenvaardigheidstoets hebben gehaald, waarover dan later bij de eindexamens, niet meer gesproken wordt.
Inmiddels heeft het begrip rekenvaardigheid op de Pabo plaats gemaakt voor het begrip gecijferdheid. Deze naamsverandering, die meer is dan een spel met woorden, laat mijns inziens een goede ontwikkeling zien. Gecijferdheid duidt op een vaardigheid van volwassenen en is ontdaan van het schoolse karakter dat aan de term rekenvaardigheid kleeft. Het verwerven van gecijferdheid door Pabostudenten zou dan ook niet moeten stoppen bij de oneigenlijke en schoolse grens van een tentamen in het tweede studiejaar. Op mijn eindexamen anno 2002 is het onderdeel gecijferdheid uitdrukkelijk wèl aanwezig. Ik kom daar op terug.

De laatste bijeenkomsten van bovengenoemde cursus vonden plaats in het voorjaar van 1992. Op 17 januari ging het over afstudeerprojecten, op 20 maart over tentamens construeren. De voorstudie voor het college tentamens construeren leverde een niveau-analyse op, die ons op de grens van heden en toekomst van Pabo-eindexamens wiskunde & didactiek, een belangrijke, voorlopig laatste impuls kan geven.

Het onderscheiden van niveaus van kennis heeft in kringen van onderwijskundigen heel wat aandacht gekregen. De auteurs van de Aula-pocket 'Tentamineren',

4. Vragen betreffende instelling en opvatting:
   - hoe staat men tegenover het vak rekenen en wiskunde?
   - is er sprake van een wiskundige attitude?
   - heeft men plezier in het oplossen van reken-wiskundeprobleempjes?
   - is men zich de eigen opvatting over rekenen en wiskunde bewust?
   - is er een perspectief van voortgaande ontwikkeling?

5. Vragen die leiden tot horizontaal didactiseren:
   - het inzetten van didactisch repertoire in de praktijk van het reken-wiskundeonderwijs.
   - het eigen didactisch repertoire verbinden met didactische theorie.
   - didactische theorie toepassen in de praktijk: om situaties te verklaren, om op leerlingen in te spelen, om individuele leerlingen extra te helpen, om onderwijsmateriaal te ontwerpen.
   - het bespreken van leergangen in het licht van een bepaalde theorie over reken-wiskundeonderwijs.

6. Vragen die aanleiding geven tot verticaal didactiseren:
   - het vergelijken van theorieën en opvattingen over reken-wiskundeonderwijs.
   - het doorredeneren op theoretische principes.
   - het evalueren van algemeen didactische theorie in het theoretische kader van het realistische reken-wiskundeonderwijs.
   - het ontwikkelen van (nieuwe) theoretische inzichten op basis van de beschikbare theorie.

construeer een zelftoets voor studenten ...

Dousma en Horsten geven overigens een wijze raad aan degenen die hun eigen tentamenvragen willen 'plaatsen': bedenk eerst zelf het ideale antwoord op de vraag en bedenk dan wat de student allemaal moet weten, kunnen, doen of denken om tot dát antwoord te komen. Bij de illustratie hiervan beperken we ons tot een zeer recent voorbeeld: een paar vragen uit de zelftoets bijde zojuist gereed gekomen module 'Kleuterwiskunde'.[20]

Kennisvragen

K.1 Welke zijn de *zes brongebieden* voor wiskundige activiteiten van kleuters?

K.2 Welke fasen kun je onderscheiden in het *leren tellen*? Geef bij elke fase een karakteristieke gebeurtenis (paradigma).

K.3 Wat draagt *technisch construeren* bij aan de kleuterwiskunde? Geef een voorbeeld.

K.4 Waaraan kun je zien dat kleuters 'goed bezig zijn' (indicatoren van de *kwaliteit*)?

K.5 Geef een sprekend voorbeeld van een *conflictsituatie*, die door de leraar gecreëerd is. Waarom zou je als leraar de kleuters op die manier in verwarring willen brengen?

Inzichtvragen

I.1 Wat wordt bedoeld met het *zich realiseren* van rekenopgaven?

I.2 Waarom meent men dat *conflictsituaties* reflectie tot stand brengen?

I.3 Waarom zou je kleuters vragen grote aantallen te vergelijken ('waar zijn er meer?') als ze nog niet eens zover kunnen *tellen*?

De gedachte is dat die kwaliteit gediend is met een goed programma, een doordachte opbouw daarvan (uitlijning) en vooral ook met de wijze waarop het aan studenten wordt gepresenteerd (invulling). De te maken PUIK-publikatie zou voor alle Pabo's een middel moeten zijn om de kwaliteit van het eigen onderwijsaanbod te meten. In dat geval heeft Nederland zijn eigen Standards voor het opleiden van basisschoolleraren in het vak rekenen en wiskunde.
De programmering betreft de kernleerstof voor aanstaande leraren, aangevuld met de essentialia van de specialisaties jonge en oudere kind. Ik denk momenteel aan uitgebalanceerde modulen voor kleuterwiskunde en bovenbouw/basisvorming. Bij het uitlijnen moet gedacht worden in termen van leren onderwijzen. Het gaat nu om het leerproces dat de student gedurende de opleiding doorloopt. De visie op rekenen-wiskunde & didactiek moet hier een leerplanmatige uitwerking krijgen.
Van leerplan naar presentatie in de klas is in een flinke stap: kwaliteit van onderwijs wordt voornamelijk in de klas gemaakt. Daarom houdt de projectgroep zich ook bezig met invullingen. Beter gezegd: de projectgroep is begonnen te kijken in de eigen Pabo-klassen. Op de Panama conferentie 1992 zijn de eerste neerslagen gepresenteerd onder de titel: 'Verhalen van de lerarenopleiding'. Het zijn authentieke verhalen van goed opleidingsonderwijs, bedoeld om kwaliteit te duiden. De PUIK-projectgroep hoopt er bij collega's vele andere mee los te maken. In de uiteindelijke publikatie van PUIK zullen ze een belangrijke plaats innemen.

7 De Pabo-bv anno 2002

7.1 meesterstuk, maatwerk en gecijferdheid

Eindelijk kan ik er nu toe komen iets te zeggen van de merkwaardige titel 'De Pabo-bv anno 2002'. Ik vermoed dat velen bij eerste lezing gedacht hebben aan contractonderwijs en privatisering in logische samenhang met de huidige ontwikkelingen bij overheidsinstellingen. Maar voor deze bv hoeven we niet naar de Kamer van Koophandel te gaan. In dit geval staat bv voor basisvorming en ik zie er van komen dat dit nieuwe onderwijstype ook de aandacht van de lerarenopleiding basisonderwijs zal gaan vragen.
Voor rekenen en wiskunde levert dat op het eerste gezicht niet eens een lastig probleem op.[23] In de specialisatie voor het oudere kind kan de leeftijdsgroep van twaalf tot veertien jaar namelijk gemakkelijk meegenomen worden. Ik doel dan in het bijzonder op het onderdeel voortgezet rekenen, dat momenteel nota bene met 'praktisch rekenen' wordt aangeduid. Dat vak zou een bovenbouwspecialist van de basisschool eigenlijk moeten kunnen onderwijzen. De andere vakken van de basisvorming: algebra & verbanden, meetkunde & redeneren, informatieverwerking & statistiek en geïntegreerde wiskundige activiteiten, zouden tenminste zijn belangstelling moeten hebben.

4 Op het eindexamen van de lerarenopleiding dient ook een momentopname van de *gecijferdheid* te worden gemaakt. Daar gecijferdheid pas goed zichtbaar wordt in de aanpak van alledaagse reken-wiskundeproblemen en er bovendien gelegenheid moet zijn voor het noteren van *reflectieve oplossingen*, moeten de studenten dit onderdeel schriftelijk kunnen maken. En wel met de mogelijkheid er gedurende langere tijd, buiten school aan te werken. Dat er hulp kan worden ingeroepen van anderen, mag geen bezwaar zijn. Integendeel, al tijdens de opleiding moeten studenten aangemoedigd worden de eigen leeromgeving te verrijken met alle mogelijke deskundigen en inspirerende materialen.
In een goede leeromgeving van studenten mogen mentoren en leerlingen van de basisschool niet ontbreken. Met hen op de achtergrond wordt ook een *didactisch perspectief* aan de reflectieve oplossingen toegevoegd, zodat de peiling van gecijferdheid aan het eind van de opleiding een extra dimensie krijgt.

Tot zover de principes voor een eindexamen anno 2002. Denkt u er even over na. Dat geeft mij de tijd om toch nog een paar concrete vragen voor het schriftelijk examenonderdeel te bedenken ...
Maatwerk mag men in deze omstandigheden niet verwachten; de studenten die in 2002 afstuderen bevinden zich anno 1992 pas in de brugklassen van het voortgezet onderwijs. De meesten ontlopen net de nieuwe programma's voor de basisvorming. Enkelen hebben meegedaan met experimentele wiskundeprogramma's, die in het kader van de COW zijn ontwikkeld. Ongeveer tachtig procent van hen heeft een moderne reken-wiskundemethode op de basisschool gehad.

