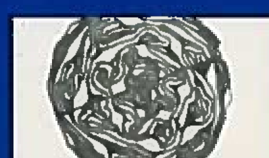
Achtergronden Wiskunde 12-16

1

halveren

erafhalen



Achtergronden

van het nieuwe leerplan

Wiskunde 12-16

BAND 1

Achtergronden van het nieuwe leerplan Wiskunde 12-16

BAND 1

Achtergronden

van het nieuwe leerplan

Wiskunde 12-16

BAND 1

In de periode augustus 1987 tot augustus 1992 waren werkzaam in het team W12-16:

Mieke Abels
Rob Bloem
Jan van den Brink
Aad Goddijn
Koeno Gravemeijer
Gerrit van den Heuvel
Juul ten Hove
Leo Kalmijn
Douwe Kok
Hans Krabbendam
Marja Meeder
Theo Obdeijn
Nanda Querelle
Martinus Riemersma
George Schoemaker
Henk Staal
Heleen Verhage
Sylvia van der Werf
Monica Wijers
Pieter van der Zwaart

De administratieve ondersteuning van het project werd verzorgd door:

Sylvia Pieters
Evelien Veltman
Corine van den Boer
Ellen Hanepen

Verder werkten mee:
Truus Dekker
Joop van Dormolen
Ed de Moor
Fred Mulder
Wilma Verkooijen

Omslagontwerp en vormgeving: Ida Rouwenhorst

WOORD VOORAF

Voor u ligt één van de eindprodukten van het team W12-16. Samen met de andere boeken vormt dit boek één geheel. Ieder boek kan afzonderlijk gelezen worden; alle boeken samen geven een compleet beeld van het werk van het team W12-16. In de eerste plaats zijn er de twee officiële publikaties:

- het *Examenprogramma* vbo/mavo C/D.
- het *Trajectenboek* Wiskunde 12-16, waarin de leerplannen beschreven zijn voor alle schooltypen. Een droge opsomming van leerstof uitgesplitst naar B-, C-, D-, havo- en vwo-niveau.

Verder zijn er nog:

- *Wiskunde 12-16, een boek voor docenten*, waarin aandacht wordt besteed aan allerlei aspecten die samenhangen met de leerplanverandering. Verder wordt een globaal overzicht gegeven van de nieuwe inhouden en de visie die ten grondslag ligt aan de keuzen die gemaakt zijn.
- In *Wiskunde een Wereldvak* gaat het om allochtone leerlingen en de rol die taal en cultuur in het wiskundeonderwijs spelen.
- In *Achtergronden bij het nieuwe leerplan wiskunde 12-16* wordt uitvoerig beschreven welke keuzen zijn gemaakt, welke uitgangspunten zijn gehanteerd en welke argumenten een rol hebben gespeeld.
  In band 1 staan artikelen over algebra, rekenen, geïntegreerde wiskundige activiteiten en realistische wiskunde voor vbo-leerlingen, in band 2 over meetkunde, informatieverwerking en statistiek en het nieuwe W12-16-programma ook goed voor meisjes.

Naast deze produkten is er een hele serie leerlingpakketten verschenen en wordt er elk jaar een Examenbundel gepubliceerd met de experimentele eindexamens passend bij het nieuwe examenprogramma.

De Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs (COW) was verantwoordelijk voor het project waarin gewerkt werd aan vernieuwing van het wiskundeonderwijs voor twaalf tot zestien jaar. Het team W12-16 deed het eigenlijke werk, daarbij soms gesteund door externe deskundigen. Het Examenprogramma en het Trajectenboek zijn als officiële eindprodukten aangeboden aan de staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen.

De COW en het team W12-16 zijn per augustus 1992 opgeheven. Instituten als SLO en Freudenthal instituut gaan voort met respectievelijk ontwikkeling en onderzoek op het gebied van wiskundeonderwijs. De Samenwerkingsgroep Wiskunde 12-16 neemt de taken over ten aanzien van het nieuwe leerplan vooral wat betreft de invoering. Deze groep waarin alle lerarenopleidingen, de experimenteerscholen, Freudenthal instituut, SLO en CITO samenwerken, wordt gecoördineerd door het Algemeen Pedagogisch Studiecentrum (APS).

Marja Meeder
George Schoemaker

INLEIDING

Doelgroep, inhoud

Dit boek is geschreven voor lerarenopleiders, auteurs van schoolboe-ken, nascholers, maar ook voor docenten die meer van de achter-gronden willen weten.

'Achtergronden bij het nieuwe leerplan wiskunde 12-16' is de dik-ste van de publikaties van W12-16. Daarmee is niet gezegd dat dez twee banden alle andere publikaties omvatten. Bijvoorbeeld over di-dactiek zult u in dit boek niet veel vinden. Daarover is meer geschre-ven in 'W12-16 een boek voor docenten'. In het voorliggende boel hebben we niets extra te melden over dat onderwerp.

De opbouw van deze twee delen weerspiegelt de werkwijze van he team. De taakverdeling was niet zo dat iedereen zich met ieders werl bemoeide. Het team heeft taken verdeeld, in deelgroepen gewerkt. E waren ook medewerkers die in meer groepen werkten. Wel werden ui teraard essentiële keuzen vooraf gemaakt en belangrijke keuzen di zich tijdens het werk aandienden, werden in het hele team bespro ken. Elke lijnengroep kon zo een eigen stijl ontwikkelen. Zodoend zijn de verschillen in manier van presenteren niet alleen toe te schrij ven aan de aard van de onderwerpen: rekenen, algebra, meetkunde informatieverwerking en statistiek, GWA. In de praktijk van het on derwijs zal het veelal gewenst zijn de zogenaamde lijnen in de leersto te vervlechten. Rekenen zal niet los van algebra, meetkunde en sta tistiek zijn. Het bestuderen van verbanden zal zowel in de algebra al in de meetkunde moeten gebeuren. Een probleem kan een meetkun dig gezicht hebben. Een optimalisering zal vaak het werken met for mules en grafieken met zich meebrengen. Daarbij hoort kritisch kij ken naar het eigen rekenen, gevoel voor orde van grootte. De gege vens en het resultaat kunnen op een passende manier gepresenteer worden.

Grote lijnen, niet alleen leerstoflijnen

Er zijn duidelijke verschillen in omvang en stijl waar te nemen in di boek. In het algemeen is er meer uitgewijd over aspecten die in hog mate nieuw zijn. Grote lijnen waren niet alleen de lijnen van de zoge naamde lijnengroepen die binnen het team werkten aan: rekenen, al gebra, meetkunde, informatieverwerking en statistiek en GWA. Ee grote lijn was bijvoorbeeld ook aandacht voor meisjes. Dat was ee opdracht bij de start van het project. Bij de samenstelling van het team en in het werk in de scholen en in samenkomsten met docenten is daaraan gewerkt. Zie het hoofdstuk 'Het nieuwe W12-16 programma ook goed voor meisjes' in band 2. In band 1 staat een hoofdstuk over het vbo en wel met name het B-programma, bedoeld voor de hoofdstroom van het vbo.

Uitgangspunten, een ontwikkeling

Het team W12-16 had vijf jaar lang regelmatig overleg over de grote lijnen van het werk en over essentiële punten daarin. Bij de start van het project had de COW uitgangspunten geformuleerd. Gedurende de vijf jaren dat er aan de ontwikkeling is gewerkt zijn deze uitgangspunten verhelderd en aangepast. Dat proces heeft plaats gevonden in wisselwerking met de praktijk: experimenteerscholen en bijeenkomsten met docenten. De oorspronkelijke uitgangspunten zijn niet wezenlijk veranderd. Het gaat nog steeds om wiskundeonderwijs voor alle leerlingen. Het gemeenschappelijke is gelegen in de opvatting over wiskunde leren. De breedte van de leerlingenpopulatie en de breedte van wiskundonderwijs krijgen veel aandacht.

We doen recht aan de breedte van de populatie van leerlingen door aandacht te besteden aan wiskunde die plaats heeft in concrete, praktische situaties en wel voor alle leerlingen. Leerlingen die wiskunde niet verder nodig hebben in beroep of voortgezette studie zullen eerder in hun schoolloopbaan stoppen met wiskunde. Vandaar dat we met deze concrete wiskunde beginnen. Wiskundeonderwijs waarin aanvankelijk de betekenis voorop staat boven de formalisering. Leerlingen leren begrippen door middel van contexten. Daarmee is niet gezegd dat de praktische wiskunde voor alle leerlingen op hetzelfde niveau wordt aangeboden. Aandacht voor de breedte van de leerlingenpopulatie betekent ook de erkenning dat een groot aantal leerlingen al gauw ver boven hun macht bezig is met abstracte begrippen. Dat brengt met zich mee dat er gestreefd is naar de mogelijkheid dat met name de zwakke leerlingen dingen leren die ze ook goed kunnen gaan beheersen, zaken die binnen hun macht liggen in plaats van halfbegrepen wijsheden die verdwijnen zodra gestage training ophoudt. Breedte betekent ook aandacht voor die leerlingen die wel goed in staat zijn vanaf het begin door te breken naar abstracties. De vraagstellingen die tot wiskundige activiteiten aanleiding geven, kunnen komen uit het dagelijks leven of andere schoolvakken. Maar ook uit nieuwsgierigheid en verbazing over speciale eigenschappen van getallen en figuren.

Oog hebben voor de breedte van de leerlingenpopulatie leidde tot een programma in vijf leertrajecten zoals beschreven in het Trajectenboek. Aandacht voor de breedte van de leerlingenpopulatie gaat hand in hand met de opvatting over breedte van wiskundeonderwijs. Naast concreet handelen en toepassingen zijn er ook abstracties zoals bijvoorbeeld het gebruik van verbanden, het representeren in tabellen en grafieken. Leerlingen leren wiskunde uit hun eigen ervaringen. Ze hoeven uiteraard niet alles opnieuw te ontdekken. Dat is ook niet mogelijk. Soms kan het proces versneld worden door overdragen van het gedachtengoed van de wiskunde. Leerlingen maken dan kennis met begrippen en werkwijzen in de wiskunde zoals gebruik maken van variabelen, het representeren in grafieken, een rooster gebruiken, manieren om ruimtelijke figuren te tekenen, formules vergelijken. Uit deze standpunten over de breedte volgen gemeenschappelijke kenmerken van de grote lijnen zoals beschreven in dit boek.

Gemeenschappelijke kenmerken nader benoemd

Leerlingen vinden zelf wegen om wiskunde op te bouwen. Wiskunde ontdekken in de wereld om je heen en de wereld om je heen gebruiken om wiskunde expliciet te maken. Van meet af aan bouwen aan een wiskundige attitude: in staat en bereid zijn hoofdzaken van bijzaken te onderscheiden, in een geheel nieuwe situatie je ervaring in te zetten in plaats van een 'hebben we niet gehad'-houding. Uiteraard is de docent degene die situaties creëert waarin bouwen aan een attitude plaats kan hebben. De attitude van de leerling speelt een belangrijke rol bij de aansluiting naar vervolgonderwijs. In het nieuwe programma wordt op alle niveaus aandacht besteed aan een wiskundige attitude van leerlingen:

- zelf zoeken naar een oplossing,
- een regelmatig appèl op je gezond verstand doen,
- je resultaat steeds ook kunnen relateren aan de context,
- een raar antwoord als zodanig kunnen herkennen en
- verwerpen op grond van andere kennis,
- in bepaalde gevallen zelf aannames kunnen doen,
- van het bouwwerk van de wiskunde die zaken leren die een universele werking hebben.

De schrijvers en medewerkers

Alle teamleden werkten mee aan teksten voor deze beide banden. Dat bestond uit het bedenken, schrijven en herschrijven op grond van reacties van anderen maar ook het brengen van alle teksten binnen eenzelfde lay out en het invoeren van wijzigingen tot het laatste moment. Het team ziet deze bijdragen als het doorgeven van kennis, en

varingen en inzichten aan het eind van het project, juli 1992. De ontwikkeling gaat verder, met het zwaartepunt in de activiteiten van de samenwerkingsgroep rondom tien experimenteerscholen.
Van de lezers F. van der Blij, M. Dienske, H. Krabbendam, K. Hoogland, L. Kuyk en A. van Streun ontvingen we waardevolle reacties.

INLEIDING EN LEESWIJZER

Bij algebra gaat het in het leerplan W12-16 om het werken aan problemen, waarin verbanden tussen variabelen een rol spelen. Bij voorkeur gaat het om problemen die voortkomen uit realistische situaties. De verbanden kunnen worden voorgesteld of beschreven met diverse middelen:

- tabellen;
- grafieken;
- formules.

Deze voorstellingsvormen en hun onderlinge samenhang zijn belangrijke hulpmiddelen voor het vinden van oplossingen van problemer rond verbanden tussen variabelen.

In het voorgestelde leerplan vormen algebraïsche technieken geer doel op zich, maar ze staan in dienst van het werken aan verbanden

De zojuist gegeven korte beschrijving van wat algebra in het project W12-16 is, komt bijna letterlijk uit de beschrijving van het nieuwe examenprogramma voor C/D-niveau.

In het examenprogramma volgt dan nauwkeurig omschreven wat var een leerling verwacht mag worden op het examen.

In deze tekst echter, wordt beschreven hoe die leerling tot dat examenniveau kan komen: het is in wezen een beschrijving van het leerplan algebra en van de visie die er aan ten grondslag ligt.

Omdat het om inhouden èn visie gaat, volgen we niet puntsgewij: de formele exameneisen. We zetten in hoofdstuk 2 eerst onze uitgangspunten op een rij. Deze sluiten direct aan bij de algemene uitgangspunten van W12-16, met name wat betreft de keuze voor gebruikswiskunde. De uitgangspunten voor het leerplan algebra zijn ii feite een toespitsing van die keuze op het terrein algebra.

Voordat we ingaan op de opbouw van het voorgestelde leerplan, on derzoeken we eerst de begrippen tabel, grafiek en formule in hun sa menhang. Daarbij komt het tot een overzicht en analyse van aspecter die een rol zullen spelen bij de latere uitwerking van het leerplan. W vatten daarbij tabel, grafiek en formule op als voorstellingsvormer van verbanden. Dat gebeurt in hoofdstuk 3.

De verbanden zelf worden in hoofdstuk 4 onder de loep genomen het gaat vooral om de vraag welke verbanden aan bod komen en welke algebraïsche technieken en welke begrippen bij die verbanden vai belang zijn. Aan de keuze voor bepaalde verbanden en vaardigheder ligt de keuze voor gebruiksalgebra ten grondslag. In de hoofdstukker 3 en 4 is verder ruim aandacht voor de verschillende kanten van he begrip variabele. Hoofdstuk 3 en 4 vormen wat wel genoemd wordt een mathematisch-didactische analyse van het gebied.

Het eigenlijke leerplan wordt in hoofdstuk 5 beschreven. In het Trajectenboek is dat ook gedaan. Maar was het Trajectenboek meer een nauwkeurige opsomming van kernpunten, hier gaat het om lijn en opbouw. Met *voorbeelden* uit ontwikkeld leermateriaal wordt geïllustreerd hoe het leerproces kan verlopen, hoe de aard ervan geleidelijk verandert van oriëntatie op begrippen (in klas 1) naar effectief gebruik van algebraïsche technieken (in klas 4).
Dat hoofdstuk beschrijft vooral het CD-traject. Op bescheiden wijze gaan wij in op de verschillen met het B-traject en het havo/vwo-traject.

In hoofdstuk 6 bespreken wij de invloed van de zakrekenmachine en de computer op het leerplan algebra. We gaan ervanuit dat zakrekenmachines in de wiskundeles vrijwel altijd beschikbaar zijn; de praktijk wijst uit dat dit redelijk is.

Het leerplan is daarentegen niet afhankelijk van gebruik van computers of graphic calculators; dat is in de huidige schoolsituatie nog niet mogelijk. Toch is de ontwikkeling van sommige onderdelen van het leerplan beïnvloed en geïnspireerd door de toenemende mogelijkheden en beschikbaarheid van computers. We laten daar iets van zien, ook om duidelijk te maken dat de leerplanvoorstellen op verschillende momenten zinvol computergebruik mogelijk maken. Daarmee is al een stap gezet in de richting van een toekomst (niet eens zo'n verre!) waarin hand-computers met uitgebreide, leerlingvriendelijke mogelijkheden net zo gewoon zijn als zakrekenmachines nu.

Na de vier onderdelen:
- uitgangspunten (hoofdstuk 2)
- verkenning van het gebied (hoofdstuk 3 en 4)
- lange lijnen in het leerplan (hoofdstuk 5)
- de invloed van de elektronica (hoofdstuk 6)

is daarmee onze achtergrondenbeschrijving algebra ten einde.

UITGANGSPUNTEN ACHTER HET ALGEBRAPROGRAMMA

Tijdens het ontwikkelen en uitproberen van gedeelten van het W12-16 algebraprogramma, zijn allerlei keuzen gemaakt. Wat wordt wel gedaan, wat niet; waar leggen we accenten, welke zaken laten we buiten het programma, enzovoort. Die keuzen zijn van geval tot geval gemaakt, maar blijken uiteindelijk bepaald te zijn door slechts enkele belangrijke motieven.

Pas aan het eind van het ontwikkelproces is het het duidelijkst te zien hoe die motieven voortdurend op de achtergrond het ontwikkelproces hebben beïnvloed. Nu, bij de presentatie van het algebraprogramma, is het verhelderend die motieven vooraf aan te bieden: het geeft de juiste achtergrond voor de details van het programma, een achtergrond die er impliciet steeds geweest is. We beschrijven die motieven in de vorm van vier paren van tegengestelde begrippen en geven aan waar we ons opstellen in het spanningsveld van die tegenstellingen.

Gebruiker of ontwerper

De eerste tegenstelling is die van *gebruiker-ontwerper*. We gaan ervanuit dat we leerlingen willen opleiden tot gebruikers van algebra. Dat sluit aan op een algemene keuze in het hele wiskundeprogramma. Leerlingen werken aan wiskunde die functioneert in het dagelijks leven, beroepssituaties en verder onderwijs. Dat laatste met name in de niet-wiskundige vakken. Het wil zeggen dat de leerling kan werken met algebra, zoals die in dergelijke situaties gebruikt wordt. Zelden is dat het ontwerpen en bedenken van nieuwe formules, tabellen, grafieken of algebraïsche technieken. Het is veel vaker iets kunnen doen met gegeven formules, tabellen, enzovoort .

De keuze voor gebruikswiskunde slaat vooral op het doel van het programma. Zij heeft echter ook consequenties voor wiskundig taalgebruik en vormgeving. Niet overal zijn namelijk dezelfde conventies in zwang. Een keuze voor gebruiksalgebra is onder andere leerlingen voorbereiden op deze variatie.

Taalgebruik en vormgeving werken ook verschillend uit naar de diverse trajecten. Zo is in het HV-traject expliciet aandacht voor functies en vergelijkingen en de bijbehorende notaties. De leerlingen leren hier mee werken onder andere als voorbereiding op de bovenbouwprogramma's wiskunde B. Voor het CD- en het B-traject vervalt het functieconcept helemaal. Het gebruik van algebra binnen deze trajecten en de meeste vervolgopleidingen geeft geen aanleiding tot introductie van deze term. Vergelijkingen komen in deze trajecten wel aan de orde, maar dan als middel om vraagstellingen over verbanden te beantwoorden. Aangezien deze vraagstellingen niet zwaar worden geformaliseerd blijft gebruik van de term vergelijking en de formele notatie beperkt.

De keuze voor gebruikswiskunde wil niet zeggen dat de leerlingen niet ontwerpen, integendeel: goed leren gebruiken van algebra gaat via mee-ontwerpen van die algebra. Met andere woorden: het leerproces loopt langs de weg van inzicht verwerven en opbouwen. Immers, een goede gebruiker doorziet zijn methoden.

Interpreteren of manipuleren

De tweede tegenstelling hangt nauw samen met de vorige, maar gaat meer richting algebra. Het gaat om *interpreteren-manipuleren*. In het leerplan liggen de keuzen vooral aan de kant van het interpreteren. Er is veel aandacht voor het leren lezen van grafieken, tabellen en formules. In elk van die drie gebieden zijn daar specifieke vaardigheden voor aan te geven. Veel activiteiten van leerlingen hebben daarmee te maken. Vooral in de eerste twee klassen wordt nog niet zo vaak verwacht dat formules of grafieken worden omgevormd in andere formules of grafieken. Die activiteiten – manipulaties met variabelen in formules, schaalverandering bij grafieken, enzovoort – komen pas later, nadat er een brede inzichtelijke basis is gelegd door de meer op interpretatie gerichte activiteiten. Bij 'interpretatie' denken we ook aan het kunnen zien van structuur in formules, aan het gebruik van samenhang tussen verschillende representaties, aan het opzoeken en rekenen met tabellen. De keuze voor meer aandacht voor de interpretatiezijde van de glijdende schaal tussen interpreteren en manipuleren, hangt samen met de keuze voor gebruiksalgebra. Eigenlijk is het dezelfde keuze, alleen anders belicht. Het klassieke letterrekenen is bijvoorbeeld één van de activiteiten in het leren van algebra, die zijn plaats krijgt nà het interpreteren. Sterker nog: wij denken dat technieken die met 'manipuleren' te maken hebben direct volgen uit 'juist interpreteren', en dat die technieken daarna interpreteren weer ondersteunen. In de didactische opbouw van het leerplan komen de schijnbaar tegengestelde begrippen dan samen voor. Het voorlopige hoofddoel is echter het verkennen en gebruiken van de betekenis van formules, tabellen en grafieken. De mate waarin op formulemanipulatie wordt ingegaan, verschilt per traject. Voor sommige leerlingen zal een eenvoudig interpretatieniveau het hoogste zijn dat gehaald wordt. Voor andere groepen leerlingen ligt dit anders, maar de interpretatiekant blijft essentieel.

Brede of diepe technieken

Algebra leren voor gebruik in het dagelijks leven, beroep, verdere opleiding: het dwingt tot kiezen voor breedte in de soort formules. Er is meer dan alleen lineaire en kwadratische verbanden. Daarom is in het leerplan het repertoire aan algebraïsche technieken aangepast. Deze technieken zijn breed inzetbaar. We kiezen bijvoorbeeld bij het oplossen van vergelijkingen voor technieken die ruim toepasbaar zijn en niet veel transformatie van formules vereisen. Technieken die meer formulemanipulatie vereisen (zoals bijvoorbeeld kwadraat afsplitsen en ontbinden in factoren) zijn vaak afhankelijk van het formuletype; zulke technieken gaan wel dieper dan de meer algemene technieken. De verhouding tussen 'brede' en 'diepe' technieken verschilt per traject.

Ontwikkelen of stapelen

Als laatste tegenstelling nemen we: *ontwikkelen-stapelen*. Vanaf klas 1 komen bijvoorbeeld al vergelijkingen oplossen en verschillendsoortige formules aan de orde, maar dan op een meer op oriëntatie gericht niveau. Dit zijn basiselementen die voortdurend aan bod komen in de loop van het verdere onderwijs en die zich geleidelijk ontwikkelen naar meer complexiteit en formalisatie. Daarmee blijven leerlingen die even de boot missen, niet voor de rest van de tijd aan wal. Zij kunnen zolang mogelijk opnieuw opstappen. Dit laatste is moeilijker bij een programma dat bestaat uit een sterke stapeling van onderdelen.

De leidende uitgangspunten, onze posities op de vier tegenstellingen:
- gebruiken-ontwerpen
- interpreteren-manipuleren
- brede technieken-specifieke technieken
- ontwikkelen-stapelen

zijn nu kort gekarakteriseerd.
In de volgende hoofdstukken werken we een en ander nu eerst wiskundig-inhoudelijk en daarna meer leerplangericht uit.

ANALYSE VAN WISKUNDIG GEREEDSCHAP

Meer dan vertaalvaardigheden

Lange tijd heeft bij de bestudering van verbanden het accent gelegen op het opstellen en bewerken van formules en (stelsels) vergelijkingen. Dat dit een zeer eenzijdige benadering is van verbanden, heeft Janvier overtuigend laten zien met een schema, waarin hij een overzicht geeft van beschrijvingsvormen van verbanden en van vaardigheden, die horen bij de overgang van de ene beschrijvingsvorm naar de andere[1].

<table>
<tr><th>naar
van</th><th>situatie</th><th>tabel</th><th>grafiek</th><th>formule</th></tr>
<tr><td>situatie</td><td colspan="4" rowspan="4">vertaal-
vaardigheden</td></tr>
<tr><td>tabel</td></tr>
<tr><td>grafiek</td></tr>
<tr><td>formule</td></tr>
</table>

Janvier gebruikt 'situatie' als verzamelnaam voor omgangstaal, inclusief tekeningen en schetsjes. Wij spreken liever over taal, tabellen, grafieken en formules waarmee situaties worden beschreven. De beschrijvingsvormen vullen elkaar aan en ondersteunen elkaar. Door de vier beschrijvingsvormen zo gelijkwaardig naast elkaar te plaatsen in één schema, komen taal, grafieken en tabellen meer tot hun recht. Grafieken, bijvoorbeeld, zijn enerzijds eindprodukten, die tot stand komen na een uitvoerig functieonderzoek, waarbij het bepalen van nulpunten en extreme waarden het leeuwedeel van de aandacht opeist. Anderzijds kunnen grafieken een zelfstandige rol spelen in het vaststellen van het probleem en in het oplossingsproces zelf. Een uitgebreide analyse van vertaalvaardigheden zullen we hier niet maken. Dat is al gedaan in een publikatie van de SLO, waarnaar we bij deze verwijzen[2].
Het algebraprogramma bevat echter meer elementen dan vertaalvaardigheden, daarover gaat dit hoofdstuk.

Tabellen

Tabellen kom je overal tegen. In de krant, in statistieken, in allerlei boeken en tijdschriften, waar getalsmatige gegevens geordend worden en ook in wiskundeboeken. Ze kunnen er heel verschillend uitzien. Hoe een tabel eruit ziet, heeft alles te maken met waarvoor de tabel bedoeld is. De volgende tabel is afkomstig uit een grotere tabel, gepubliceerd door het Centraal Bureau van de Statistiek (CBS):

	voertuigenpark					gemiddelde jaarkilometrage personenauto's				
	personen-auto's	bedrijfs-voer-tuigen	motor-twee-wielers	brom-fietsen	fiets	totaal	w.v. zakelijk verkeer	w.v. woon/werk-verkeer	w.v. vakantie	w.v. overig particu-lier gebruik
	x 1 000					km	%			
1970	2 465	312	72	1 900	7 300	17 200	38,4	17,4	8,1	36,1
71	2 702	326	66	1 900						
72	2 903	331	60	1 850						
73	3 080	338	60	1 750						
74	3 214	344	64	1 750						
75	3 399	342	68	1 650	8 600					
76	3 629	341	72	1 400		15 960	28,6	22,1	8,6	40,7
77	3 851	337	80	1 200		16 130	23,3	25,7	10,0	41,0
78	4 056	337	92	1 100	10 095	16 310	22,3	25,2	12,2	40,3
79	4 312	360	98	900	10 317	15 760	22,3	27,3	10,8	39,6
1980	4 515	375	103	800	10 580	15 180	21,6	29,5	10,1	38,8
81	4 594	387	114	725	10 784	14 765	20,5	19,5	10,6	39,4
82	4 630	388	122	675	11 115	14 900	18,3	26,1	7,6	48,0
83	4 728	390	125	634	11 443	15 240	19,7	24,2	7,0	49,1
84	4 818	405	127	657	11 573	15 530	-	-	7,1	48,5
85	4 901	428	128	534	11 179	15 220	18,3	27,4	8,0	46,3
86	4 950	464	127	564	11 517	15 860	17,9	28,2	8,6	45,3
87	5 118	507	131	516	11 441	16 080	17,0	26,9	7,6	48,5
88	5 257	538	135							

De statistici van het CBS hebben een grote hoeveelheid getalsmatige gegevens verwerkt tot een overzichtelijk geheel. De structuur is helder: een serie kolommen achter elkaar, met daarboven een kopregel, die aangeeft wat de getallen in de kolommen voorstellen.
Uit de tabel zijn getallen af te lezen volgens een standaardmethode die in allerlei soorten schema's gebruikelijk is. De tabel is geordend in de tijd. Ze is gemaakt voor het onderzoeken van trends in het verleden om voorspellingen te kunnen doen voor de toekomst. In verticale richting lopen langs de tabel levert informatie over de trends. Het is dus mogelijk om lokaal te kijken naar de tabel (puntsgewijs, naar bepaalde getallen) en om globaal te kijken (naar trends, dus naar verloop in de tijd).

Keuzen bij het maken van een tabel

De tabel is niet compleet; kennelijk ontbreken er gegevens of zijn ze niet beschikbaar. Bij het maken van de tabel zijn vele keuzen gemaakt. Bijvoorbeeld bij de kolommen: welke gegevens stoppen we bij elkaar in één kolom, of op welke wijze splitsen we gegevens? Zo is er in deze tabel gekozen voor een bepaalde opslitsing van voertuigen, op basis van gebruik en uiterlijke kenmerken. Ook zijn er keuzen gemaakt met betrekking tot afronden: het voertuigenpark is gegeven in duizendtallen, terwijl de jaarkilometrages afgerond zijn op vijfvouden. Tenslotte zijn er keuzen gemaakt over relatieve of absolute getallen: de aandelen van de diverse rubrieken in de jaarkilometrages van personenauto's zijn gegeven in procenten.
Deze ordening van gegevens, met de keuzen die daarin te maken zijn, bevindt zich meer op het gebied van de Informatieverwerking en Statistiek dan op het gebied van de algebra. Op de grens van beide leerstofgebieden ligt het vinden van mathematische modellen, waarmee de trends worden beschreven en de toekomst voorspeld. Tot het gebied van de algebra behoort het uitwerken van algebraïsche modellen om te komen tot uitspraken over verbanden. Veel activiteiten in het onderzoek van de tabel zijn te kenschetsen als algebraïsche activiteiten. In de volgende excercitie met de tabel van de ontwikkeling van het wegverkeer komen we deze activiteiten tegen.

Activiteiten met een tabel

Over het geheel genomen is er een gestage groei van het voertuigenpark te bespeuren. Een uitzondering hierop vormen de aantallen bromfietsen; die lopen vanaf 1970 elk jaar verder terug, afgezien van een kleine opleving in 1984. Het gemiddelde jaarkilometrage van personenauto's is enigszins wisselend, maar zo op het eerste gezicht is er een dal in 1981. Een dalende lijn is te bespeuren in de bijdrage van het zakelijk verkeer in het jaarkilometrage.
De eerste blik op de tabel is globaal van aard, in de redeneringen komen termen voor zoals dalen, stijgen, wisselen en dal.

Het zoeken naar trends betekent zoeken naar verbanden in één richting, bij deze tabel in verticale richting. Het opvallende dal in jaarkilometrage vraagt om nader onderzoek. Het ligt voor de hand om een grafiek te tekenen. De eerste vraag daarbij is: hoe moeten de assen verdeeld worden? Normaal gesproken wordt de horizontale as gereserveerd voor de tijd en dit levert niet zoveel problemen op. Met de verticale as is dat anders. Dan ontstaan er vragen zoals:

- kun je verschillen goed genoeg zien, bij een gekozen schaalverdeling;
- worden de verschillen niet te veel buiten proporties gebracht?

Bij bestudering van zo'n trend met een tabel zijn dergelijke schaalkeuzen ook mogelijk. Als voorbeeld nemen we weer de personenauto's. Bij een afronding op 100.000-tallen, dus kijkend naar de eerste twee cijfers in de getallen, lijkt de groei regelmatig. Maar ook na afronding lijkt het te grof om op grond daarvan de groei een naam te kunnen geven. Een afronding op 10.000-tallen is overzichtelijk, zonder computer gemakkelijk te verwerken, en geeft misschien toch een goed beeld van de groei. Om die groei te kwantificeren hebben we aan de tabel een kolom toegevoegd, waarin de verschillen tussen opeenvolgende jaren staan:

jaar	personen-auto's x 10 000	groei	jaar	personen-auto's x 10 000	groei
1970	247		1980	451	20
71	270	23	81	459	8
72	290	20	82	463	4
73	308	18	83	473	10
74	321	13	84	482	9
75	340	19	85	490	8
76	363	23	85	495	5
77	385	22	87	512	17
78	406	21	88	526	14
79	431	25			

In de jaren zeventig groeit het wagenpark tamelijk regelmatig, gemiddeld zo'n 20,4 x 10.000 personenauto's per jaar. In de jaren tachtig is er een sterke wisseling. Gemiddeld is de groei in die periode veel lager. Op basis van onder meer deze gegevens kan een veronderstelling worden geformuleerd. Bijvoorbeeld: de groei zal doorgaan zoals in de laatste periode, in negen jaar tijd 95 x 10.000, oftewel gemiddeld ruim 10 x 10.000 per jaar. Vanuit de gegevens van 1988 en dit groeicijfer ontstaat een eenvoudig algebraïsch model, waarmee extrapolatie mogelijk is zodat een prognose gemaakt kan worden. Deze procedure lijkt wat simpel: in de realiteit wordt een groot aantal factoren betrokken bij de keuze voor een model en veelal wordt met extreme waarden minder rekening gehouden, maar het principe is hiermee wel beschreven.

Het zoeken naar - verticale - verbanden in een tabel verloopt veelal in samenhang met de bijbehorende grafieken. Belangrijke keuzes liggen in de schaal waarop gewerkt wordt. Kijken naar groei levert informatie op over de aard van de verbanden. Kijken naar groei houdt in het kijken naar de verschillen tussen opeenvolgende gegevens.
De tabellen bevatten niet voor niets zoveel gegevens naast elkaar:

daarmee wordt het mogelijk om kolommen met elkaar te vergelijken of, met andere woorden, om verbanden tussen de kolommen te zoeken. Interessant lijkt een vergelijking van het aantal personenauto's tegenover het gemiddeld kilometrage. Het kan zinvol zijn om gegevens bij elkaar te nemen en bijvoorbeeld een kolom toe te voegen met het totaal aantal gereden kilometers. Er ontstaat dan een kolom (die noemen we even *T*), die gevormd is door vermenigvuldiging van de kolommen personenauto's (*P*) en gemiddeld kilometrage per personenauto (*K*).

Het verband tussen *T*, *P* en *K*, te beschrijven met de formule $T = P \times K$, is een gecreëerd verband. Dat geldt ook voor de kolommen, waarin de aandelen van vier rubrieken in percentages weergegeven zijn: de sommen van de getallen in de kolommen zijn steeds 100. Met behulp van spreadsheets en databases worden vaak tabellen gemaakt, waarin de kolommen via een formule met elkaar in verband staan, niet zozeer door de aard van de rubrieken zelf, maar doordat de verbanden juist gecreëerd zijn middels die formules.

In het voorgaande zijn activiteiten naar voren gekomen, die te maken hebben met het gebruiken van tabellen: cijfers aflezen uit de tabel en kijken langs de kolommen naar tendenzen als stijgen, dalen en fluctueren. Daarin speelde de ordening in de tijd een grote rol. Daarnaast zijn er activiteiten die de tabel veranderen: aanvullen (inter- en extrapoleren) of uitbreiden (toevoegen van extra kolommen). Ten slotte kan de tabel een grote verandering ondergaan door afronding van de getallen (schaalvergroting).

De verbanden in dergelijke statistieken zijn doorgaans niet zo simpel. Dat komt doordat allerlei op elkaar ingrijpende processen een rol spelen in het gedrag van mensen. De mathematische modellen, die op basis van de gegevens worden opgesteld, zijn slechts een benadering van de werkelijkheid. Dat brengt een onzekerheid met zich mee, waar leerlingen mee moeten leren omgaan. Juist daarom is het van belang dat leerlingen leren werken met die modellen in realistische situaties. Vergelijken van wiskundige modellen met gegevens uit de werkelijkheid is essentieel in het zoeken naar verbanden in situaties. In het volgende voorbeeld gaan we daar verder op in.

De volgende tabel is gemaakt om gegevens overzichtelijk te rangschikken (zij komt uit een catalogus voor bergsportartikelen; een reepsnoer wordt gebruikt bij het bergklimmen). De ordening is op praktische gronden gemaakt: zó zijn de gegevens gemakkelijk terug te vinden. Opvallend is het gelijkmatig oplopen van de getallen in de kolom 'doorsnede', met daarnaast de sterk oplopende getallen in de kolom 'breekkracht'. In de veronderstelling dat de breekkracht evenredig is met de oppervlakte van de dwarsdoorsnede, dringt de vraag zich op of de breekkracht kwadratisch oploopt met de diameter (in de kolom 'doorsnede' staan de diameters) van het snoer. Aan de tabel is een kolom toegevoegd, waaruit de toenamen zijn af te lezen:

reepsnoer

doorsnede mm	breekkracht kg	prijs/m	toenamen in breekkracht	
3	180	ƒ 0,70	180	
				140
4	320	ƒ 1,00	320	
				180
5	500	ƒ 1,35	500	
				300
6	800	ƒ 2,05	800	
				200
7	1000	ƒ 2,75	1000	
				500
8	1500	ƒ 3,15	1500	
				400
9	1900	ƒ 3,85	1900	

Door te kijken naar de toenamen is direct te concluderen dat het antwoord 'nee' moet zijn, immers de verschilgetallen lopen niet gelijkmatig op. In tegendeel, de getallen 200 en 400 lijken helemaal niet te passen. Zou er iets aan de hand zijn met het touw? Zijn de touwen niet van dezelfde kwaliteit? Wordt dat vermoeden bevestigd door de prijzen? Of klopt de tabel niet? De conclusie dat het verband niet direct logisch is te noemen, brengt de kritische consument tot vragen over de kwaliteitsverschillen.

In hoeverre voldoet de tabel nu wèl aan het veronderstelde verband? Uitgaande van de gegevens van de drie dunste snoeren is een nieuwe tabel gemaakt. Een antwoord op de zojuist gestelde vraag kan gevonden worden door vergelijking van de twee kolommen 'breekkracht'. Dat laten we graag aan de lezer over:

reepsnoer

doorsnede mm	breekkracht kg	breekkracht volgens kwadratische groei	
3	180	180	
			140
4	320	320	
			180
5	500	500	
			220
6	800	720	
			260
7	1000	980	
			300
8	1500	1280	
			340
9	1900	1620	

De derde kolom is gemaakt door te extrapoleren vanaf het derde getal in de tweede kolom volgens de regel: de verschillen lopen regelmatig op. Dezelfde getallen kunnen ook worden geconstrueerd op een andere wijze, namelijk door middel van de berekening volgens de formule: 20 * doorsnede^2. Deze berekeningswijze gaat steeds uit van de getallen in de linkerkolom. Deze ontstaanswijze kan in de kop van de kolom tot uitdrukking komen door daar de formule te plaatsen.

Blijkbaar geeft de ordening in de tabel aanleiding tot onderzoek van het verband tussen de dikte en de breekkracht van het snoer. De ordening, die in eerste instantie is bedoeld om de gegevens toegankelijk te maken, heeft dus een andere belangrijke functie gekregen. Exploitatie van deze functie van tabellen blijkt goed mogelijk te zijn. Dat komt later in dit hoofdstuk aan de orde.

Middel bij probleemoplossen

De kolom, die aan de voorgaande tabel is toegevoegd, is een weergave van een rekenprocedure. De kolom is gemaakt om het verband tussen breekkracht en diameter te vergelijken met een wiskundig model. Een heel andere functie heeft de tabel die wordt gemaakt naar aanleiding van een opgave:

Zoek een getal zodat getal + 1/getal = 5. Maak een tabel erbij als je dat handig vindt.

getal	*getal + 1/getal*	te groot of te klein
4	4,25	te klein
5	5,2	te groot
4,5	4,72	te klein
4,7	4,91	te klein
4,75	4,96	te klein
4,8	5,01	te groot

De tabel is tijdens het zoekproces van boven naar beneden ingevuld en gebruikt als instrument om het zoeken te sturen. Hij is dus het resultaat van een zoekactie, en bevat een weerspiegeling van het zoekproces. Opvallend is dat de invoerwaarden zo zijn gekozen dat de berekende waarden eerst rondom de waarde 5 springen. Daarna wordt die gezochte waarde van onderaf benaderd, om vervolgens weer voorbij die waarde te gaan. Dit proces noemen we 'inklemmen'.
Een heel andere tabel ontstaat als hetzelfde probleem wordt opgelost met behulp van een computerprogramma dat tabellen genereert. Het proces verloopt dan heel anders. Telkens wordt een deel van de tabel gekozen om te worden uitvergroot. Dit proces noemen we 'inzoomen'.

getal	getal+1/getal
1	2
2	2.5
3	3.3333
4	4.25
5	5.2
6	6.1667
7	7.1429
8	8.125
9	9.1111
10	10.1
11	11.0909
12	12.0833
13	13.0769

getal	getal+1/getal
4	4.25
4.0833	4.3282
4.1667	4.4067
4.25	4.4853
4.3333	4.5641
4.4167	4.6431
4.5	4.7222
4.5833	4.8015
4.6667	4.881
4.75	4.9605
4.8333	5.0402
4.9167	5.1201
5	5.2

getal	getal+1/getal
4.75	4.9605
4.7569	4.9672
4.7639	4.9738
4.7708	4.9804
4.7778	4.9871
4.7847	4.9937
4.7917	5.0004
4.7986	5.007
4.8056	5.0136
4.8125	5.0203
4.8194	5.0269
4.8264	5.0336
4.8333	5.0402

Zowel inklemmen als inzoomen zijn technieken waarbij tabellen opgebouwd worden, niet om verbanden te onderzoeken, maar om bepaalde waarden te vinden. Bij het thema vergelijkingen komen deze technieken uitgebreid aan de orde.

Grafieken

Net als tabellen worden grafieken voor verschillende doeleinden gebruikt. De belangrijkste aspecten van grafieken beschrijven we aan de hand van enkele voorbeelden.

Gegevens in beeld

Grafieken zijn een middel bij uitstek om gegevens in beeld te brengen en daaruit tendenzen af te leiden. De grafiek van het verloop van de concentratie kooldioxide in de atmosfeer in de loop van enkele tientallen jaren is een duidelijk voorbeeld.

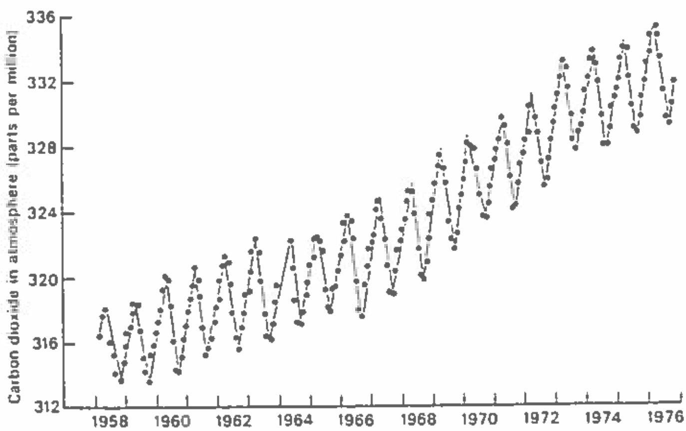


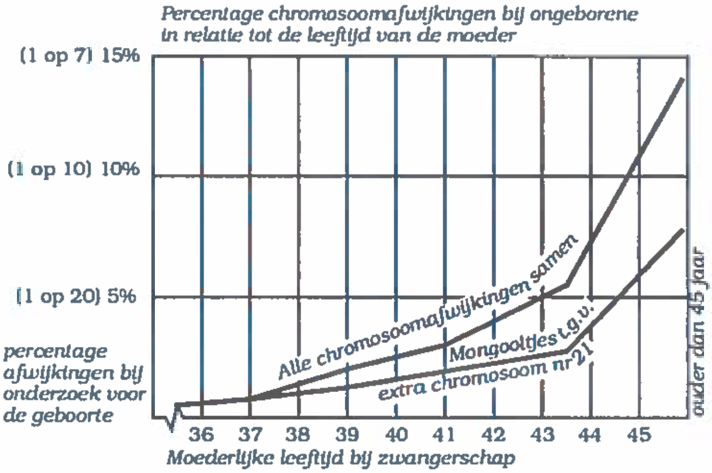
Fig. 11.2. The record of CO_2 in the atmosphere at the Mauna Loa Observatory in the Hawaiian Islands. Data were taken by C.D. Keeling and his colleagues beginning in 1958.

Gedurende bijna twintig jaar zijn jaarlijks circa twintig metingen verricht. De uitkomsten van die metingen zijn geplot in de grafiek en door de punten zijn rechte lijntjes getrokken. Als eerste valt op dat de grafiek in haar geheel, door de jaren heen, een stijging te zien geeft van de kooldioxideconcentratie. Ten tweede komen de fluctuaties binnen elk jaar sterk naar voren. Het verschil tussen de minimale en de maximale concentratie binnen een jaar is slechts circa zes deeltjes per miljoen. Deze grafiek kan beschouwd worden als een optelsom van twee grafieken: één stijgende grafiek en één golvende grafiek met een periode van één jaar. Het verband tussen de tijd en de concentratie kooldioxide is moeilijk te beschrijven in termen van een formule, maar door globaal te kijken naar de grafiek ontstaat een beeld van het onderzochte verband, waarmee een wetenschapper, een politicus, een docent, een milieuactivist of een student verder kan.

N.B. Vaak kunnen bij een lijngrafiek ook punten buiten de metingen - interpolerend - afgelezen worden. De grafiek is in dit geval echter afgewerkt alsof het gaat om discrete variabelen; de verbindingslijntjes dienen als steun voor het - globaal - beschouwen van het verband tussen de tijd en de concentratie van een stof.

Globaal en lokaal

De volgende grafieken zijn een weergave van gegevens uit onderzoek van chromosoomafwijkingen bij ongeborenen. Hierbij zijn percentages afwijkingen gerelateerd aan de leeftijd van de moeder. In die grafieken spelen globale en lokale aspecten beide een belangrijke rol:

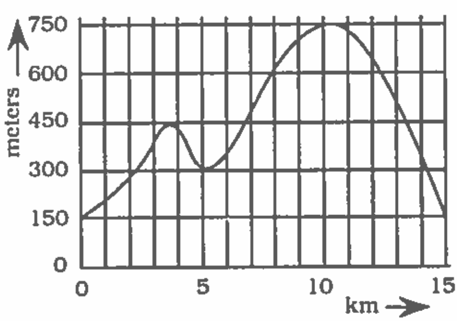


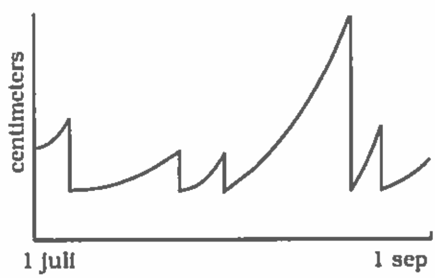
Wat direct opvalt in de beide grafieken is de toenemende stijging. Twee punten in de grafieken vallen op als punten waar de mate van

steilheid plotseling verandert. Dat is bij 37 jaar en bij $43\frac{1}{2}$ jaar. Tegelijkertijd is het mogelijk om punten af te lezen en zo bij elke leeftijd een (empirische) kans op afwijkingen te vinden.
In deze korte beschouwing wisselt de aandacht voor globale en voor lokale aspecten van de grafieken elkaar af. Dat toont de kracht van de grafiek: ze geeft snel een totaalbeeld van een verband. Op basis van dat totaalbeeld kunnen de verbanden nader onderzocht worden. Zo laat de onderste grafiek zien dat de sterke stijging van het percentage afwijkingen op latere leeftijd voor een belangrijk deel - zo niet voor 100% - toegeschreven kan worden aan een grotere kans op afwijkingen in het 21e chromosoom. Hiermee zeggen we niet iets over het verband tussen leeftijd en percentage afwijkingen, maar over een verband dat er dwars op staat: het verband tussen afwijkingen van het 21e chromosoom en afwijkingen van overige chromosomen.
De toenamen worden met deze grafieken aangescherpt: de verticale as is dusdanig uitgerekt dat 100% ver boven de bladzijde uitkomt. In deze situatie is dat nodig: het verschil tussen 5% en 10% is bijzonder groot als het gaat om afwijkingen bij ongeborenen.