7.2 examenopgave voor het onderdeel gecijferdheid .

Werknemers WSW krijgen in nieuwe cao 4,5 procent meer loon

Van onze verslaggever

AMSTERDAM – Ook de ruim tachtigduizend werknemers van de sociale werkvoorzieningen krijgen dit jaar een loonsverhoging van 4,5 procent. Werkgevers en werknemers zijn dat dinsdag overeengekomen.

De nieuwe cao kwam tot stand na twee weken van werkonderbrekingen in de werkvoorzieningen.
Aanvankelijk wilde het kabinet, dat formeel als werkgever optreedt in de Wet Sociale Werkvoorzieningen, niet met extra geld komen.

Afgelopen weekende besloot het alsnog meer geld beschikbaar te stellen, zodat er ruimte ontstond om een cao af te sluiten die ongeveer gelijkwaardig is aan de cao's die in de gezondheidszorg zijn afgesloten.

Het personeel krijgt op 1 juni van dit jaar een loonsverhoging van 3,25 procent. In september krijgen alle werknemers een eenmalige uitkering van tweehonderd gulden en op 1 januari 1993 volgt een nieuwe loonsverhoging van 1 procent.

noten

1 Ik dank de volgende collega's voor hun commentaar bij een eerdere versie van dit artikel: Edu Wijdeveld, Herman Heidenrijk, Willem Faes, Wil Oonk, Maarten Dolk en Ronald Keijzer.

2 Neem bijvoorbeeld het geval van de stage. Het oefenen in de praktijk is een fenomeen dat in verschillende beroepsopleidingen eenzelfde ontwikkeling heeft doorgemaakt. Een ontwikkeling die beheerst wordt door het streven de theorie van het opleidingsinstituut te verbinden met de praktijk van het beroep. De noodzaak om opleiders veelvuldig met de praktijk te confronteren, is vooral in de kring van lerarenopleiders altijd duidelijk gevoeld. Enkele jonge, energieke en serieuze PA- en Pabo-docenten gingen in het verleden zelfs op basis van vrijwilligheid wel eens lesgeven in de basisschool.
In de onderwijzersopleiding werd tot voor kort de centrale plaats van de stage met verve verdedigd. Er was zelfs een tijd, in de beginjaren zestig, dat mentoren voor hun werk met kwekelingen een (bescheiden) vergoeding ontvingen. Mentoren werden zodoende officieel betrokken bij de opleiding; samen met de docenten verzorgden zij het praktische deel van de opleiding.
Een punt van zorg in die tijd was de rolverdeling tussen mentor en docent: sommige vakdidactici bleken weinig te kunnen bijdragen aan de praktijk van het lesgeven vanuit een theoretisch standpunt. Dat had tot gevolg dat de lessen van kwekelingen door mentor en docent op dezelfde wijze geëvalueerd werden, veelal op grote afstand van hetgeen in de vakdidactieklessen op het instituut verteld werd. Je zou verwachten dat het signaleren van de ontbrekende niveauverhogingen tot ontwikkelingen in de diverse vakdidactieken zou hebben geleid. Niets was, in het algemeen gesproken, minder het geval. Op diverse PA's ging men over tot een soort algemene begeleiding, waarbij de kennis van de vakdidactieken op de achtergrond geraakte. De docent reken en didactiek begeleidde nu onder meer ook muziek-, taal- en wereldoriëntatielessen. Hiermee was van een rolverdeling tussen mentor en docent nauwelijks meer sprake. Nieuwe fenomenen als super- en intervisie deden hun intrede. Ze gaven behalve instrumenten om de nieuwe situatie baas te worden, ook een soort onderwijskundige legitimering van de nieuwe stage-aanpak.
Wellicht is de huidige situatie, waarin de stagebegeleiding voornamelijk aan de mentoren wordt overgelaten, hieruit logischerwijs voortgekomen. Natuurlijk speelden ook andere, niet voorziene omstandigheden, van beleidsmatige en organisatorische aard, een rol. Maar wie had tien jaar geleden, in de tijd van de 'stage centraal', deze ontwikkeling naar een stagebegeleiding-met-afstandsbediening kunnen voorspellen? Ik niet.

3 De dit jaar gestarte Pabo-ontwikkelgroep 'PUIK' (Maarten Dolk, Wil Oonk, Willem Faes, Ronald Keijzer, Wim van de Geer, Jan Willem Oonk, Huub Jansen, Coen Schinkel, Frank van Merwijk, Ria Vrolijk, Marjan Steverink, Gert Muller en Fred Goffree) gaat zo te zien wat verder. PUIK staat namelijk voor Programmering, Uitlijning, Invulling en Kwaliteit; zie ook par.6.2; pag.52.

4 Donald Schön (1983). *The Reflective Practitioner*. New York: Basic Books.

5 Het NVORWO-symposium 'Rekenen anno 2002' lag ingebed in de jaarlijkse Panama conferentie, die in 1992 gewijd was aan het onderwerp procenten-verhoudingen voor de leeftijdsgroep tien tot veertien jaar.

6 Goffree, F., A.H.Hiddink en J. Dijkshoorn (1966). *Rekenen en Didactiek*. Groningen.

7 Goffree, F. (1979). *Leren onderwijzen met Wiskobas*. Utrecht: IOWO (diss.).

8 'Bijna', omdat het proefschrift op de derde bladzijde begint met het examen van Durgerdam uit 1733 en op bladzijde 367 eindigt met de oplossing ervan.

9 Goffree, F. (1982). *Wiskunde & Didactiek*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

10 Practisch rekenen stamt als vak uit de vorige eeuw. Op de Kweekschool werd het in 1923 vervangen door het meer formele Handelsrekenen.

11 De pedagogieklessen aan de Hervormde Kweekschool te Amsterdam werden verzorgd door de onvolprezen, begeesterde docent IJ. van der Molen. Hij gaf ook geschiedenis, maar de didactiek van de schoolvakken is, zover ik mij herinner, niet aan de orde gesteld.

Bijlage: reflectieve oplossingen

1 Examen 1954, opgave 1

Ik maak eerst maar een plan van oplossing, en doe later het rekenwerk wel.

a Grondstoffen

75 × 0,80 =	....		
15 × 1,25 =	....		
1,5 × 2,85 =	....		
0,6 × 16,50 =	....		
	————	+	
	....		
	0,50		
	————	+	
	....		per 100 l
Voor 3800 l dus 38 ×	....	=	

b Fabricage

400
1250
512,50
———— +

....
———— +
....

c Algemene kosten
Er komt 5% bij, vermenigvuldig dus het laatste bedrag met 1,05:

1.05 × .... = ...

Nu even invullen, een combinatie van hoofdrekenen en cijferen.
Bijvoorbeeld 75 × 0,80 zie je direct als $\frac{3}{4}$ van 80, dat is 60. Bij 15 × 1,25 neem ik 12,50 en de helft daarvan, 6,25. Samen 18,75. In het geval van 1,5 × 2,85 kies ik de veilige weg van het cijferen. Achteraf zag ik dat het ook uit het hoofd kan via 2,85 = 3,00 – 0,15, en 15 × 15 = 225, zodat 1,5 × 2,85 = 1,5 × 3,00 - 0,225 = 4,275. (Zo riskant dat ik het even op mijn zrm heb gecontroleerd.)
Ten slotte komt er:

a Grondstoffen

75 × 0,80 =	60,00	
15 × 1,25 =	18,75	
1,5 × 2,85 =	4,275	
0,6 × 16,50 =	9,90	
	————	+
	92,925	
	0,50	
	————	+
	93,425 per 100 l	

Voor 3800 l dus 38 × 93,425 = 3550,15

getal	som der cijfers	verschil	dd 11?
30000	3	29997	7+9+2-9-9 dd 11
60000	6	59994	ja*
90000			ja
10125	9	10116	6+1+1-1-0 nee
40125			nee
70125			nee
20250	9	20241	nee
50250			nee
80250			nee
30375	18	30357	nee
60375			nee
90375			nee
10500	6	10494	ja
40500			ja
70500			ja
20625	15	20610	nee
50625			nee
80625			nee
30750	15	30735	nee
60750			nee
90750			nee
10875	21	10854	nee
40875			nee
70875			nee

* Hier merk ik op dat het vorige getal met 30000–3 vermeerderd is, en dat is een 11-voud. Daar nu het vorige getal al een 11-voud was, en 11-voud + 11-voud = 11-voud, behoef ik hier, en bij alle volgende drietallen, geen aparte berekening uit te voeren. Er zijn dus nog slechts zeven berekeningen nodig. Als het eerste getal een 11-voud oplevert, dan ook de volgende twee. Zo niet, dan ook de volgende twee getallen niet.

Opmerking
In beide gevallen, het handelsrekenen en de rekenkunde, kan ik me totaal niet meer herinneren hoe ik op het examen te werk ben gegaan. Ik weet evenwel zeker dat er in de opleiding geen aparte aandacht was voor de organisatie van rekenwerk en systematisch onderzoek. De antwoorden zullen dus wel via diverse kladblaadjes tot stand zijn gekomen.

4 *Plezier in wiskunde, 1983*

Ik ben begonnen met de cent van Adam. Eén cent op de bank, 5% rente. Elk jaar dus 1,05 × het beginkapitaal van het jaar daarvoor. Zo'n probleem loste je vroeger op met de formule voor samengesteld interest: $K_n = K(1 + \frac{p}{10})^n$. Nu doe ik dat met mijn *zrm*, een Casio HS-8G (met constante factor). In 'strokentaal':

$$\boxed{1}\boxed{.}\boxed{0}\boxed{5}\boxed{\times}\underbrace{\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots}\boxed{=}}_{\text{14 keer}} \Rightarrow 2.0789274$$

Na 15 keer was het kapitaal verdubbeld: 2,0789274, na 14 keer zat ik op 1,9799308. Zeg maar: het kapitaal is na 15 jaar verdubbeld. (Dat stemt overeen met de vuistregel dat in het geval van verdubbeling, percentage × aantal jaren ≈ 70).
Op dat moment dacht ik aan het 'graankorrelprobleem' en ging door met de grovere stappen van het verdubbelen. In het vooruitzicht van de ouderavond nam ik de *zrm* er weer bij. (Terwijl ik natuurlijk wist dat $2^{10} \approx 1000$ is.) Na 10 keer 15 jaar is de cent dus ruim 1000 cent geworden. Ik maak daar voorlopig maar geen tientje van, want dan raak ik de factor 1000 kwijt. Waar ben ik? Na 150 jaar dus 1000 keer zoveel. Ik heb ongeveer 6000 jaar (we moeten maar aannemen dat Adam 6000 jaar geleden op aarde was en naar de Postbank ging), dat is 40 × 150 jaar. Dus de cent gaat naar een waarde van 1000^{40}. Oef, dat is 10^{120}, een 1 met 120 nullen. Of 10^{118} gulden, of 10^{115} lapjes van duizend ... het kan niet op! Een leuk stukje rekenwerk. Het is ook aardig om te laten zien dat je voor je begint de zaak goed moet organiseren, anders raak je onderweg de draad kwijt. Ook mooi is dat je af en toe de *zrm* niet nodig hebt en uit het hoofd rekent. Dat moet wel op het eind, want dan schiet de *zrm* te kort: het venster is te klein voor het getal van 121 cijfers. Dat wordt mijn boodschap: de *zrm* vraagt om voorwerk, organisatie, inzicht in de problematiek, handig gebruik en schattend meedenken voor het geval je een fout maakt met het intoetsen. Een *zrm* is dus zeker niet voor de luie leerlingen. Misschien wel heel geschikt voor technisch zwakke rekenaars, zij kunnen nu ook flinke rekenproblemen aanpakken zonder geremd te worden door onoverkomelijk cijferwerk.

5 *Inspelen en opvatting, 1983*

Wat zou die leerling fout gedaan hebben? Er staan totaal drie cijfers achter de komma. Heeft hij misschien de regel (drie cijfers achter de komma) verkeerd toegepast en drie cijfers vóór de komma genomen? Of zijn de komma's in de berekening onder elkaar gezet, net zoals dat bij optellen en aftrekken moet? Wat dan ook, de leerling heeft, zonder inzicht, een of andere regel toegepast en achteraf niet de moeite genomen het antwoord te controleren. Je moet toch zo zien dat er ruim 2 uit moet komen!
Nu kijk ik naar de reacties. Eerst zoek ik op wat ik zeker niet zou zeggen als leraar:
Het is bijna goed! (onzin)
Vertel eens hoe ... (accent op regel)
In mijn boekje ... (antwoord gericht)
Fout! Probeer nog eens. (zinloos)
Doe eens 2 × 2,23 (misschien toch niet zo gek. Als de leerling komma's onder elkaar heeft gezet, dan ontstaat er een cognitief conflict).

Ik zou denk ik, beginnen met:
Hoe heb je het gedaan?
En daarbij zou ik de volgende reacties achter de hand houden:
Hoe kun je controleren?
Kan die uitkomst wel goed zijn?
Kun je je er wat bij voorstellen?
Kun je de uitkomst ook schatten?
Hier heb je mijn *zrm*.

Haar uitleg was: 'Ik heb nummer twee opgegeten, dus (nummer) drie is nog over.'

- *Aantallen herkennen*: Bastiaan zat aan tafel met oma, opa, zus, papa en mama. Opeens laat hij zes bessen, in twee rijtjes van drie in z'n hand, zien: 'zoveel zijn wij!'
- *Verkort tellen*: Het kralensnoer heeft een patroon, twee wit, een zwart. Marleen telt de zwarte kralen. 'Er zijn 30 kralen in het snoer', concludeert ze.

K.3 Technisch construeren

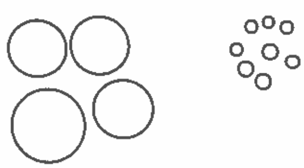
Technisch construeren houdt in dat 'de natuur' naar onze hand wordt gezet, dat uitgaande van 'natuurlijke dingen' de niet bruikbare elementen weggedacht worden, dat ze zodoende herschapen worden met schema's en abstracte vormen, dat er constructies ontworpen worden door te denken in meetkundige figuren, dat vorm en beoogd gebruik in nauwe samenhang worden gezien.
Denk in 't groot aan huizen, gebouwen, torens, stadswijken en steden. Aan wegen, verkeerspleinen, viaducten, spoorwegnet en infrastructuur. Parkeergarages, luchthavens en havens. In 't klein aan kruiwagen, heftruc en hoogwerker. Aan keuken, zwanenhals en waterafvoer. Aan klimrek, crossbaan en zweefmolen. Leerlingen leren de meetkundige figuren kennen door het 'technisch' gebruik ervan. Wie bijvoorbeeld een kruiwagentje van Lego wil maken, kijkt naar de uiterlijke vorm van een kruiwagen. Het grondpatroon is een rechthoek, maar er moeten punten afgeschuind worden. De bodem is een echte rechthoek, net als voor en achterkant ...

K.4 Kwaliteit

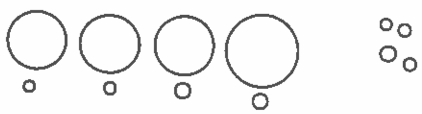
Kwaliteit kun je constateren als kleuters gemotiveerd zijn, controle hebben over het eigen handelen, zich in de situatie kunnen inleven, geconcentreerd zijn, zelfstandig beslissingen nemen, met anderen samen werken, soms even bij een gebeurtenis stil staan.

K.5 Een conflictsituatie

Hieronder wordt gevraagd waarvan er meer zijn. Als de kinderen voor het linkse plaatje kiezen, letten ze meer op de ingenomen plaats dan op het aantal rondjes.



Het conflict ontstaat als we de rondjes twee aan twee bij elkaar gaan leggen.



I.1 Zich realiseren

Deze uitdrukking werd het eerst gebruikt door Jan van den Brink. Hij ontdekte dat de moeilijke stipsommen voor jongen kinderen geen problemen meer opleverden als ze zich een bus, met in- en uitstappende passagiers erbij konden voorstellen. Bij de opgave 3 + . = 7 realiseerden ze zich dat er drie personen in de bus zaten toen hij bij de halte aankwam en zeven toen hij daar wegreed. Er moeten dus vier personen bij gekomen zijn. In het algemeen is het natuurlijk waar, dat je zaken beter doorziet als je je er iets concreets bij kan voorstellen.
Wat is $\frac{3}{4} : \frac{1}{8}$? In een fles gaat $\frac{3}{4}$ liter wijn; een glas bevat $\frac{1}{8}$ liter. Hoeveel glazen uit die fles? Giet in gedachten de fles maar leeg in de glazen: zes dus.