Grafieken als plaatjes van de werkelijkheid

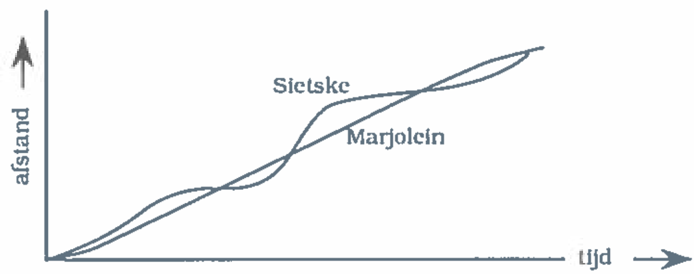
Bij sommige grafieken is de associatie met plaatjes, die ook met de situatie te maken hebben, zo sterk dat het moeilijk is om niet afgeleid te worden van het door de grafiek uitgebeelde verband. De volgende grafieken laten ruimte voor onbedoelde interpretaties:





De eerste grafiek geeft aan op welke hoogte iemand loopt, die een wandeling maakt in een bergachtige streek. De situatie speelt zich dus af in de bergen en wat je ziet in de grafiek zijn ook bergen (en dalen). Vooral mensen, die nooit zelf een bergwandeling hebben gemaakt, kunnen moeite hebben met zich voor te stellen wat het betekent als je omhoog en dan weer omlaag gaat tijdens het lopen. Deze mensen kennen misschien ook de bergen alleen maar van tweedimensionale plaatjes. De associatie met de golvende lijn van de bergen

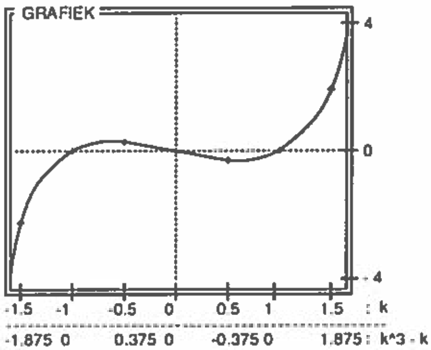
kan zo sterk zijn, dat de betekenis van de grafiek op de achtergrond verdwijnt. Zo'n hardnekkige interpretatie kan ook spelen bij de tweede grafiek, waarin de hoogte van het gras in een grasveld in de loop van een zomerseizoen is gegeven. De associatie met een dwarsdoorsnede van het grasveld, zoals die vaak in tekeningen afgebeeld wordt, overschaduwt dan het weergegeven verband.
Grafieken die veel voorkomen en waar veel leerlingen moeite mee hebben, zijn tijd-afstandgrafieken. Deze grafieken laten zien hoe het verloop is van de trimloop van twee meisjes:

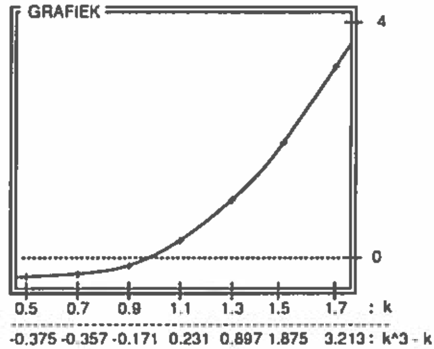


De grafiek van Marjolein biedt alle gelegenheid om de knikken in de lijn te zien als bochten in de weg. De grafiek wordt daarmee verward met een landkaart. In een artikel over haar ervaringen met leerlingen schrijft Rijkje Dekker hoe Jos kampt met het beeld van de bochten in de weg en de bochten in de grafiek[3].
Het verschijnsel van de verwarring van het beeld van de grafiek met een ander beeld in dezelfde situatie komen we voornamelijk tegen bij grafieken, waarin de tijd op de één of andere manier een rol speelt. Vermoedelijk is het probleem gelegen in het feit dat in de grafiek vele momenten zijn samengebald in één plaatje.

In- en uitzoomen

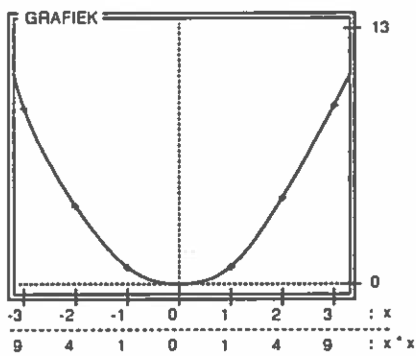
De keuze van de schaalverdeling bij grafieken is in het voorgaande al even aangestipt. Manipuleren met die schaalverdelingen levert de mogelijkheid om hetzij een beter overzicht over het verband te krijgen, hetzij een heel klein gebied te onderzoeken. Dat daarbij het beeld van de grafiek drastisch kan veranderen laat het volgende voorbeeld zien. Het gaat om twee grafieken bij dezelfde formule:

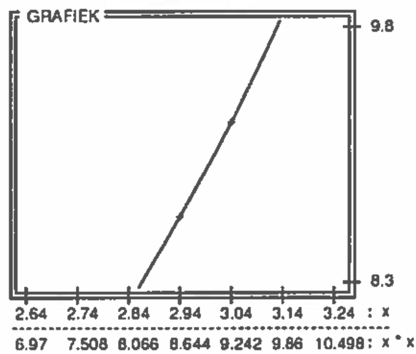




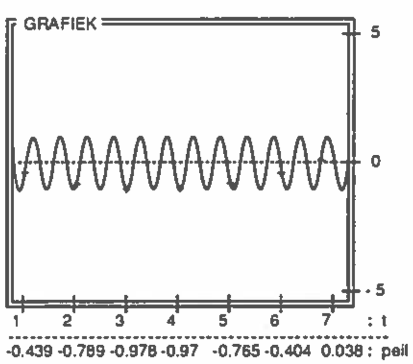
Hier is het plaatje van k^3- k in twee gebieden gemaakt: we zien verschillende intervallen waarop k loopt, en ook verticaal is een ander interval gekozen. Rechts is ingezoomd op een klein gebied, zo zeggen we met een camera-metafoor.

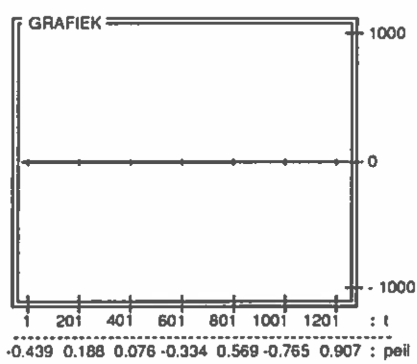
In- en uitzoomen, het is het verbinden van details met het geheel van de grafiek. Oefening daarin kan voorkomen dat zich al te stereotiepe beelden ontwikkelen. Twee keer de gebogen lijn van x^2 in grafiek:





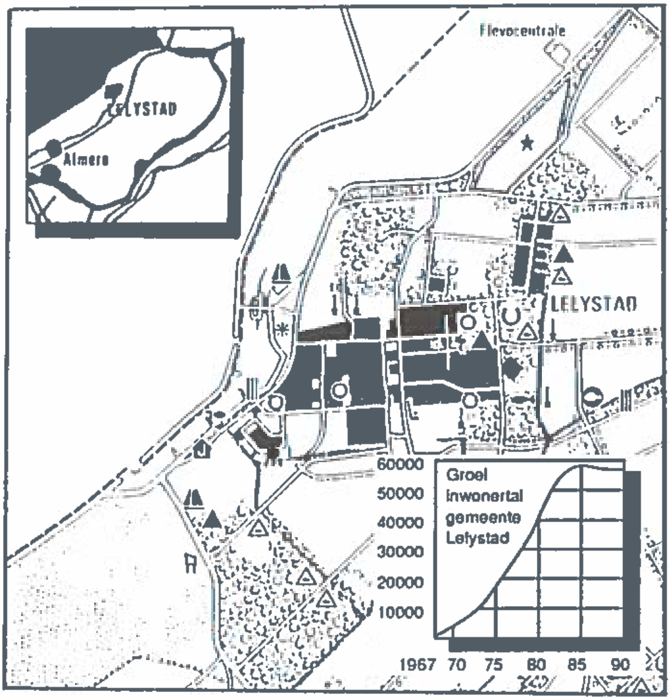
en twee keer de golvende lijn van het getij:





laten zien dat op heel verschillende manieren het beeld van een gra-

fiek met stijgingen en dalingen, minima en maxima, kan veranderen in een rechte lijn.
In bekende kaartjes uit de krant gebeuren vergelijkbare zaken.



In dit plaatje gaat het om écht uitvergroten van details, in horizontale en verticale richting tegelijk. Daarbij blijven de ruimtelijke verhoudingen in stand. Bij in- en uitzoomen op grafieken is dat niet altijd zo. Bij grafieken gaat het meestal om grootheden als tijd, aantal, geld, temperatuur. Tussen de eenheden bestaat geen ruimtelijke verhoudingen, vandaar dat zoveel vrijheid in keuze op de assen mogelijk is. Daarom betekent inzoomen soms, dat de schaal slechts op één van de assen verandert of dat de veranderingen van de schalen op beide assen niet in dezelfde verhouding worden doorgevoerd. Met een grafische calculator of een computerprogramma met mogelijkheden tot inzoomen is dit soort onderzoek uit te voeren.

Foto's en detailvergrotingen vormen niet zo'n gunstige instap op het idee inzoomen, merkwaardig genoeg. Een verklaring kan zijn dat foto's vaak diepte suggereren en dat de detailfoto als hetzelfde, maar van dichtbij wordt gezien. Het element oprekken van de afbeelding, het papier van de foto zelf als het ware, is dan minder aanwezig.

Formules

Welke formules komen mensen tegen in het dagelijks leven en wat doen ze er dan mee? Voor een algebraprogramma, dat wil aansluiten op wat mensen tegen kunnen komen, zijn dit essentiële vragen. Ons antwoord daarop bestaat uit twee delen: *een wild boeket formules*, en *drie rollen van formules*.

Een wild boeket formules

Hieronder volgt een lijstje van formules uit diverse toepassingsgebieden, waarmee leerlingen te maken kunnen krijgen in het dagelijks leven en in hun beroep. Er komen geen speciale functies, integralen, afgeleiden en dergelijke in voor. Voor de rest is het lijstje tamelijk willekeurig, maar wel karakteristiek voor het niveau waartoe ons leerplan toegang moet bieden.

Voorbeelden van Formules

a.	De wet van Ohm.	$V = I \cdot R$
b.	Massa van bol met straal R en dichtheid d.	$M = 4/3\, \pi R^3$. d
c.	Vuistregel voor de levensduur in jaren van een zoogdier met massa M.	$T = 11{,}8 M^{0,20}$
d.	Bevolking na T jaar, beginaantal N, groeifactor 1,2	$B = N \cdot 1{,}2^T$
e.	Luchtweerstand van een voorwerp bij snelheid v. Constante c hangt van voorwerp en luchtdruk af.	$W = c \cdot v^2$
f.	Electrische weerstand als stroom en spanning bekend zijn.	$R = V/I$
g.	Formules bij kledingmaten (BW is bovenwijdte).	*mouwlengte* = 1/4 *lichaamslengte* *armsgatbreedte* = $\begin{cases} \frac{2}{10} BW - 0{,}5 \text{ (tot 90 BW)} \\ \frac{2}{10} BW \text{ (tot 100 BW)} \\ \frac{2}{10} BW + 1 + \frac{1}{10} \text{ overwijdt} \end{cases}$
h.	Lenzenformule, verband tussen brandpunt - (f), voorwerp- (v) en beeldafstand (b).	$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$
i.	Doorbuiging van een balk met dikte a, breedte b, lengte l, elasticiteitsmodulus E,onder gewicht G.	$h = \frac{G\,l^3}{4\,a^3\,b\,E}$
j.	Stopafstand, als som van reactieafstand en remafstand van stoppende automobilist en auto met snelheid v. Vuistregel: v in km/uur, A in meters.	$0{,}15v + (\frac{v}{10})^2$
k.	Verband tussen Fahrenheit en Celsius.	$F = C \cdot 1{,}8 + 32$
l.	Prijs van gas.	vastrecht + *gebruik* • kubprijs
m.	Oppervlakte van cilinder met straal R, lengte l.	$Opp = 2\pi R^2 + 2\pi Rl$

Enkele kenmerken

Belangrijker dan de verschillen zijn voor ons de overeenkomsten tussen deze formules, want die zijn bepalend voor wat echt in het leerplan voorkomt. In het oog springende kenmerken zijn onder andere:

a Het merendeel van de formules bevat méér dan twee variabelen. Dat ligt voor de hand: samenhangen in de realiteit beperken zich zelden tot één grootheid en één andere grootheid. Elke variabele verwijst via een geschikte naam (of beschrijving) naar een grootheid in de context waar de formule betrekking op heeft.

b Een groot deel van de formules bestaat uit één component waarin alleen produkten, delingen en machten voorkomen. De machten zijn bijna altijd geheel. Dit soort formules geeft vaak aan hoe de verschillende karakteristieken van de situatie waar de formule op slaat, elk een bepaalde factor bijdragen. De formule is opgebouwd uit factoren. Zo is in de formule van de doorbuiging te zien dat het gewicht lineair bijdraagt, de lengte echter in de derde macht. De dikte en breedte dragen weer anders bij; het is in verband met het doorbuigen beter een plank over een sloot twee keer zo dik dan twee keer zo breed te nemen.

c Plussen en minnen zijn betrekkelijk schaars. Als er een plus voorkomt beschrijven de delen aan weerszijden van de plus een eigen stuk van de situatie waarop de formule betrekking heeft; de aard van de situatie is blijkbaar dan zo dat die bijdragen opgeteld moeten worden. Neem bijvoorbeeld de oppervlakte van de cilinder: som van gebogen deel en uiteinden.

d Lineaire verbanden komen veel voor. Het is de eenvoudigste samenhang in de wereld om ons heen die er is: twee grootheden die gelijk met elkaar opgaan, verschillend slechts in een verhoudingsfactor, zoals in de wet van Ohm, en soms nog iets verschoven ten opzichte van elkaar, zoals in de formule die Fahrenheit in Celsius uitdrukt.

Een manier van kijken naar $W = c.v^2$ is: de weerstand is evenredig met het kwadraat van de snelheid. Op die manier is er ook in dat voorbeeld van lineariteit sprake. In het algemeen zullen we dat in deze tekst zo niet doen, we beperken ons bij lineariteit tot de eerder genoemde karakteristieken van directe evenredigheid en verschuiving.

De genoemde punten gaan over de relatie van de formule met de context.

Er zijn nog andere, meer uiterlijke kenmerken:

e Notaties variëren (onder andere woorden of letters voor variabelen,verschillende vermenigvuldigtekens, enzovoort), maar worden vaak gericht op duidelijke samenhang met de context. Soms gaat dat zover dat twee formules eigenlijk hetzelfde verband beschrijven ($R = V/I$ en $V = I.R$), maar in verschillende situaties verschillend worden genoteerd.

f Er zijn families van formules te ontdekken: de lineaire ($V = I.R$); eenvoudige machtsverbanden ($3 = c.v^2$), exponentiële verbanden ($B = N * 1{,}2^T$).

g Negatieve exponenten worden vermeden door ze door delingen te vervangen. Zie de lenzenformule, de doorbuigingsformule.

Twee uitgangspunten brengen we in herinnering: meer gebruikswiskunde dan ontwerpwiskunde en meer in de breedte dan in de diepte. Gecombineerd met de kenmerken a, d en f levert dit een belangrijk criterium betreffende de keuze voor functietypen. Kenmerken b en c bepalen mede welke technieken in het programma voorkomen. Kenmerken e en g zijn heel sterk aan de notaties gebonden; in het verdere verhaal zijn de consequenties van deze waarnemingen verwerkt.

De drie rollen van formules

Op schoenen van Engels fabrikaat staat een andere maat dan op Franse schoenen, ook als die schoenen even groot zijn. De maatsystemen, die de fabrikanten hanteren, zijn verschillend. Toch is er een verband tussen de beide maatsystemen, zoals deze formule laat zien:
engelsmaat = *fransmaat* x 0,8 – 25,4
Hoe deze formule kan functioneren beschrijven we aan de hand van drie vragen:

- Als je precies maat 39 (Frans) hebt, welke Engelse maat past jou dan het beste? Deze vraag is direct op te lossen door getallen in te vullen in de formule en daarmee te rekenen.
- Hoe is het verband tussen de Engelse maten en de Franse maten te omschrijven? Redenerend aan de hand van de formule ontstaat een beeld van dat verband.
- In Nederlandse schoenenwinkels staan op de stellingen Franse maten aangegeven. In welke vakken moeten de schoenen van Engels fabrikaat? Beantwoorden van deze vraag is mogelijk na enig manipuleren met de formule.

De vragen geven alle drie aanleiding om de formule te gebruiken maar steeds op een andere manier. De gebruiker kent de formule daarbij een rol toe. Soms is dat expliciet, vooral bij de eerste vraag als in de formule getallen worden gesubstitueerd. En vaak is dat alleen mentaal, als achtergrond in redeneringen. De drie rollen bespreken we hier stuk voor stuk.

Een rekenvoorschrift

De vraag naar de Engelse schoen die past, wordt beantwoord door getallen in te vullen en daarmee te rekenen: '39 invullen in de formule levert: *engelsmaat* = 39 x 0,8 - 25,4 = 5,8 ≈ 6'
De formule vertelt hoe je moet rekenen: ze is rekenvoorschrift.
In woorden komt de berekening neer op: 'vermenigvuldig eerst het getal voor de franse maat met 0,8 en trek er 25,4 van af'. De formule is dan alleen een verkorting van die zin. Het nut van een dergelijke verkorting wordt des te duidelijker naarmate de berekening ingewikkelder wordt. Voordeel van de samenvatting is dat sneller te zien is hoe de berekening in elkaar zit. Een ander voordeel is dat de berekening op deze manier beter te onthouden is. Denk maar aan de oppervlakte- en inhoudsformules van meetkundige figuren. Daar speelt overigens nog iets anders mee, waardoor de berekening nog beter bereikbaar blijft in het geheugen, namelijk de standaardnotatie. 'De oppervlakte van een cirkel is pi *r* kwadraat', is een zin met allerlei standaardverkortingen:

- pi is een bepaald getal, dat de verhouding voorstelt tussen de omtrek en de diameter van een cirkel;
- de vermenigvuldiging wordt verzwegen;
- *r* staat voor straal van de cirkel en
- kwadraat is een manier om te vertellen dat die straal met zichzelf vermenigvuldigd moet worden.

Als je al deze afspraken kent, is dit een gemakkelijke manier om de berekening te onthouden.
Bij het uitwerken van een berekening is de rekenstructuur van een formule van belang. In de schoenmatenformule is met kringen aan te geven in welke volgorde de berekeningen gemaakt worden:

fransmaat x 0,8 - 25,4

De expressies binnen de kringen worden van binnen naar buiten toe uitgewerkt. De sterkste binding in de formule is de vermenigvuldiging en die staat in de kleinste kring. De kringen accentueren de rekenstructuur, die wordt bepaald door de sterkte van de bindingen in de formule.

Beschrijver van een verband

'In de formule komt alleen een vermenigvuldiging en een aftrekking voor. Het verband tussen Engelse en Franse maten is dus lineair. De Franse maat moet je met 0,8 vermenigvuldigen, dus tien maten verschil in de Franse verdeling is acht maten verschil in de Engelse verdeling. De Franse verdeling is dus fijner dan de Engelse.' Informatie over het verband komt uit de formule. De rol van de formule is hier beschrijver van een verband.

Beschouwing van effecten van de vier basisbewerkingen laat zie dat de grafiek een rechte lijn wordt en dat in de tabel stapverschille behouden blijven. Iemand die deze verbindingen kan leggen, gebruik kennis en ervaring over basisbewerkingen in een breed scala van ta bellen, grafieken en formules. Het hanteren van de rol van beschrij ven van een verband vraagt veel ervaring van de gebruiker met d werking van formules.

Een manier om greep te krijgen op een formule als beschrijver va een verband is kijken wat er gebeurt met een variabele als een ander variabele verandert. Dit is beschreven in de paragrafen *variabelen.*

Soms is in de delen van de formule de situatie te herkennen. D formule van de oppervlakte van een cilinder is daar een voorbeel van. In deze structuur

$$Opp = 2\pi R^2 + 2\pi Rl$$

is in het eerste deel de oppervlakte van de vlakke delen te herkenne en in het tweede deel de oppervlakte van de gekromde wand. De re kenstructuur in de formule beschrijft de verdeling in oppervlakke maar door buiten haakjes halen van 2 R verandert de rekenstruc tuur zodanig dat deze verbinding verloren gaat:

$$Opp = 2\pi R \cdot (R + l)$$

De rekenstructuur van de formule hoeft dus geen beschrijving te zij van de structuur van de achterliggende situatie. Daarmee komen w bij de derde rol die een formule kan krijgen.

Een formule als object

'De gegeven formule is beter bruikbaar in een andere vorm:
$e = f \times 0{,}8 - 25{,}4$
$e + 25{,}4 = f \times 0{,}8$
$(e + 25{,}4) : 0{,}8 = f$ . . .'
Bij deze omvorming wordt de formule niet gebruikt als rekenvoo schrift en de context van de schoenmaten blijft op de achtergrond. D formule functioneert hier, losgemaakt van de context, als object d een zekere zelfstandigheid bezit.
De rekenstructuur in de formule speelt een duidelijke rol.

$$\textit{engelsmaat} = \textit{fransmaat} \times 0{,}8 - 25{,}4$$

De zwakste binding is bij het omvormen het eerst aan de beurt:

$$\textit{engelsmaat} + 25{,}4 = \textit{fransmaat} \times 0{,}8$$

en pas daarna de sterkste binding.

Eén van de uitgangspunten voor het algebraprogramma is dat er meer aandacht is voor interpreteren dan voor manipuleren. Met betrekking tot de rollen van formules heeft dit consequenties voor de keuzen in het leerplan. Veel aandacht zal worden besteed aan formules als rekenvoorschrift en als beschrijver van verbanden. Immers daarbij is het interpreteren van groot belang. Veel minder aandacht krijgen formules in hun rol als object, waarbij het manipuleren de boventoon voert.

Van binnenuit of van buitenaf

De rekenstructuur wordt zichtbaar door kringen te zetten. De eerste kring komt bij de sterkste binding te staan enz. Als de structuur helder is kan in de volgende fase het omvormen van de formule op twee wezenlijk verschillende manieren gebeuren. Eén methode is zojuist beschreven bij de formule voor engelsmaat en fransmaat. Kenmerkend daarbij is dat de formule in haar totaliteit wordt beschouwd en dat vanaf het begin alle delen in de formule bij de beschouwing betrokken zijn. We geven die manier van werken het label 'van buitenaf'.
Een andere methode is het stelselmatig van begin tot eind uitrekenen, zonder daarbij het eindpunt al in de gaten te houden. Dat gebeurt als het rechterdeel van de formule vertaald wordt in een keten van rekenacties:

$$\textit{fransmaat} \xrightarrow{\times\,0{,}8} \quad \xrightarrow{-\,25{,}4} \textit{engelsmaat}$$

En door omkering van de keten een berekening gevonden wordt, waarmee direct teruggerekend kan worden:

$$\textit{fransmaat} \xleftarrow{/\,0{,}8} \quad \xleftarrow{+\,25{,}4} \textit{engelsmaat}$$

Omdat je hiermee direct in de formule kruipt noemen we dit werken 'van binnenuit'.

Variabelen

In het voorgaande is een beeld geschetst van verschillende rollen die formules kunnen spelen. Gedurende het oplossen van een probleem kan de rol van een formule veranderen. En ook de betekenis van de variabelen in die formule kan aan verandering onderhevig zijn, afhankelijk van wat er met de formule wordt gedaan. Drie aspecten van variabelen onderwerpen we aan een nadere beschouwing.

Variabelen vastzetten

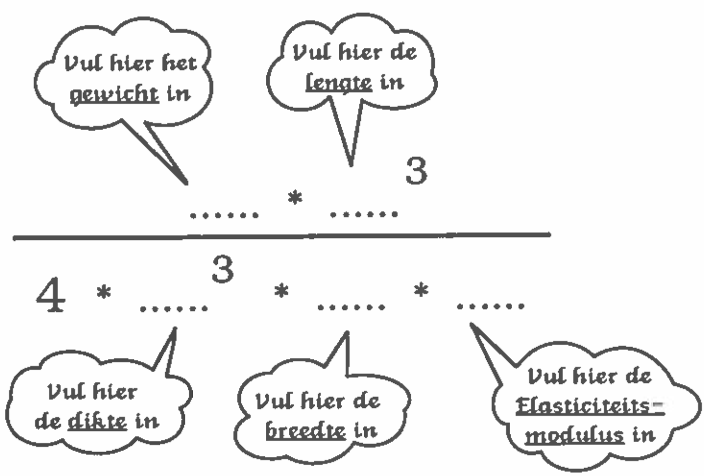
Essentiëel van variabelen is dat de waarde kan veranderen. We zeggen dan: variabelen bewegen. In veel gevallen echter worden variabelen vastgezet op bepaalde waarden. Binnen dat vastzetten zijn twee aspecten te onderscheiden.
Als eerste noemen we het *toespitsen*: door in de formule de getallen voor bekende variabelen in te vullen en andere variabelen bij name te noemen, wordt de formule toegespitst op de benoemde variabelen.
Het tweede aspect betreft de *hiërarchie*, die bestaat tussen variabelen. De variabele die in een gegeven situatie een vaste waarde heeft, maar bij een geringe verandering van de situatie mee verandert, is een parameter. Deze staat hoger in de hiërarchie dan de actuele variabele. Deze twee aspecten lichten wij verderop toe.

Getallen invullen

Voordat we ingaan op het toespitsen en de hiërarchie bespreken we enkele didactische struikelblokken, die te maken hebben met het variabelenbegrip.
In de formule voor de doorbuiging van een balk komen vijf letters voor in het rechterdeel van de formule:

$$h = \frac{Gl^3}{4a^3bE}$$

Een eenvoudige vorm van gebruik van de formule is: voor G, l, a, b en E *getallen invullen*. De formule is dan een schema dat bij de gekozen getallen een resultaat oplevert; ze is dan voorschrift voor een berekening. Dit kan zo voorgesteld worden:



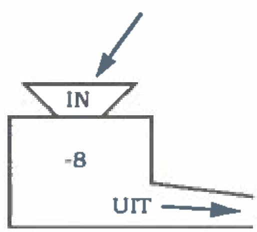
Het werkt ongeveer zoals het invullen van een belastingformulier. Na het invullen ontstaat een uitrekenbaar geheel. Deze rol van de variabelen, het aangeven van de plek van invullen, is de basis. Ook deze moet geleerd worden.
Er gaat soms iets mis in dit leerproces. Bekend is bijvoorbeeld dat 5 voor a in $2a$ wel tot 25 in plaats van 2*5 leidt. Dit is geen fout maar een misverstand, waarover duidelijkheid kan komen als variabelen met woorden worden aangegeven en als alle bewerkingen - ook vermenigvuldigen - voorlopig onverkort worden genoteerd. De notatie $2a$ kan nog een ander misverstand oproepen: de verwarring met maatnotaties zoals:

125 g (voor 125 gram)
0.3 s (voor 0.3 seconde).

In die notatie kan niets voor g of s worden ingevuld. Het conflict is soms waarneembaar als in $0.3t$ voor t bijvoorbeeld 2 moet worden genomen en een leerling $0.6t$ noteert. Het verband tussen formule en invulschema maakt duidelijk dat de formule (met de variabelen) een grote hoeveelheid mogelijke berekeningen beschrijft, maar zelf geen berekening is. Het volgende (historische) voorbeeld op eerste-klasniveau maakt dit duidelijk.
Hier wordt van de leerling verwacht achter 15 het getal 7 te zetten, achter 10 een 2. Steeds 8 eraf:

De machine hieronder trekt van elk getal dat je erin stopt 8 af en gooit de uitkomst eruit.
Neem de tabel over en vul in:

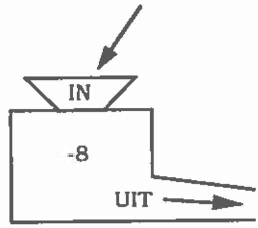
erin	eruit
15	
10	
8	
6	
-2	
a	



Bij a gaat dat moeilijk. Je weet niet wat a is en je kunt dus niets uitrekenen. Leerlingen liepen, omdat ze nog niet wisten wat verwacht werd, hier vast. Toen een derde kolom werd toegevoegd met *ik deed* erboven, lukte het wel. Leerlingen vulden in: 15 – 8, 10 – 8 en a – 8

De machine hieronder trekt van elk getal dat je erin stopt 8 af en gooit de uitkomst eruit.
Neem de tabel over en vul in:

erin	eruit	Ik deed
15	7	15 – 8
10	2	10 – 8
8	0	8 – 8
6		
-2		
a		a – 8



Niet onderkennen van het verschil tussen een omschreven bereke ning en het resultaat van een berekening leidde hier tot een verkeerd voorstelling voor de leerlingen: dat de a een van de getallen is, een wa vreemd uitziende broer of zus van 15 en 10. Dat is onjuist: de a func tioneert op het niveau van de beschrijving van de berekening. Onde de stippellijn in het laatste tabelletje kun je wel invullen wat je moe doen, niet wat eruit komt. Op hoger niveau kun je wel a – 8 als resul taat van een berekening in een uitgebreid systeem van getallen e formele variabelen opvatten, maar dat is niet wat de leerling op dit n veau zal oppakken. Bekend is overigens dat leerlingen ook wel n – tot m herleiden in zulke situaties. Met a en 8 konden ze geen kant ui (In Spijkers zoeken op laag water[4] wordt dit voorbeeld uitvoerig be schreven, inclusief de twijfel of het antwoord a – 8 nu wèl op begri van variabelen berust.)

Toespitsen

We gaan terug naar de formule voor doorbuiging: in het voorgaand hebben we beschreven hoe de keuze van getallen de variabelen vas zet op bepaalde waarden en hoe de formule daarbij als rekenvoo schrift werkt. De doorbuigingsformule bevat zes variabelen. In ee gegeven situatie zullen we bijvoorbeeld beschikken over balken va 0.1 meter dik, 0.05 meter breed en Elasticiteitsmodulus 10^7 (kg/m en moet er een gewicht van 1000 kg gedragen worden. De lengte c de buiging weten we dus niet, maar er kan gedeeltelijk in het schem worden ingevuld:

$$h = \frac{1000 \cdot l^3}{4 \cdot (0,1)^3 \cdot 0,05 \cdot 10^7}$$

Dat kan samengevat worden - het is gedeeltelijk uitrekenen van c formule - tot:

$h = 0.05 \cdot l^3$

Voor die laatste vereenvoudiging is het inzicht nodig dat al de factoren en delingen bij elkaar genomen kunnen worden. Men noemt dit: er is toegespitst op het verband tussen h en l. Er is een evenredigheid ontstaan tussen h en l^3. Anders toespitsen leidt tot een evenredigheid tussen bijvoorbeeld h en $1/a^3$. De getallen hoeven dan niet altijd een bekende waarde te hebben, ze kunnen ook in gedachten vastgeprikt zijn op een bepaalde waarde. De cursieve letters (a en h) stellen de variabelen voor, die nog alle mogelijke waarden kunnen hebben:

$$h = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{Gl^3}{4bE}$$

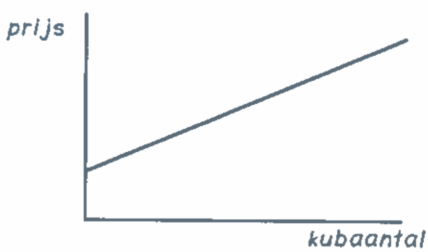
Deze toespitsing heeft veel te maken met de hiërarchie van de variabelen, waarover het volgende.

Hiërarchie in variabelen

In het voorbeeld van de formule voor doorbuiging hebben we twee toespitsingen gemaakt. Vaak zijn de variabelen echter niet zo gelijkwaardig. Neem als voorbeeld de gasprijs-formule:

*prijs = kubprijs * kubaantal + vastrecht.*

In eerste instantie zijn *kubprijs* en *vastrecht* daarin gegeven getallen. Het verband is aan te geven met een rechtlijnige grafiek.



De grafiek geeft een overzicht voor een groot aantal waarden voor *kubaantal* tegelijk. Samen vormen ze een nieuw geheel, mooi met de lijn aangegeven. De variabele *kubaantal* is vastgezet op alle waarden tegelijk. Bij een andere keus voor *kubprijs* ontstaat weer zo'n geheel, waarin een groot aantal mogelijke *kubaantal*-waarden zijn verwerkt:

Kubprijs is een variabele van een andere orde. Hij is hiërarchisch h
ger, begint pas te werken nádat *kubaantal* geheel aanwezig is in d
lijn. In contextsituaties als deze is dat betrekkelijk simpel. Toch is h
de kern van wat parameters wordt genoemd. Parameters worden i
het leerplan algebra voor W12-16 niet vermeden, omdat ze noodzak
lijk zijn voor gebruik zoals hier is aangegeven. De context verscha
daarbij steeds volstrekte duidelijkheid wat betreft de hiërarchie va
variabelen.

Het omgekeerde van toespitsen

Een sterk middel bij het bouwen van formules is, dat je een totaa
formule kunt opbouwen uit evenredigheden. Je weet bijvoorbeeld d
bij windmolens een evenredigheid bestaat tussen vermogen en di
meter^2:

P = (getal) • D^2 (vaste windsterkte)

én dat er evenredigheid is tussen vermogen en windsterkte^3:

P = (ander getal) • W^3 (vaste diameter).

Dan is er ook een totaalverband:

P = (derde getal) • D^2 • W^3.

Dat is weliswaar héél essentieel voor toepassing, maar ligt sterk aa
de kant van de formule-ontwerper in de in hoofdstuk 2 genoemde t
genstelling gebruiker/ontwerper. Daarom ligt het niet voor de har
dit in het leerplan op te nemen. Het toespitsen ligt wél aan de gebru
kerskant en komt in het leerplan dus wél voor.

Variabelen bewegen

Een laatste aspect van werken met variabelen, dat hier besprok
wordt, is het *kwalitatief rekenen*.

We lichten het kwalitatief rekenen toe aan de hand van een toepa
sing van de lenzenformule:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$$

f is vast bij een bepaalde lens. Bij fototoestellen vaak 50 mm. Kom
dichterbij het onderwerp dan moet je de lens verder uitdraaien. H
komt dat nu?

Wel, je kunt natuurlijk b in v uitdrukken:

$b = \dfrac{v \cdot f}{(v - f)}$ (b is de afstand lens filmvlak, v is de afstand lens poppet

Maar hoe nu verder? Gezond gedrag is eerder om direct aan de slag te gaan met:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$$

f is vast, dus $\frac{1}{f}$ en $\frac{1}{b} + \frac{1}{v}$ ook.
Als v daalt, stijgt $\frac{1}{v}$. Maar dan moet dus $\frac{1}{b}$ dalen. Dat betekent: b stijgt.

Op deze manier is de formule echt gebruikt als een verband tussen aan elkaar gebonden variërende grootheden. In dit voorbeeld komen twee redeneerstappen voor:

- Als A + B vast is, en A verandert, dan verandert B in de andere richting.
- Als A stijgt, daalt 1/A.

Voor de hand ligt dat naast de regel A + B nog drie van zulke basisregels bestaan, voor de bewerkingen vermenigvuldigen, aftrekken en delen. Deze regel herschreven voor vermenigvuldigen, is het bekende het moet uit de lengte óf uit de breedte komen.
Het toepassen van deze eenvoudige regels is vaak verbonden met kijken naar grafieken. Als er in de formule méér rekenstappen voorkomen, dan is het gebruik van de techniek sterk afhankelijk van het kunnen structureren van de formule, zoals hier:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{v}$$

Het is al eerder gezegd: een dergelijke globale kijk op formules als gestructureerde gehelen, is van groot belang. Merk op dat de hele behandeling van het voorbeeld met de lenzenformule steunt op interpretatie en dat er in feite niet gemanipuleerd wordt.

Samenhang

Door beschrijvingen van verbanden te brengen in een samenhangend geheel van tabellen, grafieken, formules en taal, ontstaat een compleet beeld van een verband. In veel gevallen kan de samenhang tussen beschrijvingsvormen worden gebruikt voor het oplossen van problemen. We geven hiervan twee voorbeelden.

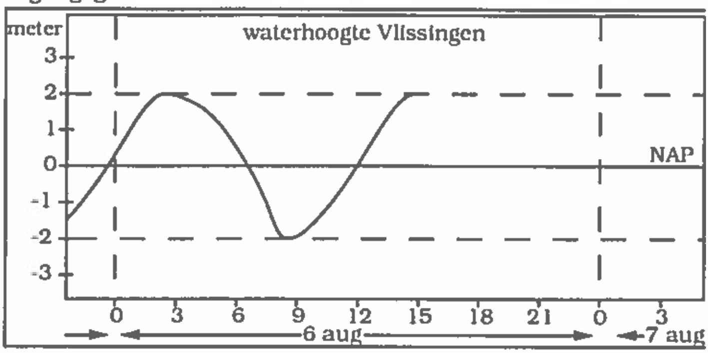
Bewerkingen met formules en grafieken

De twee eerder genoemde grafieken van de gasprijs hangen samen: de tweede is ontstaan uit de eerste door verandering van de parameter *kubprijs*. Dergelijke omvormingen van grafieken en de daarmee samenhangende veranderingen van formules komen vaker voor.

Twee soorten bewerkingen op formules en grafieken komen hier te sprake:

- schuiven en oprekken;
- optellen en aftrekken.

De uitgangsgrafiek is deze:



Schuiven en oprekken

De grafiek geeft de waterhoogte aan in Vlissingen voor doorsnee om standigheden, zoals door Rijkswaterstaat voorspeld. Als de omstan digheden veranderen, verandert de grafiek ook. Drie veranderinge liggen voor de hand.

1 Bij springvloed zijn de uitwijkingen zo'n 20% groter. De grafie wordt opgerekt.
2 Bij noordwestenwind is er één meter verhoging. Dat geldt zow voor hoog- als laagwater. De grafiek schuift naar boven.
3 Vlissingen wordt IJmuiden. In IJmuiden is alles zo'n twee uur la ter. De grafiek schuift naar rechts.

(In IJmuiden is de uitwijking ook nog geringer. Het is in feite een com binatie van 1 en 3).

De springvloed kan beschreven worden met een vermenigvuldigfa tor:

1.2 * *peil* in plaats van *peil*.

De invloed van de noordwestenwind is het bijtellen van een vast geta

peil + 1 in plaats van *peil*.

Om invloed 3 (achterlopen in de tijd) te noteren, moet de variabele tij erbij betrokken worden. Bijvoorbeeld:

peil op tijdstip t - 2 in plaats van *peil op tijdstip t*.

De verbinding van zulke bewerkingen - vermenigvuldigen van ee formule met een getal en optellen van een getal bij een formule - m meetkundige transformaties op de grafiek, geeft meer inzicht. Z wordt duidelijk dat de grafiek door het oprekken overal steiler is g worden. Op het niveau van uitrekenen van formules, waarbij de ui komsten in een geordende tabel worden geplaatst, leidt de verand ring tot de interpretatie: alle stapjes zijn groter.

Optellen en aftrekken

Sommige formules bestaan uit componenten, zoals de formule voor stopafstand. Het is vaak de moeite waard om de twee componenten ook in de grafiek apart voor te stellen. Bijvoorbeeld bij het samenstellen van de stopafstandformule uit de formules voor reactie-afstand en remweg:

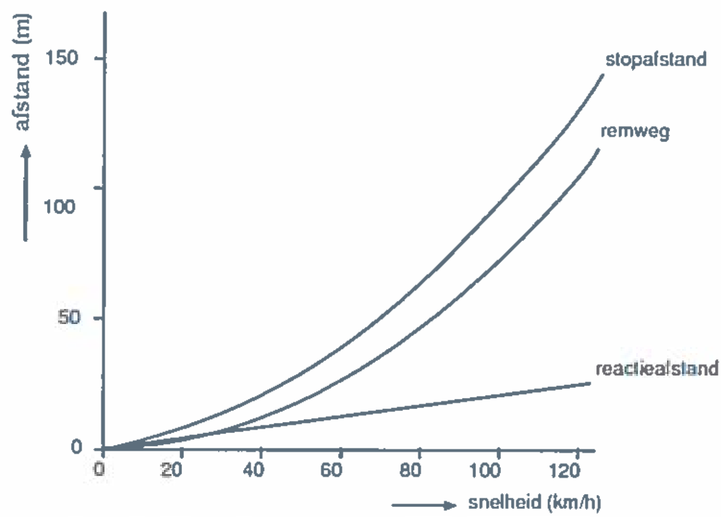
$$\textit{reactieafstand} = \frac{\textit{snelheid}}{3{,}6} \cdot 0{,}8 \quad \text{en } \textit{remweg} = \frac{\textit{snelheid}^{\,2}}{100} \cdot 0{,}75.$$

De *stopafstand* is de som van beide:

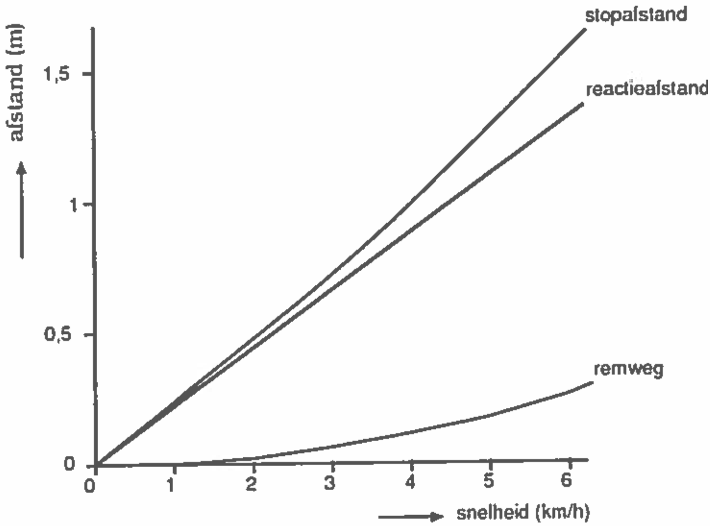
$$\textit{stopafstand} = \boxed{\textit{reactieafstand}} + \boxed{\textit{remweg}}$$

$$\textit{stopafstand} = \boxed{\frac{\textit{snelheid}}{3{,}6} \cdot 0{,}8} + \boxed{\frac{\textit{snelheid}^{\,2}}{100} \cdot 0.75}$$

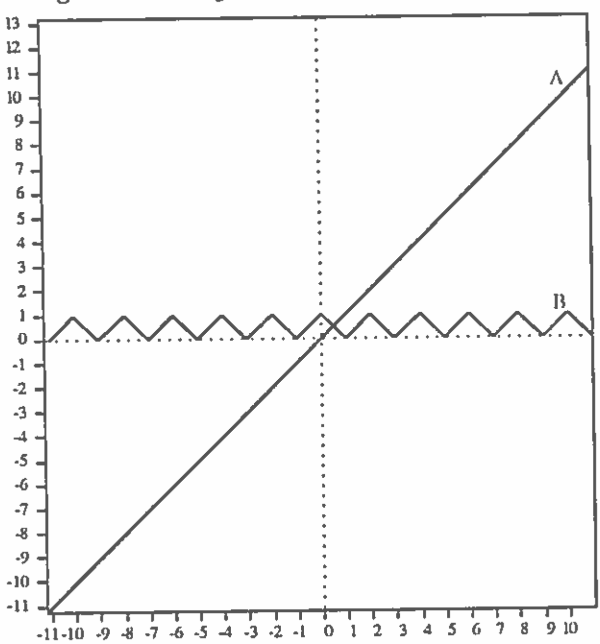
De gelaagde structuur van de formule is mooi te zien: twee stukken met een eigen rol in de context. Een grafiek van 0 km/uur tot het maximum dat in Nederland is toegestaan ziet er als volgt uit:



Het deel remweg overheerst, zodat de som van remweg en reactie-afstand erg op remweg lijkt. Inzoomen bij 0 is mogelijk; het is wel uitkijken welke grafiek bij welke naam hoort, reactie-afstand ligt nu middenin, vlakbij stopafstand:



Welk deel op bepaalde gebieden de overhand heeft, is nu visueel d
rect te zien.
Een aantal elementaire zaken bij het optellen van grafieken, kom
vanzelf naar voren als er met de hand wordt opgeteld. Leerlingen on
dekken dat het handig is de nulpunten van de ene grafiek te gebru
ken en zien de negatieve getallen niet als iets bijzonders; het patroo
in het resultaat loopt gewoon door. Deze conclusies volgen uit obse
vaties van leerlingen bij deze oefening (de opdracht is voor leerlinge
uit het voorgaande duidelijk: tel A en B op):



Aftrekken van grafieken heeft een natuurlijke plaats bij het zoeken naar oplossingen van een vergelijking. Het verschil van twee formules moet nul zijn, willen ze gelijk zijn. De nulpunten in de grafiek laten zien voor welke waarde(n) van de lopende variabele dat gebeurt.

Formules maken met tabellen

In een strooifolder van een winkel, waar jaloezieën worden verkocht, staan deze tabellen:

Aluminium
jalouziën 25 mm

25 kleuren

Breedte	In die hoogtes. Prijs:
60 cm	20,-
70 cm	25,-
80 cm	30,-
90 cm	35,-
100 cm	40,-
110 cm	45,-
120 cm	50,-
130 cm	55,-
140 cm	60,-
150 cm	65,-
160 cm	70,-
170 cm	75,-
180 cm	80,-
190 cm	85,-
200 cm	90,-
210 cm	95,-
220 cm	100,-
230 cm	105,-
240 cm	110,-
250 cm	115,-
260 cm	120,-
270 cm	125,-
280 cm	130,-
290 cm	135,-
300 cm	140,-

16 mm 20% meerprijs

Vinyl
jalouziën 25 mm

Kleuren wit, zwart,rood,grijs

Breedte	x	Hoogte	Prijs
60	x	130	7,-
75	x	130	15,-
90	x	130	20,-
105	x	130	25,-
120	x	130	30,-
135	x	130	35,-
150	x	130	40,-
100	x	250	30,-

Breedte	x	Hoogte	
60	x	175	15,-
75	x	175	20,-
90	x	175	25,-
105	x	175	30,-
120	x	175	35,-
135	x	175	40,-
150	x	175	45,-

16 mm

Breedte	x	Hoogte	
60	x	130	15,-
75	x	130	20,-
90	x	130	25,-
105	x	130	30,-
120	x	130	35,-
135	x	130	40,-
150	x	130	45,-

Ze zijn gemaakt om te kunnen bekijken welke prijs betaald moet worden als een raambreedte gegeven is. Lokaal kijken is dan het sleutelwoord. Opvallend is echter de samengaande ontwikkeling van breedte en prijs, die sterk naar voren komt in de tabellen en die aanknopingspunten biedt bij het zoeken naar de wijze waarop de prijzen tot stand komen. Zo lopen de breedtes van de aluminium jaloezieën op met steeds tien cm, terwijl de prijs daarnaast oploopt met stappen

van vijf gulden. De kolom 'Breedte' vermenigvuldigen met 0,5 levert een kolom op met dezelfde getallen als de kolom Prijs, alleen moet overal 10 worden afgetrokken. Het verband tussen breedte en prijs is dus lineair en zal een factor 0,5 bevatten. Het verband in formulevorm is dus: *prijs* = *breedte* * 0,5 – 10.
Het kan ook anders: zoeken naar het begin, waar het vaste bedrag in de kolom Prijs zichtbaar wordt. Hier betekent dat: uitbreiden van de tabel naar boven toe tot de breedte 0 (dit is typisch een wiskundige activiteit, die niets meer met de situatie te maken heeft, maar die wel leidt tot resultaat!). De bijbehorende prijs is 20 –6 x 5 = –10. Het getal -10 kan beschouwd worden als de beginwaarde voor de kolom prijs. Per cm raambreedte wordt dat getal vermeerderd met 0,5. Daarmee is de stapgrootte in het lineair verband gevonden. Dit proces wordt verbeeld in dit schema:

+1 +1 +1 +1

Breedte	1 cm	2 cm	3 cm	4cm	5 cm
Prijs, start-waarde -10	-9,50	-9,00	-8,50	-8,00	-7,50

+0,50 +0,50 +0,50 +0,50

De formule wordt opgebouwd vanuit de startwaarde en de stapgrootte: *prijs* = -10 + 0,5 * *breedte*.
Op analoge wijze is het mogelijk om een formule te vinden vanuit een tabel voor een verband van geheel andere aard, namelijk een exponentiëel verband. In het volgende schema staat hoe via een herhaalde berekening de rente kan worden berekend van een bedrag van ƒ 250,- waarop een rente van 5,5% betaald wordt via samengestelde interest

+1 +1 +1 +1

Looptijd	1 jaar	2 jaar	3 jaar	4 jaar	5 jaar
Inleg ƒ 250,- +5,5% rente	ƒ 263,75	ƒ 278,26	ƒ 293,56	ƒ 309,70	ƒ 326,74

• 1,055 • 1,055 • 1,055 • 1,055

De startwaarde (250) en de stapgrootte (in feite een factor) hebben ook hier een vast plaats in de formule:
bedrag = 250 • 1,055 ^{looptijd}

Merk op dat in de formule, vergeleken met de vorige formule, de optelling is vervangen door een vermenigvuldiging en dat de vermenigvuldiging is vervangen door een machtsverheffing.
De tweede manier om via een tabel een formule te vinden voor een lineair verband is blijkbaar breder toepasbaar dan alleen voor dit type verbanden. De vaardigheden die nodig zijn om deze techniek te hanteren zijn echter veel complexer dan die bij het redeneren over regelmaat in tabellen die alleen toepasbaar is op lineaire verbanden.