I.2 Conflictsituaties bevorderen het reflecteren

Tussen einde en begin

reken-wiskundeonderwijs voor 12-16 jarigen: 1987-2002

J. de Lange
Freudenthal Instituut

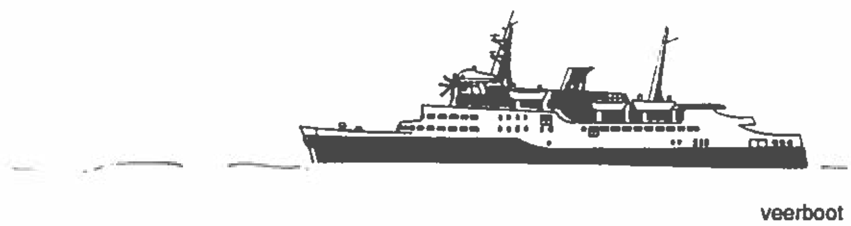
1 Inleiding

Een goed voorbeeld is nooit weg, maar voorbeelden, geïsoleerd en uit hun verband gehaald, geven vaak een vertekend en geïdealiseerd beeld van de werkelijkheid. Steeds weer duiken bij aandachtige lezers en toehoorders de vragen op van 'Ja leuk hoor, maar wat zit ervoor en wat volgt erachter?'
Dat zijn heel goede vragen en daarom hebben we deze keer gekozen voor een langer voorbeeld, een continu geheel van een aantal lessen voor de brugklas. Het geheel maakt deel uit van een door het Freudenthal Instituut ontworpen leerpakket in het kader van het Amerikaanse Middle School Project.[1]

Het biedt de gelegenheid om een beeld te krijgen van een weekje wiskundeonderwijs, waarbij veel van wat later ter sprake komt, handen en voeten gegeven kan worden. Het biedt ook de gelegenheid om een inschatting te maken van de doelen die de ontwerpers voor ogen stonden, de structuur die er al of niet in zit, het onderwijs dat er bij zou moeten horen, en vooral ook welke toets hierbij te ontwerpen zou zijn.

Want praten, theoretiseren en filosoferen over reken-wiskundeonderwijs is mooi, maar mooier is het als we deze verhandelingen enigszins kunnen toetsen aan de dagelijkse praktijk. En die praktijk is vaak wat anders dan we ons achter het bureau voorstellen – vandaar dat observaties bij ons soort ontwikkelingsonderzoek van zo'n vitaal belang zijn.

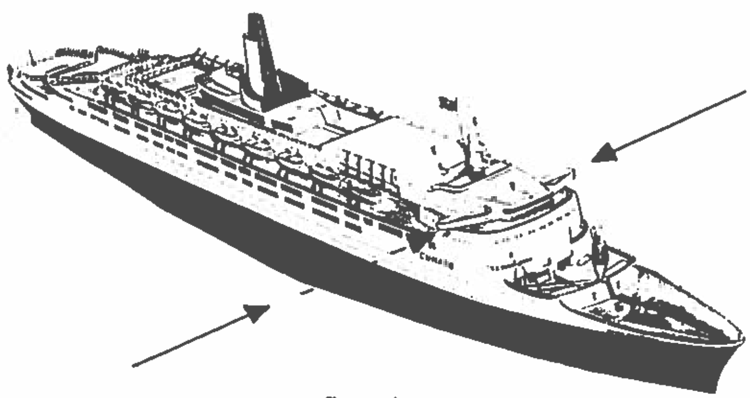
1.1 Schip Ahoy



figuur 3

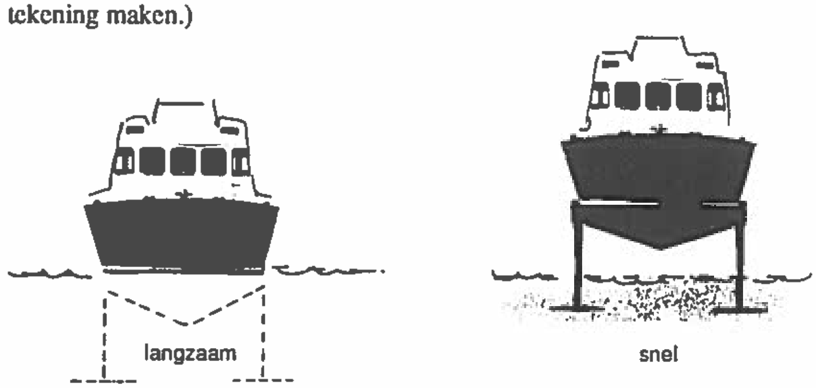
Meet in elk van de situaties de hoek tussen het wateroppervlak en de kijklijn. Wat betekent een kleine hoek?

3 Zij-aanzichten van boten en de kijklijnen zeggen niet alles over wat de kapitein kan zien.



figuur 4

Tussen de twee pijlen zie je de brug van de Queen Elisabeth II. Kapitein en stuurman besturen het schip vanaf de brug. Waarom hebben de kapitein en zijn bemanning goed zicht op het water vóór hun schip?
Hoe verandert de vorm van het gebied dat de kapitein niet kan zien, als hij van uiterst links naar uiterst rechts over de brug loopt? (Als je wilt kun je een tekening maken.)



figuur 5

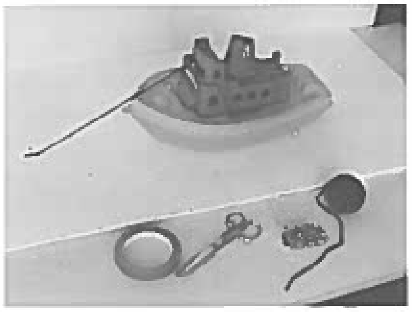


foto 1

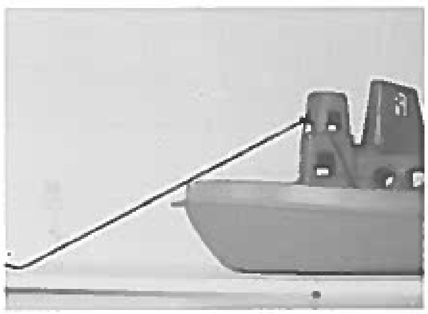


foto 2

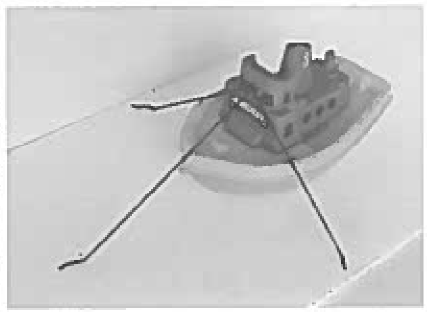


foto 3

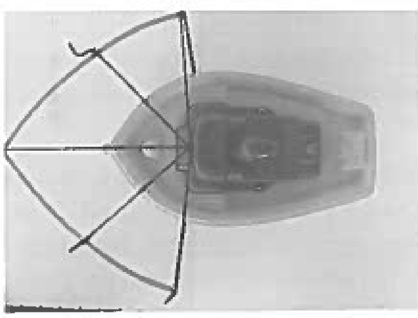


foto 4

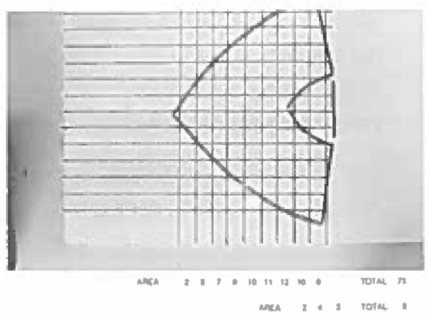


foto 5

figuur 8

1 Leg je bootje op het karton, net als op foto 1. Maak een schatting voor het gebied (het wateroppervlak) dat de kapitein niet kan zien.
2 Construeer een kijklijn recht vooruit, zoals in foto 2.
3 Construeer andere kijklijnen, zoiets als in foto 3.
4 Nu gaan we de verhouding tussen de oppervlakte van de blinde hoek en de oppervlakte van de boot (van de brug tot aan de boeg) bepalen.
Op de foto's 4 en 5 kun je zien hoe je dat kunt doen.
Bereken nu de oppervlaktes en de verhouding voor je eigen bootje en vergelijk die met je schatting van opgave 1.

3.1 veranderde opvattingen over plaats en functie van de wiskunde binnen het onderwijs

Het primaire doel van het huidige wiskundeonderwijs lijkt te zijn:

- het voorbereiden van de leerling op zijn functioneren in de maatschappij.

Dit punt is niet een typisch Nederlands verschijnsel. Ook in andere westerse landen is deze verschuiving naar de vorming van 'intelligent citizens' en meer 'numeracy' zeer duidelijk waarneembaar. De maatschappij vereist van de burgers kwaliteiten die nauw zijn verwant met het leren van wiskunde: het analyseren van processen, het interpreteren van resultaten, het beoordelen van wiskundig getinte presentaties, het begrijpen van de fysische wereld waarin we leven.

Een tweede doel is dan:

- het voorbereiden van de leerlingen op de vervolgopleidingen.

Dit doel is van alle tijden, maar de invulling ervan is aan sterke veranderingen onderhevig.

Was het vroeger vaak zo dat een boek wiskunde voor biologen allereerst een wiskundeboek was, tegenwoordig wordt veel meer de toepassing centraal gesteld en de wiskunde toepasbaar of bruikbaar aangeboden voor dat gebied. Gebruikerswiskunde heeft zodoende op een vrij natuurlijke manier zijn intrede gedaan, met steun van het feit dat wiskunde steeds meer toepassingsgebieden kreeg en doordat toepassingen ook leerlingen steun leken te bieden.