Noten

1 The interpretation of complex Cartesian graphs representing situationsstudies and the acting experiments; Dissertation Nottingham, 1978.
2 In verband met ..... een introductie op verbanden; SLO Enschede 1983.
3 'José (spreek uit Gosé)'; Rijkje Dekker; Nieuwe Wiskrant 4^{e} jaargang nr 1, oktober 1985.
4 Spijkers zoeken op laag water; Algebra in het LBO; A.J.Goddijn, Nieuwe Wiskrant 1^{e} jaargang nr 4, mei 1982.

TERUGKERENDE THEMA'S

In dit hoofdstuk kijken we naar drie thema's, die regelmatig terugkeren in het leerplan:
Thema 1: Lineariteit
Hier beschrijven we lineaire verbanden en verhoudingen, en de samenhang ertussen.
Thema 2: Terugzoeken en Vergelijken
We zien vergelijkingen oplossen niet slechts als een specifieke vaardigheid met formules, maar als onderdeel van een groter geheel.
Thema 3: Grootte en Groei
Het gaat om het onderzoeken van eigenschappen van lineaire verbanden, machtsverbanden en exponentiële verbanden, het vergelijken van deze verbanden en de activiteiten die daarbij horen.
De thema's staan niet los van elkaar: zo komt lineaire verbanden terug in thema 2 en 3.

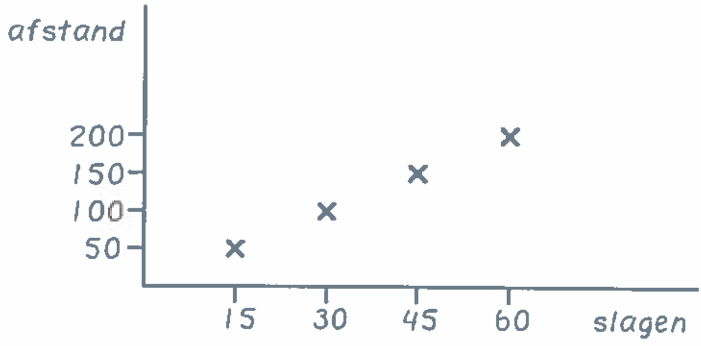
Lineariteit

Lineariteit van twee kanten

Een fietser legt een stuk weg af van honderd meter. Hij maakt daarbij dertig rondjes met zijn pedalen. Het is nu gemakkelijk (voor deze fietser) een tabelletje te maken:

afstand (in m)	100	200	300	50	250
pedaalslagen	30	60	90	15	75
	(a)	(b)		(c)	(d)

De getallen boven (b) zijn gevonden door de corresponderende getallen boven (a) te verdubbelen. (c) ontstaat door halveren, (d) door (b en (c) samen te nemen. Bij een zich steeds herhalend proces als het fietsen, is het duidelijk dat dat goed gaat. In dit geval rekenen we in de ene variabele op dezelfde manier als in de andere, vanuit het uitgangspunt honderd meter in dertig slagen. Tussen afstand en pedaalslagen bestaat een lineair verband. In de grafiek is een rechte lijn te zien:



Van de ene stip naar de volgende is steeds vijftien slagen, maar ook vijftig meter. Een regelmatig rijtje punten op een lijn. De afstand uitrekenen bijvoorbeeld bij 254 slagen, zonder tabel, kan ook direct door via één slag te rekenen. Eén slag komt overeen met het dertigste deel van honderd meter, dus 3.333 meter. En dan wordt het:

254 • 3.333 = 846.582 meter

Alle volgende berekeningen gaan net zo:

slagen • 3.333.

Een andere weg om van de verhoudingstabel naar de formule te komen, is het uitrekenen van alle delingen in de tabel:

100/30; 200/60; 50/15 enzovoort.

Het verkrijgen van drie keer de uitkomst 3.333 is voor lang niet alle leerlingen voldoende om in te zien dat de formule:

slagen • 3.333

de juiste is.

De weg van de delingen langs de formule *afstand / slagen* = 3,333 via formule-omzetting naar *slagen* • 3.333 = *afstand*, is vol obstakels die doorzicht beperken.

De overgang van rekenen in de tabel naar rekenen op de 'formule-manier' is een forse stap. Het is een richting-verandering, gezien in het model van de verhoudingstabel waarmee we begonnen. Van horizontaal naar verticaal in dit geval.

Van horizontaal naar verticaal

Experimenten met leerlingen laten zien dat een verhoudingstabel lastig kan zijn, als het gaat om het vinden van het verband tussen de variabelen zoals dat hierboven bij een verhoudingstabel, in verticale richting dus. Een kwart slag draaien van de tabel blijkt de blokkades op te heffen; het vinden van de factor levert dan geen problemen meer op:

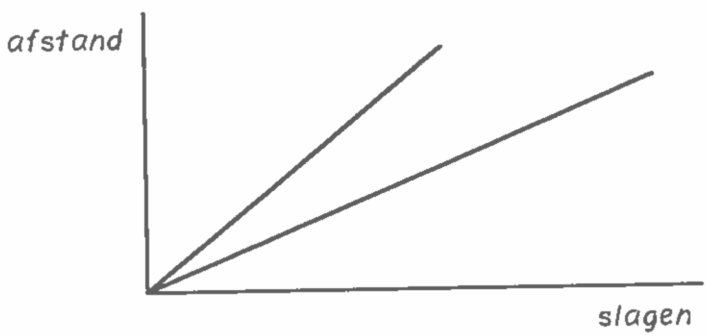
De formule staat er hier als horizontale pijl bij, in de leesrichting. Het getal 3.333 karakteriseert de situatie.

slagen	afstand
30	100
60	200
15	50

• 3,333

Over richting

Gaat het om een andere fiets dan wordt de vermenigvuldigingsfactor een ander getal, bijvoorbeeld 5. De grafiek voor de fiets van 5 samen met die van 3.333 wordt dan:



De 5 en de 3.333 zijn maten voor de steilheid van de grafiek. Zij geven de verhouding weer waarmee de afstand van ieder van de twee fietsen toeneemt met het aantal pedaalslagen. We vermijden bewust de term richting. In het plaatje lopen beide grafieken in een bepaalde richting, maar deze richting hangt af van hoe groot 'slagen' en 'afstand' op papier worden afgebeeld. Steilheid, hier in de zin van de verhoudingsgetallen 5 of 3,333, is echter niet van de uiterlijke vorm van de grafiek afhankelijk.

Natuurlijke en gecreëerde verbanden

Het hierboven gegeven voorbeeld van lineair verband ontstaat op natuurlijke wijze. Het is gebaseerd op herhaling. De context ondersteunt dat.

Een verband zoals de wet van Ohm, kan op een heel andere manier ontstaan: door meting van de spanning (*V*) en de stroomsterkte (*I*) wordt het quotiënt, de weerstand (*R*), bepaald. Echter de ampèremeter bepaalt juist de stroomsterkte door de wet van Ohm zèlf te gebruiken. Is hier dan niet sprake van een cirkelredenering? Nee, want *I* wordt niet gemèten, maar via de wet van Ohm *gedefinieerd*. Zulke situaties treden vaak op:

- wisselkoersen: als gevolg van de afspraak dat we voor elke dollar evenveel guldens krijgen (op één bepaald moment) treedt de geldkoers op als factor en is er sprake van een evenredig verband;
- het verband tussen Fahrenheit en Celsius:
  we stellen 0°C= 32°F en100°C= 212°F.
  de rest volgt uit het rekenen, niet uit de natuur;
- het verband tussen ounce en ons:
  de twee maten laten allebei rekenen zoals in de verhoudingstabel toe: als je twee keer zoveel suiker neemt, is het gewicht ook twee keer zoveel (zowel in ounce als in ons gemeten) Dus: evenredigheid.

Lineair maar niet evenredig

De verbanden tussen Celsius- en Fahrenheitschaal en tussen Engelse en Franse schoenmaten zijn geen evenredigheden. Er kan wel mee gerekend worden, zoals in de verhoudingstabel, maar dan alleen met verschillen, bijvoorbeeld door midden tussen twee punten te gaan zitten:

	Celsius	Fahrenheit	
a:	0	32	(gegeven)
b:	100	212	(gegeven)
c:	50	122	(tussen a en b)
d:	25	77	(tussen a en c; niet: helft van c)
e:	37.5	99.5	(tussen c en d)

Interpoleren kan dus op dezelfde manier als bij de verhoudingstabel.
Extrapoleren kan niet zomaar:

	150	334	(b en c bij elkaar optellen)

Extrapoleren kan wel door te kijken naar verschillen:

f:	150	302	(b + het verschil tussen a en c)

Dit voorbeeld geeft de grenzen aan bij het overnemen van redeneringen met evenredigheden naar lineairiteiten. Daarmee is ook de samenhang gegeven.

Formules vinden

Is, net als bij de fiets, ook een formule te vinden voor de temperatuurschalen via de tabel? Ja, door interpoleren en extrapoleren wel. We nemen een paar getallen uit de vorige tabel:

	Celsius	Fahrenheit	
+50	0	32	+90
	50	122	
	100	212	
	150	302	
	200	392	

Vervolgens zoomen we in, door de verticale stappen te verkleinen, dat kan door lineair interpoleren:

	Celsius	Fahrenheit	
+5	0	32	+9
	5	41	
	10	50	
	15	59	
	20	68	

Bij nog verder inzoomen vinden we de vermenigvuldigingsfactor 1.8:

	Celsius	Fahrenheit	
+1	0	32	+1.8
	1	33.8	
	2	35.6	
	3	37.4	
	4	39.2	

Het gaat niet om een evenredigheid, dus we zijn er nog niet. Door, net als bij de jaloezieën in hoofdstuk 3, de startwaarde van Fahrenheit de bij 0° Celsius op te zoeken, komen we tot de formule voor de temperatuurschalen:
Celsius * 1,8 + 32 = Fahrenheit

Een dergelijk proces van zoeken maakt gebruik van allerlei eigenschappen van de formule voor een lineair verband. Dat is zeer instructief: het onderdeel is niet in het examenprogramma vermeld, maar het kan verhelderend functioneren binnen het onderdeel lineaire verbanden in het leerplan.

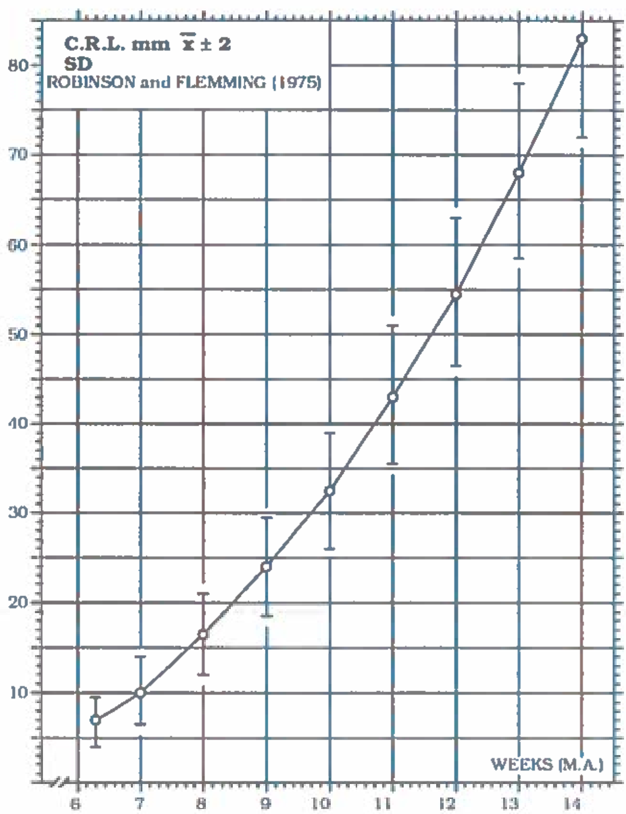
Terugzoeken en vergelijken

Terugzoeken

In het algemeen hebben grafieken, tabellen en formules een voorkeursrichting: van een (of meer) vrij invulbare variabele(n) naar een resultaat. We geven enkele voorbeelden.

De lengte van een foetus

Deze grafiek geeft de kruin-romplengte aan van een foetus in de eerste veertien weken van de zwangerschap. De grafiek is ontstaan na bewerking van een groot aantal metingen. 95% van de waargenomen data valt tussen de einden van de verticale streepjes. De richting van de grafiek is in eerste instantie van tijd naar lengte.



In deze grafiek kun je zien hoe snel een foetus groeit in de eerste vijftien weken van de zwangerschap. Horizontaal is het aantal weken afgezet en verticaal de lengte van de foetus in millimeters.

Het verloop van de bevolking in Enschede

In de tabel is de richting van jaar naar geboren, enzovoort:

Bevolkingsverloop Enschede

	1985	1986	1987	1988	1989
Bevolking per 1-1	144566	144048	144227	144695	145223
geboren	1647	1598	1629	1705	1638
overleden	1377	1408	1355	1419	1487
geboorteoverschot	270	190	274	286	151
gevestigden	5055	5853	5995	6017	6951
vertrokken	5843	5864	5801	5775	6289
vestigingsoverschot	-788	-11	194	242	662
bevolkingstoeneming	-518	179	468	528	813
bevolking per 31-12	144048	144227	144695	145223	146036

De omtrek van een cirkel

Bij deze pijlenketting is de richting van *straal* naar *omtrek* (van een cirkel):

straal $\xrightarrow{\cdot 2} \xrightarrow{\cdot \pi}$ *omtrek*

De leeftijd van een zoogdier

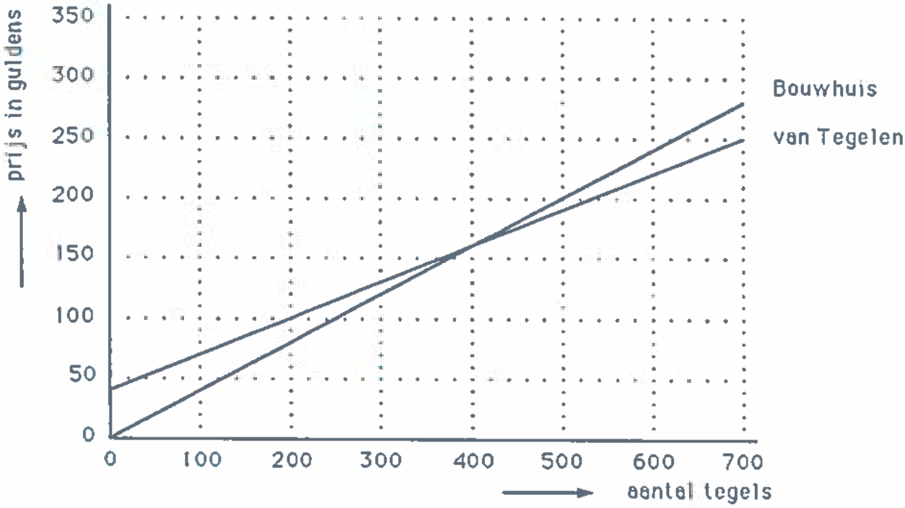
In deze formule (vuistregel) voor de leeftijd van een zoogdier met massa M is de richting van M naar T:

$T = 11.8\ M^{0.20}$

De grafiek van de kruin-romplengte wordt in de praktijk gebruikt om met behulp van echografie uit de lengte van de foetus de zwangerschapsduur te kunnen bepalen. Soms bereken je uit de omtrek de diameter. Soms zoek je uit welke zoogdieren (van welke massa) honderd jaar kunnen worden. Je kunt je afvragen in welke jaren er minder dan 1600 geboorten waren. Dit is allemaal werken tegen de voorkeursrichting in: het gaat om *terugzoekvragen*. Sommige van die vragen hebben meer antwoorden. Soms is het antwoord een heel gebied.

Vergelijken

Verwant met terugzoeken is het *vergelijken* van twee verbanden.
In deze grafiek zijn twee tarieven voor dezelfde tegels aangegeven. Eén inclusief met voorrijden, maar goedkoper per tegel, de ander zonder voorrijkosten, maar met hogere tegelprijs.

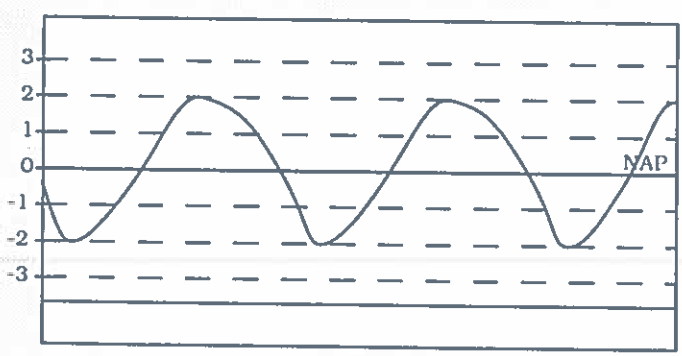


Tarieven vergelijken leert dat grootverbruikers naar Van Tegelen gaan.

Van meet af aan

Het ligt voor de hand dat gebruik van contexten en grafieken vanaf het begin leidt tot allerlei vragen die te plaatsen zijn in de twee groepen terugzoeken en vergelijken. Bij grafieken gaat het erom uitgaande van een waarde of gebied op de verticale as, bijbehorende waarden en gebieden op de andere as te vinden. Het steunt alleen op het kunnen lezen van grafieken. Het klinkt eenvoudig, maar dat terugzoeken een complexe bezigheid kan zijn laat de volgende opgave goed zien:

17. Geef in de balk onder deze grafiek met stukjes blauwe lijn aan wanneer de waterstand *hoger dan -1 meter* is.



18. Schets de grafiek als er sterke oostenwind staat. Het water staat dansteeds 0,5 meter lager dan normaal.
Geef *daarna* met rood in de balk aan wanneer nu de waterstand *hoger dan -1 meter* is.

Een ruim aanbod van dit type problemen zal in het leerplan voorkomen. Er is weinig reden om hier speciale formele beschrijvingsmiddelen zoals intervallen en dergelijke te ontwikkelen. De formuleringen gaan in gewone taal als:

boven de 2.5 meter

tussen 10 en 14 uur.

Contextgebonden taal dus.

Dezelfde verschillen in complexiteit treden op als de terugzoekvraag zich bij een tabel voordoet. In de praktijk zal vaak niet precies de gezochte regel in de tabel te vinden zijn. Afhankelijk van de context is een naburige waarde geschikt, of moet er een waarde ergens tussenin gevonden worden.

Ook bij formules komt de terugzoek- en vergelijkvraag vanaf het begin voor, ook zonder dat ingegaan is op de algebraïsche methoden die hier beschikbaar zijn.

In het hele verloop van het leerplan zal de terugzoekvraag geformuleerd worden in termen van de context, ook als die context het puur werken met getallen is:

Zoek een getal dat samen met zijn wortel juist 20 is.

De vraag in de vorm:

Los op: $x + \sqrt{x} = 20$

zou in eerste instantie dezelfde activiteiten moeten losmaken. Helaas is dat vaak niet het geval. De vraag met los-op is vaak het signaal om een greep in de gereedschapkist te doen, zonder het inzicht of het gekozen gereedschap het meest geschikt is. Daarom geven we de voorkeur aan vragen die direct te maken hebben met de situatie en die richting kunnen geven aan het zoekproces. We kiezen er dan ook voor in die gereedschapskist methodes te doen, die op natuurlijke wijze bij de opzoekvraag aansluiten, die het opzoekproces als het ware wat scherper maken.

Technieken voor terugzoeken en vergelijken

Door het leerplan verspreid komen op diverse plaatsen technieken ter sprake die met oplossen van vergelijkingen te maken hebben.

In feite gaat het om vijf verschillende methodes, we noemen ze:

- pijlenmethode
- bordjesmethode
- inklemmethode
- verschillenmethode
- reductiemethode.

We bespreken de methodes eerst afzonderlijk en brengen daarna wat ordening aan en gaan op de beperkingen in.

De pijlenmethode

Neem als voorbeeld het verband: $P = 66 \bullet D^2$.
De eerste stap is de formule te vertalen in een reeks bewerkingen, die we met pijlen aangeven:

$$D \xrightarrow{\text{kwadrateer}} \xrightarrow{\bullet 66} P$$

De richting van de formule is nu duidelijk: van D naar P. Willen we echter van P naar D, dan moeten we achteruit werken:

$$D \xleftarrow{\text{wortel}} \xleftarrow{/66} P$$

De methode werkt voor veel meer gevallen. Bijvoorbeeld auto's huren, daar past een dergelijke formule bij:
huurprijs = 0.3 • *kilometers* + 100.
Vertaling in pijlentaal levert ook een twee-pijlen-ketting.
En voor: $P = 129 \bullet W^3$ werkt de methode ook.

Bij deze techniek spelen twee vaardigheden een rol:

1 Het kunnen ontleden van een formule in opeenvolgende elementaire bewerkingen.
2 Het kunnen vinden van de omkeringen van die bewerkingen.

Het ontleden hoort bij het kunnen noteren van het invulproces; bij substitueren van bijvoorbeeld 9 voor D in $66 \bullet D^2$ kom je automatisch kwadrateren en vermenigvuldigen met 66 tegen. Het kunnen vinden van de omgekeerde bewerking komt neer op het kennen van bijbehorende paren:

+15	en	-15
:3	en	• 3
kwadrateren	en	worteltrekken

De rekenmachine speelt hier een duidelijke rol, ook bij het ontwikkelen van de techniek door leerlingen. De INV-toets, die veel zakrekenmachines hebben, bewijst hier zijn diensten; ook bij het omkeren van derde- en andere machten; de inverse van x^y 3 (tot de derde macht) is meestal: INV x^y 3. De gelijkwaardigheid met x^y 0.33333 is dan niet meer zo van belang.

De pijlenmethode heeft één beperking: de variabele die gezocht moet worden, mag maar op één plaats in de formule voorkomen. Verder is de methode geschikt voor een breed scala van formules.

De bordjesmethode

Een voorbeeld: zoek een getal zodat: $3 \cdot (getal - 4)^2 + 7 = 55$.
We pakken een stuk eruit, dat is het bordje:

$$\boxed{3 \cdot (getal - 4)^2} + 7 = 55$$

en we zien: $3 \cdot (getal - 4)^2 = 48$.
Weer een bordje leggen:

$$3 \cdot \boxed{(getal - 4)^2} = 48$$

en dus: $(getal - 4)^2 = 16$.
Dan volgt: $(getal - 4) = 4$
(Of: $= -4$, maar dat even terzijde voor later).
Uiteindelijk: $getal = 8$.

De bordjesmethode eist:
- Het kunnen isoleren van een deel van de formule.
- Het onderweg toepassen van de inverse bewerkingen.

De bordjesmethode begint bij het geheel en komt de inverse bewerkingen in de juiste volgorde tegen. De pijlenmethode begint bij (*getal*), dus in de kern van de formule:

$$getal \xrightarrow{-4} \xrightarrow{\dots^{2}} \xrightarrow{\cdot 3} \xrightarrow{+7} 55$$

Omkeren van de rekenrichting levert exact hetzelfde rekenwerk als bij de bordjes. Pijlen- en bordjesmethode zijn loten van één stam: het analyseren van formules. De bordjesmethode kent dus ook dezelfde beeperking als de pijlenmethode: de variabele die gezocht moet worden mag maar op één plaats staan.

De inklemmethode

Deze methode maakt van niets anders gebruik dan het invullen van waarden in formules. We illustreren dit met een bekend spelletje:

Een spel voor twee

Dit is een spel voor twee personen.
De een is de WETER, de ander de RADER.

> **spelregels**
> De WETER bedenkt een getal onder de honderd.
> De RADER moet dat getal vinden. Die mag een getal zeggen en dan zegt de WETER:
> **"Te groot" of "Te klein" of "Goed!".**
>
> Méér mag er niet gezegd worden. De RADER mag wel iets opschrijven. De RADER probeert natuurlijk het getal in zo weinig mogelijk beurten te vinden.

1. Doe het spel met zijn tweeën. Ieder is een keer WETER en een keer RADER.
Hoeveel keer raden hadden jullie nodig?

Jijzelf : . . . . . keer
Je maat : . . . . . keer

2. De RADER kan het handig zo opschrijven:

30	te klein
90	te groot
25	te klein
.....	.....

Er is dus geprobeerd: 30, 90, 25.
Waarom is die 25 niet zo handig gekozen?.

De 25 is niet handig, omdat je al weet dat je tussen 30 en 90 moet doorzoeken. Bij dit spel kun je dan het beste naar 60 vragen, midden tussen 30 en 90.
Ertussen en middenin, dat zijn de sleutelwoorden voor het zoekproces. Middenin, dat hoeft niet zo precies, maar ertussen, dat wel.
Dezelfde zoekstrategie werkt bij deze opgave ook:

Opgave:
Zoek een getal dat samen met 10 keer zijn eigen wortel juist gelijk is aan 1000.

Het ligt voor de hand de zoekresultaten bij te houden in een tabel:

x	$x + 10\sqrt{x}$	
700	965	
800	1083	
750	1024	
725	994	(1)
730	1000.2	
729	999	
729.5	999.6	
729.8	999.9	(2)
729.9	1000.1	(3)
729,85	1000.01	

Afhankelijk van de vereiste nauwkeurigheid stopt het proces bij (1), (2) of (3), of nog later.
In feite wordt de vergelijking: getal + 10√getal = 1000 opgelost.
Opgelost? Niet iedereen zal dat nazeggen. Benaderd, oké.
Oplossen zou zijn: getal = $1050 - 50\sqrt{41}$
en dan pas (eventueel) naar: getal = 729.844.
Dat laatste is natuurlijk óók benaderen!
Het aardige is dat de inklemmethode even goed werkt, even eenvoudig zelfs, bij:

$$x + 10 \cdot x^3 = 1000$$

of bij $$x + 13 \cdot \tan(x) = 1000.$$

De ergens-er-middentussen methode steunt op kwalitatief inzicht in de werking van de formule. Zo moet je kunnen vaststellen of je naar de grote of kleine kant van 500 verdergaat. Een mentaal beeld, dat lijkt op de getallenlijn, begeleidt het proces.
Inzichten in grootte-orde kunnen hier helpen het proces te versnellen, maar dat hoeft niet. Een grafiek schetsen kan ook een steun zijn. Kunnen werken met de rekenmachine en bestand zijn tegen decimale getallen zijn voorwaarden.

De algemene inzetbaarheid van de strategie is het duidelijkst bij de vergelijking met de tangens hierboven. Daar is geen andere methode dan benaderend zoeken mogelijk. De inklemmethode doet in zekere zin dom aan: je hoeft niets met de formules te kunnen behalve invullen. Van de andere kant is de methode de basis voor technieken waarbij op slimmere manier de volgende benadering wordt gekozen dan met middenin. In die vorm is de methode misschien wel de feitelijk meest gebruikte oplossingsmethode.

In het voorbeeld is de inklemmethode gebruikt om *getal* + 10 • √*getal* op een bepaalde waarde, namelijk 1000, te krijgen. Dat is echt terugzoeken. De methode is ook geschikt voor vergelijken van twee formules. De tabel krijgt dan een kolom extra.
Het ligt voor de hand om het rekenwerk door de computer te laten doen, maar dat is niet noodzakelijk. De gebruiker van de computer stuurt het zoeken bij de vraag voor welk *getal, getal/100* en *log getal* dezelfde uitkomst hebben :

TABEL

getal	getal / 100	log getal	vergelijk
1	0.01	0	te groot
20	0.2	1.301	te klein
1000	10	3	te groot
500	5	2.699	te groot
300	3	2.4771	te groot
200	2	2.301	te klein
250	2.5	2.3979	te groot

Tik losse waarden in === STOP met F8

De volgende twee technieken zijn strikt genomen geen oplossingstechnieken voor vergelijkingen, maar ze herleiden vergelijkingen van de vorm:

formule1 = formule2

tot een vorm: formule3 = getal

waarna de gezochte waarde van de variabele met één van de voorgaande technieken gevonden kan worden. Deze technieken zijn vooral aan het leerplan toegevoegd als voorbeelden van het omgaan met formules op een hoger formeel niveau.

De verschillenmethode

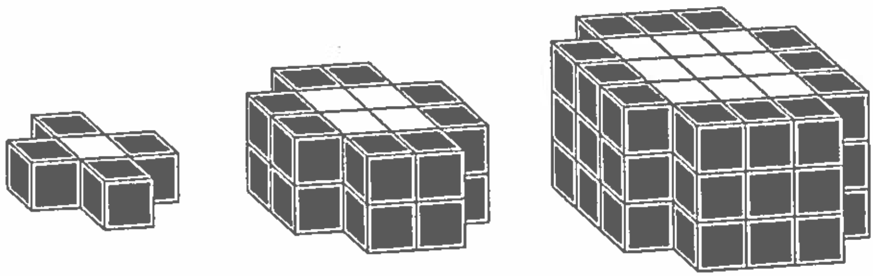
In de notatie van zojuist is dat het herleiden tot:
formule1 – formule2 = 0.
Neem als voorbeeld de formules die horen bij de eerder gegeven tegeltarieven:
prijs Bouwhuis: 0.40 • *T*
prijs Van Tegelen: 0.30 • *T* + 40.
De verschilformule: 0.05 • *T* – 40.
Voor het vinden van de *T* waarbij de tarieven gelijk zijn, moet gelden:

0.05 • T – 40 = 0

De verschilformule kan op diverse manieren gevonden worden en de ontstane vergelijking kan ook op diverse manieren afgehandeld worden. In deze situatie is het 'samennemen van gelijksoortige termen' van nut.

De reductiemethode

In dit patroon van blokkenbouwsels:



rangnummer: 1 2 3

geldt (r is het rangnummer): zwart $= r \cdot r \cdot r$
wit $= 4 \cdot r \cdot r$

Zwart en wit zijn gelijk als $r = 4$.
Dat is direct te zien.
In stappen wordt gereduceerd tot een eenvoudiger vergelijking. (In de hier gegeven context is het niet erg dat we de oplossing $r = 0$ door het net lieten glippen. We komen hier zo dadelijk nog op terug.)
Als de formules iets ingewikkelder zijn, maken we tussenstappen.

Bijvoorbeeld:		dus:
$k \cdot k + 100$	$k \cdot k + 100$	100
$2 \cdot k \cdot k$	$k \cdot k + k \cdot k$	$k \cdot k$

We vatten een en ander nu in een schema samen, waarin we per methode aangeven:

- of deze voor vergelijken geschikt is;
- of deze voor terugzoeken geschikt is;
- bruikbaar is bij lineaire verbanden;
- hoe algemeen de methode is;
- of er oplossingen door het net kunnen glippen, en wat er dus aan gedaan kan worden;
- bruikbaarheid voor het vinden van de inverse formule.

Dat laatste vergt enige toelichting.

We hebben hierboven:

$$D \xrightarrow{\text{kwadrateer}} \xrightarrow{\ast 66} P$$

omgekeerd tot:

$$D \xleftarrow{\text{wortel}} \xleftarrow{/66} P$$

en met één waarde voor P gewerkt. Maar de laatste pijlenketting kan ook in een formule worden omgezet:

$$D = \sqrt{\frac{P}{66}}.$$

Dat is de 'tegenformule' bij $P = 66 \ast D^2$.
De pijlenmethode is hiervoor uitermate geschikt. De inklemmethode absoluut niet.

	Pijlen	Bordjes	Inklemmen	verschilformule	reductie
vergelijken van twee formules	--	--	OK	OK	OK
terugzoeken bij één formule	OK	OK	OK	niet van toepassing	
lineair	bruikbaar		bruikbaar	bruikbaar	
beperking	variabele mag slechts op één plaats voorkomen		geen beperking	hangt af van formule of het zin heeft	
gevaar voor missers	blijkt bij inverse nemen		grafiek maken voorkomt missers	ongevaarlijk	gevaar aanwezig
rol bij formule-omzetting	bruikbaar		onbruikbaar	maakt gebruik van omzettingen	

In situaties (dat wil zeggen, bij bepaalde soorten formules) waar het verloop van de waarden niet simpel steeds stijgend is (of dalend), kunnen vergelijkingen meer oplossingen hebben.
Dat zijn precies de situaties waar het interessant is er een grafiek bij te hebben. Die is dan voor het overzicht, de meer rekengerichte methodes zoeken de details uit. Zo kunnen we kiezen op grond van de grafiek waar we naar de oplossing van:

$$10 + x = \tan(x)$$

zoeken met de inklemmethode.
In de sterk aan realistische contexten verbonden gevallen zal het trouwens zelden voorkomen dat we functies als $10t^2$ en t^3 voor negatieve waarden van t moeten beschouwen.

Ook het verschijnsel 'ongelijkheden' benaderen we liever via grafieken dan via rekenwerk. Het rekenen is slechts voor bepaling van grenzen, niet om te kiezen aan welke kant van de grens we moeten zijn; daarin is de grafiek veel duidelijker.
Gesteld is dat we, aansluitend bij de uitgangspunten, kiezen voor methoden die in zekere zin algemeen zijn en dat we niet gebruik maken van technieken die slechts bij één type formule passen.

Om dit te illustreren geven we twee (klassieke) voorbeelden waarbij het oplossingsproces via zo'n specialistische stap in de eerste fase van het proces verloopt.

Voorbeeld 1

Los op:	$x^2 + 4x - 8 = 0.$
Oplossing:	Kwadraat afsplitsen:
	$x^2 + 4x + 4 - 12 = 0$
	$(x + 2)^2 - 12 = 0$

Tot zover de specialistische techniek.
De rest is: bordjesmethode, of pijlenmethode.

Voorbeeld 2 (Vroeger vwo of havo)

Los op:	$3 \sin x + 4 \cos x = 1$
Dat ging zó:	Zoek a, zodat $\cos a = 3/5$,
dan is	$\sin a = 4/5$.
dus	$5(\cos a \cdot \sin x + \sin a \cdot \cos x) = 1$
oftewel	$5 \sin(a + x) = 1$

Bij deze specialistische methoden gaat het vervolgens verder met de bordjes- of pijlenmethode.
Te snel beginnen met zulke specialistische gevallen maakt de essentiële stappen in het proces van terugzoeken en vergelijkingen oplossen niet duidelijk voor leerlingen; de moeilijke manipulaties (bijvoorbeeld kwadraat afsplitsen) vragen dan relatief te veel aandacht. Vandaar dat we wegen hebben gezocht om de algemene technieken meer naar voren te halen en ruimer toe te passen.

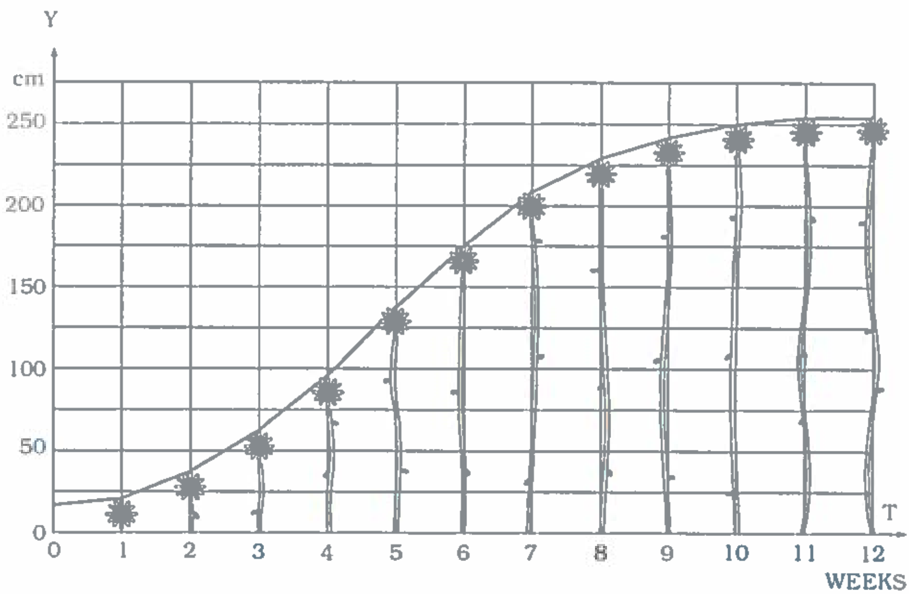
Merk op dat in beide voorbeelden de variabele aanvankelijk op meerdere plaatsen voorkomt. De expressie wordt zo gemanipuleerd dat de variabele daarna nog op slechts één plaats voorkomt, waarna het probleem rijp is om opgelost te worden volgens de pijlen- of de bordjesmethode. Dit manipuleren lukt echter slechts in een beperkt aantal gevallen en voor ieder geval moet een andere methode worden aangeleerd.

Grootte-orde en groei

Uit het verkennen van welke formules veel gebruikt werden, komen drie typen sterk naar voren:

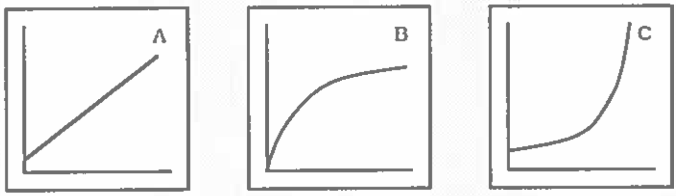
- lineaire, van de vorm $ax + b$
- machten, van de vorm ax^b
- exponentiële, van de vorm $a \cdot b^x$

(x is steeds de lopende variabele, a en b zijn getallen.)
We gaan nu in op de specifieke eigenschappen van dit soort formules die van belang zijn in situaties waarin deze formules voorkomen. We bekijken vooral het groeigedrag bij deze formules: op welke manier neemt de waarde toe of af als de variabele loopt. Het ligt voor de hand in eerste instantie te werken met biologische groei als context.
In het experimentele materiaal (klas 3) wordt gestart met deze illustratie (voorafgegaan door een korte warming-up):



Een grafische voorstelling van groei van een zonnebloem; de tijd stapt voort in weken. De zonnebloem wordt onmiddellijk gevolgd door een indeling van soorten groeigedrag.

>> Dit zijn drie groeiplaatjes:

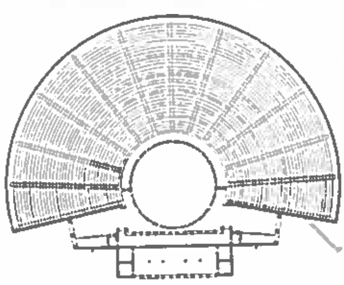


In A is sprake van gelijkmatige groei.
In B van zwakker wordende groei.
In C van sterker wordende groei.
Waar vind je A, B en C terug in de zonnebloemgrafiek?

Zwakker wordende groei, dat is een kwalitatieve beschrijving. De kwalitatieve beschrijving gaat vooraf aan het formeel werken met groeiformules.

Als eerste komt nu gelijkmatige groei aan de beurt. Groei is vaak maar één manier van een situatie beschrijven; hier is een geval waarin de tijd al 2500 jaar stilstaat. Maar door ons oog van rij naar rij te verplaatsen, zien we 'groeiende' aantallen plaatsen.

Openluchttheater


De plattegrond van het Griekse theater

8> Dit openluchttheater staat in het Griekse Epidauros. Het onderste gedeelte bestaat uit 12 vakken met plaatsen voor toeschouwers. In ieder vak zijn er 33 rijen. Op de eerste rij kunnen 4 mensen zitten op de vierde rij 5 enzovoort. Het aantal plaatsen per 3 rijen neemt gelijkmatig toe.

a Hoeveel plaatsen zijn er op de 28 rij?

Groei is een ondersteunende context voor de overgang tussen het stap voor stap bekijken van een verband en kijken naar het geheel voor zo'n verband.
Naast groei die ontstaat doordat bij elke vaste stap in de tijd een vaste hoeveelheid wordt toegevoegd, is er groei waarbij bij elke vaste stap in de tijd met een vaste factor wordt vermenigvuldigd. Denk aan groei van de wereldbevolking (een factor 1.03 ieder jaar), denk aan samengesteld interest (ieder jaar met bijvoorbeeld 1.06 vermenigvuldigen), denk aan de getalrij 1, 2, 4, 8, 16, ... (factor 2).
Ook bij deze vorm van groei is er de blikwisseling van het stap voor stap kijken:

	0	1	
	1	2	
steeds + 1	2	4	steeds • 2
	3	8	
	4	16	

naar de formule: 2^n.

Het merkwaardige hier is dat we wel een formule hebben voor de situatie, maar dat we bij menselijk uitrekenen toch vaak op het herhaalproces terugvallen.

$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$

Alsof je bij vermenigvuldigen terugvalt op herhaald optellen.
Afname met vaste factor komt ook veel voor. De factor is dan kleiner dan 1. Bekend is het voorbeeld van radioactief verval, zoals toegepast bij ouderdomsbepaling met behulp van de C_{14} methode.

Groei, exponentiële groei, nodigt uit om met machtsnotaties te werken. Ook de regels over machten vermenigvuldigen worden in deze context vanzelfsprekend gebruikt.
Het belangrijkste grootte-orde aspect van exponentiële groei is, dat het hard gaat als de factor groter dan 1 is. Het is jammer als dat aspect niet in een paar situaties spectaculair aan bod komt.
Er zijn voorbeelden genoeg:

- Kettingbrieven, waarbij iedere aangeschrevene aan twee anderen moet schrijven.
- Tel je voorouders, honderd generaties terug.
- Voortplanting van kroos, insecten, mensen, enzovoort.
- Als klassieker: het bekende verhaal van de graankorrels op het schaakbord.

Subtieler wordt het als we $1000 \cdot 2^n$ en 3^n vergelijken.
Dat is twee verschillende groeiprocessen naast elkaar laten lopen, waarvan het een met groter begingetal, maar met kleinere factor dan het andere. De grootte van de factor beslist.

Het vergelijken van lineaire groei en exponentiële groei moet ook aan de orde komen. Voorspellingen die ten onrechte lineaire groei gebruiken, lopen dramatisch verkeerd. Gewone rente en rente op rente, het maakt veel uit, op den duur.

Dit soort vergelijken van groeisnelheid gebeurt getalsmatig. Het vergelijken op formeel niveau van $1000 \cdot 2^n$ en 3^n door delen:

$(3/2)^n/1000$

gaat in dit leerplan te ver.

De machtsverbanden als groei hebben we tot nu toe overgeslagen, omdat ze vaak op een andere manier functioneren.

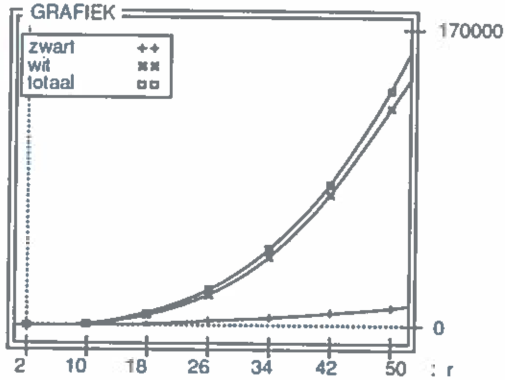
Een voorbeeld van vergelijken van groeiende machten ontmoetten we al eerder, bij de witte en zwarte blokjes. De zwarte, dat was de buitenkant van de bouwsels, de witte de binnenkant. Al snel blijkt dat wit veel sneller toeneemt dan zwart. In wit zitten drie factoren rangnummer en in zwart maar twee.
Dat is het belangrijkste bij machten vergelijken: die met de hoogste macht wint.

De bekendste toepassing is de omtrek-oppervlakte-inhoud relatie bij groei. De inhoud wordt bij verdubbeling (in lengte) acht keer zo groot, de oppervlakte vier keer zo groot.

Biologische toepassingen zijn:
- Voor baby's is het veel gevaarlijker dan voor volwassenen in te hete of te koude ruimtes te zijn. De opwarming gaat via het oppervlak en dat is groter ten opzichte van de inhoud van het lichaam dan bij volwassenen.
- Gewervelde dieren kunnen niet extreem worden uitvergroot: het gewicht groeit inhoudsgewijs, de botsterkte slechts oppervlaktegewijs.

Weer geldt dat deze groeiverschijnselen numeriek aan de orde komen, maar niet vaak formeel.

Interessant zijn formules die uit twee ongelijk groeiende componenten bestaan. De snelst groeiende component is op den duur de baas. Bij het witte en zwarte blokkenvoorbeeld ligt het voor de hand naar het totaal te kijken.



16	400	1296	2704	4624	7056	10000	: zwart
8	1000	5832	17576	39304	74088	125000	: wit
24	1400	7128	20280	43928	81144	135000	: totaal

In de grafiek van het geheel, hier op een computerscherm door leerlingen gemaakt, is mooi vast te stellen dat 'totaal' haast niet van 'wit' verschilt. Omdat die zwarte zo klein is, aldus een leerling, terwijl voor zwart al 10000 op het scherm staat. (Zie ook het voorbeeld stopafstand in hoofdstuk 3).

INHOUDEN OP VOLGORDE

Inleiding

Bij het onderzoek van verbanden in een situatie is meestal de eerste stap het op een rijtje zetten van gegevens. Het gaat dan om vragen als: wat is aan verandering onderhevig, en welke zaken veranderen er samen? Of: welke getalsmatige gegevens zijn er en hoe zijn die te ordenen? Of: hoe kunnen de gegevens in beeld gebracht worden? Er ontstaan dan voorstellingsvormen van het verband in de vorm van (omgangs)taal, tabellen, grafieken, of (vaak op basis van de andere voorstellingsvormen) formules.
Een logisch vervolg op die eerste stap is dan het zoeken naar structuren in die verbanden. Soms is het mogelijk een verband te herkennen als bijvoorbeeld een lineair verband of een exponentieel verband. Soms gaat het om een combinatie van bekende verbanden, waarbij een grafiek aanknopingspunten biedt voor verder onderzoek of voor het trekken van conclusies.
Tenslotte leiden de gevonden uitspraken over verbanden tot conclusies ten aanzien van de vraagstelling waarmee begonnen was. Het is echter lang niet altijd zo, dat deze derde stap pas aan het eind wordt ingezet. Er is een sterke verwevenheid met de eerste twee. Daarom kunnen we ook beter spreken over drie aspecten in het zoeken naar structuren en het vinden van oplossingen voor problemen:
1 het zichtbaar maken van essentiële aspecten in de situatie;
2 het opsporen en herkennen van verbanden;
3 het oplossen van problemen, eventueel met behulp van aangeleerde technieken.
Dit proces wordt vaak helemaal doorlopen als het om een nieuw onderwerp gaat. Op andere momenten komen soms maar één of twee aspecten aan de orde.

In veel situaties gaat het om verbanden tussen bepaalde grootheden. Deze grootheden kunnen dan als variabelen worden opgevat. Deze variabelen spelen vervolgens een grote rol in de beschrijving van het verband met één of meer van de voorstellingsvormen.

Als een verband eenmaal beschreven is door een voorstellingsvorm, ligt een oplossing van het achterliggende probleem soms voor de hand, maar vaak is er meer voor nodig. Dan komen er technieken en methoden aan te pas, die meer vaardigheden vragen van de leerlingen, en die meer kennis en inzicht vereisen.

In de loop van het leerproces zullen de leerlingen de beschikking krijgen over steeds meer en steeds ingewikkelder technieken om aan de orde gestelde problemen op te lossen.
De gereedschapskist voor het onderzoeken van verbanden bevat daarmee instrumenten die zijn te verdelen in twee groepen: variabelen en taal, tabellen, grafieken en formules enerzijds en de methoden en technieken anderzijds.