Het aloude doel van wiskundeonderwijs werd daardoor het derde doel:

- de leerlingen kennis laten maken met wiskunde als vakgebied (of als spel of als kunst).

Het laten opbloeien van de wiskunde als wiskunde werd steeds verder naar de hogere leerjaren verdrongen, zo het ooit al een zinvolle invulling had. Het valt niet mee om de huidige invulling van het vwo-B programma als 'echte' wiskunde te karakteriseren.

Met de intrede van de sociale en gebruikswiskunde verloor ook het 'bewijzen' terrein. Helaas dient daarbij te worden opgemerkt dat ook dit onderdeel in het onderwijs eigenlijk al veel zinvolheid was ontnomen. Een herbezinning op dit onderdeel in relatie met 'gezond-verstand'-redeneren lijkt niet overbodig.[5]

Naast deze veranderde doelen zijn er nog meer argumenten te vinden die tot de wijzigingen hebben geleid.

3.2 nieuwe inzichten in leren en onderwijzen

Al tijdens de jaren zeventig werden de fundamenten gelegd voor een benadering van het wiskundeonderwijs die nu uiteindelijk zijn beslag krijgt op de middelbare scholen. Leren is geen passief proces van informatie opzuigen en het in allerlei gescheiden compartimenten opslaan in de hersenen. Leren moet je doen.

De leerlingen kunnen bijvoorbeeld hun wiskundige concepten gedeeltelijk zelf construeren aan de hand van een 'echt' probleem. Daarbij is ruimte voor eigen

4 Het programma

De COW moest een examenprogramma leveren voor vbo/mavo-C/D en programma's voor alle andere schoolsoorten: vbo-A/B, havo en vwo. De nu voorliggende programma's zijn gebaseerd op een grote variëteit aan feiten: de veranderde doelen van wiskundeonderwijs, de inzichten van de breed samengestelde commissie COW, de inzichten van het uitvoerend Team 12-16[7] en de door het team uitgevoerde experimenten op een klein aantal scholen, de ervaringen van de docenten en leerlingen van de experimenteerscholen, de reacties van velen, vooral docenten, op publikaties van COW en Team 12-16, de ongevraagde reacties van geïnteresseerden, de officiële reacties van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en de VALO-Wiskunde & Informatica, om er enige te noemen.[8]

Er zijn een paar duidelijke hoofdzaken in het rapport aan te wijzen:

– *invoering van het onderdeel (voortgezet) rekenen*
  Dit zal velen nauwelijks verbazen. Het garandeert enerzijds een betere aansluiting met de basisschool en anderzijds wordt het rekenen onderhouden, wat een harde noodzaak lijkt. Uit de reacties van het veld blijkt dit onderdeel dan ook buitengewoon positief gewaardeerd te worden.
– *verschuiving binnen de algebra*
  Deze verschuiving is nadrukkelijk een gevolg van de al eerdergenoemde verschuiving in doelen: meer gebruikerswiskunde, meer interpretatie, meer flexibel kunnen omspringen met verschillende representatie-vormen, minder geïsoleerd van de andere onderdelen. Dat heeft consequenties voor andere facetten van de algebra: het gaat minder om de algebra zelf, minder om manipulaties met symbolen, minder om technieken in de traditionele zin.
  De discussie over de algebra is heftig geweest en heeft ook continu tot bijstelling en betere legitimering van de huidige keuzen geleid. Het blijven echter aanbevelingen en de toekomst moet leren in hoeverre de verwachtingen ook gerealiseerd kunnen worden. Het lijkt duidelijk dat nog veel onderzoek en ontwikkeling op dit terrein moet plaatsvinden. Het veld heeft ons al geleerd dat de bijstelling van het programma wordt gewaardeerd, maar dat men twijfels heeft over de mate waarin deze richting geëffectueerd kan worden.
– *vernieuwing van de meetkunde*
  Meetkunde floreerde niet echt in het bestaande programma, overigens een internationaal verschijnsel. De Euclidische meetkunde leed zeer onder de veroordeling van de Bourbakisten aan het eind van de jaren vijftig: 'A bas Euclide'![9] Dat is met het invoeren van de 'moderne wiskunde', gebaseerd op de verzamelingenleer, ook aardig gelukt. Maar de transformatiemeetkunde bleek alras ook een tamelijk lege verzameling.[10]
  Inmiddels is er een gedeeltelijke vervanging ontwikkeld die de meetkunde van het kijken genoemd kan worden: het 'wat' van het zien en het 'hoe' daar-

maar waar dat minder dan moet zijn en waarom, is een ernstig punt van discussie. Bij het programma 12-16 is dat ook duidelijk het geval. Commissie en team hebben heel wat heftige discussies gehad over de technieken van de algebra en de meetkunde:

- weg is het tot in detail bestuderen van de kwadratische functies; het is nu niet meer dan één van de vele soorten functies die je tegen kan komen;
- weg zijn de merkwaardige produkten, althans de uitgebreide, haast mystieke benadering en beoefening van deze tak der algebra;
- weg is het kwadraatafsplitsen, een toch fraaie inzichtelijke manier van oplossen van allerlei problemen in de kwadratica.

Is dat vooruitgang? Of is dat een twintig jaar verlaat doordringen van de flowerpower in het Nederlandse wiskundeonderwijs?

Het tegenargument is natuurlijk dat er wat tegenover deze vermeende verarming staat: er is meer aandacht voor concepten, voor interpretatie, voor kwalitatieve benaderingen, voor het flexibel kunnen omspringen met verschillende representaties en er is meer integratie met andere onderdelen van het wiskundecurriculum.
Maar de eerlijkheid gebiedt op te merken dat over dit facet van de vernieuwing het laatste woord nog niet gezegd is of kan zijn.

5.2 structuur

Wiskundeonderwijs was helder in die zin, dat er altijd een duidelijke structuur aan ten grondslag lag. Eerst lineaire functies, dan de tweedegraads functies en soms zelfs nog derdegraads functies. Eerst vergelijkingen, dan ongelijkheden. Eerst een kleine inleiding, dan wat voorbeelden en dan veel, heel veel sommetjes. Een oase van rust en overzichtelijkheid, en niet alleen voor de docenten.
Een leerling die meedeed in het Hewet-experiment dat tot het nieuwe vwo-A programma leidde, verzuchtte eens dat het bij het oude programma allemaal veel duidelijker was: je deed gewoon de laatste som van het rijtje en als je die kon, kon je ze allemaal.[12] Bij die nieuwe sommen moet je steeds alles maken, je kan er geen missen.

Die structuur maakte het onderwijzen ook relatief makkelijk door de steunpunten die er in zaten.
Kom daar nu eens om. Nu ligt de structuur verborgen onder veel tekst en context, of hij wordt gevormd door een verhaal dat niet wiskundig is. En soms lijkt er helemaal geen structuur te zijn.

Kortom, voor docenten en leerlingen ligt hier een zorg die serieus te nemen valt. De ontwikkeling van een concept, de opbouw naar een abstractie daarvan, de transfer naar andere toepassingen, al deze processen dienen voor de docent herkenbaar te zijn, wil het onderwijs het beoogde effect bereiken. En op dit moment schort daar vaak nog het een en ander aan.

Hogere procesvaardigheden prima, maar hoe toets je die? Niet met multiple choice, dat was al gauw duidelijk. Maar hoe dan wel?

Laten we wat voorbeelden uit het buitenland nemen. Want ook daar is duidelijk behoefte aan vernieuwing in het toetswezen. Het eerste voorbeeld toont aan dat niet alle landen dezelfde interpretatie hebben van de invulling op moderne wijze van het wiskundeonderwijs. Is het navolgende een goed voorbeeld van het toetsen van basic skills? Willen we zulke zaken wel toetsen?[13]

Which number is 75% of $$\frac{\sin^2 30 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (0.8)^{-1} + \sqrt{2.25}}{\frac{11}{20} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot (\cos 60 + \tan 45)^2}$$

Een andere poging tot vernieuwing ontlenen we aan een Amerikaans examen, ook recentelijk, waar men zich kennelijk nog niet heeft weten te ontworstelen aan het multiple choice format:[14]

> Bill woog vorige zomer 107 pounds. Hij verloor 4 pounds en vervolgens kreeg hij er weer 11 bij. Hoeveel weegt hij nu?
>
> Welke van de volgende getalzinnen kan gebruikt worden om bovenstaand probleem op te lossen?
>
> a $107 - (4 + 11) = A$
> b $(107 - 4) + 11 = A$
> c $(107 + 11) - 4 = A$
> d $-4 + 11 = 107 + A$
> e $(107 - 11) + 4 = A$

De opgave in open en relevante vorm zou gewoon het probleem moeten zijn zoals verwoord in de aanvangszin 'Bill woog ...' Maar niets van dat alles. De leerlingen moeten de oplossing van het probleem identificeren met een zin met wiskundige inslag die geen sterveling ooit zou gebruiken om het probleem op te lossen. Daarbij moet ook nog bedacht worden dat het te operationaliseren doel hier was: het oplossen van problemen met algebra.

Hoe treurig het soms gesteld is met de relatie toets en doel moge blijken uit het volgende voorbeeld ontleend aan het tweede internationale vergelijkende onderzoek Simms van de IEA.[15] Men mag daar toch top-items verwachten. Dit is er een (fig.10).

Ook hier weer het multiple-choice format dat de oplossing makkelijker maakt omdat leerlingen de antwoorden een voor een in kunnen vullen en de rit kunnen maken. Het doel dat je meet is dan mogelijk het optellen van gehele getallen. Maar de ontwerpers van deze toets vinden dat lineaire vergelijkingen getoetst worden ...

Op deze manier raken we de multiple choice kwijt en winnen we nog meer: de leerling moet uitzoeken onder welke voorwaarden een gegeven antwoord een correct antwoord is. De beoogde doelen komen daarmee direct op een hoger niveau en de antwoorden zullen de docent of toetsenmaker aanmerkelijk meer informatie verschaffen over het niveau van de leerling. Dat het scoren daarmee wat moeilijker wordt, is een prijs die we er graag voor betalen.

6 Een blik vooruit

6.1 computer

De invoering van de computer in het onderwijs is niet geworden wat het ooit zou worden. De euforie van de jaren tachtig is het afgelopen decennium teruggebracht tot een slechts in kleine kring levend enthousiasme. En wiskunde loopt dan nog voorop ook.
De regering heeft na het volledig falende honderd-scholen-project wat meer succes gehad met het NIVO-project, en ook PRINT mag op een redelijk positief verlopen projectperiode terugkijken.[17] Het probleem ligt niet in één bepaalde zaak maar in een combinatie ervan.
Aanvankelijk was er sprake van hardware-gerichte innovatie: de computers werden de scholen binnengereden, wat softwarebonnen werden uitgedeeld en er werd wat aan deskundigheidsbevordering gedaan. Hoe je nu precies met acht computers op continue basis je wiskundelessen zou kunnen verbeteren, was bepaald niet duidelijk. Dat geldt tot op de dag van vandaag.

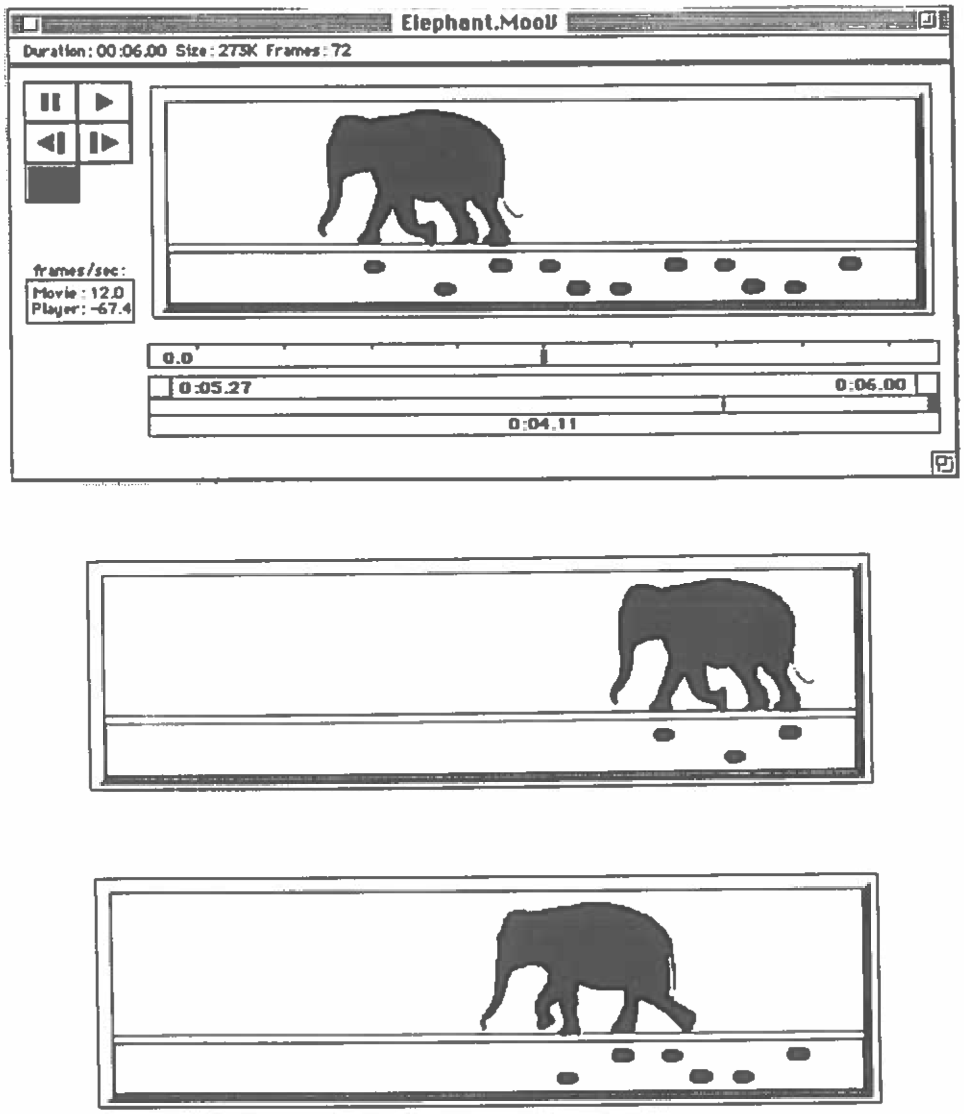
Ook de kwaliteit van de software en vooral de gebruikersvriendelijkheid daarvan liet nogal eens te wensen over. Grote problemen onstonden er met betrekking tot de organisatie op school: ieder moest het met dezelfde paar computers doen. En hoe zat het eigenlijk met de didactiek? Hoe moest je onderwijs met de computer er uitzien?

Daarbij komt nog dat de uitgevers niet echt stonden (en staan) te trappelen om veel in software te investeren. De markt is nu eenmaal veel te klein en men mocht al verheugd zijn als een uitgever bereid was PRINT-produkten uit te geven.

Kortom, computers zijn het nog niet helemaal en de vraag is of ze het ooit zullen worden. Ik denk van niet, althans niet de huidige en komende generatie van computers. De staatssecretaris is volgens kranteberichten nu bekeerd tot CD-I, mogelijk onze volgende nationale trots.[18]

Wiskundeonderwijs in 2002? De technologie zal zeer nadrukkelijk aanwezig zijn en het is aan ons er op toe te zien dat de realistische benadering daarbij tot zijn recht komt. Daarbij zijn er verschillende ontwikkelingen, sommige vrij scherp voorspelbaar, andere wat meer speculatief.

De beweging van de olifant en het patroon van de voetafdrukken levert interessante discussiestof op: als je bijvoorbeeld naar plaatje 2 kijkt – er zijn dan drie afdrukken – is het voor de meeste volwassenen en leerlingen heel moeilijk om de volgende afdruk te voorspellen.

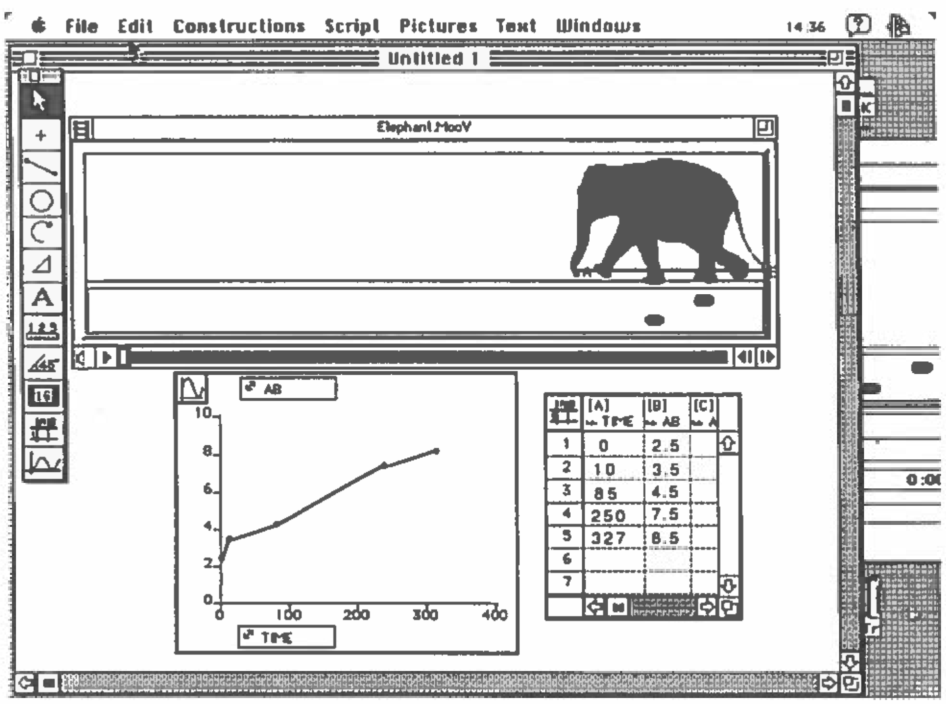


figuur 12

Ook levert het patroon een goed uitgangspunt op voor een discussie over periodiciteit. Het *zig-zig/zag-zag* patroon is duidelijk, maar wat zijn nu de voorpoten en wat de achterpoten? Beeldje voor beeldje bekijken geeft de oplossing.