In de volgende paragrafen wordt het hele programma vier keer doorlopen, maar iedere keer wordt een ander aspect beschreven. Allereerst laten wij zien hoe de leerlingen kennis maken met de beschrijvingsvormen en hun samenhang en hoe ze die leren gebruiken. Daarna wordt de blik gericht op de manier waarop de variabelen in het nieuwe leerplan functioneren. Vervolgens tonen wij hoe het leren opsporen en herkennen van verbanden is verweven met het leren gebruiken van variabelen en de voorstellingsvormen. Daarna volgt de opbouw van methoden en technieken in het leerplan. Dit hoofdstuk wordt afgesloten met een aantal opmerkingen over de verschillen tussen de diverse trajecten.

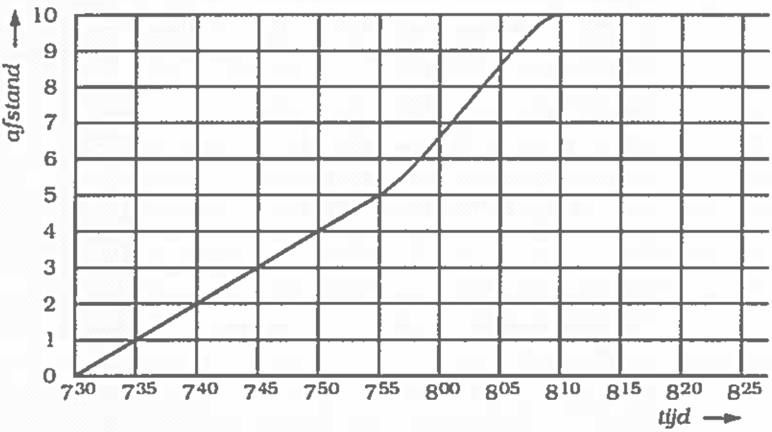
De voorstellingsvormen en hun samenhang

Klas 1

In de eerste klas wordt het kijken naar globale aspecten in grafieken geïntroduceerd. De grafiek is een uitstekend middel om over globale aspecten van verbanden te praten. We bedoelen daarmee aspecten als (sterker of zwakker) stijgen, constant zijn, periodiek zijn, etcetera. Ze spelen een belangrijke rol in het onderzoeken van verbanden.

In het volgende voorbeeld zijn de leerlingen al een poosje bezig met de fietsroute van Youri en andere scholieren van Losser naar Enschede.

Hier zien jullie Youri's grafiek opnieuw.



a. Sanne vertrekt gelijk met Youri uit Losser. Na 20 minuten ligt ze precies een kilometer achter op Youri. Ze komt 5 minuten later dan Youri op school aan.
Hoe kun je zeker weten dat Sanne onderweg *niet* steeds met dezelfde snelheid heeft gefietst?

Schets de grafiek van Sanne in hetzelfde rooster.

b. Jullie hebben allemaal een grafiek van Sanne geschetst. Zijn die alle *precies* hetzelfde? Moet dat zo zijn?
Wat moet bij alle grafieken hetzelfde zijn?

c. Robert gaat 5 minuten later dan Youri uit Losser weg en komt 5 minuten eerder op school aan.
Hoe kun je zeker weten dat Robert Youri heeft ingehaald?

d. Teken Robert's grafiek, ook in hetzelfde rooster, als je weet dat hij met een *constante* snelheid heeft gefietst.
Moet Robert's grafiek bij jullie allemaal precies hetzelfde zijn? Waarom?

Als jullie het goed getekend hebben, dan 'ontmoeten' de grafieken van Youri en Robert elkaar.
Meestal wordt dat zo gezegd:"*De grafieken snijden elkaar*".

In het voorbeeld gaan bij het redeneren over het verband lokale en globale aspecten steeds samen op. In klas 1 gebeurt dit redeneren vrijwel geheel in de omgangstaal, wat ook uit dit voorbeeld blijkt.

Om lokaal te kunnen kijken worden getallen langs de assen geplaatst. Door middel van die getallen wordt het ook mogelijk om bij getalsmatige informatie een grafiek te maken. Dat kan vanuit een tabel zijn, maar ook via informatie als die over de fietstocht van Sanne in het voorbeeld. Ook dan blijven globale aspecten (zoals veranderende snelheid) steeds aan de orde komen.

Diverse achterliggende abstracte wiskundige begrippen, zoals hier het niet of wel lineair zijn, worden steeds in termen van de situatie aangeboden. Het voordeel is dat, wanneer zulke begrippen later meer abstract worden behandeld, er verwezen kan worden naar situaties die dicht bij de leerling staan en waarmee ze redelijk vertrouwd zijn[1].

In klas 1 wordt een begin gemaakt met de opbouw van het formulebegrip. De leerlingen onderzoeken de structuur van lange rekensommen door ze te vergelijken met sommen, waar een reeks van rekenstappen achter elkaar wordt doorgerekend, eventueel met behulp van een computer of een rekenmachine.

9> Doe nu op de computer eerst de lange som:
$3 \cdot 7 - 5 \cdot 2$ ....
en daarna de kettingsom:

$3 \xrightarrow{\cdot 7} \ldots \xrightarrow{-5} \ldots \xrightarrow{\cdot 2} \ldots$

Komt er wel hetzelfde uit? Hoe zit dat nou?

Het verschil in de manier waarop de lange som en de kettingsom worden uitgerekend, nodigt sterk uit om een kring te zetten rond de delen die in de lange som het eerst worden berekend.

12> Hier je in dezelfde lange som een kring om een stuk van de som.

3 x 7 - 5 x 2 + 8

$\boxed{21}$

Dat is kring 1. Waarom staat er 21 op het kaartje dat aan de kring zit?

13> Teken nu zelf kring 2 om het stuk dat na kring 1 werd uitgerekend. Hang er ook een kaartje aan.

14> Kring 3 is de volgende. Waarom moet die om kring 1 en kring 2 heen?

Formules vallen blijkbaar uiteen in kleinere brokken bij de plussen en de minnen. Een manier van kijken die beter past bij het kijken naar de structuur dan de bekende voorrangsregel Meneer Van Dalen Wacht Op Antwoord, die in feite alleen een procedure voor de volgorde van rekenen aanreikt.

Even terzijde: één kring in plaats van twee haakjes heeft als didactisch voordeel dat het betreffende deel van de som overzien kan worden als één samenhangend geheel. Van kringen haakjes maken is niet moeilijk, je wist boven en onderkant later gewoon weg.

Sommige getallen zijn zo groot dat ze voor het gemak een naam krijgen. En dan blijkt wel eens dat er helemaal niet zoveel te rekenen valt:

30> Stel je voor: iedereen in de klas leert z'n computer wat *apekop* is.
Kruis hier aan uit welke sommen iedereen dan toch dezelfde uitkomst krijgt.
apekop   3
apekop - apekop +89
7 apekop - apekop - 6   apekop -134
apekop / apekop

Vaak bestaat er tussen de kolommen van een tabel een rekenkundig verband. De leerlingen leren de rekenstappen onder woorden brengen die nodig zijn om met getallen uit de ene kolom de bijbehorende getallen uit de andere kolom te berekenen. Deze rekenstappen worden vastgelegd in formules. De formule is hier vooral een handige afkorting om een steeds terugkerende berekening weer te geven.

Klas 2

De ontwikkeling van het formulebegrip gaat verder in de tweede klas. De leerlingen werken bijvoorbeeld aan het verband tussen de afgelegde afstand en het aantal trapperrondes dat ze op hun fiets maken. De rekenstap die gemaakt moet worden om uit de ene variabele de andere te berekenen, hebben zij vanuit de meetgegevens en een tabel bepaald en vastgelegd in een formule:

trapperrondes x 3,7 = *afstand*.

Het voorbeeld laat zien hoe de grafiek betrokken wordt bij het redeneren over het achterliggende verband.

13 a Teken in het plaatje hieronder de grafiek die hoort bij Jaap zijn fiets.
b Zal jouw fietsgrafiek steiler lopen, of minder steil dan die van Jaap?
c Hoe kun je dat zien aan de tabellen?
d Teken ook de grafiek van jouw fiets , in hetzelfde plaatje.
e Bij vraag 12c heb je verteld welke regelmaten in de tabellen zitten.
Hoe vind je die regelmaten terug in de grafieken?

14 a Wie heeft de minste trapperrondes nodig om een 20 meter lange helling op te komen, jij of Jaap?
b Hoe zie je dat aan de grafiek?
c Wie moet dan het zwaarst trappen?

15 Karin is vier jaar en heeft een kinderfiets.
Teken Karin's grafiek, zoals jij denkt dat die ongeveer zal zijn.

16 a Kun je je een fiets voorstellen, waarvan de grafiek over de horizontale as loopt?
b En hoe zit het met een grafiek, die samenvalt met de verticale as?

Met dit soort activiteiten wordt een verbinding gelegd tussen situaties en de daarmee samenhangende tabellen, rekenstappen en formules. Het gebruik van de grafiek helpt om, los van het rekenen, over het verband tussen de variabelen te leren redeneren. Dit wordt bijvoorbeeld door de vraag over het vergelijken van de regelmaat in tabel en grafiek gestimuleerd.

Met deze kennis in het achterhoofd wordt een start gemaakt met het complexer maken van de verbanden. De eerste stap hierin is het uitvoeren van meerdere rekenstappen achter elkaar.
(Voorafgaande aan het volgende voorbeeld is een rekenregel besproken voor de overgang van °C naar °F.)

5 a Iemand anders heeft ook een regel voor de berekeningen. Die is verstopt in de tabel. Welke machientjes gebruikt hij? Zet je antwoord boven de pijlen in de tabel.

b Is ook de tweede regel goed? Waarom denk je dat?

6 a Loop eens langs de getallen van de eerste kolom, van boven naar beneden. Welke regelmaat zit er in die kolom?

b Zoek ook de regelmatigheden in de volgende kolommen.

°C ... ... °F

60	100	20	180	140
50	90	18	162	122
40	80	16	144	104
30	70	14	126	86
20	60	12	100	68

7 a In een rekenboek voor de opleiding voor verpleegkundigen staat ook een regel:
"Moeten we nu omrekenen van C naar F, dan zullen we eerst het aantal graden C moeten vermenigvuldigen met 9 en daarna delen door 5. Daarna moeten we er 32 bij optellen".
Beschrijf deze berekening met machientjes.

b In het boek wordt de regel samengevat met een formule. Wat zou daar kunnen staan?

c Geeft deze regel hetzelfde resultaat als de andere twee regels? Verklaar je antwoord.

Schrijf je nu de rekenstappen in formuletaal achter elkaar op, dan staat er niet wat bedoeld wordt. De juiste structuur aangeven met behulp van haakjes is iets wat de leerlingen nu zonder meer moeten kunnen. Efficiëntie wordt nog niet nagestreefd: beter een paar haakjes teveel, dan een paar te weinig.
De samenhang tussen de voorstellingsvormen en in het bijzonder tussen grafiek en formule, wordt verder ontwikkeld bij de bestudering van een aantal typen verbanden.

19 Bij beide verbanden geldt: als de ene variabele groter wordt, dan wordt de andere kleiner.

a Hoe zie je dat terug aan de grafieken?

b Waarom moet in de formule ***lengte x breedte* = 360** de breedte wel kleiner worden als je de lengte groter maakt?

c Geldt de redenering ook bij ***hartslag* x *levensverwachting* = 1500**?

In het voorbeeld hierboven moeten de leerlingen uit de formule de informatie halen over de manier waarop de variabelen zich ten opzichte van elkaar gedragen. Dit wordt ondersteund door inzicht in het rekenen én kennis van de andere voorstellingsvormen, waar al vaker over het gedrag van de variabelen ten opzichte van elkaar is geredeneerd. Daarbij gaat het vooral om globale informatie zoals: aan de formule kun je zien dat de grafiek stijgt, en of die recht of krom loopt. Daarmee is er voor het gebruik van de formule als beschrijver van een verband in de tweede helft van klas 2 veel aandacht.

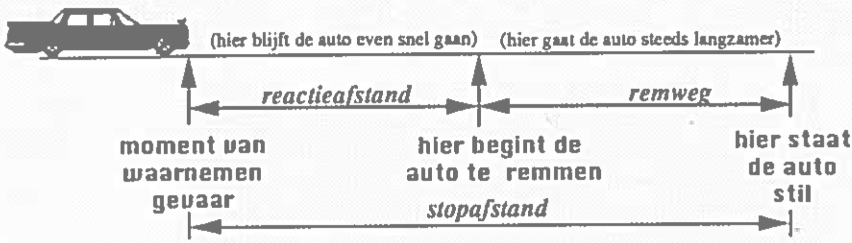
Klas 3 en 4

Redeneringen in één voorstellingsvorm vertalen naar redeneringen in andere voorstellingsvormen gebeurt gedurende het hele programma. In klas 1 en 2 is dit doel op zich. In klas 3 en 4 gebruiken leerlingen deze zaken.
Er zijn drie grote gebieden te onderscheiden waar de voorstellingsvormen in hun samenhang worden gebruikt:
- bewerkingen met de voorstellingsvormen;
- ontwikkelen van diverse technieken op basis van samenhang;
- groei.

Bewerkingen met de voorstellingsvormen

De volgende activiteiten komen aan de orde: 'schuiven en oprekken', 'in- en uitzoomen' en 'optellen en aftrekken'. De verbondenheid van situatie, tabel, grafiek en formule wordt goed geïllustreerd door de volgende opgaven.

Als een auto plotseling moet stoppen, dan let je niet alleen op de remweg of op de reactieafstand, maar houd je rekening met beiden.



30. a. Geef aan hoe de stopafstand, de remweg en de reactieafstand samenhangen: ***stopafstand*** **= .... + ...**

b. Voeg aan de tabel een rij voor stopafstand toe:

snelheid in km/h	20	40	50	60	80	100	120
reactieafstand in m		8,9					
remwegkort in m		12					
stopafstand in m		20,9					

c. Vul met behulp van de formule voor stopafstand de tabel verder in.

d. Bij een dichte mist is het zicht 50 meter. Welke snelheid kun je dan maximaal rijden?

31. Op werkblad 6 staan de grafieken die passen bij ***remwegkort*** en ***reactieafstand***.

a. Teken de grafiek voor ***stopafstand*** erbij.

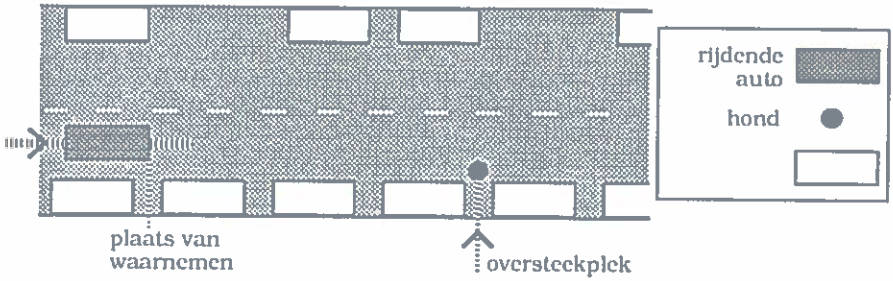
b. Geef in de tekening aan hoe je de reeds getekende grafieken gebruikt om de derde te tekenen.

Het is in iedere voorstellingsvorm steeds evident, dat er twee stukken worden opgeteld. Deze evidentie ondersteunt later de substitutie van de formules voor reactieafstand en remweg. Uit de uiteindelijke formule blijkt dan dat de stopafstand afhankelijk is van de snelheid waarmee wordt gereden:

$$\textit{stopafstand} = \frac{\textit{snelheid}}{3{,}6} \cdot 0{,}8 + \left(\frac{\textit{snelheid}}{100}\right)^2 \cdot 0{,}75$$

Noodstop

Een auto rijdt door een woonwijk. De chauffeur rijdt niet te hard, zo'n 30 km/h. Plotseling steekt een hond de straat over! Hieronder is, van bovenaf gezien, de situatie getekend.



34. a. Schat hoever de auto verwijderd is van de hond, op het moment dat de chauffeur de hond ziet.
 b. Bereken met de formule voor de stopafstand of hier sprake is van een onveilige situatie.
 c. Vanaf welke snelheid wordt de situatie onveilig?
 d. Geef de reactieafstand, remweg en stopafstand in de situatieschets met pijlen aan.

35.a. Bereken of dit een onveilige situatie is als de chauffeur flink alcohol heeft gebruikt. (Neem voor de reactietijd 2 seconde.)
 b. Geef opnieuw in de situatieschets de reactieafstand, de remweg en de stopafstand aan.
 c. Hoe onveilig wordt de situatie bij natte weg en gladde banden? (neem voor berekening van de remweg de formule voor *remweglang*.

Veranderingen in de situatie worden in de formule verwerkt door de parameters aan te passen. In het laatste voorbeeld worden alleen situatie en formule gegeven. Door de voorbereiding kunnen de leerlingen, indien zij daar behoefte aan hebben, wel teruggrijpen op de tabel en de grafiek.

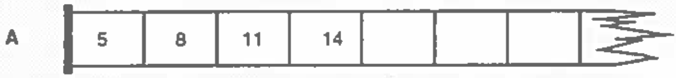
Ontwikkelen van diverse technieken op basis van samenhang

Dit onderwerp wordt besproken in de paragraaf over methoden en technieken.

Groei

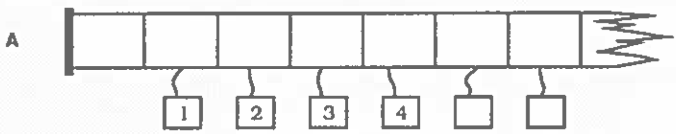
Over het groeitype is vaak een uitspraak te doen op basis van globale informatie, die bijvoorbeeld uit een grafiek af is te lezen. Voor nadere specificatie van het groeitype en het vaststellen van de achterliggende formule is regelmaat in de tabel nodig.

8. Van de aantallen plaatsen per rij in het theater kun je een grafiek tekenen. Maar die gegevens zijn ook anders te verwerken: door de getallen op een strook te zetten. Je kunt dan bekijken hoe die getallen groeien. Kijk maar eens naar strook A:



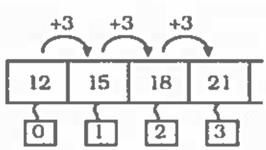
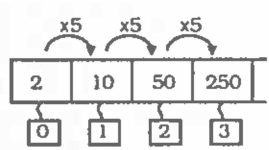
a De getallen groeien gelijkmatig. Schrijf de volgende drie getallen op.
b Bij één stap naar rechts hoort een **verschil** van drie.
Bij vijf stappen naar rechts hoort een verschil van ..... (Vul in).
Maakt het uit waar je begint?
c Stel je voor dat de strook naar rechts toe heel lang doorloopt. Zou je het getal 100 tegenkomen op de strook? En het getal 500?

9. a Achmed bedenkt een formule bij strook A: **5 + 3x*n***. Het getal 5 in de formule is het *begingetal*. Wat is de betekenis van het getal 3? En van *n*?
b Achmed heeft bordjes gehangen aan strook A



Wat zou hij met die bordjes willen aangeven?

De strook met groeiende getallen richt de blik van de leerlingen op verschillen tussen de stappen. De verdwenen onafhankelijke variabele haalt Achmed terug door een rangnummer in te voeren.
De gelijkmatige groei in de strook wordt getypeerd door het begingetal en het verschil.

gelijkmatige groei	exponentiële groei
	
12 heet het begingetal	2 heet het begingetal
de bordjes geven het stapnummer aan	de bordjes geven het stapnummer aan
Bij elke volgende stap wordt er een vast getal opgeteld	Bij elke volgende stap wordt er met een vast getal vermenigvuldigd
het vaste getal heet verschil	het vaste getal heet groeifactor
een **formule** voor de hoeveelheid bij n^e stap is: begingetal + *n* x verschil	een **formule** voor de hoeveelheid bij n^e stap is: begingetal x (groeifactor)^n

Exponentiële groei wordt op eenzelfde wijze in formuletaal onder woorden gebracht. Ook hier blijken kenmerken in de tabel tot kenmerken van de formule te leiden. Daarbij valt nog op te merken dat het zoeken naar een regelmatige toename in de tabel rekentechnisch een gemakkelijker manier is om exponentiële groei te ontdekken dan het zoeken naar rekenstappen tussen de twee kolommen in een tabel die exponentiële groei representeert.

Bewegende variabelen

Een van de kenmerken van variabelen is dat ze variëren. Vanaf het begin komt dit kenmerk nadrukkelijk aan bod. In de aangeboden situaties is steeds duidelijk dat de variabelen bewegen. Tijd is een voorbeeld van zo'n variabele; de tijd schrijdt onontkoombaar voort.
In het begin speelt de tijd een prominente rol als één van de variabelen in een verband (en dan steeds als de onafhankelijke variabele). De tijd schrijdt niet alleen onontkoombaar, maar ook regelmatig en continu voort. Daardoor hoeven de leerlingen in het begin slechts één variabele in de gaten te houden; die tijd loopt wel verder. Het lopend karakter van variabelen komt goed tot uitdrukking in globale grafieken, die in klas 1 uitgebreid aan de orde komen. Maar ook op andere manieren kan de dynamiek worden ingebracht, zoals bij deze opgave:

3> Welke regelmaat zie je op de stroken?
Vertel dat in woorden.

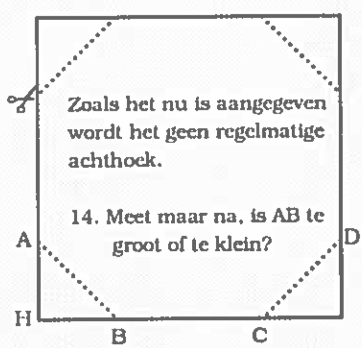
4> De stroken zijn zó neergelegd, dat getallen van verschillende stroken naast elkaar staan.
Door het venster kun je dat zien.
Het venster schuift naar beneden. Op strook A zie je het getal 258:

a Welke getallen staan daarnaast, onder de stippen?
b Hoe ben je aan die getallen gekomen?

De opgave past in de opbouw van het formulebegrip. De verschuivingen naar de uithoeken van de stroken stimuleren de leerlingen tot het formuleren van rekenstappen en later tot het opstellen van formules.

Met een dergelijke opbouw willen wij onder andere bereiken dat leerlingen bij formules steeds kunnen denken in termen van bewegende variabelen. In het voorbeeld is de naam die de leerling aan de variabelen geeft meestal de naam van de strook.

Door de beweging komt ook het totaal van de strook in zicht. Daarna wordt er naar specifieke getallen op de stroken gekeken. Daarmee is een algemene keuze verwoord: eerst variabelen laten bewegen en daarna pas vastzetten op een bepaalde waarde.
In een grafiek is het verloop tussen de variabelen ten opzichte van elkaar goed zichtbaar te maken. Die kennis wordt daarom eerst opgeroepen voordat met de formule wordt geredeneerd. Zo krijgt het kwalitatief rekenen met formules een onderbouwing vanuit de andere voorstellingsvormen.
Tot zover gaat het om het opbouwen van het variabele en het formulebegrip, dat voornamelijk in klas 1 en 2 plaats vindt. In klas 3 en 4 komen de bewegende variabelen terug in het ontwikkelen van allerlei technieken bijvoorbeeld bij het oplossen van vergelijkingen. Daarover gaat het volgende voorbeeld.
In een opdracht moeten de leerlingen uit een vierkant van 16 bij 16 cm een regelmatige achthoek maken door de punten er af te snijden.



15. Doe een betere poging. Geeft nieuwe lijnen AB en CD aan en meet weer. (AB en CD zijn wel gelijk in lengte!)

16. Met de methode van ergens ertussen en middenin kun je zorgen dat AB en CD precies gelijk worden.
Gebruik deze tabel om te zoeken.

HB	AB	BC	AB is:
4	5.7	8	te klein
..	..	..	..
..	..	..	..

De formulering van het probleem en van de aanpak maken van de lengtes van de diverse lijnstukjes lopende variabelen. De stap om de tabel te gebruiken als wiskundig hulpmiddel ligt daardoor voor de hand. De leerlingen kunnen zo aan vergelijkingen wennen en er mee werken, voordat zij allerlei wiskundige technieken moeten beheersen.
Samengevat: het denken in bewegende variabelen draagt in klas 3 en 4 bij aan:

- de mogelijkheid om allerlei vragen over verbanden te stellen, zonder dat je hoeft te wachten totdat bijbehorende technieken met formules zijn aangeleerd;

- het opbouwen van technieken binnen situaties en daarmee het betekenis geven aan die technieken;
- het behouden van de mogelijkheid voor leerlingen om bij formulemanipulaties met formules de redenering te controleren binnen andere voorstellingsvormen eventueel met een tabellen- en grafiekenprogramma op de computer.

Verbanden opsporen, herkennen en verwoorden

In de wereld om ons heen zijn zeer veel verbanden tussen variabelen te herkennen. Soms zijn ze zeer voor de hand liggend, soms zijn ze heel moeilijk vast te stellen. Het leerplan is niet zo open dat leerlingen zelf moeten vaststellen of er in een situatie sprake is van een verband tussen variabelen en zo ja, tussen welke variabelen dan. Bij iedere opgave worden de achterliggende verbanden wel in een of andere voorstellingsvorm gegeven. Het algebraleerplan concentreert zich vooral op het onderzoeken van globale en getalsmatige kenmerken van deze verbanden.
Wij beschrijven deze activiteiten hier in eerste instantie voor klas 1 en 2. In klas 3 en 4 is er een verschuiving naar het gebruiken van het geleerde uit de voorgaande klassen. Het herkennen van soorten groei komt in klas 3 en 4 expliciet aan de orde. In hoofdstuk 4 is uitgebreid beschreven hoe dit thema in klas 3 en 4 is uitgewerkt.
In klas 1 worden verbanden geïntroduceerd aan de hand van grafieken en situaties, maar ook aan de hand van rekenen en tabellen. De introductie van globale kenmerken en rekenaspecten gebeurt in de eerste klas naast elkaar met de bedoeling ze in klas 2 samen te voegen.

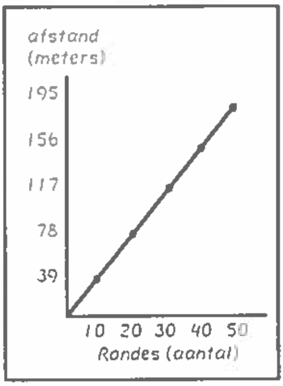
Situaties en grafieken

Zoals gezegd, de grafiek is een voorstellingsvorm waarin globale kenmerken van een verband goed tot uiting komen. Gebruik van de tijd als (onafhankelijke) variabele geeft leerlingen de mogelijkheid zich te concentreren op het verloop van de andere variabele. Het veelvuldig gebruik van de grafiek geeft een aanzet tot de ontwikkeling van een 'vaktaal' bij het beschrijven van de globale en lokale kenmerken naast de taal van de situatie. Denk hierbij aan stijgen, constant, periodiek, snijden,... in plaats van warmer worden, gelijkblijven, zich herhalen, inhalen,...

Rekenaspecten

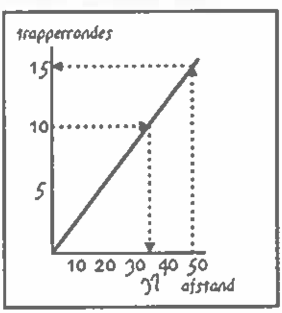
Regelmaat in tabellen en steeds op dezelfde manier rekenen geven ook aanleiding om in termen van variabelen en verbanden te gaan spreken. Het zien van de regelmatige ontwikkeling in een tabel als een verband tussen de kolommen is een cruciale activiteit in klas 1.

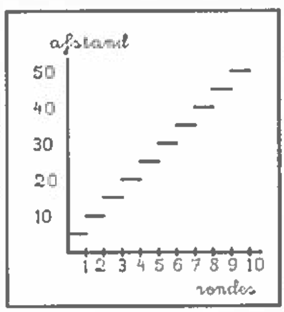
Het verwoorden van zo'n verband met behulp van rekenstappen is dan niet meer zo moeilijk. De vertaling van: 'Van kolom A naar kolom B is keer 4' naar 'A • 4 = B' verloopt op basis van die rekenkennis ook zonder dat zich grote problemen voordoen.
De twee gebieden uit de eerste klas worden in klas 2 samengevoegd tot een geheel.

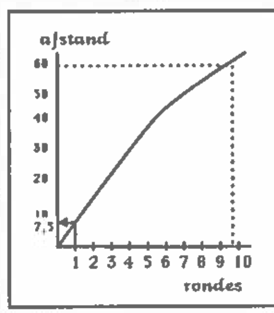


11 Behalve met een tabel of een formule kun je de resultaten van de metingen in beeld brengen door een grafiek te maken. Vier leerlingen hebben dat gedaan. Op de bladzijde hiernaast zie je hun grafieken. Beantwoord de eerste twee vragen voor iedere grafiek afzonderlijk.

a Hoeveel meter leggen ze af in 10 trapperrondes?
b Hoeveel trapperondes rijden ze op een afstand van 50 meter?
c Welke grafiek vind jij de beste?
d Geef de grafieken allemaal een cijfer en schrijf erbij waarom je dat cijfer hebt gegeven.
e Maak een lijstje van punten waarop je hebt gelet bij het beoordelen van de grafieken.







Bij de leerlingen is de neiging heel sterk om de grafieken te beoordelen op hun weergave van de rekenkundige informatie. Voor het kijken naar de globale kenmerken van het achterliggende verband is meer stimulans nodig. Het voorbeeld (uit hetzelfde lesmateriaal) in de paragraaf '*Bewegende variabelen*' geeft aan hoe dat kan: in vraag 14, 15 en 16 wordt expliciet gevraagd aan de hand van de globale kenmerken te redeneren. Het met elkaar in verband brengen van de gelijkmatige toename in een tabel en de rechte lijn als grafiek is lastig voor leerlingen en heeft duidelijk extra aandacht nodig.
Eén type verband springt er tot nu toe duidelijk uit, het lineaire. Allereerst leveren de rekenstappen die tot dusverre aan de orde zijn geweest (vermenigvuldigen, delen, optellen en aftrekken met een getal eventueel in combinatie met elkaar) steeds lineaire verbanden op.

Bovendien zijn veel verbanden uit het dagelijks leven lineair, met name verbanden die te maken hebben met bepaalde tarieven. Zo'n verband heeft dan de vorm: aantal maal prijs per eenheid plus een vast bedrag.
Het vast bedrag en de prijs per eenheid binnen de diverse voorstellingsvormen aangeven, het interpoleren, het extrapoleren en het vergelijken van tarieven worden in deze fase uitgebreid behandeld.

Naast het lineaire is er in klas 2 aandacht voor andere typen verbanden. Het omgekeerd evenredige en het kwadratische verband komen aan de orde. Daarbij gaat het niet zozeer om het benoemen van de specifieke eigenschappen, maar veel meer om het uit de formule aflezen hoe het verloop van de variabelen ten opzichte van elkaar is. De keuze voor omgekeerd evenredig en kwadratisch is daarbij niet alleen ingegeven door het feit dat het ook veelvoorkomende verbanden zijn, maar ook door het feit dat de samenhang tussen globale eigenschappen en de rekenkundig kenmerken binnen bereik van de leerlingen ligt. Samenstellingen van deze verbanden en verbanden waarbij de ene variabele de wortel uit de andere is, liggen hier nog op de grens.

Over de notaties kort het volgende. Wij gunnen de leerlingen veel vrijheid om eigen namen voor variabelen te kiezen. Dit is vooral van belang om betekenis te geven aan formules. Ook bij tabel en grafiek is het goed als door een passende naamgeving van de variabele de achterliggende situatie snel wordt opgeroepen. Pas in klas 3 wordt echt toegewerkt naar afkorten van namen tot letters. Sommige leerlingen zullen natuurlijk al eerder zo'n verkorting gebruiken.
Dit voorbeeld komt uit klas 3.

35. Kun jij je bij deze formules een kubus- een tegelpatroon, of een andere situatie voorstellen?

120 • r • r • r = w
6 • r • r • r • r = z

De betekenis van de variabele blijft impliciet. De leerlingen zijn echter inmiddels zo vertrouwd met dit type formules en redeneringen, dat de betekenis achterwege kan blijven. Daarmee geven wij de grens aan bij de abstractie van het variabelenbegrip in het CD-traject.

In het voorbeeld wordt de 'computer-•' gebruikt als vermenigvuldigteken. Een × kan hier ook worden gebruikt. Een ander voorbeeld is *r. r. r* of r^3 of r^3 voor het gebruik van machten. Leerlingen komen in hun schoolloopbaan en daarna, met zeer veel notaties in aanra-

king, daarom gebruiken wij diverse notaties naast elkaar. De gelijke betekenis van de diverse notaties, gekoppeld aan de plaats waar je ze tegen kunt komen, krijgt expliciet aandacht. Dit in de verwachting dat een beetje last nu, later een plaag voorkomt.
Notatie-afspraken zijn niet 'heilig', $0{,}75p^2$ en $p^2 \times 0{,}75$ zijn beide correct. In de loop van de jaren dient het noteren van expressies wel steeds efficiënter te worden, maar bijvoorbeeld steeds een vermenigvuldigteken gebruiken is nooit fout, zeker niet als het de structuur van een formule verheldert.

Methoden en technieken

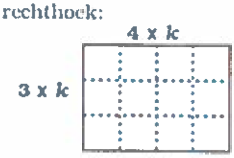
Bij het opsporen, herkennen en formuleren van verbanden en bij het oplossen van problemen komt een aantal technieken aan de orde die de leerlingen moeten aanleren. Het gebruik van zulke technieken is vaak verbonden met formulegebruik. In de tabel is direct getalsmatige informatie te vinden en uit de grafiek lees je direct informatie af over hoe de variabelen ten opzichte van elkaar veranderen. In klas 1 en 2 worden veel problemen binnen situaties opgelost met behulp van tabel en grafiek. Tegelijkertijd worden verbindingen gelegd naar de formule. Een aantal technieken in klas 1 en 2 zijn er op gericht om met behulp van de getalsmatige informatie formules op te stellen. Dit geheel staat beschreven in de paragraaf *'Bewegende variabelen'*.

De formule bevat alle informatie over het achterliggende verband die in een tabel en een grafiek te vinden is en nog meer. Om die informatie uit de formule te halen is kennis nodig en moet een aantal handelingen worden verricht. Dit gedeelte van het programma krijgt vooral vorm in klas 3 en 4. Daar wordt de formule meer en meer de basis waarmee de problemen worden aangepakt en krijgen de tabel en grafiek steeds meer een (essentiële maar) ondersteunende rol.

Ontwikkelen van technieken op basis van samenhang

Het volgende voorbeeld illustreert hoe de kennis rond samenhang van de voorstellingsvormen wordt gebruikt bij de ontwikkeling van technieken in klas 3 en 4.
De formules $4 \cdot k \cdot 3 \cdot k$ en $12 \cdot k \cdot k$ beschrijven beide de oppervlakte van de rechthoek en in de tabel hebben ze beide steeds dezelfde uitkomst. (Eventueel kan een computer met een grafiekenprogramma dit nog verder ondersteunen.)

23> Drie leerlingen maken de volgende formules bij de rechthoek:
leerling 1: **4 x *k* x 3 x *k***
leerling 2: **12 x *k* x *k***
leerling 3: ***k* x 12**



a Vul deze tabel in:

k	4 x *k* x 3 x *k*	12 x *k* x *k*	*k* x 12
0			
1			
4			
10			

b Welke formules zijn correct?
c Waarom krijg je bij de drie formules dezelfde uitkomsten als je voor *k* het getal 0 of 1 invult?
d Kun je in de tabel voor *k* ook negatieve getallen invullen?
e Welke formule kun je lezen als lengte x breedte?

24> Maak zelf nog een passende formule.

25> Een passende formule voor de oppervlakte van de rechthoek is **12 x k^2**.
Wat stelt de **12** in de tekening voor? En de k^2?

Op deze wijze hebben de leerlingen nu een stuk gereedschap in handen waarmee zij formele redeneringen over formules, in dit geval het gelijkwaardig zijn, kunnen controleren op grond van andere argumenten dan de formele regels voor formulemanipulatie. Bij de beoordeling van de correctheid ervan zijn zij daarmee minder afhankelijk van iemand anders (de docent) die wel inzicht heeft in het systeem en kunnen zij zich zekerder voelen bij hun eerste stappen in het gebied van formulemanipulatie. Met het laatste argument sluiten wij aan bij de opvattingen van B. Lagerwerf over niveaus van zekerheid[2], door bij formulemanipulatie de vertaling in de andere voorstellingsvormen de functie te geven van het verkrijgen van zekerheid op tussenniveau. De formules zijn in deze fase van het leerproces nog beschrijvers van verbanden tussen variabelen. Pas als voldoende zekerheid over de juistheid van het formele redeneren is verkregen, kan de formule als object worden bekeken en kan er inzichtelijk op formeel niveau worden geredeneerd. De leerlingen maken in het CD-traject op de beschreven wijze kennis met formeel redeneren over formules. Het uitbouwen hiervan tot routinematig handelen kan in vervolgopleidingen gebeuren, voor zover daar behoefte aan bestaat. De basis is echter gelegd.

Deze keuze is vooral ingegeven door de ervaringen dat training van formele handelingen met formules (het letterrekenen) in het voortgezet onderwijs bij veel leerlingen slechts een trucmatige routine oplevert, waar zij weinig aan blijken te hebben in andere situaties. Anderen gebruiken het later in hun leven nooit meer en vergeten het daarom snel.

Voor zover formulemanipulatie in klas 3 en 4 aan de orde komt, gaat het niet om beheersing van het letterrekenen als algebraïsch systeem met de daarin vastgelegde regels. Het gaat om het ontdekken dat bepaalde handelingen met formules, die ingegeven zijn door de achterliggende situatie, met formele regels zijn te beschrijven. Die formele regels stellen de leerling dan in staat om los van situaties over veranderingen in formules te redeneren.

De belangrijkste methoden en technieken zijn in de voorgaande hoofdstukken en paragrafen besproken. Hieronder staan ze nog een keer opgesomd, ruwweg in de volgorde waarin ze in het algebraprogramma voorkomen.

Klas 1

- Bij grafieken en tabellen in globale termen beschrijven wat het effect is van een verandering van de ene variabele op de andere variabele.
- Structuur in berekeningen aangeven met behulp van kringen of haakjes.
- In een tabel tussen de kolommen een rekenstap opsporen.
- Terugrekenen met behulp van de omgekeerde rekenstap.
- Bij een herhaald terugkerende serie berekeningen, een passende naam voor de variabele invoeren.
- Een rekenstap tussen variabelen weergeven met behulp van een formule.
- Terugzoeken met behulp van tabel en grafiek.

Klas 2

- Structuur in expressies aangeven met behulp van kringen of haakjes.
- In een tabel tussen de kolommen een reeks van rekenstappen opsporen.
- Een reeks van rekenstappen tussen variabelen weergeven met behulp van een formule.
- Een formule ontleden in meerdere rekenstappen.
- Terugzoeken met behulp van de omgekeerde rekenstappen.
- Substitutie van getallen in expressies.
- Vergelijken van twee verbanden met behulp van tabel en grafiek.
- (Woord)formules van de vorm $a + b = c$ en $a \times b = c$ omvormen tot $c - b = a$ en $c : b = a$.
- Bij formules in globale termen beschrijven wat het effect is van een verandering van de ene variabele op de andere.
- Berekeningen met negatieve getallen uitvoeren binnen gegeven situaties.

Klas 3 en 4

Bewerkingen op voorstellingsvormen:
- schuiven en oprekken in grafieken door middel van veranderingen in de parameters,
- in- en uitzoomen voor het verbinden van details met het geheel,
- som en verschil bij twee verbanden onderzoeken,
- bij een formule met meer variabelen toespitsen op het verband tussen twee van die variabelen.

Vergelijkingen:
- pijlenmethode, aansluitend bij het terugzoeken met behulp van omgekeerde rekenstappen,
- bordjesmethode, aansluitend bij het redeneren over de structuur van formules,
- inklem- inzoommethode, als algemeen toepasbare methode,
- verschilmethode, voortvloeiend uit het werken met som- en verschilformules,
- reductiemethode, als voorbeeld van een formele strategie.

Rekenen met negatieve getallen.

Groei en grootte-orde:
- twee verbanden vergelijken op orde van grootte,
- nagaan waar welke component in een formule op bepaalde gebieden de overhand heeft,
- in tabellen nagaan of er sprake is van lineaire, exponentiële of kwadratische groei,
- bij lineaire of exponentiële groei de erbij behorende formule opstellen.

Formele manipulatie:
- omvormen van algebraïsche expressies op basis van representaties en hun samenhang, zoals: $2(t + 3) = 2t + 6$,
- substitutie van expressies in expressies, voortvloeiend uit het werken met som- en verschilformules.

Verschillen tussen de trajecten

B-traject

De leerlingen gebruiken wiskundige middelen zoals ze die krijgen aangereikt. Zo is een formule vooral een ding dat je vertelt hoe je gemakkelijk iets uit kunt rekenen. Een formule kan vertaald worden in pijlentaal om daarna terug te kunnen rekenen. Omvormen van formules is niet aan de orde. Een grafiek levert informatie over een verband en je legt er informatie in vast, maar bewerkingen op grafieken komen nauwelijks voor.

Waar voor het CD-traject geldt, dat terugvertalen naar een achterliggende situatie altijd mogelijk blijft, geldt voor het B-traject dat alle

activiteiten van leerlingen verbonden blijven met de situatie waarin het oorspronkelijke probleem is gesteld.
De inhoud van het algebragedeelte van het B-traject is ruwweg te typeren als de inhoud van de eerste twee leerjaren van het CD-traject, waarbij een formeel onderwerp als redeneren met negatieve getallen alleen binnen situaties aan de orde komt. Toegevoegd zijn enkele onderwerpen zoals eenvoudige lineaire vergelijkingen. Voor de precieze inhoudskeuzen verwijzen wij naar het *Trajectenboek*.

HV-traject

In het HV-traject leren de leerlingen niet alleen de diverse wiskundige gereedschappen te gebruiken, reflectie op dit gebruik leidt tot redeneren over de achterliggende structuur. Zo is er in het HV-traject veel aandacht voor het gebruik van de structuur van formules bij het oplossen van vergelijkingen, en soortgelijke redeneringen. Dit leidt bijvoorbeeld tot de keuze om de bordjesmethode, om het in didactische termen te zeggen, veel aandacht te geven.

Het HV-traject moet er ook toe leiden dat redeneringen over formules los van een achterliggende situatie gemaakt worden. Een argument om redeneren over structuur meer aan de orde te laten komen is, dat de leerlingen aan het eind van het HV-traject een beeld moeten hebben van wiskunde B, dit ter onderbouwing van een verantwoorde keuze.
Een redenering die alle genoemde trekken in zich heeft is:

$(x-5)^4 + 6$ heeft als minimale waarde 6 voor $x = 5$, omdat $(x-5)^4$ nooit negatief wordt en voor $x = 5$ waarde 0 heeft.

Daarbij wordt afhankelijk van de deelredenering een bordje op $(x-5)^4$ en op $(x-5)$ gelegd. De redenering illustreert ook het gebruik van formelere taal en begrippen in dit traject.
In het HV-traject wordt het begrip functie expliciet gemaakt en gebruikt. Dit in tegenstelling tot het CD-traject, waar het functiebegrip impliciet blijft. Ook de begripsvorming rond getallen is uitgebreider dan in het CD-traject: zo moet $\sqrt{2}$ opgevat kunnen worden als een getal, in het CD-traject is het vooral een bewerking uit te voeren op het getal 2.
Als voor het oplossen van een probleem de formele technieken op de achtergrond blijven, blijft de situatietaal ook in HV-traject een legale wijze om de oplossingen en de oplossingsmethoden te presenteren.

Samenvatting

De instrumenten en ook de samenhang tussen de vier beschrijvingsvormen, spelen gedurende het hele leerproces een rol. Een belangrijke lijn daarin is het toewerken naar het zien van een verband als één geheel. Grafieken spelen daarbij een belangrijke rol, hetgeen al vanaf het begin tot uiting komt in de voortdurende aandacht voor globale aspecten van grafieken. Eén van de uitgangspunten uit hoofdstuk 2: 'in de eerste fase van het leerproces het accent op ontwikkelen en minder op stapelen' ligt hieraan ten grondslag.

De diverse methoden en technieken worden in de loop van het programma opgebouwd. In klas 1 vindt een eerste aanzet en oriëntatie plaats. De algebra in klas 2 en 3 wordt getypeerd door uitbreiding en oefening, de complexiteit van de aangeboden technieken neemt ook toe. De uitbouw en het inslijpen vindt plaats in de tweede helft van klas 3 en klas 4. Pas in klas 3 en 4 vindt een verschuiving plaats van ontwikkelen naar stapelen.

De methoden en technieken die aan de orde komen, zijn in het algemeen bruikbaar voor allerlei typen verbanden. Ze zullen breed inzetbaar moeten zijn. In klas 3 en 4 komen wel een paar technieken voor die worden toegepast op een beperkt aantal typen verbanden. Bijvoorbeeld de verschilmethode voor het oplossen van lineaire vergelijkingen en de reductiemethode bij het vergelijken van machtsverbanden. Zulke technieken zijn diepgaander in hun opbouw; ze bevatten een stapeling aan deeltechnieken. Op deze wijze hangt het uitgangspunt 'eerst breed bruikbare technieken aanleren voordat diepgaandere technieken aan de orde komen' ook weer samen met het uitgangspunt eerst opbouwen dan stapelen.

Het uitgangspunt, meer interpreteren dan manipuleren speelt hier ook een rol. Wanneer technieken aan de orde worden gesteld dan wordt vooral het daarmee kunnen interpreteren van het verband beoogd. Sommige technieken vereisen echter enige mate van manipuleren. Of er een grote verschuiving naar stapelen/verdiepen/manipuleren zal optreden hangt af van het traject (B, C, D, H, of V) dat een leerling volgt.

Noten

1 Zie voor de rol van verbanden in de eerste fase van het voortgezet onderwijs ook de publikatie: *Verbanden, grafieken, formules*, SLO, 1987.

2 Lagerwerf, B. (1983). Niveaus van zekerheid. *Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs* (Nieuwe Wiskrant) 3 (2). Utrecht: Vakgroep OW&OC.

ALGEBRA, ZAKREKENMACHINES EN COMPUTERS

Inleiding

Wat betreft zakrekenmachines en computers is de situatie in 1992 ongeveer zo:

- (Bijna) alle leerlingen hebben een zakrekenmachine en hebben die meestal wel bij zich in de schooltas.
- Alle scholen hebben een computerlokaal. Er zijn in het algemeen niet genoeg computers om voor elk tweetal leerlingen één computer te hebben.

In de beschrijving van het leerplan is daarbij aangesloten:

- Op diverse plaatsen wordt gebruik gemaakt van zakrekenmachines, het is niet verstandig het gebruik daarvan te vermijden.
- Op diverse plaatsen wordt de mogelijkheid aangegeven computers te gebruiken, maar het leerplan is er niet van afhankelijk.

Eén van de veranderingen in de schoolwiskunde ten opzichte van grofweg dertig jaar geleden is bijvoorbeeld het belang dat nu aan grafieken wordt gehecht. Waren vroeger grafieken alleen een eindprodukt (teken de grafiek van ...., met een bijkomende procedure), nu worden vaak kant-en-klare grafieken gebruikt als uitgangspunt van verder onderzoek. Deze veranderingen zijn te interpreteren als een stap in de richting van een toekomst, waarin computers ter grootte van een zakrekenmachine van nu, gebruikt kunnen worden om grafieken te maken.

In dit hoofdstuk gaan we meer in op de rol van de zakrekenmachine en de mogelijke rol van de computer. We doen dit door eerst wat mogelijkheden van de zakrekenmachine aan te stippen. Daarna laten we enkele mogelijkheden met de computer zien, waarbij software ter sprake komt die speciaal voor het W12-16 project is ontwikkeld. Veel activiteiten kunnen ook met andere software gerealiseerd worden; we laten echter een aantal zaken zien waar de ontwikkelde software nauw aansluit bij de eerder in deze publikatie beschreven uitgangspunten voor algebra in het W12-16 project.

Rekenwerk voor algebra met de zakrekenmachine

De hoofdtaak van de zakrekenmachine is het *overnemen van het gewone rekenwerk*. Doordat de zakrekenmachine beschikbaar is hoeven we ons niet te beperken tot vergelijkingen met eenvoudige getallen:

$3 \cdot p + 7 = 19$

maar moet:

$0.45 * 9 + 6.3x = 14.319$

óók kunnen; immers, in de praktijk komen zulke getallen vaker voor dan de witte raven 3, 7 en 19. Toch beginnen we met het eenvoudige geval

$3 \cdot p + 7 = 19.$

Er is, voordat de zakrekenmachine gebruikt wordt, nu nog één extra stap nodig: bewust worden via welke rekenstappen het resultaat bereikt is. Hoe dan ook, of het nu via de pijlenmethode of de bordjesmethode gaat, of via nog iets anders, de leerling moet weten dat

$19 - 7$

uitgerekend moet worden. De pijlenmethode met name maakt zoiets ook heel expliciet.

Het belang van het kennen van de *inversen van bewerkingen* is in hoofdstuk 4 en 5 herhaaldelijk aan de orde geweest. Bewerkingen en hun inversen komen op alle gangbare rekenmachines voor, en de rekenmachine is geschikt om verkenningen als deze uit te voeren:

$$3 \xrightarrow{\boxed{x^2}} \xrightarrow{\boxed{\sqrt{}}} 3$$

$$7{,}23 \xrightarrow{\boxed{\sqrt{}}} \xrightarrow{\boxed{x^2}} 7{,}23$$

Belangrijke visuele hulpmiddelen zijn de pijlen in twee richtingen:

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r, bend left, "\boxed{x^2}"] & 9 \arrow[l, bend left, "\boxed{\sqrt{}}"] \end{tikzcd}$$

De pijlenmethode bij vergelijkingen geeft ruime kansen dit te doen. Ook met x^y en de inversen ervan.

$$2 \xrightarrow{\boxed{x^y}\ \boxed{3}} 8 \xrightarrow{\boxed{\text{inv}}\ \boxed{x^y}\ \boxed{3}} 2$$

Laten we de merkwaardige toetsen:

$\boxed{1/x}$ $\qquad\qquad\qquad$ $\boxed{\pm}$

niet vergeten. Ze zijn hun eigen inverse:

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend left, "\boxed{1/x}"] & 0.5 \arrow[l, bend left, "\boxed{1/x}"] \end{tikzcd}$$

Voor wie wil kan dat onderwerp zijn van speciale aandacht. Dat is van wat abstracter niveau en niet voor elke leerling echt haalbaar.
Als we

$$\frac{2.1}{3 + x} = 0.3$$

met de pijlen-methode willen doen, kunnen we de 1/x - toets nie missen:

$$x \xrightarrow{\boxed{+}\ \boxed{3}} \ldots\ldots$$

en nu moet dat omgekeerd en met 2.1 vermenigvuldigd worden:

$$\ldots\ldots \xrightarrow{\boxed{1/x}\ \boxed{*}\ \boxed{2.1}} 0.3$$

Terugrekenen geeft nu:

$$x \xleftarrow{\boxed{3}\ \boxed{-}\ \boxed{1/x}\ \boxed{2.1}\ \boxed{/}} 0.3$$

Het kan, maar misschien is de bordjesmethode hier geschikter!
Aardige toepassingen van de zakrekenmachine zijn er rond *groe*
Steeds hetzelfde getal erbij tellen, steeds met hetzelfde getal verm nigvuldigen. Veel zakrekenmachines hebben daar de zogenaamc constante-factor knop voor. Per rekenmachine verschilt de gebruik aanwijzing nogal, we laten het dus bij de suggestie alleen.
Meer in de lijn van het rekenen ligt het verkennen van de weter schappelijke notatie. Die is, zoals bekend, op machtsnotatie m machten van tien gebaseerd.

Zakrekenmachines en volgorde van bewerkingen lijkt een probleem apart. Sommige rekenmachines lijken met Mijnheer Van Dalen te werken. Daar kun je dus:

$$\boxed{5}\quad\boxed{\cdot}\quad\boxed{3}\quad\boxed{-}\quad\boxed{4}\quad\boxed{\cdot}\quad\boxed{2}\quad\boxed{=}$$

op intoetsen en '7' als antwoord krijgen. Andere rekenmachines laten tussen uitkomsten zien en rekenen daar mee dóór:

$$\boxed{5}\quad\boxed{\cdot}\quad\boxed{3}\quad\boxed{-}$$

en er staat 15 op het scherm.
Dan:

$$\boxed{4}\quad\boxed{\cdot}$$

en nu komt er eerst '11' (elf) op het scherm. '22' wordt het eindresultaat. In principe zijn er in dit opzicht slechts twee soorten rekenmachines:

- zij die alles meteen uitrekenen;
- zij die net iets verder kijken.

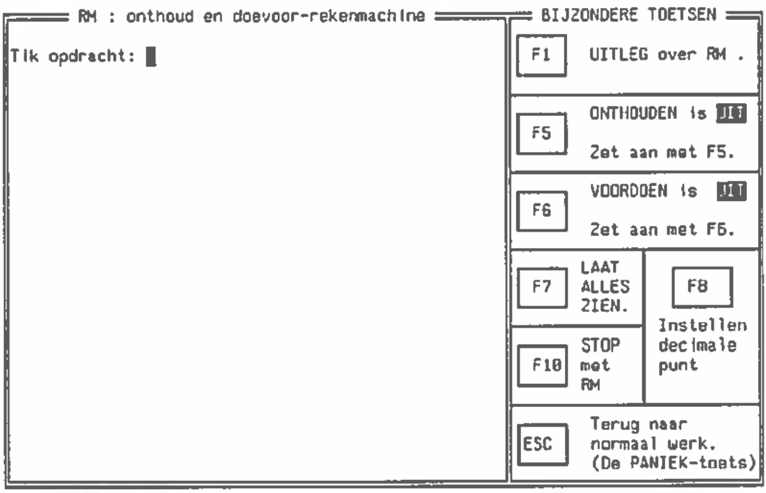
Bij de laatste soort zal vermenigvuldigen en delen dan gaan in de volgorde waarin het staat.
Dus wordt bijvoorbeeld $8 : 4 \cdot 2$ dan $(8 : 4) \cdot 2$ en dat is 4.
Mijnheer Van Dalen, zuiver nagevolgd zou $8 : (4 \cdot 2)$ doen en dat is 1.
De bewerkingsvolgorde vanuit de andere kant, het geheel van de som, bekijken, kan vaak veel nuttiger zijn. Gewone zakrekenmachines helpen daar niet bij: er is maar één getal tegelijk op het scherm en nooit zijn bewerkingstekens te zien. Voor onderzoek van de werking van formules zijn die rekenmachines dus niet geschikt.
Grafische rekenmachines, uitgerust met een beeldschermpje, laten wel de hele som zien, samen met de uitkomst:

```
5*3-4*2
                    7
```

De mogelijkheden om leerlingen hiermee de structuur van het rekenen te laten onderzoeken zijn nog niet verkend, maar lijken veel belovend.

Formules onderzoeken met RM[1]

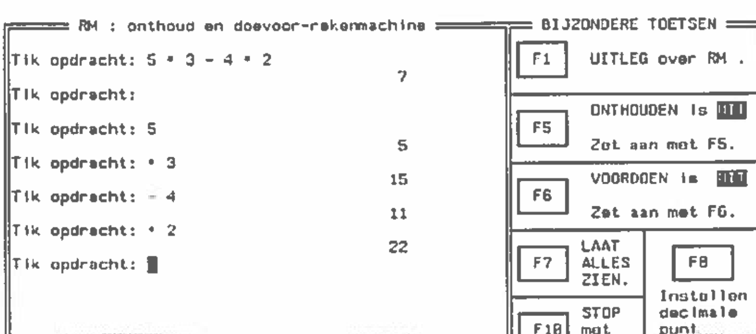
RM (RekenMachine) is een computerprogramma, geschreven in Alcor, dat werkt als een gewone rekenmachine, maar extra mogelijkheden heeft juist rond het verkennen van formules en variabelen. In het project is het programma gebruikt in de eerste klas, met werkbladen uit het pakket Formules op Maat.
We laten wat van de mogelijkheden zien. Als het programma gestart is zien we dit:



Met dit programma kan 5 • 3 – 4 • 2 uitgespeeld worden tegen:

$$5 \xrightarrow{*3} \quad \xrightarrow{-4} \quad \xrightarrow{*2}$$

Zo:



Tot zover is RM als gewone rekenmachine gebruikt. We gaan nu het VOORDOEN-knopje intikken. Dan doen we weer 5 • 3 – 4 • 2. De rekenmachine laat nu maar één stap tegelijk zien en wacht dan op een tikje op een toets. Na twee stappen:

```
<<<<< DOEVOOR    AAN-gezet   >>>>>       | F7 | ALLES    | F8 |
                                         |    | ZIEN.   |
Tik opdracht: 5 • 3 - 4 • 2              |              Instellen
                                         | F10 | STOP   decimale
. . . . -> 5 • 3 - 4 • 2 <-              |       met    punt
. . . . 5 • 3              ::  15        |       RM
. . . . 4 • 2              ::  0         | ESC | Terug naar
. . . . 15 - 8             ::  █         |       normaal werk.
                                         |       (De PANIEK-toets)
```

Bij iedere stap van RM kan een kring in de oorspronkelijke som worden gezet. Op deze manier wordt haakjesgebruik voorbereid.

5 • 3 - 4 • 2

Haakjes zetten is daarna zélf zeggen hoe je de kringen wilt hebben. Met RM kan het uitgeprobeerd worden.
Variabelen zijn ook te gebruiken in RM. Dat zijn dan hokjes waar je op naam een getal in kunt bewaren.:

```
== RM : onthoud en doevoor-rekenmachine ==   == BIJZONDERE TOETSEN ==
Tik opdracht: Maak knots 134683              | F1 | UITLEG over RM .
Tik opdracht: knots                          | F5 | ONTHOUDEN is UIT
                                  134683     |      Zet aan met F5.
Tik opdracht: knots + 2                      | F6 | VOORDOEN is UIT
                                  134685     |      Zet aan met F6.
Tik opdracht: Maak gek 1448347               | F7 | LAAT     | F8 |
Tik opdracht:                                |      ALLES
Tik opdracht: knots • gek                    |      ZIEN.
                            195067719001
Tik opdracht: █
```

Allerlei mogelijkheden zijn verder:

- De waarden die bij *gek* en *knots* horen mogen worden veranderd, en dezelfde som geeft dan een andere uitkomst (zelfde sommen nog eens doen gaat makkelijk: met de op/neer-pijltjes haal je ze op).
- Allerlei namen mogen, ook je eigen naam.

- Namen in namen:

```
Tik opdracht: Maak peter gek
```

De leerling die dit deed, kon toch bedenken wat PETER nu was; en het klopte:

```
Tik opdracht: peter                         1448387
Tik opdracht: █
```

Grafieken maken met het programma TABEL

RM laat de werking van formules en variabelen zien. Het zit dicht bij het pure rekenen; contexten spelen niet zo'n rol. Anders is dit bij het programma TABEL, eveneens geschreven in Alcor, dat we ook in de eerste klas en in de derde en vierde gebruikten. TABEL maakt tabellen en grafieken tegelijk. Hier is eerst een voorbeeld om iets over de werking van het programma te kunnen zeggen.
Allereerst alleen het scherm met de tabel:

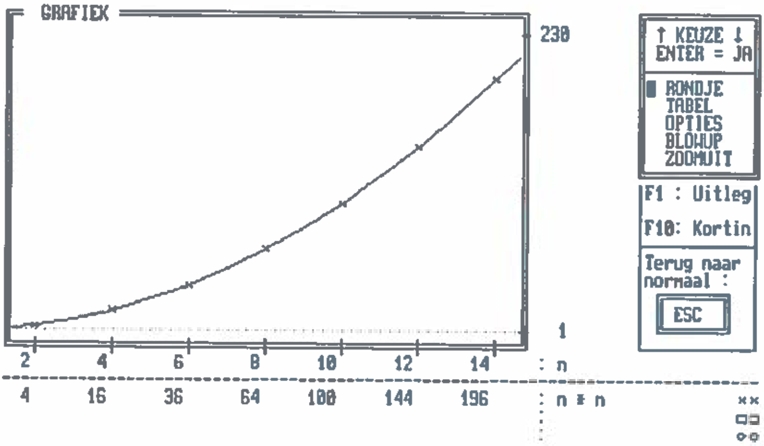
TABEL

	n	n * n		
r1 :	1	1		
r2 :	2	4		
r3 :	3	9		
r4 :	4	16		
r5 :	5	25		
r6 :	6	36		
r7 :	7	49		
r8 :	8	64		
r9 :	9	81		
r10 :	10	100		
r11 :	11	121		
r12 :	12	144		
r13 :	13	169		
r14 :	14	196		
r15 :	15	225		

```
↑ KEUZE ↓
ENTER = JA

█ RONDJE
  GRAFIEK
  OPTIES
  STOPPEN

F1 = HULP

F10= Kort
     rondje
     in.
F9= losse
     regels

Terug naar
normaal  :
   ESC
```

Zo start het programma.
Andere tabellen worden gemaakt door op de juiste plaatsen (boven in de tabelknop, bij de getallen in kolom 1) iets anders in te tikken. Worden in de kop van de tabel onbekende letters of woorden gebruikt dan vraagt TABEL zelf wat wordt bedoeld.

Als het knippertje - zoals in de rechter illustratie - in het KEUZE-vak staat, kan naar GRAFIEK worden gegaan. Dat levert het volgende beeldscherm:



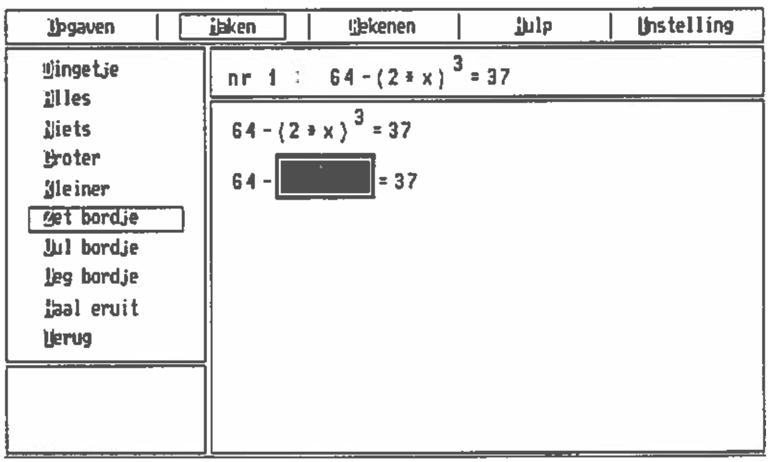
Ook op het GRAFIEK-scherm kan een rondje gemaakt worden en van alles gewijzigd worden.

Op diverse punten sluit het programma goed aan op de algebravoorstellen:

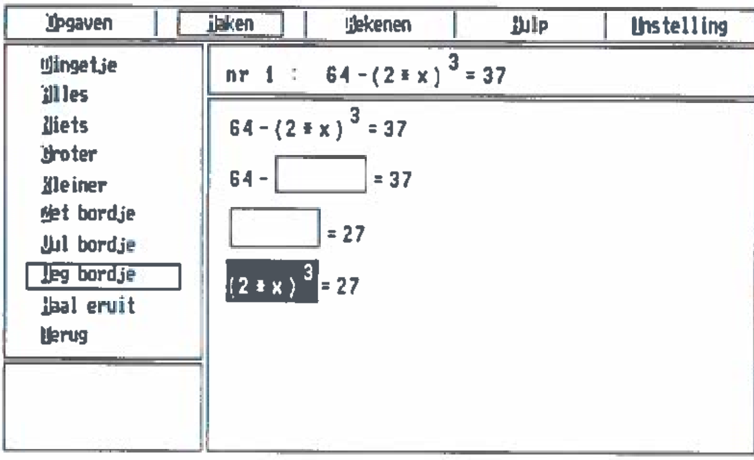
- De namen van variabelen kunnen vrij gekozen worden. Leerlingen kiezen hun eigen of andermans naam in het begin. Maar het programma kan dicht aansluiten bij de context via deze keuzevrijheid. Zo worden in het eerder gegeven blokjesvoorbeeld de namen *r*, zwart wit en totaal gebruikt. Veel grafiekenprogramma's dwingen tot het gebruik van *x* voor de lopende variabele en van *y* of *f*(*x*) voor de gebonden variabele. Zeker in de hogere trajecten moeten leerlingen met deze notatie leren werken. Maar in eerste instantie werkt deze dwang storend op het leerproces.
- De bediening van het programma heeft geen extra woorden als domein etc. nodig. Op de tabel of grafiek wordt aangewezen wat veranderd wordt.
- Gebruik bij bekijken van formules, groei en oplossen van vergelijkingen is op eenvoudige wijze mogelijk.
- In- en uitzoomen op details gaat makkelijk.
- Het dóórvragen bij nog onbekende ingetikte woorden helpt structureren. Je zet in de kop van de tabel (of de grafiek) namen van wat je wilt hebben en het programma vraagt dan de details, de juiste formules.

Formules ontleden met bordjes: ALEX[1]

ALEX, ALgebraïsche EXperimenteeromgeving, is een programma dat onder andere de bordjesmethode illustreert. Via het menu kan gekozen worden een stuk uit een formule te pakken. De computer laat alleen 'correcte' keuzen toe.
Op het eerste schermbeeld is ALEX in actie met een vergelijking. Die staat boven in het scherm en eronder komen de verschillende stappen van het oplossingsproces. De eerste stap is zo gekozen dat we een kleiner stuk van de formule willen hebben en daar is een bordje over gezet.



Het proces gaat als volgt verder: de gebruiker moet zelf aangeven dat het stuk onder het bordje apart moet worden genomen. Ook de '27' is door de gebruiker ingetikt.



Werken met ALEX is werken met de bordjesmethode, waarbij alleen de acties worden aangegeven en de deelformules niet worden ingetikt. Alle aandacht kan naar het oplossingsproces zelf gaan.

Besluit

In dit hoofdstuk hebben we enkele programma's laten zien die bruikbaar zijn in meer algemene zin. TABEL, RM en ALEX kunnen werken met heel eenvoudige en heel complexe formules en kunnen daar algemene inzichten bij ondersteunen. Naast dit soort programma's bestaan er vele andere; vooral veel die specifieke vaardigheden helpen beheersen. Op allerlei punten in het leerplan zouden die geschikt kunnen zijn; het is echter onmogelijk op deze plaats een compleet beeld daarvan te geven.

Noten

1 De programma's RM, TABEL en ALEX zijn tijdens het project ontwikkeld en er is binnen het project mee geëxperimenteerd.
RM en TABEL komen in de toekomst als onderdeel van het ALCOR pakket op de markt. ALEX verschijnt apart.

OVERZICHT REKENEN

Waarom rekenen in W12-16?

In vroeger tijden stond het vak rekenen op het rooster van de eerste klassen van de hbs en mulo. Vanaf de jaren vijftig werd rekenen steeds meer uitsluitend als een onderwerp voor de basisschool beschouwd. Men ging er in het voortgezet onderwijs gewoonlijk vanuit dat het rekenen in het basisonderwijs afgerond was en men beschouwde het slechts als een voorbereiding op de wiskunde en andere schoolvakken waar het toegepast kan worden.

In de praktijk blijkt echter dat het rekenonderwijs op de basisschool nog niet is afgerond. Het totale rekengebied is meestal wel aan de orde geweest, maar er bestaan enorme niveauverschillen tussen de leerlingen. Met name de onderwerpen die vanaf groep zes op het programma staan, breuken, verhoudingen en procenten, worden bij het verlaten van de basisschool door meer dan de helft van de leerlingen onvoldoende beheerst.

De resultaten van het periodiek peilingsonderzoek (PPON) dat in 1987 door het CITO gehouden is, geven een goed beeld van de stand van zaken aan het eind van groep acht. Dan blijkt onder andere dat de basisvaardigheden door de meerderheid van de leerlingen voldoende beheerst worden. Maar ook laat het PPON zien dat het rekenen in toepassingssituaties voor de meeste leerlingen grote problemen oplevert. Bij de hoofdstukken over de verschillende rekenonderwerpen zullen we gedetailleerder op deze PPON resultaten ingaan.
Kunnen rekenen is voor het dagelijks leven een onmisbare vaardigheid. Met name schatten en handig en flexibel hoofdrekenen zijn vaardigheden die in relatie met verhoudingen en procenten in het dagelijks leven onontbeerlijk zijn. Denk maar aan een situatie waarbij in een winkel een korting wordt gegeven van 25%, dan is het handig om schattend de nieuwe prijs te bepalen en zo na te gaan of de verkoper de korting goed berekend heeft.

Binnen het voortgezet onderwijs zijn er redenen genoeg om aan het rekenen tijd en aandacht te besteden. In de wiskunde, maar ook in veel andere schoolvakken is rekenen een veel voorkomende activiteit. Dat geldt niet alleen voor het voortgezet onderwijs zelf, maar ook voor het vervolgonderwijs. In de diverse richtingen op het Middelbaar Beroepsonderwijs (mbo) komen allerhande rekenactiviteiten voor.
In de bovenbouw van havo en vwo wordt meer dan vroeger een beroep gedaan op rekenvaardigheid. Dit hangt samen met de veranderingen

in de richting van een meer toegepaste realistische wiskunde. In het wiskunde-A eindexamenprogramma voor het havo wordt rekenen zelfs apart genoemd.

In het vak wiskunde A worden bovendien de volgende activiteiten op het gebied van rekenen van belang geacht:

- *verstandig organiseren van berekeningen;*
- *visualiseren van rekenschema's;*
- *doorlichten van teksten waarin al rekenend conclusies worden getrokken;*
- *globaal rekenen, schatten en benaderen;*
- *hanteren van enkelvoudige en samengestelde maateenheden;*
- *rekenen met verhoudingen en procenten.*

Een goede voorbereiding hierop, door ook in de eerste drie leerjaren aandacht aan het rekenen te besteden, is dus ook voor de leerlingen die naar het havo gaan zeker gewenst.

Tenslotte wordt rekenen gezien als een volwaardig onderdeel van de wiskunde. Het kan een bijdrage leveren aan het ontwikkelen van een wiskundige houding, en biedt allerlei uitbreidingsmogelijkheden in de richting van meer formele wiskunde.
Op basis van het bovenstaande zal duidelijk zijn waarom binnen het project W12-16 het leerstofonderdeel (voortgezet) rekenen opgenomen is.

Doel en inhoud

De volgende beschrijving over het onderdeel rekenen komt uit het examenprogramma voor mavo/lbo C en D niveau:

Onderzocht wordt of de leerling efficiënt kan rekenen en cijfermatige gegevens kritisch kan beoordelen. De leerling doet dit door schattend en handig rekenen en met behulp van maatkennis, inzicht in het getalsysteem en een doelmatig gebruik van de rekenmachine. Dit gebeurt in toepassingen in alledaagse situaties, in andere gebieden van de wiskunde en bij andere vakken.

Het gaat dus om praktisch rekenen in toepassingssituaties. Doel is daarbij de rekenkennis van de leerlingen praktisch inzetbaar te maken, te onderhouden, en uit te breiden.

Uit resultaten van de PPON blijkt dat de basisvaardigheden (dat wil zeggen: tellen, tafels, hoofdrekenen en elementaire toepassingen) en het cijferen redelijk beheerst worden aan het eind van groep acht. Deze basisvaardigheden worden in het voortgezet onderwijs onderhouden, het cijferen echter krijgt geen aparte plaats in het voortgezet rekenen. Voor het uitvoeren van lastige berekeningen wordt de zakrekenmachine ingezet. In de eerste klas wordt aandacht besteed aan het verkennen van de mogelijkheden van dit apparaat en het gebruik ervan als rekenhulp. Daarbij komt ook aan de orde waneer het wel en niet verstandig is de zakrekenmachine te gebruiken. Verder wordt de zakrekenmachine ook gebruikt om de rekenkennis uit te breiden. In het hoofdstuk over de zakrekenmachine gaan we hier dieper op in.

Kort gezegd wordt er in het nieuwe leerplan aandacht besteed aan toegepast rekenen. In toepassingssituaties waar gerekend moet worden gaat het vaak om verhoudingen en procenten. Deze onderwerpen vormen in feite de rode draad door het rekenprogramma. Gekoppeld hieraan wordt steeds aandacht besteed aan:

- schattend rekenen;
- flexibel (hoofd)rekenen;
- inzicht in het getalsysteem;
- verstandig gebruik van zakrekenmachine;
- gebruik van modellen en schema's (verhoudingstabel, dubbele getallenlijn);
- ontwikkelen en gebruiken van maatkennis;
- de samenhang tussen breuken en decimale getallen, verhoudingen en procenten.

Verschillen tussen niveaus

Aangezien het niveau van de leerlingen bij het verlaten van de basisschool erg verschilt, zal niet voor elke leerling dezelfde leerstof in dezelfde tijd aan bod hoeven komen.

In de leerstofbeschrijving van W12-16 (het Trajectenboek) worden vijf verschillende niveaus onderscheiden. De leerstofbeschrijving voor het mavo/vbo-D niveau nemen we als ijkpunt om de verschillen tussen de trajecten te belichten.

Het programma voor het D-niveau bevat in de eerste drie leerjaren aparte rekenonderwerpen. Deze beslaan ongeveer 15% van de tijd. In klas 4 komt rekenen alleen nog geïntegreerd binnen de andere leerstofonderdelen voor en als onderdeel van de voorbereiding op het examen. Op het examen zelf komen ook rekenopgaven voor. Voorbeelden hiervan zijn te vinden in de examenbundels.

De leerstof van het C-niveau is nagenoeg gelijk aan die van het D-niveau en is ook verdeeld over drie jaar en beslaat daarin ook 15% van de tijd. Op het C-niveau zullen meer dan op D-niveau beroepsgerichte toepassingen een rol spelen. Formeel rekenen met breuken komt hier beperkt voor. Berekeningen maken met een groeifactor- of groeipercentage is op C-niveau geen examenstof. Verder is er vooral verschil in complexiteit van de opgaven en de mate waarin van de leerlingen gevraagd wordt zelf een geschikt rekenmodel te kiezen.

Voor het B-niveau is in elk van de vier leerjaren tijd voor rekenen gereserveerd. Dit komt neer op ongeveer 20% van de tijd. Doordat het B-niveau uitsluitend op het vbo voorkomt, kan er speciaal aandacht besteed worden aan rekenen in beroepsgerichte toepassingen. Voor de B-leerlingen zijn daartoe apart de onderdelen metriek stelsel en schaal opgenomen. Wat betreft het rekenen met breuken ligt de nadruk op dit niveau niet op het formeel rekenen ermee. Van belang is dat de leerlingen de zakrekenmachine hierbij goed weten te gebruiken. Indien wenselijk kan hiertoe een speciale zakrekenmachine ingezet worden waarop met de 'gewone' breuknotatie gewerkt kan worden.

Voor havo-leerlingen zal naar verwachting minder tijd nodig zijn om de basisvaardigheden te onderhouden en uit te breiden. Dat neemt niet weg dat ook voor deze leerlingen aandacht besteed moet worden aan rekenen. Eerder is al opgemerkt dat in het examenprogramma van wiskunde A op de havo het rekenen expliciet voorkomt. Als voorbereiding daarop zijn onder andere de volgende onderwerpen van belang:

- schattend rekenen;
- (hoofd)rekenstrategieën;
- modelgebruik;
- het oplossen van toepassingsvraagstukken met name op het gebied van verhoudingen en procenten.

Daarnaast zijn er natuurlijk leerlingen die geen wiskunde kiezen. Voor hen is met name het rekenen in alledaagse toepassingssituaties van belang. Het voorkomen en bestrijden van ongecijferdheid is een algemene doelstelling van het rekenonderwijs. Het spreekt voor zich dat ook toekomstige wiskunde B-leerlingen hun voordeel kunnen doen met het rekenen. Hoewel dit niet expliciet in het wiskunde B programma voorkomt, is een goede rekenvaardigheid, gebaseerd op inzicht, ook bij de toegepaste analyse een onmisbaar iets.

De tijd die voor de beschreven rekenonderwerpen moet worden uitgetrokken zal naar verwachting minder zijn dan op de eerder genoemde niveaus. De daarmee vrij komende ruimte kan benut worden voor het meer formele rekenen. Zo moet formeel breukrekenen een plaats krijgen op het programma. De relatie met algebra kan nadrukkelijker gelegd worden. Dit gebeurt met name vanuit de algebra-onderwerpen. Ook is er gelegenheid om iets aan 'getaltheoretische' onderwerpen te doen. Hiermee kan aandacht besteed worden aan het wiskundig redeneren. Als expliciete voorbereiding op wiskunde A, is in het leerplan voor 3 havo en 3 vwo een onderdeel rekenen in contexten opgenomen. Vanzelfsprekend zullen de rekenvraagstukken gecompliceerder kunnen zijn dan op mavo en vbo het geval is.

Voor het vwo-niveau geldt in grote lijnen hetzelfde als hierboven voor havo-leerlingen is opgemerkt. Met name in een toegepast vak als wiskunde A komt rekenen veelvuldig voor, dit staat echter minder expliciet in het programma dan bij het havo het geval is.

Een belangrijk verschil is dat de havo-leerlingen al in klas 3 de keuze voor wiskunde A en/of B of geen wiskunde moeten maken, terwijl de vwo-leerlingen hiervoor een jaar langer hebben.

Grote lijn

In het realistisch reken/wiskunde-onderwijs vormen contexten zowel de bron voor het ontwikkelen van inzicht als het toepassingsgebied ervan. Dat wil zeggen dat niet eerst algoritmen worden aangeleerd, waarna deze toegepast worden, maar dat toepassingsproblemen het startpunt van het onderwijs vormen. Leerlingen ontwikkelen bij het oplossen daarvan strategieën die besproken en vergeleken worden, bijvoorbeeld op efficiëntie. Deze worden vervolgens weer toegepast in andere problemen.
Willen leerlingen in staat zijn toepassingsproblemen op te lossen dan moeten voorwaarden vervuld zijn zoals:
- inzicht hebben in het getalsysteem;
- kunnen en durven afronden;
- structureren van problemen;
- kennis hebben van modellen;
- maatkennis ontwikkelen;
- handig kunnen (hoofd)rekenen;
- zakrekenmachine verstandig gebruiken etc.

Hier wordt aandacht aan besteed in het programma. Dit gebeurt niet geïsoleerd, maar in samenhang met, en geïntegreerd in de toepassingsproblemen.

De inhoud op een rij

Het nu volgende overzicht is een korte karakterisering van het rekenprogramma. Het is gebaseerd op de leerplanbeschrijving, het Trajectenboek. De daar voorkomende titels zijn aangehouden. In dat boek is behalve een meer gedetailleerde beschrijving van de inhoud ook voor alle niveaus de verdeling van de stof over de leerjaren te vinden.

Praktisch rekenen: schatten, flexibel hoofdrekenen, gebruik zakrekenmachine, structureren (modelgebruik) in de context van verhoudingen en procenten. Uitgewerkt in leerlingenmateriaal.
Breuken en decimale getallen: deze onderwerpen komen op een 'pragmatische' manier aan de orde, daarbij is ook aandacht voor het inzetten van de zakrekenmachine. Niet uitgewerkt in leerlingenmateriaal.
Gebruik zakrekenmachine: aandacht voor de bediening van de zakrekenmachine als hulpmiddel bij het rekenen, maar ook als middel

voor het ontwikkelen van inzicht in het rekenen. Uitgewerkt in leerlingenmateriaal.
Rekenen in contexten: complexe toepassingsproblemen, waarbinnen diverse vaardigheden geïntegreerd voorkomen.
Metriek en meten: (raakvlak meetkunde-rekenen), ontwikkelen van maatkennis en meetstrategieën in het bijzonder schatten. Uitgewerkt in leerlingenmateriaal.

Rekenen met negatieve getallen, machten en wortels maakt onderdeel uit van het leerstofgebied algebra en worden niet in deze bijdrage beschreven.

Rekenen bij andere vakken

Bovenstaand overzicht haalt even de rekenonderwerpen naar voren. Voor deze onderwerpen wordt in het nieuwe leerplan apart tijd gereserveerd. Daarnaast komt rekenen natuurlijk op meer plaatsen in het leerplan voor. Zowel binnen andere gebieden van de wiskunde (algebra, meetkunde, informatieverwerking & statistiek en geïntegreerde wiskundige activiteiten), als ook bij veel andere schoolvakken. Te denken valt aan aardrijkskunde, natuurkunde, scheikunde, geschiedenis, economie, tekenen, techniek, verzorging. We vinden het belangrijk dat er ook daar geregeld expliciet aandacht besteed wordt aan de rekenkant.
Leerlingen herkennen niet altijd dat het om een bepaald type probleem gaat als dit probleem in een geheel andere context, bij een ander vak, optreedt. Dit komt onder meer omdat er op andere aspecten wordt gelet. Zo zal het bij remweg in de natuurkunde om andere dingen gaan dan wanneer dit onderwerp bij wiskunde voorkomt. Ditzelfde is bijvoorbeeld het geval bij grafieken. Komen ze voor bij aardrijkskunde, dan zal het vooral om de gegevens gaan die erin verbeeld worden, bij wiskunde zal ook de grafiek zelf onderwerp van bestudering kunnen zijn. Een andere oorzaak voor het niet herkennen van gelijke onderwerpen in de verschillende vakken is het feit dat leerlingen bij elk vak een totaal andere aanpak leren om een bepaald probleem op te lossen. Dat gaat ook op voor rekenen. Rekenen wordt meestal nog wel herkend als rekenen. Maar veel leerlingen zien niet dat dezelfde oplossingsmethoden gebruikt kunnen worden bij alle vakken en onderdelen waarin gerekend wordt. Veel docenten wijzen de leerlingen daar ook niet op en in de schoolboeken worden deze verbanden meestal ook niet gelegd.

Het toepassen van rekenen in wiskundeonderwerpen en andere schoolvakken moet geleerd worden. Belangrijk hierbij is het overleg met andere vakleerkrachten. In dit overleg kunnen de verschillende aanpakken vergeleken worden, en er kan desgewenst een keuze uit worden gemaakt. Vaak is het aan te raden de volgorde waarin onderwerpen voorkomen zo op elkaar af te stemmen dat er gebruik kan worden gemaakt van elders opgedane kennis. Zo zou bijvoorbeeld in de economielessen bij het onderwerp procenten, gewerkt kunnen worden met de modellen die ook in het rekenen voorkomen zoals de verhoudingstabel en dubbele getallenlijn. Een andere mogelijkheid is het in de wiskundeles aan de orde stellen van een probleem uit een ander vakgebied, en daarbij de nadruk leggen op de wiskundige aspecten. Voor leerlingen komt zo de samenhang tussen de verschillende vakgebieden naar voren. Tevens wordt hun rekenkennis wendbaarder.

Een veel voorkomend probleem is het gebrek aan rekenvaardigheid dat de leerling kan storen in het vasthouden van de draad in een vraagstuk. Het rekenwerk eist te veel aandacht. Schatten kan dan vaak helpen een vraagstuk te structureren. Door te werken met eenvoudige getallen, wordt duidelijker wat je moet doen. Het cijferen kan dan overgelaten worden aan de zakrekenmachine.

Rekenen in wiskundeonderwerpen

In de vier andere onderdelen van het W12-16-programma (algebra, meetkunde, informatieverwerking & statistiek en geïntegreerde wiskundige activiteiten) komen rekenvaardigheden voor. In het algemeen zijn dat:

Rekenen met decimale getallen en breuken
Decimale getallen en breuken komen veel voor bij informatieverwerking en statistiek. Daarbij is het aflezen en ordenen van deze getallen van belang. Ook bij allerlei berekeningen komen ze voor bijvoorbeeld bij het berekenen van gemiddelden. Schattend rekenen is een belangrijke vaardigheid om de orde van grootte vast te stellen. Eenvoudige berekeningen kunnen uit het hoofd, verder zal het meeste rekenwerk met de zakrekenmachine gedaan worden. Bij algebra komen decimale getallen onder meer voor bij grafieken. Bij het aflezen en tekenen van grafieken moet vaak geïnterpoleerd worden op diverse schaalverdelingen. Enig inzicht in decimale getallen en het positiestelsel is daarbij onontbeerlijk. Bij het rekenen in de meetkunde zullen decimale getallen vaak optreden als resultaat van berekeningen (bijvoorbeeld bij goniometrische verhoudingen en bij de stelling van Pythagoras). Daar is het interpreteren van de uitkomst in relatie met de situatie van belang. Dat betekent dat leerlingen in staat moeten zijn af te ronden in overeenstemming met de context, en soms ook op basis van formele regels. Over de gewone breuken hebben we het nog nauwelijks gehad. Deze komen aanmerkelijk minder voor in toepassingen. Ze treden niet op als resultaat van berekeningen, tenzij dit natuurlijk berekeningen met breuken zijn. Wanneer er in toepassingen

uit de andere gebieden van wiskunde, of in andere vakken, breuken voorkomen, zijn deze meestal eenvoudig en hoeven er ook geen ingewikkelde berekeningen mee uitgevoerd te worden. Meestal blijft het beperkt tot vragen van het type: $3\frac{1}{2}$ keer de schaallijn van 500 meter. Dit is dan vaak schattend gevonden.

Werken met maten

Dit betreft het raakvlak van meetkunde en rekenen. Omdat het voor beide leerstofonderdelen een omvangrijk gebied is, is er een aparte beschrijving aan gewijd. We gaan hier niet verder in op de relatie met meetkunde. Behalve bij meetkunde komen maten ook voor bij algebra en informatieverwerking en statistiek. Gegevens zijn vaak grootheden, schaalverdelingen ook. Een grootheid die regelmatig optreedt is tijd. Het rekenen met tijd verdient daarom extra aandacht. Speciaal van belang daarbij is de relatie met de zakrekenmachine. Veel leerlingen interpreteren 4,6 uur als 4 uur en 6 minuten. Verder komen zowel bij algebra als bij Informatieverwerking en Statistiek, geld en snelheid vaak voor.

Rekenen met verhoudingen en procenten

Aan dit onderwerp wordt in de rekenlijn veel aandacht besteed. Een belangrijk argument daarvoor is dat veel toepassingsproblemen verhoudingsproblemen zijn. Juist daarom is het van belang op de andere plaatsen in het leerplan waar verhoudingen voorkomen expliciet het verband te leggen met dit onderwerp uit de rekenlijn. Met name bij Informatieverwerking en Statistiek komen procenten en verhoudingen veel voor. Dezelfde modellen (verhoudingstabel, dubbele getallenlijn) kunnen dan gebruikt worden. Ook is het aan te bevelen eenzelfde manier van noteren na te streven. In dit kader kan opnieuw aandacht besteed worden aan schattend rekenen en het gebruik van de zakrekenmachine. Meetkunde biedt aanknopingspunten bij het vergroten en verkleinen. Bij algebra vinden we verhoudingen onder andere terug bij evenredige (of omgekeerd evenredige) verbanden. Bovendien spelen ze een rol bij het interpoleren. Daar moet zorgvuldig aandacht worden besteed aan de tabellen. Niet alle tabellen zijn verhoudingstabellen.

Het onderdeel geïntegreerde wiskundige activiteiten (GWA) is hier nog nergens genoemd. Omdat dit een onderdeel is dat naar eigen keuze door docenten en auteurs ingevuld kan worden is het moeilijk hierover iets te zeggen. Het is ongetwijfeld zo dat er mogelijkheden liggen om bij GWA aandacht te besteden aan rekenen. De ontwikkelde materialen laten daarvan mogelijkheden zien. Ook biedt GWA bij uitstek de mogelijkheid om verschillende schoolvakken geïntegreerd aan bod te laten komen, waardoor aandacht gegeven kan worden aan verschillende benaderingen van gelijksoortige problemen.

Uit bovenstaande blijkt al dat we het van belang vinden dat rekenen niet uitsluitend als geïsoleerd onderwerp aan bod komt. Vanwege het gebruik van rekenen bij wiskunde, in andere schoolvakken en in situaties uit het dagelijks leven, is het van belang het ook in die vorm te presenteren. Om de rekenkennis echt toepasbaar te maken, moet er wanneer dit elders voorkomt wel expliciet bij stil gestaan worden. We bevelen daarom aan, om naast aparte rekenlessen, tijd uit te trekken voor korte rekenactiviteiten tijdens de andere wiskundeonderwerpen. Daarnaast, het is al eerder opgemerkt, kan dit ook in andere vaklessen gebeuren. Daarbij is overleg met de andere vakcollega's een noodzakelijke voorwaarde. Verder biedt in het bijzonder GWA de mogelijkheid om het rekenen in andere vakgebieden en dagelijks leven aandacht te geven. Tenslotte kan bij de voorbereiding op het examen het rekenen in wiskunde onderwerpen wat extra aandacht krijgen. Er is geen apart onderdeel 'Rekenen bij andere vakken en in andere lijnen' terug te vinden in het leerplan. We willen hier geen verschil aanbrengen tussen de trajecten. Het is voor alle leerlingen belangrijk dat hieraan aandacht wordt besteed. De hoeveelheid tijd kan variëren evenals de diepgang en de formalisatie.

In het nu volgende gedeelte van dit achtergrondstuk worden diverse onderdelen van het rekenen apart besproken. Er is gekozen voor een iets andere ordening dan in het Trajectenboek. In de hier gekozen ordening is het mogelijk dieper op de achtergrond van bepaalde onderwerpen in te gaan. De beschrijvingen bevatten steeds informatie over de stand van zaken aan het eind van het basisonderwijs. Dit is gebaseerd op de PPON-resultaten zoals die gepubliceerd zijn in het tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken/wiskunde-onderwijs (de Panamapost). Verder bevatten ze een analyse van het betreffende onderdeel. Daarbij wordt soms specifiek ingegaan op te verwachten moeilijkheden en worden didactische adviezen gegeven.

Literatuur

Abels, M., F.J. van den Brink, K.P.E. Gravemeijer, E.W.A. de Moor en M. Wijers (1990). Rekenen in het voortgezet onderwijs. *Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs* (Nieuwe Wiskrant) *10* (1), 28-30, Utrecht: Freudenthal instituut, RU Utrecht

Breukelen, K. van, S. Doevendans en B. Lagerwerf (1992). *Zorgverbreding wiskunde.* Amsterdam: APS.

Wijnstra, J.M. (1988). *Balans van het rekenonderwijs in de basisschool.* Arnhem CITO.

BASISVAARDIGHEDEN EN SCHATTEND REKENEN

Basisvaardigheden

Tot de basisvaardigheden worden gerekend:
- tellen;
- tafels van vermenigvuldiging;
- hoofdrekenen;
- schattend rekenen;
- elementaire toepassingen.

Onder tellen wordt ook verstaan het kunnen tellen met honderdtallen, duizendtallen, miljoenen, miljarden. En het begrip van het positiesysteem in dezen. Bij de tafels moet ook met de omkeringen gewerkt kunnen worden, zoals 12 = 3 x 4 = 2 x 6 etc.

Hoofdrekenen betekent goede beheersing van het getalgebied tot honderd. Optellingen en aftrekkingen moeten uit het hoofd gemaakt kunnen worden. Ook moet met bezit van deze kennis gerekend kunnen worden met honderdtallen, duizendtallen etc. Verder moeten de nulregels in verband met het vermenigvuldigen beheerst worden. Eveneens geldt dit voor het delen. Eenvoudige vermenigvuldigingen moeten ook uit het hoofd uitgevoerd kunnen worden, door gebruik te maken van handige strategieën. Bijvoorbeeld: 7 x 23 = 140 + 21 of 16 x 15 = 8 x 30.

Bij schattend rekenen met gehele getallen speelt met name het bepalen van de orde van grootte een rol.
Bijvoorbeeld 72.136 + 15.936 is ongeveer 72.000 + 16.000 = 88.000.

Eenvoudige toepassingen van het voorgaande worden ook tot de basisvaardigheden gerekend. Bijvoorbeeld: drie mensen verdelen een erfenis van ƒ 62.847. Elk krijgt meer dan ƒ 20.000. Daarnaast behoren ook de belangrijkste metrieke maten tot de basisvaardigheden, zoals uur, minuten, seconden, km, m, cm, kg, gram etc. Hierbij moet ook begrip bestaan van de werkelijke maten (een mens is meestal niet meer dan twee meter lang).

Over het algemeen worden deze basisvaardigheden door zo'n 90% van de leerlingen aan het eind van de basisschool beheerst. Een uitzondering geldt voor het schattend rekenen, omdat dit nog steeds niet echt systematisch wordt beoefend. Het zijn de absolute minimum voorwaarden voor voortgezet rekenen in het voortgezet onderwijs. Op grond hiervan wordt het rekenprogramma in het voortgezet onderwijs gestart.

De basisvaardigheden, met uitzondering van het schattend rekenen en het werken met maten, krijgen geen aparte plaats in het leerplan. Ze komen natuurlijk wel voor bij de verschillende rekenonderwerpen. Het kan verstandig zijn er dan kort bij stil te blijven staan. Zo is het goed mogelijk om even kort in te gaan op de tafels, op handige strategieën daarbij, op het rekenen met nullen of andere van de basisvaardigheden. Enig onderhoud op dit punt kan nooit kwaad.

Schattend rekenen

Wat is schattend rekenen? Op de basisschool valt het schattend rekenen onder de basisvaardigheden. In Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool, deel 1, staan de volgende concrete leerdoelen genoemd.

Leerlingen kunnen schattend rekenen door

a *de uitkomst van een berekening globaal te bepalen en op juistheid te controleren, en*

b *tel- en meetgegevens in verschillende graden van nauwkeurigheid te gebruiken.*

In diezelfde Proeve vinden we ook de volgende omschrijving van schattend rekenen.

Samenvattend kan gesteld worden dat schattend rekenen betrekking heeft op het passend omgaan met ervaringsgegevens, benaderingen, afrondingen, (on-)nauwkeurigheden en schattingen in allerlei alledaagse toepassingssituaties en dat het als zodanig een sleutelrol vervult bij het ontwikkelen van 'feeling' voor getallen. Dit uiteraard op basis van kennis van de tafels en vaardigheid in hoofdrekenen (in het bijzonder rekenen met 'nullen') en in verbinding met (meet-)getallen in de realiteit.

In deel twee van de Proeve wordt nog opgemerkt dat schatten ook een didactisch middel is om getallen tot leven te brengen en problemen te structureren zonder in precies rekenwerk opgesloten te raken. Het is dus een onderwerp van een wat andere orde dan procenten, breuken etc. Het omvat niet alleen technische vaardigheid, maar vooral betreft het een houding. Dat is ook de reden dat schatten en schattend rekenen bij de andere rekenonderwerpen steeds terugkomen. Vanwege het belang van het schatten voor het rekenen in toepassingssituaties wijden we er toch ook deze aparte paragraaf aan.

Stand van zaken in het basisonderwijs

Hoe is de feitelijke stand van zaken met betrekking tot de beheersing van het schattend rekenen aan het eind van de basisschool? Om een antwoord op die vraag te krijgen, bekijken we de resultaten van de PPON. Daaruit blijkt dat het schattend rekenen slechts door een gering percentage van de leerlingen wordt beheerst. Schattend rekenen met gehele getallen springt er relatief gunstig uit in vergelijking met het schattend rekenen met getallen in een context en schattend rekenen met kommagetallen. Hoewel ook op dit onderdeel de resultaten maar net voldoende zijn te noemen.

Welk teken moet er in het hokje staan?
Kies uit: < , > en =
(< betekent is minder dan
> betekent is meer dan
= betekent is evenveel als)
51 × 41 □ 2000

(gemiddelde goedscore: 70%)

Een mogelijke verklaring kan zijn dat, hoewel schattend rekenen in veel publikaties als zeer belangrijk wordt beschouwd, het in de praktijk van het rekenonderwijs nog maar zeer beperkt gebeurt. Vaak blijkt dat leerlingen niet voor schattend rekenen of rekenen met afgeronde getallen kiezen, zelfs niet als expliciet gevraagd wordt naar een ongeveer of afgerond antwoord.

100 Oostenrijkse shilling kost ƒ 16,35.
Angeline koopt in Oostenrijk iets voor 148 shilling. Hoeveel is dat ongeveer in Nederlands geld? (Rond af op hele guldens.)

(gemiddelde goedscore: 21%)

Belang van het schatten

Toch is schattend rekenen in de praktijk veel belangrijker dan cijferen. Niet alleen voor de praktijk van alledag, maar ook binnen het vakgebied rekenen-wiskunde speelt schatten een belangrijke rol. Het is soms nodig, omdat een exacte berekening niet te maken is. Dit kan bijvoorbeeld het geval zijn omdat exacte gegevens ontbreken, waardoor de leerling genoodzaakt is zelf een aanname te doen. Dit doen van een aanname gebeurt in het onderstaande voorbeeld op basis van *referentiepunten* in de werkelijkheid.