Dit is overigens een wat simpel voorbeeld: een eenvoudige tijd/afstand-grafiek, maar het toont wel de mogelijkheden en kracht van een degelijk interactief video/software-programma aan.

Het wordt bijvoorbeeld al leuker als we de paardengrafieken ook in dit plaatje tekenen. Maar beter is het om deze eerst te voorspellen.
En met kleur kunnen we ook veel met het patroon van de stappen doen: afmetingen en verhoudingen van dieren en mensen meten. En dan te bedenken dat we ongelimiteerd video kunnen invoeren en er deze software, die de algebra en meetkunde integreert, op los kunnen laten.
Wiskundig onderzoek voor leerlingen op de basisschool en het voortgezet onderwijs kan daardoor in principe weer verder worden verrijkt.



figuur 16

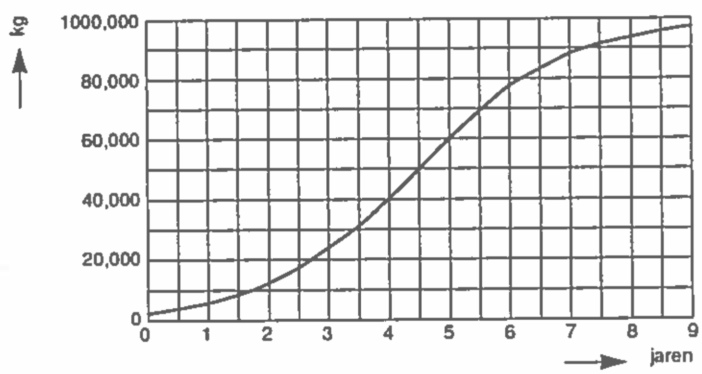
6.4 Interactieve zakvideo?

De interactieve video lijkt qua organisatie net zo onhandig als de huidige computer. Maar dat gaat veranderen. Te verwachten valt dat interactieve video binnen vijf tot zeven jaar ook op het formaat van de graphic calculator beschikbaar zal zijn.
Iedere leerling zijn eigen zakvideo interactief systeem. En dat hang je op school aan het grote systeem en thuis aan een van de vele televisies.

De viskweker zal een aantal jaren afwachten alvorens te oogsten. Daarna wil hij jaarlijks dezelfde hoeveelheid vis vangen, liefst zoveel mogelijk. Het oogsten vindt steeds plaats aan het eind van het jaar. Na elke vangst breidt de visstand zich weer uit volgens bovenstaande grafiek.

2. Welk advies zou jij de viskweker geven over:
   - het aantal jaren dat hij na het uitzetten van de vis moet wachten?
   - de grootte van de jaarlijkse vangst?

Geef bij je advies een toelichting waarmee je de viskweker denkt te kunnen overtuigen.



figuur 17

Een echt open, vooral kwalitatieve vraag, die niet alleen basisroutines toetst, maar bijvoorbeeld ook de communicatieve vaardigheden. Een vraag waar veel leerlingen prachtige antwoorden op hebben geformuleerd, zoals deze leerling die het zoekt in een joviale toon:

> 'Ik zou vier jaar wachten op de visvangst van 20.000 kg. per jaar, dan kan het niet meer fout gaan, joh.'

Er waren ook leerlingen die zich lieten verleiden tot het schrijven van een echte brief:

> 'Als u wacht tot het eind van het vijfde jaar dan heeft u jaarlijks de grootste oogst, namelijk 20.000 kg vis en dat is niet niks!
> U kunt elk jaar 20.000 kg vis oogsten zonder dat het aantal vissen afneemt. Als u een jaar korter zou wachten, zou het nog maar 17.000 kg zijn en bijna een jaar langer maar 18.000 kg vis.
> Dus het hoogste rendement heeft u na vijf jaar wachten, wees dus niet ongeduldig en wacht die paar jaar (voor Uw eigen bestwil).'

In alle jaren sinds 1987, het eerste landelijke examen vwo-A, is dit het enige voorbeeld dat we kunnen vinden dat probeert ook eens wat minder banaals te toetsen. Let wel, de bereken- en tekenvragen zijn belangrijk en dienen op ieder examen aanwezig te zijn, maar als we de echt open vragen niet durven te stellen op examens, dan zien we van onze doelstellingen niet veel overblijven. En het bewijs daarvan kunnen we voor een niet onbelangrijk deel terugvinden bij de huidige examens vwo-A.

7.3 scholing

Er wordt wat geklaagd over de docent. Natuurlijk niet in officiële stukken, maar tussen de regels door des te meer. Het peil daalt, er is weinig nascholingsbereidheid, er zijn geen academisch geschoolde docenten meer, er in geen innovatiebereidheid. Zelfs het dalend aantal wiskundestudenten op de universiteit wordt door sommige deskundigen in verband gebracht met de dalende kwaliteit van docenten.

Daarbij gaan deze critici voorbij aan een aantal feiten.
Het wiskundecurriculum is drastisch veranderd en door de docenten met opmerkelijke flexibiliteit – en veel gemopper – aanvaard en uitgevoerd.
De Nederlandse docent krijgt een record aantal niet-inhoudelijke, maar structurele vernieuwingen over zich uitgestort, waar alleen politici bij gebaat lijken te zijn. Een groot aantal haalt daarvan de eindstreep niet, maar de onrust blijft wel. We denken daarbij aan de lyceumplannen, wiskunde-verplicht, de modulering, de basisvorming en nu weer de profielplannen.
De Nederlandse docent moet ook nog een record aantal uren per week voor de klas staan: 28 uur is ongekend in enig beschaafd land, en dat naast alle vergaderingen. Daardoor is de gemiddelde Nederlandse docent niet eens fysiek in staat nascholing naar behoren te volgen. Ook de condities zijn ongehoord slecht: nascholing het liefst buiten schooltijd, onbetaald en vrijwel zonder enige beloning, in de zin van een extra periodiek of iets dergelijks.

Voorwaarde voor het vervullen van een goed, verantwoord docentschap zijn:
- minder lesuren, bijvoorbeeld 21 als streefgetal op wat langere termijn;
- meer nascholing, deels tijdens de lessen;
- beloning voor toegenomen deskundigheid bijvoorbeeld in de vorm van een extra periodiek of buitenlandse reis naar een congres of iets dergelijks;
- minder structureel-organisatorische en beter begeleide inhoudelijke veranderingen;
- meer betrokkenheid van docenten bij inhoudelijke vernieuwing.

Het klinkt enigszins dramatisch, maar het is gewoon de situatie zoals die in sommige andere landen al lang bestaat.

8 slot

Het reken-en wiskundeonderwijs in Nederland heeft internationaal een zeer goede naam en voor een groot deel terecht. De vernieuwingen behoeven echter veel nazorg, begeleiding, evaluatie en bijstelling. Deze activiteiten zullen gecombineerd moeten worden met innovaties, met name op het gebied van de nieuwe technologie en op het gebied van toetsen.
De komende jaren zullen de geschetste problemen in toenemende mate een op-

zijn ontworpen door de COW, en daardoor in lijn met het nieuwe eindexamenprogramma vbo-mavo. Te verwachten valt dat dit nieuwe programma tegelijk met de basisvorming zal worden ingevoerd.

5 Het 'gezond redeneren' is een centraal punt in Hans Freudenthals laatste boek: *Revisiting Mathematics Education*, Mathematics Education Library. Dordrecht: Kluwer.

6 Zie onder andere Romberg, T.A. (1991). Epistemological Issues and Challenges to Assessment in: Models and Theories of the Learning of Mathematics. *Studies in Mathematics Education*. ICMI.