Voorbeeld 1
Een verslaggever geeft een radioverslag van de Tour de France. In de buurt van de finish ziet hij langs de weg de mensen drie rijen dik staan. Tot de finish is het nog ongeveer 1 km. Hij zegt: 'Er staan hier zeker 50.000 mensen te wachten op de aankomst van de wielrenners'. Laat met een berekening zien of dat een redelijke schatting is.

Het opbouwen van zo'n scala aan referentiepunten, ook wel *maatkennis* genoemd, is iets dat in het rekenonderwijs aandacht moet krijgen. Een uitgebreide beschrijving van hoe daar in het programma aan gewerkt wordt, is te vinden in het hoofdstuk 'Metriek en meten'.

Vaak kan volstaan worden met schattend rekenen omdat een benaderde uitkomst voldoet. Dit is vaak makkelijker en doelmatiger uit te voeren dan exact rekenen. Tenslotte is schattend rekenen in veel gevallen zinvoller.

Voorbeeld 2

Marianne Muis vestigt twee zwemrecords

BONN (SID) – Marianne Muis deed het goed bij de wereldbekerwedstrijden zwemmen in Bonn, maar zaterdag bleek op de 200 meter vrije slag, waarop zij juist haar zinnen had gezet de 16 jarige Deense Jacobsen een fractie van een seconde sneller.

Het gat dat Marianne op de eerste honderd meter liet vallen, was net te groot om overbrugd te worden, al loste zij met een tijd van 1.57,14 (tegenover de 1.57,08 van Jacobsen) wel illustere voorgangers als wereldkampioene Annemarie Verstappen, Conny van Bentum en Enith Brigitha af als nationaal recordhoudster.

1.57,14 betekent 1 minuut en $57\frac{14}{100}$ seconden.

Bereken de gemiddelde snelheid in km/uur van Marianne Muis tijdens de 200 m vrije slag.

In dit voorbeeld is het zinvoller èn eenvoudiger te werken met de afronding 200 meter in twee minuten, dit geeft een voldoende precies antwoord.

Het zal duidelijk zijn dat er redenen genoeg zijn om in het voortgezet onderwijs aandacht te schenken aan schattend rekenen. Het is ook iets dat zeker in de basisvorming thuishoort in verband met het bestrijden en voorkomen van ongecijferdheid. Schatten maakt je flexibeler in het omgaan met getallen en verschaft meer inzicht in waarmee je bezig bent, het verheldert de structuur. Algoritmisch werken biedt die mogelijkheden niet of nauwelijks.

Inhoud en opbouw

Het schatten komt voor bij alle rekenonderwerpen, met name wanneer het gaat om toepassingsproblemen. Het wordt daarbij van het begin af aan meegenomen. In de pakkettenserie 'Praktisch rekenen' voor klas 1, 2 en 3 is dit uitgewerkt in relatie tot het rekenen met procenten en verhoudingen.

Schattend rekenen kan alleen een volwaardige plaats innemen in het rekenonderwijs als aan een aantal voorwaarden is voldaan. In de eerste plaats is het van belang dat het schatten geïntegreerd wordt met de andere onderwerpen. Het moet er zo mee verweven zijn dat er niet aan te ontkomen valt. Dat betekent dat er steeds opgaven moeten voorkomen die uitsluitend schattend kunnen worden opgelost (zie voorbeeld 1) of waarbij schatten een direct voordeel biedt (zie voorbeeld 2).
Ten tweede moet de sterk algoritmische instelling van de leerlingen doorbroken worden door leerlingen te laten wennen aan het schatten. Leerlingen vinden schatten vaak gek. Ze willen liever precies rekenen en weten welk antwoord het enig goede is. Het doorbreken van die quasi exacte houding is mogelijk door situaties te kiezen waarmee leerlingen vertrouwd zijn en waarin ze als vanzelf met mooie getallen rekenen, bijvoorbeeld in een winkel.

Voorbeeld 3
Schat eens hoeveel het gaat kosten. (Je hoeft het dus niet precies uit te rekenen, dat doet de cassière wel.)

In het karretje heb ik:	*Het is ongeveer:*	
2 pakken melk van ƒ 1,07	*melk*	*..... gulden*
1 volkorenbrood van ƒ 2,19	*brood*	*..... gulden*
appels voor ƒ 3,89	*appels*	*..... gulden*
andijvie voor ƒ 1,54	*andijvie*	*..... gulden*
samen ongeveer		*ƒ .....*

De man vóór mij heeft al vast een briefje van 25 uit zijn portemonnee gehaald. Is dat genoeg? Weer een beetje ruim schatten.
Hij heeft:

2 pakken koffie van ƒ 3,47 per stuk	*ongeveer .....*
1 fles koffiemelk van ƒ 2,89	*ongeveer .....*
kaas voor ƒ 7,80	*ongeveer .....*
vleeswaren ƒ 12,25	*ongeveer .....*

Dat is wel/niet genoeg, want het komt ongeveer uit op ....

Hierbij kan het nut van schatten duidelijk naar voren komen.
Daarnaast kunnen opgaven aangeboden worden waarin exact rekenen onmogelijk is (bijvoorbeeld vleksommen of opgaven waarin gegevens ontbreken) zodat er wel geschat moet worden. Er zijn ook opgaven waarbij exact rekenen niet loont en schattend rekenen wel.
Ten derde is het van belang aandacht te besteden aan de voorkennis en de vaardigheden die de leerlingen gebruiken bij het schatten. Hieronder vallen onder andere het herkennen van 'mooie' getallen, het beheersen van de tafels, zeker die van 10, 5, 25 enzovoort, kunnen re-

kenen met nulregels, handig hoofdrekenen met behulp van strategieën als verdubbelen, halveren enzovoort, gebruik maken van de relaties tussen bewerkingen (ook met de zakrekenmachine), afronden. Leerlingen kunnen vaak slecht handig rekenen. Hieraan wordt onder andere aandacht besteed bij het werken met verhoudingstabel en dubbele getallenlijn. Strategieën als verdubbelen, halveren, één meer-één minder hebben geen zin als referentiepunten in de getallenwereld ontbreken. Het is dus ook van belang dat alle leerlingen over een aantal van dit soort steunpunten in de getallenwereld beschikken. In klas 1 wordt daarom onder meer aandacht besteed aan de tafels van 15, 25 enzovoort, en het 'rekenen met nullen' (machten van tien).
Wat afronden betreft, wordt er aandacht besteed aan twee soorten afronden:
Afronden in overeenstemming met eisen die vanuit de context worden gesteld en afronden volgens formele regels. Bij het eerste gaat het dan vaak om het bepalen van de juiste orde van grootte waarin het antwoord (gezien de context) gegeven moet worden. Een antwoord met bijvoorbeeld meer dan twee cijfers achter de komma heeft bij het berekenen van de benodigde lengtes staaldraad geen zin, zo nauwkeurig kun je toch niet meten.
Afronden volgens formele regels is met name van belang in verband met het gebruik van de zakrekenmachine.
Afronden in overeenstemming met de context is gezien het toepassingsgerichte karakter van meer belang dan het afronden volgens formele regels.

Voorbeeld 4
Soms mag je afronden, soms niet.
Soms moet je afronden naar boven, soms naar beneden.
Het lijkt ingewikkeld, maar als je even nadenkt .....
> *Kies het juiste antwoord.*
Voor de tegelvloer in de keuken zijn 192 tegels nodig.
Ze worden uitsluitend verkocht in dozen van 10 stuks.
a 192 afgerond is 190. Dus 19 dozen bestellen.
b niet afronden, gewoon zeggen dat je 192 tegels wilt.
c afronden naar 200. Dus 20 dozen bestellen.
Ik kies ....., want ....
....

Om te kunnen schatten is het beschikken over en gebruiken van referentiepunten in de werkelijkheid, zogenaamde maatkennis, noodzakelijk. Deze kennis dient met name om ontbrekende gegevens aan te vullen. Het opbouwen en/of uitbreiden van een dergelijk referentiekader is daarom onderdeel van het leerplan. Het is van belang dat leerlingen een eigen scala aan referentiepunten ontwikkelen. Daarbij moet ruimte zijn voor hun eigen inbreng in de vorm van ervaringskennis. Door geschikte keuze van contexten kan dit arsenaal verder ontwikkeld en onderhouden worden. Voorbeelden zijn al eerder gegeven, over deze maatkennis is meer te lezen in het hoofdstuk 'Metriek en meten'.

Schatten in het leerplan

Hoewel we niet voor een geïsoleerde behandeling van schattend rekenen zijn, maar daarentegen een geïntegreerde aanpak voorstaan, is er toch voor dit onderwerp in het Trajectenboek in klas 1 een aparte beschrijving opgenomen.
Dit is gedaan om het belang van het schattend rekenen nogmaals te benadrukken. We pleiten echter voor een aanpak waarbij het schatten een onderdeel uitmaakt van alle rekenonderwerpen. Bij de beschrijving van de andere rekenonderwerpen en enkele onderwerpen uit de meetkundelijn is dan ook herhaaldelijk het schattend rekenen opgenomen.

Literatuur

Bokhove, J. en J. Janssen (1988). Periodiek Peilingsonderzoek in het basisonderwijs (4). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, *7* (2), 16-35. Utrecht: Freudenthal instituut, RU Utrecht.

Jansen, M.J. (1990). Schatten: de verborgen schat in het rekenonderwijs. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, *8* (3), 65-71. Utrecht: Freudenthal instituut, RU Utrecht.

Treffers, A., E. de Moor en E. Feijs (1989). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool, deel 1, Overzicht en Einddoelen*. Tilburg: Zwijsen.

Treffers, A. en E. de Moor (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool, deel 2, Basisvaardigheden en cijferen*. Tilburg: Zwijsen.

VERHOUDINGEN EN PROCENTEN

Eindniveau basisonderwijs

Verhoudingen

In de beschrijving van de resultaten van het PPON onderzoek staan de volgende conclusies.

Over basiskennis en begrip

'Een eerste begrip van verhoudingen is zeker aanwezig. Eenvoudige berekeningen in verhoudingssituaties kunnen door veel leerlingen goed gemaakt worden. Relatief vergelijken blijkt erg moeilijk. Leerlingen letten vaak alleen op de absolute verschillen. De relatie met procenten is onvoldoende gelegd. Verhoudingsredeneringen komen overigens ook tamelijk veel voor bij andere categorieën. Dat bleek uit de oplossingsstrategieën van leerlingen in het onderzoek naar individuele oplossingsmethoden. Verhoudingen worden traditioneel moeilijk gevonden, volgens sommigen te moeilijk. Echter, gebruikt in eenvoudige contexten blijkt dit erg mee te vallen.'

Over toepassingen bij het onderwerp verhoudingen

'Verhoudingen zijn moeilijk. Mogelijk krijgt dit onderwerp nog niet de aandacht in het onderwijs die het verdient. Een eerste begrip van verhoudingen is zeker aanwezig. Dit blijkt uit de opgaven waar in een eenvoudige context met doorzichtige getallen wordt gewerkt. Het begrip van verhoudingen is echter nog niet zodanig dat in gecompliceerder situaties en met moeilijker getallen gewerkt kan worden.'

Procenten

Over het begrip procenten en de relatie tussen procenten, breuken en verhoudingen.

'De elementaire basiskennis is bij veel leerlingen niet aanwezig. Zowel het begrijpen wat een percentage voorstelt als het omzetten van aanduidingen in verhoudingen naar percentages en het aangeven van de berekeningswijze wordt door slechts zo'n 20% van de leerlingen echt goed beheerst.'

Over het oplossen van opgaven die uitnodigen tot het gebruik maken van oplossingsstrategieën zoals: het omzetten van percentage naar breuk; het gebruik maken van een verhoudingstabel; het in gedeelten uitrekenen (vooral bij gemengde getallen).

'5,5% van de leerlingen van groep acht zijn niet eens aan de hiervoor benodigde basisstof toegekomen.'

Over toepassingen bij procenten

'De meeste toepassingsopgaven bij het onderdeel procenten bleken voor de leerlingen eind basisonderwijs tot de moeilijkste opgaven te behoren die in de peiling voorkwamen.'

Eindconclusie

'De resultaten op het onderdeel procenten vallen tegen. Procentopgaven worden slechts door een kleine groep leerlingen goed beheerst. Een gemiddelde leerling heeft geen goed begrip van wat procenten zijn en hij is niet in staat eenvoudige procentberekeningen met een grote kans op succes uit te voeren.

Gezien de frequentie waarmee procenten in het dagelijks leven voorkomen verdient het geen aanbeveling minder aandacht aan procenten te besteden. Wel zou die aandacht meer op het begrijpen van procenten, de relatie met verhoudingen en breuken en het handig procentrekenen gericht kunnen worden. Bij het echte cijferen met procenten kan mogelijk het gebruik van de rekenmachine overwogen worden.'

Het is derhalve niet meer dan vanzelfsprekend dat de onderwerpen verhoudingen en procenten in het nieuwe leerplan ook de nodige aandacht dienen te krijgen. Niet alleen omdat deze onderwerpen niet volledig zijn afgerond op de basisschool, maar ook en vooral omdat het merendeel van de toepassingen in feite verhoudingsvraagstukken zijn of daarop terug te voeren zijn. We beperken ons in de beschrijving van dit onderdeel tot de numerieke verhoudingen. De meetkundige aspecten van verhoudingen, zoals vergroten, verkleinen en schaal worden bij meetkunde beschreven.

Verhoudingen

Formele indeling van verhoudingen

De numerieke verhoudingsproblemen zijn formeel in vier hoofdtypen te onderscheiden:

1 Het vaststellen van een verhoudingsrelatie ? : ?
In een doos bevinden zich 25 kralen waarvan er 5 wit en 20 zwart zijn, betekent: '1 op de 5 kralen is wit'.

2 Het vergelijken van verhoudingen a : b ? c : d
De basketballer van Dorp doet 30 schotpogingen waarvan er 20 raak zijn. De Boer doet 36 schotpogingen waarvan er 25 raak zijn. Wie is de beste

schutter?

3 Het maken van gelijkwaardige verhoudingen a : b = ? : ?
Zet voort: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \ldots..$

4 Het bepalen van de vierde evenredige a : b = c : ? óf a : b = ? : d
'Twee repen kosten ƒ 3,50.
Hoeveel kosten vijf repen?'
Twee repen kosten ƒ 3,50.
Hoeveel repen koop je voor ƒ 21,- ?'

Met name type 4 heeft van oudsher erg veel aandacht gekregen binnen het rekenonderwijs. Voor een goed begrip van numerieke verhoudingen en als hulp bij allerlei toepassingsproblemen zijn de overige typen zeker zo belangrijk. De indeling is gebaseerd op de formele wiskundige oplossingsvormen. Het is niet de bedoeling deze didactisch of methodisch uit te werken.

Soorten

We hebben hiervoor een indeling naar typen gemaakt. Nu willen we een indeling maken naar soorten, die voortkomen uit de talrijke verschijningsvormen van verhoudingsvraagstukken.
Veel praktische problemen zijn (verscholen) verhoudingsvraagstukken. Elk soort kan specifieke problemen oproepen.

Zoveel per zoveel

Tot de zoveel-per-zoveel-soort horen alle opgaven met gebonden grootheden.

6 eieren kosten ƒ 1,75.
Hoeveel kosten 36 eieren?

Tot deze soort behoren verder ook de opgaven over:
gewicht - prijs
hoeveelheid - gewicht
inhoud - gewicht
afstand - tijd
oppervlakte - prijs
afstand - liters (benzine)
....
De rekenstructuur bij dit soort opgaven wordt al gauw lastiger doordat we hier vaak met continue grootheden werken. Meestal leidt dit tot type 2 of 4 (zie de paragraaf hiervoor).

Maten veranderen

Kenmerkend voor deze soort is dat het inwisselen binnen dezelfde grootheden gebeurt. Geld wordt in geld omgezet, lengte in lengte, tijd

in tijd enzovoort. Vanzelf valt hier dus ook het metriek stelsel onder. Ook niet-standaard inwisselingen behoren hiertoe. Geld inwisselen zoals een gulden is 4 kwartjes, 12 gulden is dus 12 × 4 kwartjes, is een heldere manier om verhoudingen en de verhoudingstabel te introduceren. Lastig wordt het al gauw met: vreemde valuta, tijd, en gebruik van vreemde maten.
In feite voeren al deze opgaven tot het bepalen van de vierde evenredige, dus type 4.

Mengsels, fracties, percentages

Hierbij gaat het steeds om twee of meer hoeveelheden binnen een geheel. Zoals de doos met 25 kralen, waarvan 5 wit en 20 zwart. Een van de hoeveelheden wordt nu opgevat als deel van het geheel. Dit voert tot:

zoveel op zoveel	1 op de 5 kralen is wit
fractie of 'zoveelste deel van'	$\frac{1}{5}$ deel van de kralen is wit
percentage	20% van de kralen is wit
kans	de kans op een witte kraal is $\frac{1}{5}$.

Op zichzelf zijn bovenstaande beschrijvingen van de kralendoos nogal overdreven. Dergelijke verhoudingsuitspraken krijgen pas zin wanneer twee mengsels vergeleken worden op hun concentratie, zoals in het eerder genoemde voorbeeld van de basketballers. Al dit soort opgaven leiden tot de formele typen 1, 2 of 3, in het bijzonder tot 2.

De te hanteren didactiek voor dit soort opgaven is sterk afhankelijk van de aard der problemen en de reeds verworven vaardigheden. Ook nu weer geldt dat opgaven met eenvoudige discrete gegevens tamelijk gemakkelijk met de verhoudingstabel zijn op te lossen. Echter zodra de structuur van de opgave en de getalsgegevens complexer worden, wordt het lastiger de geschikte oplossingsmodellen te creëren. Vanuit een formeel standpunt is de isomorfie van de vraagstukken eenvoudig in te zien. Voor leerlingen is dat echter meestal niet zo makkelijk. De isomorfie kan alleen goed begrepen worden indien ook de samenhang tussen verhouding, breuk, kommagetal en percentage begrepen is. Tot slot merken we nog op dat bij recepten vaak met de onderlinge verhouding van verschillende bestanddelen gewerkt wordt. Bijvoorbeeld voor een sladressing: 2 lepels azijn op 3 lepels olie.

Samengestelde grootheden

We doelen hier onder meer op snelheid en dichtheid. Het lastige hierbij is dat één getal gegeven wordt dat gezien moet worden als een verhoudingsgetal. Bijvoorbeeld: 'hij rijdt 80' betekent 'hij rijdt 80 km in één uur.'

Samengestelde grootheden komen in andere schoolvakken veelvuldig voor, met name in natuurkunde, scheikunde, economie en aardrijkskunde. Bijzonder zinvol kan het zijn ook eens op de andere grootheid te normeren:

350 inwoners per km^2 → ongeveer 3000 m^2 per inwoner
0,55 telefoonaansluitingen per inwoner → ongeveer 2 inwoners per aansluiting.

Een bekend voorbeeld hiervan is benzineverbruik. Bij al dit soort opgaven gaat het meestal om het vergelijken van verhoudingen (type 2).

Moeilijkheidsfactoren

Aanbiedingsvorm

De wijze waarop een probleem wordt aangeboden, kan variëren van een plaatje zonder tekst tot een louter verbale presentatie. Daartussen zijn allerlei vormen mogelijk. Een visuele aanbieding voorkomt de bekende leesproblemen. Anderzijds is het voor realistische opgaven vaak noodzakelijk ook informatie via geschreven teksten te verschaffen. Dit speelt bijvoorbeeld als we problemen aan de actualiteit, zoals de krant, ontlenen. Soms verdient het aanbeveling hierbij bepaalde delen van de tekst eruit te laten springen, te vereenvoudigen of het artikel in stukken te knippen.

Discreet of continu

Het werken met discrete grootheden is gemakkelijker dan met continue grootheden. Maar het is nodig om de gehele getallen op een gegeven moment uit te breiden. Dit verhoogt het moeilijkheidsniveau zowel naar begrip als naar technische vaardigheid.

Soort en grootte van de getallen

Samenhangend met het voorgaande merken we op dat uit nationaal en internationaal onderzoek bekend is dat verhoudingsproblemen met breuken en kommagetallen aanmerkelijk minder goed opgelost worden dan die met gehele getallen. Verder is ook de grootte van de getallen daarbij een belangrijke factor.

Directe of indirecte vraagstelling

Dit speelt bijvoorbeeld een rol bij het bepalen van de vierde evenredige (type 4).

Twee potloden kosten 70 cent. Hoeveel kosten 14 potloden?

Deze directe vraag voert tot een vermenigvuldiging (7 x 70) als meest voor de hand liggende oplossing. Vragen we hoeveel potloden je voor ƒ 4,90 kunt kopen dan is de vraagstelling indirect en kan leiden tot een deling (4,90 : 0,70). Het is bekend dat de indirecte vraagstellingen meer problemen opleveren.

Context

Naarmate de context de feitelijke verhoudingsstructuur van een probleem meer versluiert, is de moeilijkheidsgraad hoger. Bekend lastige vraagstellingen zijn onder meer economische problemen, zoals valuta-sommen. Een andere factor uit de context die de moeilijkheidsgraad kan verhogen, is het ontbreken van informatie of juist het voorkomen van overbodige gegevens. In het eerste geval moet een leerling zelf aannames doen en daarmee verder werken. In het tweede geval zit de moeilijkheid in het selecteren van de voor de probleemstelling relevante gegevens.

Misleiding

Soms lijken vraagstukken een verhoudingsstructuur te hebben.

Het koken van een ei kost vier minuten. Hoeveel tijd is nodig om zes eieren te koken?

Dit is een bekend en misschien wat flauw voorbeeld. Echt duidelijk treden deze kwesties op bij meetkundige vergrotingen en verkleiningen en het vergelijken van oppervlakte.
Tenslotte wijzen we op verschijnselen die juist een omgekeerde evenredigheid veroorzaken.

Jan fietst van A naar B met een bepaalde snelheid. Hij doet er 20 minuten over.
Piet fietst tweemaal zo snel. Hoe lang doet Piet erover van A naar B?

Doel van het antwoord

Tenslotte bepaalt ook het doel van het antwoord een moeilijkheidsfactor. Wil je een precies antwoord of volstaat een schatting? Heel vaak kan men, zeker bij vergelijken van verhoudingen, met een schatting volstaan.

Ook als een precieze berekening vereist wordt, zal een schatting vooraf zinvol zijn. Bij dit schatten zal veelal veel minder gebruik gemaakt worden van modellen, maar wordt meestal al op vrij hoog niveau uit het hoofd gerekend. Leerlingen moeten natuurlijk bewust gemaakt worden van het nut van dit schattend rekenen en de methoden die er voor zijn.

Modellen

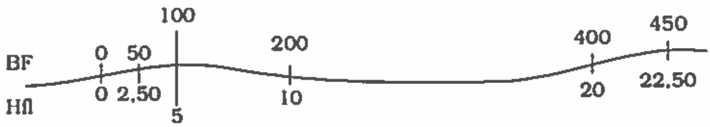
De twee meest gebruikte modellen voor verhoudingsvraagstukken zijn de verhoudingstabel en de dubbele getallenlijn. We brengen ze in beeld aan de hand van de volgende opgave:

De koers van de Belgische Franc (BF) is 100BF voor 5 gulden (Hfl). Wat kost een menu van 450 BF in Nederlands geld?

Verhoudingstabel:

Bf	100	200	400	50	450
Hfl	5	10	20	2,50	22,50

Dubbele getallenlijn:



In beide modellen wordt het gezochte bedrag opgebouwd via verdubbelen, halveren en samennemen. Uiteraard is het 10x nemen ook heel belangrijk.

De verhoudingstabel is meer een rekenmodel dan een denkmodel. Dit brengt het gevaar mee dat de zwakkere leerlingen, de verbinding tussen de getallen in de tabel en de context uit het oog verliezen. Hierdoor gaan ze soms fantastisch met de symbolen uit de tabel manipuleren, rekenregels overtreden en blind algoritmisch opereren. Kortom, we moeten oppassen dat de tabel niet een doel in zichzelf wordt.

De dubbele getallenlijn verschilt in de eerste plaats van de tabel doordat die de ordening van de getallen behoudt. Tevens kan de dubbele getallenlijn in eerste instantie als een concrete visualisering van een probleem gepresenteerd worden. Bijvoorbeeld door afgelegde weg en tijd op boven- en onderkant af te beelden ('model van').

Doordat de dubbele getallenlijn als een combinatie van de verhoudingstabel en de gewone geordende getallenlijn beschouwd kan worden, kan hij zowel als denkmodel als als rekenmodel gehanteerd worden ('model voor'). Wat het feitelijk rekenen betreft kan uiteindelijk worden aangestuurd op allerlei verkortingen.

x4,5

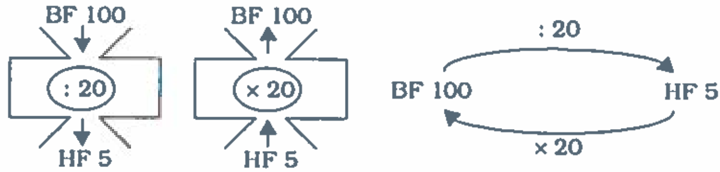
BF	100	450
Hfl	5	

x4,5

BF	100	450
Hfl	5	

:20

De directe relatie van boven- en onderkant van tabel of getallenlijn kan via een 'machientje' of 'pijlentaal' geformaliseerd worden.



machientje pijlentaal

Samenhang met de vanouds bekende regel voor evenredigheden, het zogenaamde 'kruiselings vermenigvuldigen', kan eventueel via het verhoudingsblok (ook op te vatten als kleine verhoudingstabel) aan de orde gesteld worden. Nodig is dat in feite niet.

Procenten

Procenten zijn ooit ingevoerd om verhoudingen te standaardiseren, waardoor deze gemakkelijker te vergelijken zijn. We onderscheiden twee belangrijke aspecten van het procentenbegrip. Enerzijds percentage als fractie, anderzijds percentage als operator. Percentage als fractie komen we bijvoorbeeld tegen in de uitspraak: *In Nederland is de werkeloosheid 10%.* Zodra we gaan rekenen zien we het aspect percentage als operator.

Als er in Nederland vijf miljoen mensen aan het arbeidsproces deelnemen, dan zijn er 10% van vijf miljoen, dat is 500.000 personen werkeloos.

Twee hoofdtypenvan vraagstukken

Behalve het onderscheiden van deze twee aspecten, kunnen we ten behoeve van het onderwijs de procentenvraagstukken indelen in twee hoofdtypen, dit zijn: vraagstukken betreffende *deel ten opzichte van geheel* en vraagstukken met *geheel plus of min deel.*

deel ten opzichte van geheel

De *deel/geheel*-problemen betreffen altijd percentages die kleiner dan honderd zijn. Ze 'beschrijven' de samenstelling van een geheel dat uit twee of meer delen bestaat. Voorbeelden waarin deel/geheel voorkomt zijn: mengsels, verkiezingen/opiniepeilingen, goedscores bij toetsen, bevolkingssamenstelling, gezinsuitgaven, kansen. Soms wordt alleen naar de verhoudingen van de samenstellende delen verwezen of dienen de fracties alleen om een indruk van de samenstelling te geven. Zoals bijvoorbeeld:

Deze sokken bestaan voor 40% uit katoen en voor 60% uit kunstvezel.

Bij de berekeningen komen in eerste instantie drie grootheden voor. We onderscheiden:

G: het grondbedrag (geheel).
p: het percentage (zoveelste deel van).
P: het percentagebedrag (deel).

Als twee van deze drie grootheden gegeven zijn is de derde te berekenen. We vatten deze drie typen vraagstukken samen met enkele voorbeelden in de volgende tabel.

Voorbeeld	G	p	P
a) Hoeveel is 4% van ƒ200,—.	200	4	?
b) 75 eieren van 1500 zijn gebroken. Hoeveel procent?	1500	?	75
c) Iemand geeft 5% van zijn loon uit aan clubs. Dat is ƒ80,–. Hoeveel verdient hij?	?	5	80

geheel plus of min deel

We komen nu tot de analyse van het tweede hoofdtype. Hier zouden we eigenlijk *geheel* plus *deel* en *geheel* min *deel* moeten onderscheiden. Bij de plus-sommen kunnen percentages die groter dan honderd zijn optreden, terwijl dat bij de min-sommen beperkt blijft tot percentages onder de honderd. In feite gaat het hierbij om al die problemen waarbij van groei of afname (negatieve groei) sprake is. De meest bekende voorbeelden zijn het groeien van een populatie mensen of dieren, de groei van geld en prijsverhogingen.

Als voorbeeld bepalen we ons hier alleen tot de prijsstijgingen. Maar al hetgeen volgt, geldt ook voor prijsdalingen.

De prijs van het tijdschrift 'Rekenschap' is ƒ 15,–
Deze prijs wordt met 10% verhoogd.
Wat is de nieuwe prijs?

Nu komen vier grootheden voor:

G: het grondbedrag (geheel)
p: het percentage (zoveelste deel van)
P: het percentagebedrag (deel)
E: het eindbedrag ($E = G + P$)

Dit type vraagstuk is ook weer onder te verdelen in drie soorten, al naar gelang het onbekend zijn van één van de drie variabelen E, p of G. We zetten de drie soorten bij elkaar in de volgende tabel:

Voorbeeld	G	p	E
a) Een tijdschrift van ƒ 15,– wordt in prijs verhoogd met 10%.	ƒ 15,–	10%	?
b) Een strippenkaart van ƒ 9,35 kost nu ƒ 10,25.	ƒ 9,35	?	ƒ 10,25
c) Een pakje visitekaartjes kost ƒ 15,– inclusief 20% BTW.	?	20%	ƒ 15,–

Met deze beschrijving hebben we een formele indeling gegeven van het onderwerp procenten. Het dient slechts als houvast en overzicht voor de docent, want de didactische aanpak zal natuurlijk weer sterk afhangen van het niveau van de leerlingen en de beoogde einddoelen.

Modellen

Na voorgaand overzicht van de twee typen vraagstukken, gaan we nu verder in op het gebruik van verschillende modellen.

Verhoudingstabel.

Zoals eerder gezegd, is de verhoudingstabel meer een rekenmodel dan een denkmodel. Hiermee kan een verhouding tot 'zoveel per honderd' herleid worden waarna het percentage kan worden afgelezen. Het herleiden kan betekenen: uitbreiden of reduceren tot zoveel per honderd. We willen hierbij opmerken dat dit bij bepaalde contexten bij sommige leerlingen uit de brugklas van de experimenteerscholen emotionele weerstanden opriep. Bijvoorbeeld in het volgende geval:

Eric schoot bij basketbal 18 van de 40 schoten raak.

Zonder op de context te letten kun je de verhouding snel uitbreiden tot 45 op de 100. 'Maar hij kan wel alles missen na die veertigste worp'. De als-dan gedachte werd te letterlijk genomen.
In discrete situaties kan het volgende zich voordoen: $7\frac{1}{2}$ van de 100 leerlingen. 'Er zijn toch geen halve leerlingen!'

Als de gegeven getallen lastig zijn kan via normeren op 1 het aantal per honderd gevonden worden met behulp van de zakrekenmachine:

:6070 x100

aantal uitrijders	4739	0,78	
aantal deelnemers	6070	1	100

:6070 x100

Intoetsen op de rekenmachine:

4739 $\boxed{:}$ 6070 $\boxed{\times}$ 100 $\boxed{=}$ ...

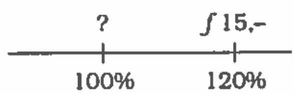
Hier zou ook de samenhang met breuken, kommagetallen en procenten gebruikt kunnen worden:
$\frac{4739}{6070}$ deel van ... is 0,78 deel van ... is 78% van ...

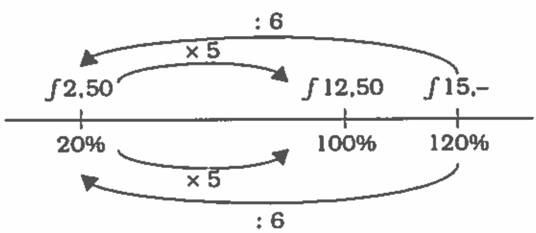
Dubbele getallenlijn

In alle situaties waarbij het percentage gegeven is biedt de dubbele getallenlijn goede ondersteuning.
Als overgangsmodel kan een elastieken procentenmeter dienst doen.

Met behulp van deze elastieken procentenmeter kunnen later niet alleen deel/geheel vraagstukken schattend opgelost worden, maar ook lastigere problemen van het type 'geheel plus of min deel'. Bijvoorbeeld 350 gulden eerst verhogen met 18%, daarna dat bedrag verlagen met 18%. De vraag is of je dan weer op 350 gulden uitkomt.
Op het elastiek staan niet alleen percentages van 0 tot 100, maar ook groter dan 100.
Het kan dan gebruikt worden als aanvankelijk middel voor het schatten met procenten, waardoor ook de samenhang tussen breuk en procenten aanschouwelijk gemaakt kan worden. Een verschraling van dit model leidt tot de dubbele getallenlijn, de visuele ondersteuning blijft bewaard:

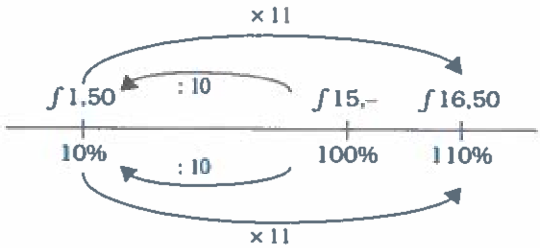
Een pakje visitekaartjes kost ƒ 15,– inclusief 20% BTW. Wat is de prijs zonder BTW?



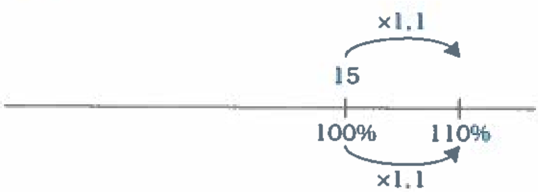


Tenslotte kan door verkorting van het aantal stappen gerekend worden met percentage als factor:

Een tijdschrift van ƒ 15,– wordt in prijs verhoogd met 10%.



In één stap:



Zo kom je dan uit op het hoogste niveau: procentuele toe- of afname opvatten als voorbeeld van exponentiële groei met bijbehorende groeifactor, zoals bijvoorbeeld rente op rente.
Dit niveau wordt door mavo-D leerlingen bereikt in het derde leerjaar. Tenslotte willen we nog opmerken dat het beter is dat leerlingen in situaties waarin de getallen eenvoudig zijn niet meer de modellen gebruiken maar het verband tussen verhoudingen, breuken, kommagetallen en procenten uitbuiten.

Samenhang met verhoudingen, breuken en kommagetallen

Voor het rekenen met procenten maken we, zoals we hiervoor zagen, afwisselend gebruik van verhoudingen, breuken en kommagetallen. We zagen ook al dat *verhoudingen* veel gebruikt worden om een *fractie* te beschrijven, zoals in:

Eric schoot bij basketbal 18 van de 40 schoten raak;
4 van de 5 zitplaatsen in de trein worden voor niet-rokers gereserveerd;
1 van de 25 Nederlanders is functioneel analfabeet;
112 van de 150 Tweede-Kamerleden kozen voor een OV-kaart in plaats van autovergoeding;
20 van de 1000 loten leveren een prijs op.

Al deze voorbeelden geven uitstekende informatie over de 'concentratie' van een gedeelte met een bepaald kenmerk ten opzichte van het geheel.
Soms is het ook handig om percentages om te zetten in een verhouding. We geven twee voorbeelden:

33% van de wedstrijden is verloren kan vertaald worden naar de uitspraak *gemiddeld ongeveer 1 op de 3 was een fiasco.*
5% van een zending glaswerk is breuk betekent *gemiddeld 1 van de 20 glazen is kapot.*

We vatten het voorgaande samen in het volgende schema:

verhouding		**percentage**
1 van de 5 2 van de 10 20 van de 100	↔	20%

Eén van de drie Nederlanders wordt door een misdrijf getroffen, kan ook met een operator geschreven worden, namelijk als volgt:

éénderde deel van ...

$\frac{1}{3}$ *deel van ...*

Het woordje *van* duidt erop dat we de operatie vermenigvuldigen moeten toepassen. Er zijn 15 miljoen Nederlanders. En daar*van* worden er $\frac{1}{3} \times 15$ miljoen = 5 miljoen door een misdrijf getroffen. Het *breukdeel* fungeert zoals we zeggen als een *operator* ($\times \frac{1}{3}$ of $\frac{1}{3} \times$) op het geheel.
Omdat bij elke breuk een kommagetal hoort en omgekeerd, en de kommagetallen de verhouding op honderd gemakkelijk maken, dient ook deze samenhang benadrukt te worden.:

breuk		**kommagetal**
$\frac{2}{5}$	↔	0,4
$\frac{2}{3}$	↔	0,66666 ...

Deze samenhang tussen breuk en kommagetal biedt de eenvoudigste manier om van verhoudingen via breukdeel als kommagetal over te stappen op procenten:

verhouding → **breukdeel van** → **kommagetal** → **percentage**

1 van de 8 → $\frac{1}{8}$ deel van ... → 0,125 deel van ... → 12,5 %

Voor het berkenen van een *percentagebedrag* is het hanteren van de breuk of kommagetal als operator vaak de aangegeven weg. Het zal van de situatie afhangen wat de handigste manier is.

25 procent van het stadion met 60.000 plaatsen is bezet
gaat eenvoudiger via $\frac{1}{4}$ × 60.000 uit het hoofd dan via 0,25 × 60.000. Maar bij 3,5 procent van *ƒ* 3671,– kiezen we liever voor 0,035 × *ƒ* 3671,– = *ƒ* 128,49 met behulp van een zakrekenmachine.

We hebben dit alles besproken, uitgaande van onze reeds verworven kennis van verhoudingen, breuken en kommagetallen. Dan ziet de samenhang er simpel uit, maar als de leerlingen hun eerste schreden doen in die verschillende gebieden, is het natuurlijk niet zo eenvoudig de omvattende structuur meteen te doorzien. Temeer daar de weg tot een mogelijk inzicht soms geblokkeerd wordt door gebrek aan rekenroutines. Deze routines zouden vooral tijdens het oefenen met hoofdrekenen aan de orde gesteld kunnen worden aan de hand van eenvoudige veelvoorkomende probleempjes zoals:

4% van ƒ 200,–
75 van de 300, hoeveel procent?
Een vakantiereis van ƒ 800,–, kost nu 25% meer.
$\frac{4}{5}$ *deel van iets, hoeveel procent?*

Waar het om gaat is niet alleen dat dergelijke sommetjes vlot uit het hoofd opgelost kunnen worden, maar vooral dat leerlingen zo mogelijk handig switchen: 33% van iets is ongeveer $\frac{1}{3}$ deel.
Tenslotte willen we hier nogmaals de praktische waarde van het schatten benadrukken. Het schatten van een uitkomst kan het eerste houvast geven voor het oplossen van een rekenprobleem.

Een computer kost ƒ 1949,–. De BTW is 18,5%.
Er komt dus ongeveer $\frac{1}{5}$ *x ƒ 2000,– = ƒ 400,– bij.*
Een horloge is afgeprijsd van ƒ 198,– voor ƒ 149,–.
Dat is een korting van 25%.
Terwijl een prijsstijging van ƒ 149,– naar ƒ 198,–- een stijging is van ongeveer 33%.

Literatuur

Abels, M. (1991). Procenten in W12-16. *Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs* (Nieuwe Wiskrant) *10* (3), 20-25, Utrecht: Freudenthal instituut, RU Utrecht.

Bokhove, J. en J. Janssen (1988). Periodiek Peilingsonderzoek in het basisonderwijs (4). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 7 (2), 16-35. Utrecht: Freudenthal instituut, RU Utrecht.

Bokhove, J. en J. Janssen (1989). Periodiek Peilingsonderzoek in het basisonderwijs (4). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 7 (3/4), 3-14. Utrecht: Freudenthal instituut, RU Utrecht.

Heuvel-Panhuizen, M. (1990). Lijn in verhoudingen. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 9 (2), 21-26., Utrecht: Freudenthal instituut, RU Utrecht.

Moor, E. de, L. Streefland en A. Treffers (1991). Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (13). Procenten, analyse van het gebied, *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 9 (4), 25-42. Utrecht: Freudenthal instituut, RU Utrecht.

Streefland, L., E. de Moor en A. Treffers (1990). Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (11), Verhoudingen numeriek (2). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 9 (2), 27-26. Utrecht: Freudenthal instituut, RU Utrecht.

Streefland, L. E. de Moor en A. Treffers (1991). Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (14), Procenten, didactische notities, *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 9 (1), 29-42. Utrecht: Freudenthal instituut, RU Utrecht.

Treffers, A., L. Streefland en E. de Moor (1991). Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (12), Verhoudingsmodellen, *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 9 (3), 33-34. Utrecht: Freudenthal instituut, RU Utrecht.

BREUKEN

Eindniveau basisonderwijs

Van de heikele onderwerpen kommagetallen, procenten, verhoudingen en breuken is het laatste wel het allerlastigste. In ieder geval hoort men er de meeste klachten over; vooral wat het opereren met breuken betreft. Als proef raden wij aan een aantal volwassenen het volgende rijtje eens voor te leggen:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \ldots$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \ldots$

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \ldots$

$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \ldots$

Men zal versteld staan van de resultaten! Onze inschatting is dat de gemiddelde leerling eind basisschool hier veel beter op zal scoren.

Uit het reeds vaker geciteerde PPON-onderzoek weten we dat de basisbegrippen door deze groep leerlingen goed beheerst worden en dat op de operaties met kale getallen tamelijk goed gescoord worden. Op vereenvoudigingen, compliceren ($\frac{3}{4}=\frac{12}{16}$) en helen uithalen, lopen de goedscores van 75% tot 90%. Voor opereren met kale getallen geven we enkele voorbeelden met goedscores.

$6\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = ..$ (77% goed)

$2\frac{1}{4} + \frac{5}{8} = ..$ (69% goed)

$\frac{7}{8} - \frac{3}{4} = ..$ (71% goed)

Veel mindere resultaten worden behaald op eenvoudige toepassingen. Dan lopen de goedscores tot zo ongeveer 50% terug.

- In een stadion kunnen 60.000 toeschouwers. Je schat dat het stadion voor driekwart gevuld is. Hoeveel toeschouwers zijn er dan ongeveer? (57% goed)
- Een fles van $\frac{3}{4}$ liter is voor de helft gevuld.
  Hoeveel liter zit er in die fles? (29% goed)
- Vader gaat de tuin opnieuw indelen. De helft van de tuin wordt grasveld. Een derde deel wil hij beplanten met bloemen en de rest wil hij gebruiken voor het telen van groenten. Welk deel wil hij gebruiken voor het telen van groenten? (35% goed)
- Op een vergadering zijn 55 personen aanwezig. Bij een bepaald

besluit dat deze vergadering wil nemen, is het nodig dat tweederde deel van de aanwezigen vóór stemt. Hoeveel mensen moeten nu minstens vóór stemmen om dit besluit aangenomen te krijgen? (15% goed)

Met name valt hierbij op dat het deel nemen van (breuk als operator) slecht beheerst wordt. Tevens blijkt dat op het schatten slecht gescoord wordt. Omdat juist deze twee activiteiten van cruciaal belang zijn voor de toepassingen, komen we er nog op terug.

Aspecten

Afhankelijk van de context, zijn de volgende aspecten van het breukbegrip te onderscheiden: deel/geheel, meetgetal, operator, verhoudingsgetal en rekengetal. Op elk van deze aspecten gaan we hierna in.

Deel/geheel

Een geheel wordt eerlijk verdeeld over een aantal (personen).

Drie kinderen verdelen een reep chocolade. Hoeveel krijgt ieder?

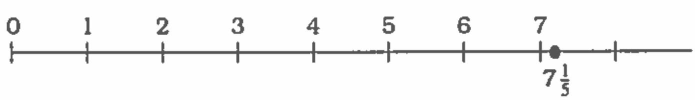
Hierbij wordt een deel van één object benoemd. Dit kan zich ook bij meerdere objecten voordoen.

Drie kinderen verdelen vier repen. Hoeveel krijgt ieder?

Het eerste geval leidt altijd tot breukdelen kleiner dan één. In het tweede geval kunnen ook breuken groter dan 1 ontstaan.
Tevens doen zich in het laatste geval twee mogelijkheden voor om het verdelen te laten plaatsvinden. Per reep ($\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{3}$), of eerst drie hele uitdelen en daarna één reep (1 + $\frac{1}{3}$).

Meetgetal

Je meet met een vaste maat (een latje) de lengte van een object (de tafel). De lengte is zeven latjes én nog éénvijfde deel van dat latje.



In dit geval werken we met een lengtemaat, behorend bij de grootheid lengte. Andere grootheden, zoals inhoud, gewicht, oppervlakte, tijd, enzovoort, bieden dezelfde mogelijkheden om breuken als meetgetallen te introduceren. Direct wordt het getal verbonden met een getallenlijn.

Operator

Dit aspect komt in eerste instantie voort uit het deel nemen van een hoeveelheid of object (let op het subtiele verschil met eerlijk verdelen).

$\frac{1}{5}$ deel van de verkeersstroom gaat linksaf. Er passeren tweeduizend auto's. Hoeveel auto's gaan linksaf?

Dit aspect komt veelvuldig voor en is voor de toepassingen uitermate belangrijk.

$\frac{3}{4}$ van de Nederlandse huishoudens heeft een huisdier.
Het vasteland van de Zuidpool is $1\frac{2}{7}$ maal zo groot als Europa.

Het kent zowel het taalaspect *deel van* als *zoveel maal* en hangt dus samen met het vermenigvuldigen van een (geheel) getal met een breuk, hetgeen in de praktijk meestal neerkomt op delen, eventueel gevolgd door vermenigvuldigen.

$\frac{2}{5}$ van ƒ 2.000,–
ƒ 2.000 : 5 = ƒ 400,–
2 × ƒ 400,– = ƒ 800,–.

Verhoudingsgetal

Vier op de dertien mensen in deze wijk zijn werkloos.
De kans op een prijs is éénveertigste.
Deze wijn heeft een alcoholpercentage van 9.

De breuk als *verhoudingsgetal* komt o.a. voor bij *mengsels*, waarbij de delen van het mengsel met elkaar of met het geheel worden vergeleken. Met name bij percentages is dit heel duidelijk. Bij het rekenen werkt de breuk weer als een operator.

Het ziektepercentage is 7% betekent dat er van elke honderd werknemers zeven ziek zijn. Bij een bedrijf van twaalfhonderd werknemers kunnen we dus zo'n $\frac{7}{100} \times 1200 = 84$ zieken verwachten.

De breuk als verhoudingsgetal biedt de mogelijkheid om de gelijkwaardigheid (equivalentie) van breuken te introduceren. Een veel gebruikt model hierbij is de *verhoudingstabel*.

Drie van de vier verenigingsleden is vóór een bepaalde maatregel.

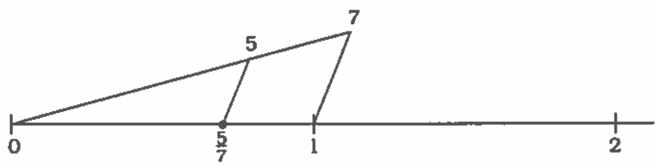
voor	3	6	30	75
totaal	4	8	40	100

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \ldots\ldots$

Rekengetal

Formeel is het invoeren van breuken niet moeilijk. Je wilt namelijk dat het wiskundige systeem zich netjes voortzet, zodat er bij elke deling van twee gehele getallen weer één getal past. Soms gaan de delingen op, maar het merendeel levert problemen op. Vandaar dat we nieuwe getallen bedenken met een nieuwe notatie. We noemen de uitkomst van 5 : 7 vijfzevende en schrijven $\frac{5}{7}$.

Overeenkomstig met de operatie delen is het dat getal dat vermenigvuldigd met 7, het getal 5 oplevert: $5 : 7 = \frac{5}{7} \Leftrightarrow \frac{5}{7} \times 7 = 5$
Voor elk zo geconstrueerd getal is er ook een eigen plaats op de getallenlijn:

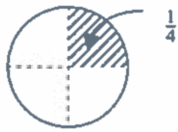


Bepaalde groepen van delingen komen op hetzelfde getal uit: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} \ldots$
Aan zo'n klasse van gelijkwaardige breuken voegen we een etiket toe. In het onderhavige geval een half ($\frac{1}{2}$). Daarna moeten weer passende regels geconstrueerd worden om met deze nieuwe getallen te kunnen rekenen.