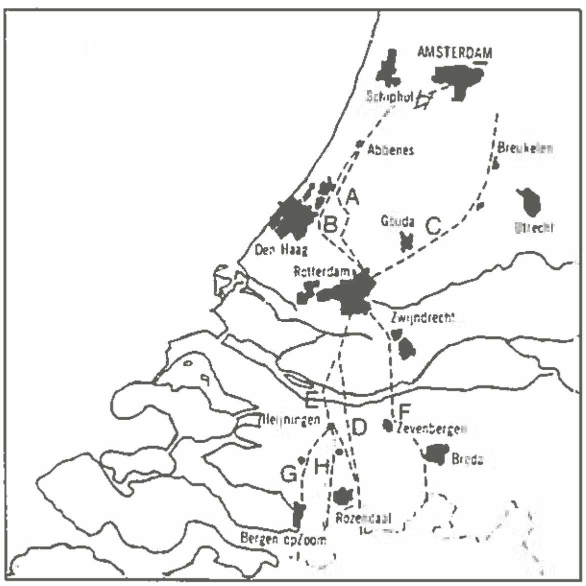
7 De COW droeg de verantwoordelijkheid voor het uitvoerend werk dat verricht werd door een breed samengesteld team onder de prozaïsche naam van 'Team 12-16'. Dit team bestond uit medewerkers van het Freudenthal Instituut, het Instituut voor Leerplanontwikkeling (SLO) en personen aangesteld op het budget van de COW.
Het team dat onder leiding stond van George Schoemaker en Marja Meeder ontwikkelde veel lesmateriaal, achtergrondmateriaal, alsmede de examenprogramma's en een programmabeschrijving, getiteld *Trajectenboek*.

8 VALO is de afkorting van Veld Advisering Leerplan Ontwikkeling, een advies orgaan ten behoeve van het Instituut voor de leerplanontwikkeling SLO.

9 'Weg met Euclides', riep een emotionele Dieudonné op een conferentie voor wiskundeonderwijs in 1959 in Royaumont, Frankrijk. Hij was een prominent lid van de groep Bourbaki, een zeer invloedrijk gezelschap dat structuur in de wiskunde tot dogma verhief en groepentheorie tot in de kleuterschool wilde introduceren. (In België heeft Papy inderdaad kans gezien er iets van in de basisschool te brengen.)

10 De transformatie-meetkunde (schuiven, draaien, spiegelen, enzovoort) werd aanvankelijk redelijk serieus bedreven op de scholen voor voortgezet onderwijs, maar alras werd dit minder en minder.

11 Aan de publikatie *Wiskunde 12-16. Een boek voor docenten*, ontlenen we:
'De activiteiten kunnen getypeerd worden als:
- informatie halen uit grafische voorstellingen en tabellen;
- modelvorming;
- redeneren.'



Traces noordelijk deel
Trace A: Amsterdam, Schiphol, Hoofddorp, Abbenes, richting Leiderdorp, Leiden, Hazerswoude, Benthuizen, boven Hillegersberg naar Rotterdam
Trace B: volgt trace A tot Abbenes, daarna richting Voorschoten, Leidschendam, rechts van Voorburg naar Hillegersberg en Rotterdam
Trace C: is eigenlijk niet interessant omdat het Schiphol links laat liggen. Zal niet serieus meetellen. Loopt van Rotterdam, onder Gouda, naar Woerden, Harmelen, Breukelen.
Traces zuidelijk deel:
Trace D: Rotterdam, Willemspoortunnel, Heinenoord, Hollands Diep, richting Stampersgat, Roosendaal
Trace E: Rotterdam, Heinenoord, Hellegat, Heijningen, dan naar rechts bij Oud-Gastel, zie aansluiting D.
Trace F: Rotterdam, Barendrecht, Zwijndrecht, Hollands Diep, Zevenbergen, Breda
Trace G: volgt trace E tot Heijningen, links naar Steenbergen, Bergen op Zoom
Trace H: volgt trace E tot Heijningen, links van Stampersgat naar Roosendaal

figuur 18

17 Aan mijn oratie ontleen ik de volgende alinea's:
'Wie herinnert zich nog de tragiek van het honderd scholen project? Zoek de Aster- en P2000-computers in de grijze gangkasten van de scholen. Povere onderwijsinnovatie: de hardware innovatie was gemotiveerd door economische en politieke overwegingen. Weer gold dat of en hoe het in de klas terecht kwam als niet relevant werd ervaren. Van Kemenade, op dat moment minister van Onderwijs liet weten dat we zo'n buitenkansje van Economische Zaken niet mochten laten lopen. Het feit dat het de verkeerde machines waren en dat er geen software was, mocht het optimisme van de minister niet deren. De herkansing heette NIVO en dat had ook wat meer.
Maar ook nu was het papieren plan geduldiger dan de praktijk: de Tulip-, IBM- en Philips-combine gaf aanleiding tot technische problemen en de software-ontwikkeling kwam uiterst traag op gang.
Het getuigt van enig optimisme om te stellen dat een 'penetratie van de computer van 6% bij Nederlands en natuurkunde en 16% bij wiskunde (vergeleken met de penetratie van de magnetron in de huishoudens) bevredigend is.'
Maar dit is toch heus de conclusie van de Adviescommissie Stimulering Nieuwe Technologie en Onderwijs neergelegd in een in mei 1990 verschenen rapport. Daarin wordt de opvolger van het NIVO-project, PRINT, geëvalueerd. Dat de bureaucratie en inteelt van de WOV aan de kaak gesteld worden in datzelfde rapport, is niet opzienbarend te noemen. De Commissie verwoordt het als volgt: 'De beslissing van de Verzorgingsinstellingen om de verantwoordelijkheid voor projecten 'in eigen huis' te houden is contra-produktief. Elders opgebouwde deskundigheid dreigt verloren te gaan.'
Jan de Lange (1991). *Hard tegen Hart*. Utrecht: OW & OC (oratie).

18 De toekomst lijkt te liggen in de interactieve video, dat wil zeggen, een software-programma met videobeelden en simpele bediening. Dus meer het tv-idee dan de computerfanaat.
Er is een aantal niet met elkaar te verenigen systemen in de handel of in ontwikkeling. Op dit moment, najaar 1992, ligt Philips voorop met zijn CD-I: de interactieve CD. In de Verenigde Staten zijn er in het eerste jaar circa 60.000 spelers verkocht en zo'n 480.000 schijfjes. Apple is ver gevorderd met zijn Quicktime systeem en IBM gokt op DVI. Ook Tandy heeft nu een systeem op de markt dat iets weg heeft van CD-I. Commodore heeft een eigen systeem dat al een jaar op de markt is.
Het is nog volslagen onduidelijk welke als standaard uit de strijd zal rollen.

19 De CEVO (Commissie Eindexamens Voortgezet Onderwijs) draagt verantwoording voor de eindexamens en heeft een onafhankelijke status.

'Rekenen anno 2002' is de neerslag van een symposium dat de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs (NVORWO) in november 1992 organiseerde ter gelegenheid van haar tienjarig bestaan.

Drs. J. Wallage, staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen spreekt in zijn 'Voorwoord' tot deze bundel over 'een stille revolutie', als hij constateert dat het reken-wiskundeonderwijs in Nederland de afgelopen decennia een even geleidelijke als spectaculaire ontwikkeling heeft doorgemaakt.
Welnu, drie hoogleraren, die een cruciale rol gespeeld hebben in die spectaculaire vernieuwing van het reken-wiskundeonderwijs in Nederland, geven hun karakteristieke visie op de verdere ontwikkeling van dat onderwijs naar het jaar 2002.

Prof. dr. A. Treffers, Freudenthal instituut, en namens de NVORWO hoogleraar aan de Universiteit van Utrecht, schetst in zijn bijdrage 'Terug naar de toekomst' de kern van de ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs in de basisschool. Welke verwachtingen bestonden er in de jaren zeventig en tachtig ten aanzien van de (snelle) invoering van dat 'realistisch' reken-wiskundeonderwijs in de basisschool en hoe kijken we daar nu tegen aan: zal de onderwijspraktijk van 2002 de onderwijsdoelstelling van 1992 dekken?

Prof. dr. F. Goffree, SLO en Universiteit van Amsterdam, beschrijft in zijn artikel 'De Pabo-bv anno 2002', de ontwikkeling van het reken-wiskunde & didactiekonderwijs in de lerarenopleiding basisonderwijs. Aan de hand van examenopgaven uit verschillende perioden (en hun 'reflectieve oplossingen') schetst hij de historische ontwikkeling naar een geïntegreerd opleidingsonderwijs. Ten slotte construeert hij een Pabo-examen anno 2002 – ten aanzien van het onderdeel 'gecijferdheid' – om zijn toekomstverwachting concreet gestalte te geven.

Prof. dr. J. de Lange, Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht, laat er in 'Tussen einde en begin' geen misverstand over bestaan, dat de recent ingediende leerplanvoorstellen twaalf- tot zestienjarigen, niet het einde, maar de start betekenen van een fundamentele vernieuwing van het reken-wiskundeonderwijs in het voortgezet onderwijs. Wat zal de invloed worden van de technologische ontwikkeling op dat wiskundeonderwijs? Heeft elke leerling anno 2002 zijn eigen 'interactieve zak-video' om moeilijke wiskunde-opgaven op te lossen?

Gaarne beveelt de NVORWO dit symposiumboek in de aandacht aan van allen die het reken-wiskundeonderwijs een goed hart toedragen, ook nog in 2002 ...