Vanuit een wiskundig standpunt bezien is dat alles niet zo lastig, maar wel erg abstract. We zitten dan in een formeel systeem, waarbij de breuk nog slechts als rekengetal beschouwd en gehanteerd wordt. Een dergelijke formele invoering is didactisch gezien een niet aan te bevelen weg. Hoe kan dit dan wel gebeuren?

Toegangen en modellen

Het eerlijk verdelen van cirkels, rechthoeken en dergelijke, is van oudsher een bekende toegang tot het breukbegrip. In het bijzonder wordt het cirkelmodel (pannekoek, pizza) gebruikt om de deel/geheel relatie visueel te ondersteunen. In de traditionele breukendidactiek worden daardoor cirkelsegment en breuk geïdentificeerd. Breuken zijn dan sectoren:



en daarmee wordt vrij snel geopereerd ($\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ en dergelijke).
In toepassingssituaties, zoals bij 'deelnemen van', 'vergelijken', 'verkleinen' en 'meten' doen we echter weinig met het enkele idee dat een breuk een deel van een cirkel zou zijn. Toch heeft het eerlijk verdelen zijn betekenis voor de vulling van het breukbegrip. Bijvoorbeeld bij het vergelijken van verdeelsituaties:

Op de ene tafel drie pannekoeken en vier kinderen.
Aan de andere tafel vier pannekoeken en vijf kinderen.
Aan welke tafel krijgt men het meest?
Hoeveel krijgt men aan de eerste tafel en hoeveel aan de tweede tafel?

Wordt er gevraagd naar hoeveel meer, dan zal de verhoudingstabel hierbij betrokken kunnen worden:

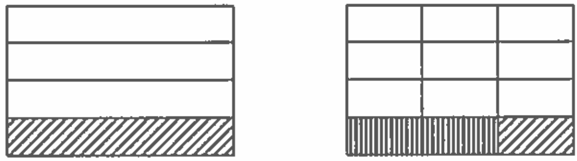
Pannekoeken	3	6	9	15
Kinderen	4	8	12	20

pannekoeken	4	8	12	16
kinderen	5	10	15	20

Hiermee kan de nadruk gelegd worden op het verhoudingsaspect van de breuken. Onder meer komt dit goed van pas bij procenten. De operaties komen er echter niet op eenvoudige wijze uit voort.

Net als bij het cirkelmodel wordt ook bij het rechthoeksmodel de deel/geheel relatie benadrukt. Ook het rechthoeksmodel kent al een lange traditie. Voordelen van het rechthoeksmodel zijn: de praktische bruikbaarheid om verdelingen te maken, waarmee in het breuken aanvangsonderwijs praktische oefeningen gedaan kunnen worden (blaadjes papier vouwen, rechthoeken tekenen ...), de geschiktheid om op formele wijze de vermenigvuldigingsoperatie van breuken te verklaren.

Voorbeeld $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$:



Maar ook aan het rechthoeksmodel kleeft het nadeel dat de operaties voor optellen en aftrekken een nogal gekunsteld karakter krijgen. En bovendien geldt ook nu weer dat het rechthoeksmodel geen relatie heeft met de meeste toepassingsvraagstukken over breuken, die vaak juist een lineair karakter hebben (tijd, afstand, geld, groei ...).

Wat het begrip en het rekenen met breuken zo lastig maakt is het gegeven dat de notatiewijzen en bewerkingsregels zo weinig te maken hebben met iets dat reëel voorstelbaar is. De vraag: *Welke van de getallen $\frac{3}{4}$ en $\frac{3}{5}$ is het grootst?*, blijkt voor zo'n 40% van de aankomende mavo(havo)-leerlingen te moeilijk te zijn. Hoe zal deze vraag, in een zinvolle context geplaatst, echter worden opgelost?

Jan en Piet krijgen elk ƒ10,- zakgeld.
Jan maakt $\frac{3}{4}$ deel op, Piet $\frac{3}{5}$ deel.
Wie heeft het meest uitgegeven?

Op die manier wordt de breuk als een benoemd getal geïnterpreteerd. Deze aanpak met zogenoemde benoemde breuken – in feite zijn dit meetgetallen – biedt goede mogelijkheden tot breukbegrip, ordenen en algoritmen. Steeds wordt gedacht aan een grootheid waarvan we een deel nemen. Een prettige grootheid is een reep, die de kinderen al naar gelang de aard van de opgave zelf in een gepast aantal delen verdelen. Leerlingen in het begin van groep 5 (negen tot tien jaar) zijn al direct in staat tot opmerkelijke resultaten op het volgende vraagstuk:

Adri krijgt $\frac{3}{4}$ reep.
Anita krijgt $\frac{5}{6}$ reep.
Wie krijgt het meeste?
Hoeveel meer?
Hoeveel samen?
Hoeveel heeft ieder over?

Ze kiezen zelf een geschikte maat voor de beide repen (twaalf of vierentwintig stukjes) en vergelijken de verdelingen. De antwoorden variëren van het niveau dat in stukjes wordt gerapporteerd tot $\frac{2}{24}$ of $\frac{1}{12}$

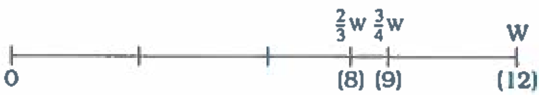
meer (hoeveel meer) $1\frac{7}{12}$ of $\frac{19}{12}$ (hoeveel samen).
De hier kort aangeduide methode vereist natuurlijk enige voorwaarden, zoals het kunnen nemen van een deel van een geheel getal, wat we het operatoraspect genoemd hebben:

$\frac{3}{4}$ van 12 $\quad\frac{1}{4}$ van 12 = 3 $\quad\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$ .... etc.

Verder moet het zoeken van een geschikte ondermaat (in dit geval twaalf of vierentwintig) natuurlijk ook beheerst worden. Behalve dit repenmodel kan deze aanpak direct een meer getalsmatig karakter krijgen als aan de grootheid (of het object) een waarde wordt toegekend.
De reep is twaalf gulden waard $\frac{3}{4} \times f12,- = f\,9,-$ en $\frac{5}{6} \times f12,- = f10,-$.
Een gulden van de 12 meer: $\frac{1}{12}$ meer.
Maar net zo goed had gekozen kunnen worden voor een jaar (twaalf maanden) of een klok (twaalf uur).
Dit idee van een zogenoemde *bemiddelende grootheid* benadrukt het eerder genoemde operator-aspect van de breuken. Tevens biedt het via de dubbele lege getallenlijn de mogelijkheid met name de ordening en de verschilbepaling helder uit de doeken te doen.

Karel heeft de weg naar school voor $\frac{2}{3}$ deel afgelegd en zus Wil voor $\frac{3}{4}$ deel. Wie is het dichtst bij school?

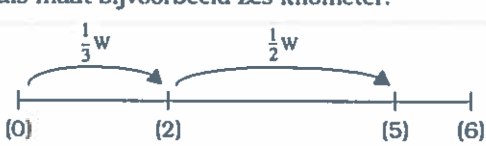
We kiezen voor de lengte van de weg (w) twaalf kilometer. Aan de onderkant de feitelijke kilometers 8 en 9 km, aan de bovenkant de benoemde breuken $\frac{2}{3}$w en $\frac{3}{4}$w:



Vervolgens kan ook nog het verschil bepaald worden $\frac{3}{4}w - \frac{2}{3}w = \frac{1}{12}w$, waarbij zich gedifferentieerde werkwijzen als $\frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$ kunnen voordoen.
Ook het optellen kan via de dubbele getallenlijn aan de orde komen:

Iemand legt een $\frac{1}{3}$ van een weg af. Een dag later de helft van die weg. Hoeveel is in twee dagen afgelegd?

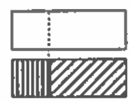
Kies als maat bijvoorbeeld zes kilometer:



Opgepast moet hier worden dat de stukken echt achter elkaar gelegd

worden en dat de halve weg ($\frac{1}{2}$w) een maat is die afgepast wordt.
Ook het vermenigvuldigen van breuken blijft betekenis houden indien we van benoemde breuken gebruik maken. $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6}$ vertalen we in het nemen van $\frac{3}{4}$ deel van $\frac{5}{6}$ reep. Hetgeen betekent dat we de operatie deel nemen van tweemaal achtereen uitvoeren. Ook nu is het weer zaak een passende maat te kiezen. Voor $\frac{5}{6}$ deel van zou dat twaalf kunnen zijn, maar dan gaat $\frac{3}{4} \times 10$ niet. Dus vierentwintig. Zodat we krijgen $\frac{5}{6} \times 24 = 20$ gevolgd door $\frac{3}{4} \times 20 = 15$ oftewel vijftien stukjes van de vierentwintig of $\frac{15}{24}$. Wat hiermee niet duidelijk gemaakt kan worden is de commutativiteit. Daarvoor hebben we het rechthoeksmodel nodig. Dit is overigens wel af te leiden uit de lineaire reep door de laatste om te structureren tot een tablet.

$\frac{1}{3}$ van een $\frac{1}{2}$ reep



$\frac{1}{3}$ van een $\frac{1}{2}$ tablet

Bij de rechthoek (tablet) wordt duidelijk dat het er niet toe doet of je eerst de helft neemt (horizontaal knippen) en daarna eenderde (verticaal knippen) of andersom.
Belangrijk is ook met gemengde breuken te leren vermenigvuldigen. Daarbij kan men allereerst schattend te werk gaan. Hoeveel is $2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2}$? (Een veel voorkomende fout antwoord is $4\frac{1}{4}$).
Maar $2 \times 2\frac{1}{2}$ (meter) is al 5 meter en dan moet er nog eens de helft van $2\frac{1}{2}$ meter bij.
Het rechthoeksmodel kan hier de toegang tot de meer formele aanpak zijn.

Voor het delen van breuken kan ook op het principe van de benoemde breuken teruggegrepen worden. Voor het kale sommetje $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ vragen we eerst hoe vaak past $\frac{1}{3}$ in een $\frac{1}{2}$ of bijvoorbeeld hoe vaak past $\frac{1}{3}$ uur op een $\frac{1}{2}$ uur dus hoe vaak passen twintig minuten op dertig minuten of $30 : 20 = 1\frac{1}{2}$.

Allerlei andere maten zouden hier ook gebruikt kunnen zijn. Waar het op neerkomt, is dat de deling als een verhouding wordt gezien en dat een verhouding van twee getallen niet verandert als ze beide vergroot of verkleind worden. In traditionele termen gezegd: teller en noemer zijn met hetzelfde getal vermenigvuldigd. Maar let op het didactische verschil tussen: $30 : 2\frac{1}{2}$ óf $\frac{30}{2,5}$ óf hoeveel stukken touw van $2\frac{1}{2}$ meter gaan er uit dertig meter. Wat kan leiden tot 3000 dm : 25 dm.

Bij deling van breuken waarbij de deler (of noemer) groter is dan het deeltal (teller) zoals bij $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$, is het 'passen op' lastiger aan te wenden en moeten we steeds meer de formele werkwijze kiezen. Hier-

bij zouden wij ook de methode van vergroten willen aanbevelen.
$\frac{1}{3} : \frac{1}{2} = (\frac{1}{3} \times 6) : (\frac{1}{2} \times 6) = 2 : 3 = \frac{2}{3}$

Formeel Rekenen

We zagen hiervoor al dat men op een gegeven moment niet ontkomt aan een meer formele benadering van de breuken. Dit is niet per se nodig voor alle leerlingen. Voor het optellen en aftrekken van breuken betekent dit dat het gelijknamig maken (al of niet via een bemiddelde grootheid) aan de orde gesteld moet worden.
$\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ wordt $\frac{8}{12}r + \frac{3}{12}r = \frac{11}{12}r$ dit wordt $\frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$
Voor het vermenigvuldigen betekent dit te komen tot de regel *teller × teller en noemer × noemer*
$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$ wordt $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times (12) = \frac{2}{3} \times 3 = 2$ dit is 2 van de 12 dus $\frac{2}{12}$
Hierbij komt natuurlijk het vereenvoudigen
$\frac{2}{12} = (2 \times 1)/ (2 \times 6) = \frac{1}{6}$.
Tot slot is het delen het best formeel in te bedden met de verhoudingsregel $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = (\frac{1}{2} \times 6) : (\frac{1}{3} \times 6) = \frac{3}{2}$
Zeker niet op de blinde regel *vermenigvuldigen met het omgekeerde* afstevenen.

Breuken in het leerplan

Men kan er aan het begin van het voortgezet onderwijs niet van uitgaan dat de breuken volledig beheerst worden. Met name de lbo/mavo-leerlingen scoren zwak zowel op begrip als op de rekenregels. Af te raden is om opnieuw te starten met blinde algoritmen via kale getallen. De nadruk zou moeten komen te liggen op begrip en vaardigheid naar niveau. Zo zou voor het laagste niveau vooral het toepassingskarakter met eenvoudige breuken benadrukt moeten worden. Terwijl de havo/vwo-leerlingen ook de formele regels onder de knie moeten krijgen.
We stellen als doel dat alle leerlingen in contextproblemen met eenvoudige breuken kunnen werken. Daarvoor is het nodig dat ze een goed breukbegrip hebben. Niet zo zeer 'figuraal' ($\frac{1}{4}$ pannekoek), maar getalsmatig: $\frac{1}{4}$ is een deel van de eenheid.
De volgende activiteiten komen voor bij het werken aan contextproblemen. Deze krijgen aandacht in het leerplan.

- Een 'deel van' een getal bepalen; zowel schattend als exact.
- Een breuk zien als verhouding én omgekeerd.
- Het omzetten van breuken naar kommagetallen.
  Met elementaire breuken ook uit het hoofd (bijvoorbeeld $\frac{1}{4} = 0{,}25$; $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{3}{4} = 0{,}75$). Verder met behulp van de zakrekenmachine.
- Gebruik maken van relaties als: $\frac{3}{5} = 3 \times \frac{1}{5}$ en $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$.
- Helen uithalen, vereenvoudigen en compliceren.

Door breuken te binden aan grootheden wordt het meetaspect benadrukt, op deze wijze krijgt onder andere het ordenen een veel zinvollere betekenis. Bijvoorbeeld: 'wat is groter $\frac{3}{4}$ of $\frac{3}{5}$' kan opgevat worden als: 'wat is meer $\frac{3}{4}$ van een grootheid of $\frac{3}{5}$ ervan'. Ook optellen en aftrekken kan goed via bemiddelende grootheden verhelderd worden.
$\frac{2}{3}$ + $\frac{4}{5}$ kan worden vertaald naar:
$\frac{2}{3}$ (van een jaar van 12 maanden) + $\frac{3}{5}$ (jaar van 12 maanden).

Wat het rekenen met formele breuken betreft, dit zal vooral voor de doorstromers naar het havo/vwo-niveau onderhouden moeten worden. We stellen echter voor dit beperkt te houden tot eenvoudige breuken en vooral de nadruk te leggen op het inzicht en de binding met de realiteit (zie het voorgaande) niet uit het oog te verliezen. Ook voor dit onderdeel van het reken-wiskundeonderwijs hoeven we niet meer eindeloos te oefenen omdat ook voor het werken met gewone breuken thans eenvoudige rekenmachines ter beschikking staan.

Literatuur

Treffers, A., L. Streefland en E. de Moor (1991). Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (15), Breuken (deel 1). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 10* (2), 3-10, Utrecht, Freudenthal instituut, RU Utrecht.

Treffers, A., L. Streefland en E. de Moor (1991). Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (17), Breuken (deel 3). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 10* (4), 22-28, Utrecht, Freudenthal instituut, RU Utrecht.

Treffers, A., L. Streefland en E. de Moor (1992). Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (16), Breuken (deel 2). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 10* (3), 14-25, Utrecht, Freudenthal instituut, RU Utrecht.

KOMMAGETALLEN

Eindniveau basisonderwijs

De resultaten van het PPON-onderzoek van het CITO uit 1987 geven het volgende beeld. Ongeveer tweederde deel van de leerlingen die de basisschool verlaten, heeft een behoorlijk begrip van kommagetallen en beheerst het cijferend optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met kommagetallen goed. Dit geldt ook voor eenvoudige toepassingen. Cijferend delen wordt beduidend minder goed beheerst.
Hoofdrekenen met eenvoudige kommagetallen wordt door ongeveer de helft van de leerlingen beheerst. Opvallend is dat dit ook geldt voor het rekenen met x 10, x 100, : 10, : 100.

18,6 x 100 = ... (gemiddelde goedscore: 57%)
27,4 : 100 = ... (gemiddelde goedscore: 47%)

Zeer lastig zijn opgaven als 4 : 0,25 (gemiddelde goedscore: 40%).
Op schattend rekenen met kommagetallen wordt het slechtst gescoord.

Yvonne rekent uit op haar rekenmachine:
712,347 + 589,2 + 4,553 = 13091.
Bij het opschrijven van het antwoord is ze de komma vergeten.
Wat moet het antwoord zijn?

De gemiddelde goedscore hierop bedraagt 32%. Slechts één van de acht leerlingen gaat schattend te werk. Ongeveer 16% gaat cijferen, maar de helft daarvan doet het fout. In het algemeen kan men stellen dat 10% tot 25% van de kinderen wel eens overgaat tot een schatting, afhankelijk van de aard van de opgave, de getallen en de expliciete vraag om een schattingsstrategie te hanteren. Hierbij moet nog opgemerkt worden dat ook het afronden door zo'n 60% van de leerlingen moeilijk wordt gevonden.

Uit het PPON-rapport blijkt tenslotte dat gedurende de laatste drie jaar van de basisschool aan cijferen (gehele en kommagetallen) een vol uur per week (20% van de beschikbare tijd) wordt besteed. Aan hoofdrekenen (inclusief schattend rekenen) is dit een dik half uur (13% van de tijd). Terzijde merken we op, dat de resultaten in het buitenland over het algemeen overeenkomstig zijn, bijvoorbeeld in Duitsland, maar ook vaak veel slechter zijn (in de USA bijvoorbeeld). Gegeven deze situatie, die overigens in vroeger jaren niet veel beter was, is het zaak aan het onderwerp kommagetallen ook in het voortgezet onderwijs aandacht te besteden. En wel op de volgende aspecten:

- begrip;
- schattend rekenen;
- positiesysteem;
- hoofdrekenen en gebruik van de zakrekenmachine.

Begrip van kommagetallen

Kommagetallen zijn vooral bekend uit het alledaagse meten, denk maar aan 17,37 m of 7,365 kg of *f* 1,79. Meestal worden ze ook op deze wijze in het onderwijs ingevoerd. Grootheden bieden een goede mogelijkheid om de betekenis van de bijbehorende meetgetallen te doorzien:

2,35 m betekent:

2 meter en 35 centimeter of 200 cm + 30 cm + 5 cm

maar ook:

2 m + 0,3 m + 0,05 m en met gewone breuken: 2 m + $\frac{3}{10}$ m + $\frac{5}{100}$ m.

Inzicht in en het opereren mèt kommagetallen kunnen bevorderd worden door het gebruik van grootheden.

Zo blijken eenvoudige opgaven met louter rekengetallen veel slechter gemaakt te worden dan met meetgetallen.

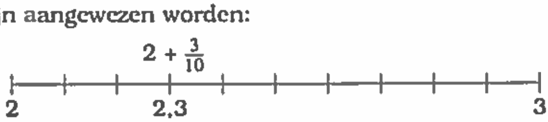
4 : 0,25 versus *f* 4,– : *f* 0,25 (hoeveel kwartjes in vier gulden?)

De samenhang van meetgetallen met het positiesysteem is mede van belang om de tien-bundelingen, die ook achter de komma plaats vinden, bewust te maken:

$2{,}3 + 3{,}7 = 2\,\frac{3}{10} + 3\,\frac{7}{10} = 5 + \frac{10}{10} = 5 + 1 = 6.$

Veelvuldig komt de zogenoemde kommascheidingsfout voor. Dit betekent dat een kommagetal wordt opgevat als twee verschillende getallen. Het getal vóór en dat achter de komma, hetgeen bijvoorbeeld leidt tot: 2,3 + 3,7 = 5,10. Bij het gebruik van meetgetallen zouden we kunnen zeggen 5 meter en 10 decimeter. Wellicht dat hierdoor zulke fouten ontstaan. De meer *formele* aanpak van de kommagetallen als uitbreiding van het positiesysteem kan dan helpen. Daarbij komt ook *taal* en *notatie* aan de orde. De praktische uitspraak van 2,3 als twee komma drie is aan te bevelen mits men zich bewust blijft van de betekenis $2 + 0{,}3 = 2 + \frac{3}{10}$.

Het gebruik van de zakrekenmachine betekent dat thans ook 2.3 (twee punt drie) gebruikt kan worden. Essentieel is het begrip, dat kommagetallen tussen de gehele getallen in liggen, dat het breuken zijn. Ze kunnen op de in tienen verdeelde tussenruimtes op de getallenlijn aangewezen worden:



Dat 2,3 betekent 'twee en nog een beetje', kan versterkt worden door de visualisering op de getallenlijn. Een overigens niet zo gemakkelijke activiteit. Gemengde kommagetallen (geheel getal plus een deel) zijn makkelijker te begrijpen en te hanteren dan de zuivere kommagetallen, die tussen 0 en 1.
Voor de laatste is het belangrijk de omzettingen van gewone breuken naar kommagetallen goed te kennen vooral de eenvoudige gevallen:

$\frac{1}{2} = 0,5$ $\quad \frac{1}{4} = 0,25$ $\quad \frac{3}{4} = 0,75$

$\frac{1}{5} = 0,2$ $\quad \frac{2}{5} = 0,4$ $\quad \frac{3}{5} = 0,6$ $\quad \frac{4}{5} = 0,8$

$\frac{1}{10} = 0,1$ $\quad \frac{2}{10} = 0,2$ enz.

De stambreuken $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ en $\frac{1}{9}$ leveren repeterende kommagetallen op:
$\frac{1}{3} = 0,333$ .... $\quad \frac{1}{6} = 0,16666$ ...etc.
In de praktijk zullen we hier meestal met afrondingen werken. De samenhang van de staartdeling 1 : 3 en het getal $\frac{1}{3}$ kan voor deze en andere getallen met de rekenmachine uitgevoerd worden. Het begrip van kommagetallen kan verdiept worden door gebruik te maken van het positiesysteem. Daarbij werken we op een meer formele manier, hetgeen niet voor alle leerlingen geschikt is. Een andere mogelijkheid om het begrip te verdiepen is gebruik te maken van het meetsysteem en kommagetallen te binden aan bekende grootheden. Op het positiesysteem komen we in een aparte paragraaf terug.

Schattend rekenen met kommagetallen

Schattend rekenen moet de basis zijn voor het rekenen met kommagetallen. Er wordt afgerond tot handzame getallen, waarmee hoofdrekenend de uitkomst globaal geschat wordt. Zo wordt de orde van grootte vastgesteld. De rekenmachine kan eventueel de precieze uitkomst bepalen. Dit *schattende* of *globale* rekenen is allereerst een houding die de kinderen aangeleerd moet worden. Ze moeten soms af van het dwangmatige cijferen, dat een schijnzekerheid geeft en bovendien vaak bijzonder onhandig is. De technische voorwaarden voor het schatten behelzen:

- kunnen afronden;
- vaardigheid in het rekenen tot 100;
- kunnen rekenen met nullen (× 10, × 100, : 10, : 100).

Wat het afronden betreft, is het raadzaam niet direct de formele regels uit de lucht te laten vallen en op daarbijbehorende sommetjes te oefenen, maar hierbij vooral met grootheden te werken.

3,67 meter = 367 centimeter, dat is meer dan 3,5 meter dus afgerond op meters: 4 meter.

De getallenlijn kan hierbij ook van nut zijn, maar we moeten er op verdacht zijn dat dit zelfs voor eenvoudige kommagetallen niet erg eenvoudig gevonden wordt.
Afronden als activiteit op zich is zinloos, het krijgt met name betekenis als er berekeningen uitgevoerd moeten worden. Het verdient aanbeveling dit vooral met eenvoudige contexten te doen én wederom met gebruik van de zakrekenmachine.

Schat het totale bedrag van een kassabon. Daarna precies met de rekenmachine.
Euroloodvrij kost 1,798 per liter. Je tankt 26,5 liter. Wat kost het ongeveer? En wat precies?
Een kilo biefstuk kost ƒ 38,-. Hoeveel kost 220 gram ongeveer? Hoeveel precies?

De actualiteit biedt elke dag mogelijkheden voor schattend rekenen:

Kees van Kooten gaf in Keek op de Week van 16-2-'92 blijk van zijn teleurstelling over Leo Vissers misgreep naar het Olympisch goud op de 1500 meter met maar 0,09 seconde. 'Piep' riep hij uit om de tijdsduur van 0,09 sec. aan te geven en tegelijkertijd wees hij een lengte van ongeveer een decimeter aan om ook de achterstand in lengte op winnaar Olav Koss (1.54,81) aan te geven.
Een snelle schatting laat zien dat dit wat overdreven is. Een ronde van 400 meter gaat in ongeveer 30 seconden. Dus zeker meer dan 10 meter per seconde (400 : 40). En 0,09 seconde is bijna 0,1 seconde. De achterstand moet dus meer dan 0,1 x 10 meter = 1 meter geweest zijn.

Gezien het nut van het schattend rekenen, het mogelijke gebruik van de rekenmachine en gezien de gegevens van het PPON (zie het begin van dit hoofdstuk) kiezen wij voor:
- minder cijferen,
- meer hoofdrekenen en
- meer schattend rekenen.

Hoofdrekenen met kommagetallen

Op het hoofdrekenen met eenvoudige kommagetallen wordt nationaal en internationaal slecht gescoord.

7,64 + 0,6	= ...	(gemiddelde goedscore 35%, PPON).
5,6 x 0,1	= ...	(25% fout, Duitsland).
0,56 : 7	= ...	(50% fout, Duitsland).

Met name blijken opgaven met getallen kleiner dan 1 (0,1 en 0,02 enzovoort) grote problemen te geven. Dit onderdeel verdient aparte aandacht, zowel met kale getallen als met grootheden in eenvoudige contexten. De volgende typen opgaven kunnen daarbij gebruikt worden:

- Samenhang breuken- kommagetallen: $\frac{3}{4} = 0{,}75$ $\frac{2}{5} = 0{,}4$ ...
- Tafels produceren: $1 \times 0{,}2$ $2 \times 0{,}2$ $3 \times 0{,}2$ ...
- Tienregels: $10 \times 0{,}35$ $2{,}1 : 10$ $25{,}3 \times 100$
- Proef op de som: $8{,}12 : 4 = 2{,}03$ want $2{,}03 \times 4 = ...$
- Controle op rekenmachine: $0{,}44 : 0{,}11$
- Samenhang bewerkingen: $0{,}62 \underset{:10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} 6{,}2$
- Gebruikmaken van grootheden en contexten:
  $2{,}37 + 3{,}58$ vertalen naar ƒ 2,37 + ƒ 3,58
  $5{,}3 - 2{,}5$ vertalen naar 5,3 cm – 2,5 cm → 53 mm – 25 mm
  $0{,}75 \times 1{,}2$ vertalen naar $\frac{3}{4}$ van 1,2 kg.
  $0{,}084 : 12$ vertalen naar 0,084 km in 12 stukken → 84 m in 12 stukken
  $0{,}44 : 0{,}11$ vertalen naar hoe vaak past 0,11 m in 0,44 m? of 11 cm in 44 cm?

Bij +, –, ×, : geeft vooraf schatten van de uitkomst ook aanwijzingen over de orde van grootte en daarmee over de plaats van de komma.

Ook bij het hoofdrekenen kan ook de rekenmachine een rol spelen. We geven kort enkele voorbeelden.

- Een snelheidsoefening, waarbij naar keuze de rekenmachine gebruikt mag worden:

$0{,}1 + 0{,}9 =$	$80{,}0 + 110 =$	$0{,}02 + 0{,}002 =$
$6{,}2 - 1{,}2 =$	$0{,}1 : 0{,}1 =$	$0{,}02 - 0{,}002 =$
$3 \times 1{,}43 =$	$1 : 0{,}1 =$	$0{,}02 \times 0{,}002 =$
$6{,}25 \times 6{,}25 =$	$99{,}9 + 0{,}1 =$	$0{,}02 : 0{,}002 =$

- De linker opgave op de rekenmachine, de rechter uit het hoofd:

$2{,}5 \times 3{,}7$	$2{,}5 \times 37$
$0{,}8 \times 0{,}39$	$8 \times 3{,}9$
$8 : 1{,}2$	$0{,}8 : 1{,}2$
$8 : 1{,}2$	$8 : 12$

- Iets analoogs: Toets in $1 : 9 = 0{,}111$ ....
  Voorspel dan $2 : 9$, $3 : 9$, ...$9 : 9$, $10 : 9$ ....
- Hoe ontstaat een kommagetal? Van welke deling zijn de volgende getallen de uitkomsten:
  1,2 0,5 0,75 0,23 2,3 0,66666......?

Tenslotte bevelen we ook eenvoudige contextopgaven uit het hoofd aan:

Een blikje frisdrank kost ƒ 1,15. Wat betaal je voor zes blikjes?
Vijf strippenkaarten van ƒ 10,25 per stuk. Hoeveel kost dat in totaal?
Een kg kaas kost ƒ 16,–. Hoeveel kost 0,2 kg?

Het verdient aanbeveling het hoofdrekenen met kommagetallen regelmatig en vooral inzichtelijk aan de orde te stellen. Inzicht is belangrijker dan snelheid.

Positiesysteem en meetsysteem

Zoals eerder gezegd, kan het formeel ingaan op het positiesysteem het begrip voor kommagetallen vergroten. Dit lijkt met name mogelijk voor de hogere niveaus. De kommagetallen kunnen aanleiding geven het unieke van het positiesysteem nog eens aan de orde te stellen. Dit systeem biedt de mogelijkheid om elk geheel en gebroken getal op éénduidige en gestandaardiseerde manier te noteren. Tevens kunnen alle cijferalgoritmen, zoals bekend voor de gehele getallen, ook voor deze getallen toegepast worden. We komen bij het positiesysteem al snel in het formele systeem terecht. Wil men dichter bij de realiteit blijven dan is de aanpak vanuit de meetgetallen het meest voor de hand liggend. Zo kan de tienregel als volgt herbewust gemaakt worden:

10 × ƒ 5,10 = 10 × ƒ 5,– + 10 × 1 dubbeltje = ƒ 50,– + ƒ 1,– = ƒ 51,–.

Of, omdat geld vaak een speciale betekenis heeft voor de leerlingen en ook een discrete grootheid is, met behulp van lengtematen. Bij het werken met kale getallen kan men altijd vasthouden aan het schattingsidee:

10 × 5,1 moet zeker meer zijn dan 50 want 5,1 is '5 en nog wat'.

De cijferalgoritmen voor optellen en aftrekken zijn precies dezelfde als die voor gehele getallen. Wel moeten de getallen in de goede posities onder elkaar geplaatst worden (komma's onder elkaar).

Het cijferend optellen en aftrekken hoeft echter niet apart geoefend te worden, nu we over rekenmachines beschikken. Het cijferend vermenigvuldigen van een geheel getal met een kommagetal kan als herhaalde optelling opgevat worden, hierbij kan weer de meetaanpak gevolgd worden. Het cijferend delen van kommagetallen kan, vooral bij opgaande delingen als herhaald aftrekken worden gezien. Zowel voor het cijferend vermenigvuldigen als delen geldt dat het vooraf schatten van de uitkomst en het daarna precies berekenen met de rekenmachine de meest efficiënte methode is.

In relatie met het positiesysteem kan ook het *ordenen* van kommagetallen aan de orde gesteld worden. Dit is een notoir moeilijk onderwerp. De antwoorden van 98 twaalfjarigen van een Engelse comprehensive school op de volgende vraag, waren als volgt:

Ring the biggest of the three numbers

0.62	*0.236*	*0.4*	
17%	50%	28%	15% geen antwoord

Uit onderzoek blijkt dat bij dergelijke ordeningsvragen de volgende twee (onderling) strijdige strategieën gebruikt worden:

'Hoe meer cijfers achter de komma hoe groter' en

'Hoe minder cijfers achter de komma hoe groter'.

Ook hier is het gebruik van grootheden zeer aan te bevelen. 0,62 km = 620 meter enz.

Samenvattend kunnen we zeggen dat het positiesysteem of het meetsysteem gebruikt kunnen worden om het begrip van kommagetallen te verdiepen, als ook om de × 10, × 100, :10, : 100- regels en de kommaverschuivingsregel te begrijpen. Welk van de systemen gebruikt wordt, zal met name afhangen van het niveau van de leerlingen.

Formele aspecten

Voor het havo/vwo-niveau en de meer wiskundig-geïnteresseerden bieden de kommagetallen ook uitbreidingsmogelijkheden. Allereerst noemen we het positiesysteem, machten van 10 en de historische aspecten, zoals Stevins notatiewijze:

$$273{,}594 = 2\ 7\ \overset{⓪}{3}\ \overset{①}{5}\ \overset{②}{9}\ \overset{③}{4} \quad \text{(Stevin)}$$

Hetgeen betekent: $2.10^2 + 7.10^1 + 3.10^0 + 5.10^{-1} + 9.10^{-2} + 4.10^{-3}$

Verder de wetenschappelijke notatiewijzen:

$657{,}58 = 6{,}5758 \times 10^2 = 6{,}5758E02$ (rekenmachine)

$0{,}000613 = 6{,}13 \times (\frac{1}{10})^4 = 6{,}13 \times 10^{-4} = 6{,}13$ E -04 (rekenmachine).

Verder noemen we de repeterende breuken. Elke breuk kan als kommagetal geschreven worden. Het kommagedeelte is eindig of gaat repeteren. Omgekeerd kan bij elk repeterend kommagetal de breuk gevonden worden. Hoe lang is het repetendum? Kun je met dergelijke getallen rekenen? Hoe doet de rekenmachine dat? Kortom een heel mooi en ruim onderzoeksgebied.

Literatuur

Moor, E. de, L. Streefland en A. Treffers (1992). Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (18). Kommagetallen. *Tijdschrift voor Nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 10* (4), 29-40. Utrecht: Freudenthal instituut, RU Utrecht.

METRIEK EN METEN

Inleiding

Dit onderwerp op de rand van meetkunde en rekenen wordt op twee plaatsen in de achtergrondstukken beschreven. In het gedeelte over de meetkunde maakt het een onderdeel uit van het hoofdstuk rekenen in de meetkunde. Er is overlap tussen beide beschrijvingen, deze hebben we omwille van de leesbaarheid van elk stuk op zich niet willen vermijden.

Het belang van meten en metriek

Een belangrijke reden om aandacht aan meten en metriek te besteden is de praktische waarde voor alle leerlingen. Iedereen krijgt in het dagelijks leven te maken met maten. Het gaat dan niet in de eerste plaats om het leren van het metriek stelsel. Veel belangrijker is het ontwikkelen van een gevoel voor grootte van lengte, afstand, oppervlakte en inhoud. Uiteindelijk willen we op dit gebied het volgende bereiken: Leerlingen moeten in staat zijn om in toepassingssituaties vast te stellen om welke grootheid het gaat. Ze moeten daarbij in ieder geval *begrip* hebben van en *inzicht* in de volgende grootheden: Lengte, oppervlakte, inhoud, gewicht, volume en een aantal samengestelde grootheden waaronder in ieder geval snelheid en 'dichtheden' als bevolkingsdichtheid. Het ontwikkelen van kennis van en inzicht in de relaties tussen de hierboven genoemde grootheden is ook een doelstelling van dit leerstofonderdeel. Daarnaast moeten leerlingen de meest geschikte *maateenheid kunnen bepalen* bij een grootheid. Hiervoor is begrip nodig van de relatie tussen grootheid en maateenheid. Het gaat daarbij niet alleen om maten uit het metriek stelsel, ook maateenheden als voetstappen, hokjes, bekers en dergelijke komen voor.
Een belangrijk doel is dat de leerlingen gangbare maten uit het metriek stelsel in verband kunnen brengen met hen bekende maten of *referentiepunten*. Een voorbeeld is, weten dat 1 liter overeenkomt met de inhoud van een melkpak of een fles cola.
Tenslotte willen we dat de leerlingen *meetstrategieën* ontwikkelen. Daarbij speelt het omgekeerde van wat hiervoor genoemd is een rol. Een van de strategieën is het zogenaamde indirecte meten, waarbij het van belang is om van een aantal concrete zaken de (metrieke) maat te kennen. Bijvoorbeeld weten dat een mens ongeveer tussen 1.50 m en 2.00 m lang is en dan door deze eenheid af te passen de

hoogte van een toren bepalen waar de persoon voor staat.

Op elk van de bovengenoemde onderdelen gaan we hieronder kort in, waarbij we aangeven op welke wijze er in het programma aandacht aan wordt besteed.

De begrippen

Allereerst kan het in klas 1 nodig zijn hernieuwd aandacht te besteden aan begrippen als oppervlakte, inhoud, enzovoort. Hoewel dit ook in het basisonderwijs aan de orde is geweest zal het voor een aantal leerlingen nodig zijn er opnieuw bij stil te staan. Op bijvoorbeeld de vraag: Wat is oppervlakte? komt een groot aantal leerlingen niet verder dan het antwoord: Lengte keer breedte. Voor hen zal nog eens, aansluitend bij hun intuïtieve noties, ingegaan moeten worden op de betekenis van met name de begrippen oppervlakte en inhoud. Pas als die begrippen goed verankerd zijn heeft het zin om verder te gaan met rekenen en formaliseren. Deze zaken komen vanaf klas 2 aan bod.

Grootheden en maateenheden

Bij het ontwikkelen van bovenstaande begrippen worden maten gebonden aan concrete grootheden zoals stappen, huizen, hokjes. Pas later worden metrieke maateenheden gebruikt. Er wordt aandacht besteed aan het vergelijken van maten op een kwalitatieve manier: Wat is langer, groter etc. Daarbij kan inzicht verkregen worden in hoe maten werken. Daarmee bedoelen we technieken als splitsen, samennemen, vervormen ofwel het omstructureren van figuren om uitspraken te doen over de 'maat'. Later leidt dit tot meetstrategieën waarmee ook schattend en exact gemeten en vergeleken kan worden. Bijvoorbeeld: een kromme lengte afpassen met behulp van een touwtje; oppervlakten bepalen of vergelijken met behulp van omvormen; inhouden via overgieten.

Vooral in verband met de toename van het aantal opdrachten in contexten is het voor leerlingen belangrijker geworden om de juiste maateenheid te kunnen bepalen. Vroeger figureerden er in de opgaven voornamelijk meetkundige objecten met bijvoorbeeld lengte 5 en oppervlakt 56 zonder dat er een grootheid bij hoefde. Nu gaat het over lengtes staaldraad, oppervlakte van tuinen, hoeveelheid verbruikt water etc. Het kiezen van een juiste maateenheid en het bepalen van de orde van grootte maken deel uit van het beantwoorden van de vraag.

Voorbeeld 1: Uit experimenteel examen 1991

Meer water gebruik

RIJSWIJK, 19 febr.

De waterleidingbedrijven in Nederland hebben vorig jaar in totaal 974 kubieke meter leidingwater geleverd.
Dat is meer dan in 1988.
De Nederlanders gebruiken steeds meer leidingwater door de toeneming van het aantal kleine huishoudens. Ook neemt het gebruik toe doordat meer mensen vaker douchen en in bad gaan.

In het krantenbericht wordt gesproken over 974 kubieke meter leidingwater per jaar. Dat getal is vermoedelijk fout.

1 *Stel je eens een betonnen bak voor waarin 974 kubieke meter leidingwater kan worden opgeslagen. De bak is ongeveer drie meter diep.*
Geef een mogelijkheid voor de lengte en voor de breedte van zo'n bak.

2 *Beredeneer dat de hoeveelheid van 974 kubieke meter in het kranteberícht fout is.*

3 *Bij het getal 974 in het kranteberícht ontbreekt iets.*
Kies uit de volgende twee mogelijkheden en verklaar je keuze:
- *er ontbreken drie nullen; in het artikel moet staan: 974 000 kubieke meter;*
- *het woord miljoen ontbreekt; in het artikel moet staan: 974 miljoen kubieke meter.*

Het omrekenen van maten binnen het metriek stelsel is geen doel op zich. Binnen een context kan het voorkomen dat op andere eenheden moet worden overgegaan zoals in voorbeeld 1 over watergebruik. Met name bij het werken op schaal en bij de overgang van vloeibare naar vaste inhoudsmaten bijvoorbeeld van liter naar dm^3 speelt deze overgang een belangrijke rol. Daarom wordt aandacht besteed aan de relatie tussen verschillende grootheden en aan de manier waarop je ermee rekent. Bijvoorbeeld het verband tussen lengte en oppervlakte: als de lengte toeneemt dan neemt de oppervlakte ook toe maar kwadratisch. Het maken van tekeningen en het werken met concreet materiaal zijn hierbij ondersteunend. In klas 2 vormt vergroten en verkleinen, waaronder ook het werken met schaal valt, een belangrijk onderwerp. Met name voor leerlingen op het vbo komt dit voor bij een groot aantal beroepsgerichte toepassingen. Daarom is er in het B-traject meer ruimte gereserveerd voor deze onderwerpen.

Maatkennis

Het ontwikkelen van referentiepunten (alledaagse grootheden die nauw verbonden zijn met de voorstellings- en ervaringswereld van leerlingen) komt met name aan de orde in klas 1. Eigen ervaringen en praktische opdrachten helpen een breed scala van referentiepunten op te bouwen. Voorbeelden van dergelijke 'eigen maten' zijn: een deur is 2 meter hoog, de inhoud van een melkpak is 1 liter, ik loop ongeveer 1 km in een kwartier etc. De leerlingen houden een overzicht van hun persoonlijke referentiepunten bij. Deze referentiepunten werken twee kanten uit. Ten eerste bieden ze leerlingen een concrete voorstelling bij bekende metrieke maten. Daarmee kunnen bijvoorbeeld uitspraken over relaties tussen die maten beredeneerd worden. Als je bijvoorbeeld weet dat je je bij 1 liter de inhoud van een melkpak kunt voorstellen, dan kun je beredeneren wat het antwoord op onderstaande vraag moet zijn:

1 liter is hetzelfde als:
a $1\ cm^3$
b $1\ dm^3$
c $1\ m^3$.

Zo kan ook aandacht besteed worden aan het metriek stelsel, zonder dat dit hoeft te betekenen dat de leerlingen eindeloze invuloefeningen moeten te maken.
Ten tweede helpen referentiepunten bij het schatten. Bijvoorbeeld: dit huis is $4\frac{1}{2}$ deur hoog; 1 deur is ongeveer 2 meter; dat is dus een huis van ongeveer 9 meter. Dit brengt ons bij de meetstrategieën.

Meetstrategieën

Een strategie waaraan expliciet veel aandacht wordt besteed is het schatten van maten op basis van referentiepunten, ook wel indirect meten genoemd. Daarbij wordt op basis van een concreet object waarvan de afmeting bekend is schattend vastgesteld hoeveel van deze objecten nodig zijn om lengte, oppervlakte of inhoud van het te meten voorwerp te bepalen. Dat geeft door vermenigvuldigen het antwoord.

Voorbeeld 2

Dit is een foto van een metseltroffel. Geen gewone, maar een uitvergrote; het is een beeldhouwwerk.
Hoe hoog is de uitvergrote troffel?
Een gewone troffel is 35 cm groot.
Reken uit hoeveel keer de troffel vergroot is.

Om deze opgave op te lossen met behulp van het indirecte meten, is het nodig de beschikking te hebben over maatkennis zoals hierboven beschreven en over de vaardigheid te kunnen schatten.

Het omstructureren is een andere belangrijke meetstrategie die hiervoor al genoemd is. Deze komt onder andere van pas bij het vergelijken van maten. Zo kan bijvoorbeeld de inhoud van ruimtelijke objecten geschat worden door ze te benaderen als rechthoekige blokken. Bekend is ook de omvorming van parallellogram tot rechthoek. Formules voor omtrek, oppervlakte en inhoud komen voor in klas 2 en 3. Voor het gebruiken van deze formules is het handig om een figuur te kunnen herstructureren tot een vorm waarbij op een handige manier de gewenste maat kan worden vastgesteld (dat kan dus zijn met een formule).

Een andere strategie, die hier niet uitvoerig beschreven wordt, is het meten op basis van gelijkvormigheid. Een voorbeeld daarvan is het meten van de hoogte van een toren met behulp van de verhouding tussen de lengte van een stok en zijn schaduw. Dit soort technieken worden in de hoofdstukken over meetkunde beschreven.

Literatuur

Goddijn, A. (1988). 400 keer proeven aan de meetkunde. *Panama Cursusboek 6*, 16-23. Eindniveau reken-wiskunde op de basisschool. E. Feijs en E. de Moor (eds), Utrecht: (OW&OC), Freudenthal instituut, RU Utrecht.

Heege, H. ter en E. de Moor (1977). Oppervlakte (2 delen). *Wiskobasbulletin, 7* (1/2), Utrecht: (IOWO), Freudenthal instituut, RU Utrecht.

Jong, R. de (ed.) (1978). Oppervlakte (2), (2 delen). *Wiskobasbulletin, 7* (5/6), Utrecht: (IOWO), Freudenthal instituut, RU Utrecht.

DE ZAKREKENMACHINE

Inleiding

De zakrekenmachine wordt langzamerhand gemeengoed in het onderwijs. Uit het gewone leven is hij al niet meer weg te denken. Op ongeveer eenderde deel van de basisscholen worden al lessen gegeven waarbij de zakrekenmachine een rol speelt. Ook in het voortgezet onderwijs zal de rekenmachine een vaste plaats krijgen vanaf klas 1.
Na enige jaren van discussie lijkt het pleit van vóór- en tegenstanders nu wel beslist te worden in het voordeel van de voorstanders.
De belangrijkste redenen vóór gebruik en officiële invoering van de zakrekenmachine geven we hier met de volgende steekwoorden weer:

- maatschappelijke relevantie;
- terugdringing van het schriftelijk cijferen;
- versterking van inzicht in getallen en operaties;
- meer aandacht voor toepassingen;
- meer mogelijkheden voor problem-solving;
- uitkomst voor zwakke rekenaars;
- betere motivatie van de leerling;
- bijdrage tot een betere wiskundige attitude.

Uit de vele onderzoeksrapporten, die vooral in de USA zijn uitgebracht, kan geconcludeerd worden dat de prestaties en vorderingen op rekengebied even goed of beter zijn wanneer in het onderwijs gebruik gemaakt wordt van rekenmachines.
In Nederland stelt men zich ook op het standpunt van invoering, zij het dat daarbij voorwaarden worden gesteld. Met name wordt in het basisonderwijs de nadruk gelegd op de beheersing van de basisvaardigheden, zoals eerder beschreven. In het bijzonder wordt het belang van hoofdrekenen onderstreept als ook van het schattend rekenen. Tevens wordt inzicht gesteld boven blind opereren.
Dit is een korte weergave van het standpunt zoals dat uitgebreider in de 'Proeve ...' staat beschreven.
Deze 'Proeve ...' is in eerste instantie voor het basisonderwijs bedoeld. Echter veel onderwerpen uit de bovenbouw van het basisonderwijs worden thans doorgetrokken naar en uitgebreid in het voortgezet onderwijs. Gebruik van de zakrekenmachine hoort daarbij.

Aparte aandacht

In feite is de zakrekenmachine geen leerstofonderdeel. Het is in de

eerste plaats een hulp- en of leermiddel.
Vanwege zijn specifieke manier van rekenen, die ook nog eens per type machine kan verschillen, is het aanbevelenswaardig er aanvankelijk een serie aparte lessen aan te besteden. Hiervoor zijn aparte lespakketten ten behoeve van het W12-16 project ontwikkeld. Daarin wordt aandacht besteed aan:

- bediening van het apparaat;
- onderzoek van verschillende typen machines;
- specifieke rekenregels;
- rekenmachinetaal en
- bijzondere functieknoppen (x^2, $\frac{1}{x}$, ...)

Het leren omzetten van een reken- of wiskundeprobleen in een geëigende rekenmachinetaal is een belangrijke kwestie. We doelen hier met name op het bepalen van de 'intoetsvolgorde' en daarbij het leren maken van zogenoemde programmastroken, ook wel strokentaal genoemd:

ON	2	+	3	M⁺	2	×	3	M⁺	MR

Met behulp van deze strook kun je het sommetje (2 + 3) + (2 × 3) uitvoeren op een CASIO-LC-827.

Functie en doel

De zakrekenmachine kan de volgende functies in het onderwijs hebben:

- rekenhulp;
- ondersteuning bij inzichtelijk oefenen;
- uitbreiding naar de wiskunde;
- object van onderzoek.

In de zakrekenmachine als *rekenhulp* zien we de oerfunctie van het apparaat. Door alle tijden heen heeft de mens gezocht naar hulpmiddelen om het tijdverslindende en geestdodende rekenen te bekorten. Tabellen, telramen, rekenlinialen, mechanische rekenaars en slimme cijferprocedures zijn de elektronische rekenmachine voorafgegaan. De tijd van handmatig cijferen lijkt aan z'n eind gekomen, waarom nog 23,07 × 561,3 onder elkaar gezet, als de zakrekenmachine dit antwoord met enkele intoetsingen correct voortovert?
Echter het betekent niet dat we niet meer behoeven te kunnen rekenen. Integendeel, eigenlijk beter! Immers je schat eerst even de orde van grootte vooraf: 20 × 500 = 10.000 en dus in dit geval daar nog bo-

ven:

23,07	×	561,3	=	

12.949,191

Vooral in toepassingsproblemen kan de zakrekenmachine hèt middel zijn als ontlasting voor vervelend cijferwerk.
Daardoor kan de volle aandacht gericht worden op het structuur van het oplossingsschema.

300 Duitse Marken zijn 330 gulden waard.
Hoeveel DM krijg je voor 700 gulden?

Dit kan leiden tot het volgende schema:

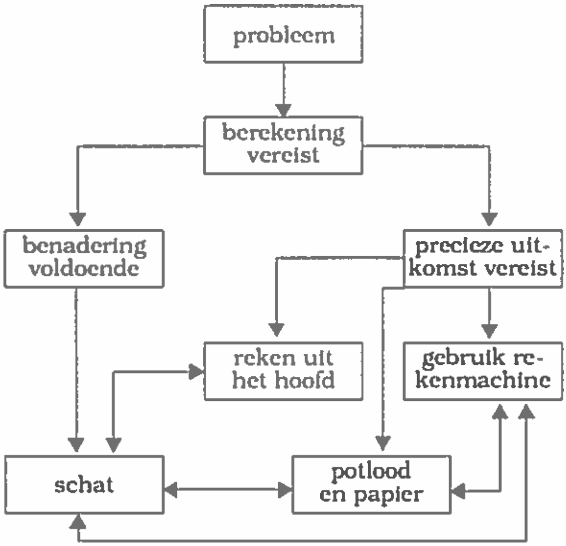
$$\text{DM } 300 \xrightarrow{\times 1,1} \text{HF } 330$$
$$\text{DM } 300 \xleftarrow{\div 1,1} \text{HF } 330$$

en daarna tot de volgende strook:

700	÷	1,1	=	

636,36

Een en ander betekent natuurlijk niet dat we voor elk toepassingsprobleem de zakrekenmachine hoeven in te zetten. Soms gaat het uit het hoofd (6 rolletjes pepermunt à 75 ct is 3 × ƒ 1,50 = ƒ 4,50); dan weer gedeeltelijk met de zakrekenmachine gedeeltelijk op papier (bijvoorbeeld door tussenresultaten te noteren); maar vooral in samenhang met het schattend rekenen. Het kiezen van een rekenwijze (schattend, uit het hoofd, op papier, met de zakrekenmachine of een combinatie), is het eigenlijke doel van de zakrekenmachine-lessen. Vandaar dat de verschillende rekenwijzen ook niet los van elkaar gezien kunnen worden, zoals we nog eens in het volgende schema samenvatten:



Een volgende functie van de zakrekenmachine is het bieden *ondersteuning* bij *inzichtelijk oefenen.*
Hierbij gaat het om herhaling en versterking van het inzicht in het positie- en getalsysteem en inzicht in de operaties. We maken hierbij hoofdzakelijk gebruik van formele opgaven. We noemen enkele mogelijkheden:

- Cijfers poetsen. Van getallen in het venster worden bepaalde cijfers vervangen door andere of weggepoetst.
  78945 → 78905 → 70000 → 700.
- Kommaverschuivingsregels en nulregels in samenhang met hoofdrekenen.
- Delingen met rest.
  6394 : 12 = 532,83333; wat is de rest?
- Grote vermenigvuldigingen, die niet meer in het venster passen.
- Inverse bewerkingen.
- Samenhang tussen breuken en kommagetallen. Bijvoorbeeld:
  Welke breuken geven 0.3333333 als uitkomst op de rekenmachine?

  $\frac{1}{3} =$ $\quad$ $\frac{100}{300} =$ $\quad$ $\frac{101}{300} =$ $\quad$ $\frac{0.1}{0.3} =$

- Zoek twee breuken die een uitkomst geven met 0.33 als begin dus 0.33????? de andere cijfers mogen van alles zijn.

Voor *uitbreiding* naar de *wiskunde* biedt de zakrekenmachine ook mogelijkheden. We wijzen in eerste instantie de x^2 en $\boxed{\sqrt{}}$ knop, maar

ook op de $\frac{1}{x}$-toets. Deze geven met de x en + toets en de + en – toets een mogelijkheid tot een (verdere) verkenning van het begrip 'inverse bewerking'. Met dit laatste is het voor bepaalde specifieke vergelijkingen zelfs mogelijk een oplossingschema op te stellen.
Tenslotte bieden de x^y-knop de goniometrische functies en de X!-knop mogelijkheden voor verdere uitbreidingen.
De wetenschappelijke notatie legt weer het verband met het positiesysteem en biedt mogelijkheden voor negatieve exponenten.
Uiteraard wordt de zakrekenmachine ook als rekenhulp bij wiskundige vraagstukken gebruikt, zoals bij gelijkvormigheid, negatieve getallen en goniometrie.
De rekenmachine kan ook zelf als *object van onderzoek* genomen worden. Met name als met verschillende apparaten gewerkt wordt, kan de leerling zelf het eigen apparaat exploreren. Laat de kinderen bijvoorbeeld een handleiding maken voor hun eigen machine. Mogelijke onderzoeksvragen daarbij zijn:

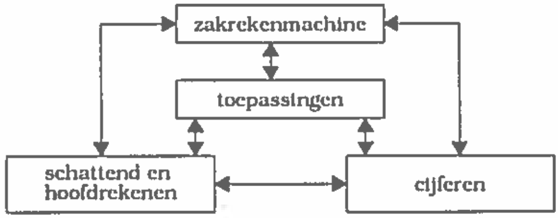
Hoe zit het dat sommige machientjes wel de zogenoemde voorrangsregels (Mevrouw Van Dale) hanteren en andere lineair werken? 5 × 2 – 2 × 5 = 0 versus 5 × 2 – 2 × 5 = 40. Waarom geeft 2 ÷ 3 op de ene machine 0,6666667 als antwoord en op de andere 0,6666666?
Wat is het verschil tussen het gewone rekenen en dat van de zakrekenmachine? Hoe werken de verschillende Memory-knoppen?

Het zal duidelijk zijn dat deze meer open aanpak onderwijstechnisch lastiger te organiseren valt en dus extra eisen aan de leraar stelt.

Zakrekenmachine, een must

Het zal nodig zijn de zakrekenmachine van meet af aan in het voortgezet onderwijs in te zetten. Een aantal leerlingen heeft er al ervaring mee opgedaan in het basisonderwijs. Nog sterker geldt: in bijna ieder huisgezin is zo'n apparaatje voorhanden en wordt het gebruikt.
De tijd van schriftelijk cijferen is voorbij. Een nieuwe tijd is aangebroken: hoofdrekenen, schatten en zakrekenmachine-gebruik. Ook bij de onderdelen hoofdrekenen en schattend rekenen pleitten we reeds voor verstandig gebruik van de zakrekenmachine. Overigens hoeft dit niet te betekenen dat cijferen volledig overbodig is geworden. Het voorbeeld van een vermenigvuldiging, waarvan het antwoord niet in het venster past, laat zien dat bepaalde cijferprocedures nog eens aan de orde gesteld kunnen worden.
Een ander voorbeeld kan gevonden worden in het delingsalgoritme.
De zakrekenmachine moet ons inziens dan ook een *verplichte* plaats krijgen in het leerplan. De samenhang met de andere wijzen van rekenen en vooral met de toepassingen, zoals aangegeven in onder-

staand schema, mag niet uit het oog verloren worden.



De zakrekenmachine biedt de gelegenheid om de realistische wending die de laatste jaren aan het reken- en wiskundeonderwijs gegeven wordt, te bevorderen. In reële situaties heb je zelden te maken met mooie getallen! De inpassing vereist echter dat andere accenten geplaatst worden. Dit nu kan niet alleen gerealiseerd worden door andere leerstof, maar vereist bovenal een andere houding van leraar en leerling.

Literatuur

Bouman, F., L. Bozuwa, e.a. (1989-1991). Serie 'De Zakrekenmachine'. In *Euclides* *65* en *66*.

Brink, F.J. van den (1990). Integrerende zakrekenmachine. *Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs* (Nieuwe Wiskrant), *10* (2), 34-39. Utrecht: Freudenthal instituut, RU Utrecht.

Brink, F.J. van den (1992). W12-16 Zakrekenmachines – goede bedoelingen en voorlopige keuzes. *Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs* (Nieuwe Wiskrant), *11* (3) 14-21. Utrecht: Freudenthal instituut, RU Utrecht.

Brink, F.J. van den (1992). Beroepswiskunde. *Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs* (Nieuwe Wiskrant), *11* (4), 5-9. Utrecht: Freudenthal instituut, RU Utrecht.

Burrows, E.R. (1990). *Calculator Logic Systems and Mathematical Understanding*. Reston, U.S.A.: NCTM.

Heege, H. ter (1987). Reken-wiskundeonderwijs en de zakrekenmachine. *Panama-Post* *5* (3), 28-34. Utrecht: Freudenthal instituut (OW&OC), RU Utrecht.

Meissner, H. (1985). Selfdeveloping Strategies with a calculator game. In: Streefland, L. (ed). *Proceedings of the ninth international conference for the Psychology of Math Education, Vol. 1*. Utrecht: Freudenthal instituut (OW&OC), RU Utrecht.

Moor, E. de (1992). Rekenmachines, een goede keus! *Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs* (Nieuwe Wiskrant), *11* (4), 20-21. Utrecht: Freudenthal instituut, RU Utrecht.

Treffers, A. en E. de Moor (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool, deel 2*. Tilburg: Zwijsen.

GEINTEGREERDE WISKUNDIGE ACTIVITEITEN

Inleiding

Wie het nieuwe wiskundeprogramma voor twaalf tot zestien jaar bekijkt, komt een nieuwe afkorting tegen: GWA. Deze drie letters staan voor Geïntegreerde Wiskundige Activiteiten. In het nieuwe programma is in alle leerjaren vijf procent van de beschikbare lestijd gereserveerd voor dit nieuwe onderdeel naast de meer vertrouwde leerstofgebieden Algebra, Meetkunde, Rekenen en Informatieverwerking en Statistiek.

Wat zijn geïntegreerde wiskundige activiteiten?

Een voorbeeld: Op één van de experimenteerscholen – Sancta Maria in Deurne – kwam een wiskundedocent op het idee om de plannen van de gemeente voor heffing van parkeergeld op een plein nader te onderzoeken. De indeling van het parkeerterrein, de grootte van een parkeerplaats, de kosten van de op- en afrit, de bezettingsgraad en de te verwachten inkomsten voor de gemeente worden nader bekeken door de leerlingen. Hoe optimistisch is de wethouder over de opbrengst? Het project gaat onder de naam ' Kan ik effe vangen?'
Een prima idee. De uitwerking vraagt een stevige voorbereiding en vooral ook planning van de leerlingenactiviteiten.

De afkorting GWA komt voor het eerst voor in het Raamplan, een publikatie van het team W12-16 (april 1989). Daarin wordt het doel van GWA als volgt omschreven:

Leerlingen ervaringen laten opdoen met wiskunde die in de actualiteit en/of in samenhang met andere vakken een belangrijke rol speelt. Leerlingen laten oefenen in het aanspreken en gebruiken van hun wiskundige bagage in levensechte situaties.

Er worden in het Raamplan twee soorten GWA onderscheiden: de actuele en de vooruit geplande. Bij beide worden een aantal voorbeelden of bronnen genoemd. Als bronnen voor de actuele soort worden genoemd: krant, tv, een foto, gebeurtenissen op school. Bij de vooruit geplande worden in het raamplan voorbeelden per schooljaar genoemd.

Voor de eerste klas is dat een verkenning van de omgeving van de school met opdrachten, zoals maken van een schatting van de oppervlakte van de vijver in het park, meten van hoeken en schatten van de hoogte van een gebouw met behulp van de schaduw, neerzetten van een patroon van gelijkzijdige driehoeken op een plein, enzovoort.

Voor de tweede klas wordt een activiteit samen met andere vakken genoemd, bijvoorbeeld 'De reis om de wereld in tachtig dagen'.

Voor de derde klas is gedacht aan een statistisch onderzoekje en voor de vierde klas aan het werken met een computerprogramma 'zeil-simulator'.

Het woord 'geïntegreerd' roept nogal wat misverstanden op: geïntegreerd waarmee? Een misverstand is bijvoorbeeld dat het alleen maarzou gaan om de integratie van de verschillende leerstofgebieden (algebra, meetkunde, rekenen, informatieverwerking en statistiek) tot één vak wiskunde. Uiteraard moet wiskunde voor leerlingen een geheel zijn, maar deze betekenis van integratie zal vooral uitgewerkt worden in goede schoolboeken. Vakkenintegratie is een tweede interpretatie van 'geïntegreerd'. Ook die interpretatie is te beperkt als het gaat om GWA. Bij GWA gaat het vooral om integratie met de wereld om ons heen. De werkvorm voor deze activiteiten kan heel divers zijn; te denken valt aan opdrachten aan individuele leerlingen, werken in groepjes, huiswerkopdrachten, werkstukken en presentaties voor medeleerlingen.

Het idee achter GWA is niet nieuw. Projectonderwijs kom je bijvoorbeeld tegen bij Jan Ligthart, bij Julius Nyerere, biologiedocent voordat hij president werd van Tanzania, bij Decroly. Er zijn docenten - zelfs hele scholen - die binnen de huidige programma's projectonderwijs geven. Belangrijk is dat er ruimte bestaat in het nieuwe programma voor dit soort activiteiten. De betekenis ervan in het wiskundeonderwijs verschuift van een marginaal onderdeel naar een regelmatig terugkerend en ook te toetsen leerstofgebied.

Het doel van geïntegreerde wiskundige activiteiten

Een voorbeeld: We zijn bezig met ordenen, tellen, grafisch representeren. De herfstbladeren waaien langs het raam. Voor de volgende les allemaal tien herfstbladeren zoeken en opplakken, geordend naar grootte en kleur. Stellig is er verschil in aanpak en wellicht is er iemand die kiest voor een indeling met twee assen: kleur van licht naar donker en volgens grootte langs de andere as. Komt de grafiek als mogelijke representatie niet uit de klas dan brengt de docent deze mogelijkheid naar voren. De leerlingen zullen dit nog vaak tegen komen, binnen en buiten de wiskunde als grafiek maar ook als n bij m matrix. GWA omvat zeker dit soort spontane invallen voor actueel onderwijs; het biedt ook ruimte voor projectjes zoals 'Kan ik effe vangen?'. De bedoeling is dat er door GWA in het wiskundeonderwijs een volwaardige plaats is voor spontane invallen en projecten, waardoor leerlingen er-

varen dat wiskunde een springlevend vak is dat te maken heeft me
hun wereld, met hier en nu, met hen zelf.
In het Examenprogramma staat over GWA:

Geïntegreerde wiskundige activiteiten
Onderzocht wordt of de leerling in staat is een in niet-wiskundige for mulcringen opgestelde probleemsituatie met wiskundige middelen t onderzoeken. Daartoe zal de kandidaat de probleemsituatie moete mathematiseren en vervolgens de verkregen wiskundige voorstellings vormen zodanig bewerken met vaardigheden uit de onderdelen Reke nen, Algebra, Meetkunde, Informatieverwerking en Statistiek, dat con clusies getrokken kunnen worden, die zinvol zijn voor de oorspronke lijke probleemsituatie.

De formulering in het examenprogramma wijst heel duidelijk in d richting van attitudedoelen: mathematiseren, kennis van buiten d wiskunde en gezond verstand gebruiken, terugkeren naar de vraag stelling na de wiskundige verkenning. In het 'Woord vooraf' van he Examenprogramma wordt ook nog eens gewezen op de ervaring di leerlingen dienen op te doen met wiskunde die hier en nu kan func tioneren. In het Trajectenboek staat aangegeven hoe aan de geëist wiskundige attitude gewerkt kan worden.

Toetsing van GWA

In het Examenprogramma staat in het 'Woord vooraf' de volgende ali nea over GWA:

'In de leerplanvoorstellen is het onderdeel geïntegreerde wiskundig activiteiten opgenomen. Dit onderdeel heeft ten doel leerlingen te late werken aan realistische probleemsituaties waarbij de bedoelde sa menhang tot uitdrukking komt. De COW acht het noodzakelijk dat he onderdeel geïntegreerde wiskundige activiteiten ook als zodanig word getoetst. Daarom is het ook als afzonderlijk onderdeel in de voorstelle voor de examenprogramma's opgenomen. Doordat probleemsituatie als hier bedoeld een rijkere inhoud en grotere omvang hebben dan ge woonlijk op een schriftelijk eindexamen mogelijk zal zijn en doordat ac tualiteit en de lokale situatie veelal een rol spelen in dit onderdeel, be veelt de COW aan het onderdeel in het schoolonderzoek te toetsen e scholen daartoe te verplichten.'

De toetsing op het eindexamen kan vorm krijgen in het schoolonder zoek. Daarmee kan de school een examinering kiezen die inhoudelij ook past bij de eigen invulling. In deze examinering op het schoolon derzoek is een ontwikkeling mogelijk. Als ook het Centraal Schrifte

lijk Eindexamen uitstraalt dat een wiskundige attitude belangrijk is die met name bij GWA ontwikkeld wordt, dan wordt het voor scholen makkelijker vorm te geven aan dit schoolonderzoek.
In klas 4 hebben we geen aparte uren voor GWA gereserveerd. We menen dat er in het oefenmateriaal voor het examen voor klas 4 al veel voorbeelden zitten van wiskunde in tal van toepassingsgebieden. Bovendien zal er in klas 4 meestal weinig ruimte zijn voor nog eens een extra GWA. Het doen van eigen onderzoekjes voor schoolonderzoeken ligt hier meer voor de hand.

> De wiskundesectie van de Radboudmavo heeft een lijst van onderwerpen voor het schoolonderzoek. Leerlingen kiezen hieruit een onderwerp voor een werkstuk. Ze worden mondeling geëxamineerd. Uit 'GWA - klas 4 - lijst van schoolonderzoekonderwerpen 1989-1990' in de Nieuwe Wiskrant Special 1990: wiskunde-sectie van de Radboudmavo te Oldenzaal.
> *Keyboards.* Hoe vaak komen letters voor in teksten? Een onderzoek. Een beschrijving van zoveel mogelijk verschillende toetsenborden. Zijn ze logisch opgebouwd (overeenkomsten/verschillen).
> *Kaarten.* Je gaat op zoek naar allerlei soorten kaarten. Hoe zit het met de schaal? Wat is er zo bijzonder aan? Zeekaart, landkaart, hoogtekaart, globe. Maak een reistijdenkaart (tijdentabel opvragen bij NS).
> *Weer naar school.* Waarom zijn kruispunten gevaarlijk? Spreek af op welke dingen je zult letten en deel de kruispunten in naar gevaarlijkheid. Doe onderzoek op twee kruispunten en verwerk de gegevens statistisch.
> *Kalenders.* Hoe zit een kalender in elkaar? Zijn er andere kalenders dan jaarkalenders? Maak de kalender van het jaar 2000 en van het jaar 3000.
> *Meetinstrumenten.* Bedenk zoveel mogelijk meetinstrumenten. Deel ze in naar soort. Is elk genoemd instrument wel een meetinstrument? Waarin verschillen de soorten? Doe metingen met drie bijzondere meetinstrumenten.

Ervaringen met GWA

Op de GSG Greijdanus en de Radboud-mavo

Het idee GWA kreeg binnen de experimenteerscholen diverse uitwerkingen. De eerste projecten *De langste dag* en *Het weer* werden ontwikkeld in samenwerking met de Radboudmavo in Oldenzaal. Daarna ontwikkelde de school zelf een aantal activiteiten, waaronder de voorbeelden die hiervoor beschreven zijn. Op de GSG Greijdanus in Zwolle bedachten docenten op een werkweek in de bergen activiteiten over hoekmeting. Op de GSG Greijdanus en de Radboudmavo ging GWA van meet af aan mee met de experimentele pakketten. Later kwam ook de behoefte dit soort wiskundeonderwijs te toetsen op het schoolonderzoek. Een uitvoerige beschrijving geven Th. Obdeijn, Th Dalhoeven en C. Johannink in hun artikel 'schoolonderzoek in Oldenzaal'[1].

GWA-bundel en GWA-klapper

Op de tweede serie proefscholen ging het anders. Hier was GWA in veel gevallen nog een sluitpost, zeker in het eerste schooljaar. De scholen hadden wel àndere problemen bij de invoering. In het tweede jaar, de cursus 1991-1992, werden vanuit de samenwerkingsgroep waarin medewerkers van APS, lerarenopleidingen en team W12-16 participeren, initiatieven ondernomen. Het team W12-16 zorgde in december 1991 voor een klapper met vijftien GWA-voorbeelden. De scholen konden hieruit een keuze maken of door de voorbeelden op een eigen idee gebracht worden. Deze klapper bevatte drie soorten GWA teksten: pasklaar, prototype, idee.

Voorbeeld van pasklaar:

Amsterdam, voorbereiding op een schoolreisje met kaarten en schema's.
Achter de muziek aan, globale grafieken en het notenschrift.
Pythagoras, een historische tekst rondom de beroemde stelling.
Napoleon, één grafiek van de tocht naar Rusland.

Voorbeeld van prototype:

Station Hilversum, rondom de bouw van een nieuw station is veel te doen aan planning en meetkunde. Het station is inmiddels al klaar. In iedere plaats waar een groot gebouw wordt neergezet is iets dergelijks te doen.

Voorbeeld van idee:

Grafiek verzamelen voor klas 2. In één week verzamelt iedereen wat ie tegenkomt. Daarna ordenen.
Fietscomputer, leerlingen gebruiken deze speeltjes. Er kan heel wat wiskunde aan bedreven worden, zoals afstand/tijd grafiek en snelheid/tijd grafiek. De eerste ervaringen met de klapper zijn heel divers. Voor sommige docenten zijn de voorbeelden uit de GWA-klapper niet herkenbaar als zinvol bij hun wiskundeonderwijs. Anderen stuiten op praktische bezwaren. De kwaliteit van rasterfoto's in de klapper is onvoldoende voor het maken van kopieën voor de leerlingen. Er zijn ook docenten met enthousiaste reacties op het werken aan één van de voorbeelden.

Duidelijk is dat het bij GWA gaat over onderwerpen die niet direct binnen de wiskundige opleiding van de docent vallen. Goede inspiratiebronnen met bruikbaar materiaal zijn dan ook van groot belang, want niet alle docenten kunnen voldoende tijd vrij maken om dit soort activiteiten goed vorm te geven en daarmee een basis te leggen voor succesvol werken in de klas. Na het bekijken van de GWA-klapper zeggen docenten van een experimenteerschool: 'Zoiets kunnen we ook zelf, maar dan in het team. We gaan een eigen projectje maken, afgestemd op onze situatie'. Zo is ook in Deurne het projectje met de parkeerplaatsen ontstaan.
Op een voorlichtingsdag is een veelgehoorde reactie van docenten dat ze er een 'hard hoofd' in hebben. Krijgen we het allemaal wel af? Maar er klinkt na een wat terughoudende opstelling ook: 'Dat soort dingen deden we ook wel eens op werkweken.' Leerlingen vinden het meestal leuk, maar leerlingen vinden alles wat een beetje ongebruikelijk is doorgaans boeiend.

GWA: een mogelijke trend

De twee experimenteerscholen van het eerste uur hebben het idee GWA geadopteerd en verder vorm gegeven. GWA had aanvankelijk de lading: actueel, locaal, ruimte voor 'eigen producties' van de docent, een beetje los van het programma, een doorbreking van de dagelijkse praktijk. Opvallend is hoe deze scholen GWA verankeren in het totale wiskundeprogramma.
In hun voorbereiding, uitvoering en afwerking van de GWA zijn vier lagen te onderscheiden die met elkaar de GWA een goede verankering in het leerplan geven:

Allereerst wordt duidelijk aangegeven op welke kennis een beroep wordt gedaan bij de GWA. Vervolgens zagen we dat wiskundedocenten een voorbereiding inlasten op het specifieke probleem met bijvoorbeeld het maken van tabellen die bij de activiteit later goed konden worden gebruikt. Tevens was dit maken van een tabel of een grafiek of een werktekening nog eens een goede oefening, vaardigheden bijhouden! De voorbereiding wordt zodoende ook gebruikt als extra oefening.
De betrekkelijk korte tijd voor het verrichten van metingen of ander werk kon zo efficiënt gebruikt worden. Dit is de laag waarin de GWA het meest spectaculair is.
Tot slot werd van de leerling een terugblik in de vorm van een verslag gevraagd waarbij de meetresultaten op papier uitgewerkt werden en waarbij als het ware alle voorgaande lagen met elkaar in verband worden gebracht. De leerling verwoordt zelf de samenhang.

Ook bij de tweede lichting experimenteerscholen die begonnen met de GWA-klapper is een soortgelijke ontwikkeling te bemerken. Ervan uitgaand dat schoolboeken voorzichtige aanzetten voor GWA zullen geven, zou een trend kunnen zijn dat scholen geleidelijk heel goed in staat zijn GWA een eigen vorm te geven die goed past in hun leerplan.

GWA: een uitdaging

GWA is een uitdaging. Maar voor wie eigenlijk? Voor de docent, de leerling of de schoolboekenschrijver?

Uitdaging voor de docent

De docent kan bij GWA gebruik maken van eigen sterke punten, zoals specifieke kennis door hobbies. In die situaties is het goed mogelijk leerlingen iets te laten ervaren van de verweving van wiskunde met tal van terreinen. Bij een GWA-ontwerp is het mogelijk een leerlingentekst te maken die goed past bij de eigen stijl van onderwijzen. In de zestiger jaren werd dit aspect in de verwachtingen van beleidsmakers en bewindslieden nog wel eens sterk overdreven: er bestond een groot geloof in ontwikkeling van onderop. Wij geloven nog steeds in de kracht van de docent als het om goed wiskundeonderwijs gaat. Maar die kracht is niet onuitputtelijk. We willen docenten op een beheersbare schaal ruimte geven om zelf een deel van het leerplan te maken, zij het binnen de grenzen van een examenprogramma. GWA is een stapje in die richting. Als docent kun je zo op een verantwoorde wijze 5% van de lestijd nemen voor deze activiteiten. De docent die dit soort creativiteit en energie heeft, kan daarin eigen materialen ontwikkelen. Als deze het ene jaar geprobeerd zijn, bij GWA, kunnen ze in sommige gevallen het volgend jaar op een reguliere plek in het leerplan worden opgenomen en er is weer wat ruimte voor een nieuw idee.

Uitdaging voor de leerling

Natuurlijk zijn leerlingen gemakkelijk te porren om buiten school wat te meten. Alles wat afwijkt van de dagelijkse lesroutine valt bij leerlingen in goede aarde. Maar dat is een goedkope motivatie. Als er buiten goed moet worden nagedacht, handig georganiseerd, praktische schetsjes moeten worden gemaakt, die binnen moeten worden uitgewerkt, dan valt dit soort motivatie al gauw door de mand. De uitdaging voor leerlingen wordt gemakkelijk vertroebeld door 'het leuke'. Het is helemaal niet zo gemakkelijk voor een leerling een uitdaging te ontdekken in een opdracht waarbij van te voren niet precies vaststaat wat het eindresultaat zal moeten zijn, wat er van je verwacht wordt. Daarom zal er ook een opbouw moeten zijn in het soort opdrachten waarbij de uitdaging door de leerlingen kan worden opgepakt: een opbouw vanaf een welomschreven taak naar meer ruimte voor eigen initiatief. Slaagt zo'n opbouw dan is het op grond van vorige ervaringen mogelijk dat de leerling de uitdaging ziet, mede omdat er een eindresultaat kan worden verwacht waar je wat mee kunt doen, zoals bijvoorbeeld in het geval van de contra-expertise bij het plan van de wethouder van Deurne.

Uitdaging voor de schoolboekenauteur

Veel auteurs van schoolboeken hebben goede ideeën voor GWA. Zoals een schoolboekenschrijver op een bespreking van de COW met uitgevers zei: 'Daar wil ik graag wat voor schrijven, m'n vingers jeuken'. Het is van belang de activiteiten zo te beschrijven dat de docent op de eigen school er wat mee kan: beschrijven zonder voor te schrijven. In de nieuwe uitgave van Moderne Wiskunde komen kleine hoofdstukjes met activiteiten die enigszins aan het seizoen gebonden zijn. Te beginnen met tamelijk veilige werkvormen voor de docent, verderop komen de meer afwijkende activiteiten aan bod zoals buiten de school metingen verrichten. In bestaande schoolboeken zijn al voorlopers te vinden van de GWA-gedachte. Zo heeft de Wageningse Methode al sinds jaren de 'Binnenkant van de achterkant' en Wiskundelijn de 'Snippers', waarin integrerende activiteiten voor leerlingen worden beschreven.

Invoering

Bij de invoering van het nieuwe programma kan een soortgelijke ontwikkeling verwacht worden als bij de experimenteerscholen. GWA is niet het allereerste waar de docent veel tijd in zal steken. Ondanks voorlichting en nascholing zal GWA maar heel geleidelijk een plaats kunnen veroveren in de gewone schoolpraktijk. Of dat al zal lukken in 1993 is nu nog niet te zeggen.

Men mag niet verwachten dat bij de start van de invoering dit onderdeel al voor alle docenten herkenbaar zal zijn als een zinvol deel van het wiskundeonderwijs. Op z'n best kan verwacht worden dat na 1993 het onderdeel GWA zeer geleidelijk een plaats zal krijgen in de dagelijkse schoolpraktijk. Verwacht moet worden dat zoiets trager zal gaan dan op de experimenteerscholen. En die hadden er toch ook minstens een jaar voor nodig. Veel zal ook afhangen van wat de schoolboeken te bieden hebben. Ook de nascholing speelt hierin een belangrijke rol.

De herkenbaarheid voor docenten en leerlingen is een tweede probleem: Wat heeft dit nou met wiskunde te maken? GWA is een deel van het programma waarin veel vernieuwing zit samengebald. Er is enige tijd voor nodig om te komen tot een aangepaste opvatting over wiskundeonderwijs, waarin plaats is voor GWA. GWA die geheel los hangt van de praktijk van alle dag, is niet zinvol. Dat lijkt te veel op de propaganda van universiteiten die op een open dag allemaal 'leuke' wiskunde laten zien, maar als de studenten het jaar daarop de wiskundestudie volgen, is die 'leuke' wiskunde zoek.

Noten

1 Nieuwe Wiskrant W12-16 special, september 1990.
2 *GWA-klapper*, augustus 1992
3 W12-16-pakketten: *De Watertoren*, *De langste dag*
4 *GWA bundel APS.*
5 Nieuwe Wiskrant, Mieke Abels en George Schoemaker: Je moet wel een hele grote cirkel zijn ... jaargang 12 (1992) nr 1.
6 Nieuwe Wiskrant, Regien Boskamp GWA: Hoe klas B2C de maan ziet. jaargang 12 (1992) nr 1.

B-PROGRAMMA VOOR DE HOOFDSTROOM VAN HET VBO

Inleiding

'Binnen de groep vbo-leerlingen kun je vaak meer niveaus onderscheiden dan in een groep leerlingen van mavo tot en met vwo.' Veel docenten hebben, meestal terecht, het gevoel dat zij voor een moeilijke, maar uitdagende opgave staan om wiskunde te geven aan de zeer gevarieerde groep vbo-leerlingen. Het vraagt veel inspanning, creativiteit en/of strakke leiding om de leerlingen te motiveren zich bezig te houden met wiskunde.

Zal het nieuwe wiskundeprogramma deze docenten en leerlingen genoeg te bieden hebben?
Wiskundeonderwijs aan de hand van concrete situaties uit het dagelijks leven en de toekomstige beroepspraktijk, gaat daar een motiverende werking vanuit?
Al die contexten en die taligheid, werpt dat niet juist een barrière op voor vbo-leerlingen?
Geen tweedegraads functies, geen cosinus en sinus meer, krijg ik dan geen problemen met mijn collega die elektrotechniek geeft?
Mijn leerlingen vinden het juist heerlijk om reeksen oefensommen over hetzelfde wiskundeonderdeel te maken. Kan dat nog wel?
Waarom staat de (A) steeds tussen haakjes? Bestaan er geen A-leerlingen meer na de invoering van het nieuwe wiskundeprogramma?

Dit is een greep uit de vragen die vaak gesteld zijn door de vbo-docenten op de landelijke voorlichtingsbijeenkomsten. In dit stuk proberen we deze vragen te beantwoorden aan de hand van een beschrijving van de achterliggende ideeën bij het B-traject uit het Trajectenboek en het voorbeeldexamen voor vbo-B. Dit zal meer duidelijkheid geven over de mogelijkheden van het nieuwe wiskundeonderwijs aan vbo-leerlingen, die het B-programma doen.

Actuele ontwikkelingen

Het voorbereidend beroepsonderwijs

In het huishoud- en nijverheidsonderwijs en het lager technisch onderwijs heeft de nadruk in het leerplan altijd gelegen op het beroepsgerichte karakter. Na de tweede wereldoorlog ontwikkelen deze scholen zich steeds meer tot een algemene en beroepsvoorbereidende opleiding. In de lessentabel komt steeds meer ruimte voor de meer theoretische vakken zoals nederlands, wiskunde, aardrijkskunde en geschiedenis. Ten tijde van de mammoetwet kent men binnen het vbo drie stromingen: een T(theorie)-stroom voor leerlingen die meer theoretische vakken aankunnen, een P(praktijk)-stroom voor de meer praktisch ingestelde leerlingen en een I-(individuele)-stroom, het individuele beroepsonderwijs. Per schooltype zijn er verschillende regelingen ten aanzien van cursusduur en minimumlessentabellen. Het lbo/lavo-besluit (1973) bepaalt dat er een tweede brugjaar moet worden ingesteld waarin 20 van de 30 lessen verplicht moeten worden besteed aan algemene vorming. Er komt een uniforme minimum lessentabel voor het eerste leerjaar en een cursusduur van 4 jaar. Deze harmonisatie kan de doorstroming bevorderen.

In april 1976 wordt het eindexamenbesluit vbo ingevoerd. Sindsdien geldt voor alle vbo-scholen:

a het examen heeft dezelfde vorm

b een gelijk aantal examenvakken (zes)

c een gelijke verdeling van het aantal theoretische (vier) en beroepsgerichte (twee) examenvakken.

d per vak kan nu examen worden gedaan volgens een A-, B- of C-programma.

Sinds 1986 kunnen vbo-leerlingen voor een aantal vakken, waaronder wiskunde, examen doen volgens het D-programma.

Met ingang van 1 augustus 1992 is het lager beroepsonderwijs (lbo) op de meeste scholen omgezet in voorbereidend beroepsonderwijs (vbo). Het vbo omvat algemene vorming en legt de grondslag voor aansluitend beroepsonderwijs. Het vbo kent de volgende afdelingen:

- bouwtechniek;
- mechanische techniek;
- elektrotechniek;
- motorvoertuigentechniek;
- installatietechniek;
- consumptieve techniek;
- grafische techniek;
- verzorging;
- uiterlijke verzorging;
- mode en kleding;
- verkoop;
- administratie;
- handel;
- land- en tuinbouw;
- bosbouw;
- landbouwtechnologie;
- transport en logistiek.

Elke afdeling kent beperkingen van de keuzemogelijkheden. Het eindexamen administratie omvat bijvoorbeeld vijf verplichte examenvakken.Voor alle afdelingen geldt dat Nederlandse taal en twee beroepsgerichte examenvakken verplicht zijn. Voor alle technische afdelingen is het verplicht om in ieder geval één van de vakken wiskunde, natuurkunde of scheikunde te kiezen. In de praktijk blijkt dat de meeste lto-leerlingen eindexamen doen in het vak wiskunde, aangezien ze vaak geen natuur- of scheikunde zonder wiskunde mogen doen.Voor de andere afdelingen is wiskunde geen verplicht examenvak.
Het vbo geeft geen beroepskwalificatie en het is geen eindonderwijs. Dit betekent dat een leerling met bijvoorbeeld een vbo-diploma motorvoertuigentechniek zich nog geen monteur mag noemen. Deze leerling kan als leerling-monteur aan het werk in een garage en kan opgeleid worden tot monteur via het *leerlingwezen*. Het leerlingwezen is een beroepsopleiding waarbij de leerling 1 à 2 dagen onderwijs volgt, het zogenaamd beroepsbegeleidend onderwijs (bbo). Dit onderwijs is over het algemeen op het beroep gericht en sluit aan op de praktijk van het beroep en wordt meestal op een streekschool gegeven. In het algemeen vragen de opleidingen een diploma vbo of mavo. Als een leerling geen diploma heeft of een vbo-A diploma, dan doet deze leerling meestal een jaar langer over de opleiding leerlingwezen.

Invoering van de basisvorming

In augustus 1993 wordt in het eerste leerjaar van het voortgezet onderwijs de wet op de basisvorming ingevoerd. Deze plannen betekenen niet dat er aparte scholen voor basisvorming komen, maar dat het vbo (net als het mavo, havo en vwo) blijft bestaan. De basisvorming omvat vijftien vakken, die alle scholen moeten aanbieden. Door de invoering van de basisvorming ligt de nadruk in de eerste twee leerjaren op de theoretische vakken. Er is een adviestabel basisvorming samengesteld met het aantal lessen dat nodig is om de kerndoelen van de basisvorming aan de orde te stellen en te kunnen toetsen. Het is geen verplichte tabel zodat scholen meer of minder uren kunnen inzetten voor een bepaald vak. Scholen zijn wel verplicht om gedurende de eerste twee leerjaren tenminste 25 van de 32 lessen per week te verdelen over de vijftien vakken van de basisvorming. Als de leerlingen in het derde leerjaar nog bezig zijn met de basisvorming, moet er ook voldaan worden aan de eis van de 25 lesuren voor de vakken van de basisvorming.
Scholen voor vbo mogen de zogenaamde 'combinatievariant' toepassen. Dit houdt in dat zulke scholen na het tweede leerjaar nog 25 lesuren moeten geven in de vijftien vakken basisvorming, maar ze mogen dit uitsmeren over het derde en vierde leerjaar. Voor het vbo geldt dat er minstens 24 lessen in de op het beroep gerichte vakken gege-

ven moeten worden, die ook worden verspreid over de twee leerjaren. Het lesrooster van het vbo raakt op deze wijze aardig vol met uren beroepsgerichte vakken en basisvormingsvakken.
Volgens Gerrits[1] in een publikatie van het Katholiek Pedagogisch Centrum is het mogelijk dat de afsluiting van de basisvorming en de examens van de vbo-opleidingen gelijktijdig zullen plaatsvinden. Bij de diploma-uitreiking ontvangen de leerlingen in dat geval twee documenten tegelijk: het getuigschrift basisvorming en het diploma vbo. In het wetsvoorstel basisvorming staat dat de basisvorming dan ook eerder gezien moet worden als een pakket van 'inrichtingsvoorschriften' voor alle scholen voor voortgezet onderwijs, dan als afgebakende periode van onderwijs: '*van het getuigschrift zal op zich geen doorstromingsbepalende werking uitgaan naar het vervolgonderwijs*'.

Veel docenten en directies van het vbo zijn bevreesd voor de invoering van de basisvorming. Vbo-leerlingen zijn eerder praktisch dan theoretisch ingesteld. Het is daarom belangrijk dat deze leerlingen, een groot gedeelte van de schooltijd, aan praktische vakken kunnen besteden. Door de invoering van de basisvorming, zullen ze juist meer theoretische vakken krijgen. Daarom verdient het aanbeveling om deze theoretische vakken, waaronder wiskunde, zoveel mogelijk een praktische invulling te geven.
Er heerst nog onzekerheid over het voortbestaan van de A- en B-examens. Aangezien het getuigschrift van de basisvorming geen diploma vervangt, blijft een afsluitende toetsing van het (A)B programma noodzakelijk. De Tweede Kamer heeft wel een motie aangenomen waarin zij voorstelt om de huidige niveauregeling van examens op A, B-, C- en D-niveau te vervangen door 'doorstroomprogramma's'. Deze 'doorstroomprogramma's' geven recht op aansluiting op kort middelbaar beroepsonderwijs (kmbo) en beroepsbegeleidend onderwijs (bbo). Deze motie is een verzoek aan de regering en heeft nog niet geleid tot een regeling of een wet.

Het B-traject in het nieuwe wiskundeprogramma

Inleiding

Op dit moment sluit nog geen 25% van de vbo-leerlingen wiskunde al
met een C-examen. Bij die andere 75% moeten we nog de schoolver-
laters zonder een diploma optellen, zodat het duidelijk is dat het wis-
kunde B-programma bestemd is voor de *hoofdstroom* van het vbo[2].
Voor deze grote groep leerlingen is het van belang dat er een apart
traject is, het zogenaamde B-traject. Er bestaat geen officieel B-pro-
gramma voor wiskunde in het vbo. Dit betekent dat iedere schoo
haar eigen wiskundeprogramma maakt, zodat het moeilijk is om het
huidige eindniveau te definiëren. Duidelijk is dat het huidige C-exa-
men te moeilijk is voor de hoofdstroom van het vbo.
Vbo-leerlingen zijn meestal meer praktisch dan theoretisch ingesteld
zodat formeel wiskundige begrippen niet zo geschikt zijn om te inte-
greren in het B-programma voor vbo. Het wiskundeonderwijs moe
gebaseerd zijn op praktische toepassingen, waarbij de leerlingen dui-
delijk wordt waarom ze deze wiskunde moeten leren.

Het B-traject

Voorgeschiedenis

Het team W12-16 heeft in 1987 de opdracht gekregen een voorstel t
maken voor een nieuw leerplan wiskunde vbo, mavo en de eerste dri
leerjaren van havo en vwo. Daarnaast moest het team een voorste
maken voor een nieuw examenprogramma wiskunde mavo/vbo, C
en D-niveau. Bij deze opdracht van het ministerie behoorde dus nie
het maken van een wiskunde B-programma voor het vbo. Vanuit d
experimenteerscholen en op de VALO-conferenties kwamen geluide
van vbo-docenten dat er ook behoefte was aan lesmateriaal en ee
beschrijving van een programma voor de hoofdstroom van het vbo.
Op de experimenteerscholen werd gewerkt met lespakketten, geba
seerd op het nieuwe leerplan. In de praktijk bleek dat de eerste ver
sies van de lespakketten niet zo geschikt zijn voor vbo-leerlingen. D
docenten die lesgeven aan deze leerlingen hadden behoefte aan ande
lesmateriaal. Het team W12-16 erkende het belang van specifiek
aandacht voor deze groep leerlingen. In 1989 werd besloten dat er ge
werkt moest gaan worden aan voorbeelden van vernieuwend wiskun
deonderwijs voor het vbo-B en aan een voorbeeld B-examen. Er wer
een LBO-(A)B werkgroep samengesteld bestaande uit een teamlid e
drie wiskundedocenten, die lesgeven aan vbo-leerlingen. De docente
geven wiskunde op het lhno/lhno en het lto/lto en werken dagelijk
met de leerlingen die de hoofdstroom vormen van het vbo. Eén van d
docenten geeft les op de Gereformeerde Scholengemeenschap Grey
danus te Zwolle, één van de experimenteerscholen.

Aansluiting op het C-programma

Aanvankelijk waren er ideeën om voor deze leerlingen een apart programma te ontwikkelen dat vrijwel geheel themagericht zou zijn. Daarbij werd aan de volgende thema's gedacht: (buitenlands)geld; tijd; reizen; sport; uitgaan enz. Dit zijn weliswaar interessante thema's, maar je kunt deze thema's ook als contexten gebruiken in het lesmateriaal en in examens.

Wij vinden dat het wiskundeonderwijs voor vbo-leerlingen die het B-programma volgen moet blijven aansluiten bij het wiskunde C-programma. Alle vbo-leerlingen zitten in de eerste twee leerjaren bij elkaar in de klas. Het is voor de docenten moeilijk in te schatten welk niveau precies past bij welke leerling. Er zijn aan de ene kant laatbloeiers, die pas in het derde leerjaar talenten ontwikkelen voor het C-programma. Aan de andere kant heb je leerlingen, waarvan je verwacht dat ze het C-programma kunnen volgen, maar die vaak door motivatieproblemen wiskunde met een B-examen afsluiten. In de meeste lto-afdelingen worden de leerlingen aan het eind van het tweede leerjaar ingedeeld naar niveau. In het derde leerjaar zijn er dan meestal A/B en C/D groepen voor wiskunde, of er is een indeling naar A/B en B/C. Op veel scholen met leao-, lao- en/of lhno-afdelingen zitten vbo-leerlingen die het B- en/of het C-programma volgen, ook in het derde en vierde leerjaar, bij elkaar in de klas. Voor docenten die lesgeven aan deze groepen is het van belang dat het B-programma niet teveel afwijkt van het C-programma.

Tenslotte is er een groep leerlingen die, na het eindexamen, nog een jaar één of meer vakken willen herprofileren. Vooral op het lto is er een groep leerlingen die zich dan wil voorbereiden op het wiskunde-examen op C-niveau. Om deze redenen is het belangrijk dat het B-programma niet geheel afwijkt van het C-programma. Kijken we naar de huidige gebruikelijke inhoud van het B-programma dan is het te karakteriseren als een aftreksel van het huidige C-programma. Zo wordt het tenminste getoetst in de landelijk georganiseerde examens van samenwerkende scholen en zo staat het in de meeste leerboeken voor het B-programma.

Duidelijk is dat de inhoud van het B-programma radicaal moet worden gewijzigd, wil het in de pas lopen met het nieuwe C-programma. Doorstromen, opstromen, herprofileren en afstromen zal anders op grote praktische bezwaren stuiten. Leerboeken en examens van samenwerkende scholen zullen dus een heel andere inhoud moeten krijgen. Uiteraard is een veel belangrijker motief voor het nieuwe B-programma dat deze leerlingen nu voor hen zinvolle leerinhouden krijgen aangeboden, die een duidelijke relatie hebben met hun werkelijkheid nu en later.

De hoofdstroom van het vbo

Zoals al eerder is aangegeven is het B-programma bestemd voor de groep van vbo-leerlingen die geen wiskunde-examen doen of wiskunde afsluiten met een C-examen, de zogenaamde hoofdstroom van het vbo. Kijken we naar de kerndoelen van de wiskunde voor de basisvorming dan lijkt voor deze hoofdstroom het bereiken van die kerndoelen in vier jaar door middel van het nieuwe B-programma een prachtig onderwijskundig resultaat. Daar moet met het nieuwe B-programma krachtig naar gestreefd worden. Het B-traject omvat de leerinhouden die omschreven staan in de kerndoelen.

Vanaf het derde leerjaar richt de hoofdstroom van het vbo zich uitsluitend op het B-programma en op het behalen van de kerndoelen in het vierde leerjaar. Volgens een organisatorische constructie zitten veel leerlingen die het B- of C-programma doen, tot en met de vierde klas bij elkaar. Dit is niet in het belang van de leerlingen die het B-programma moeten volgen en niet goed voor het rendement van de school. Het zou goed zijn als de hoofdstroom van het vbo vanaf het derde leerjaar zich uitsluitend op het B-programma kan richten. Resumerend kunnen we stellen dat het vbo-ivbo er goed aan doet om voor de grote meerderheid van de leerlingen aan te sturen op het bereiken van de kerndoelen wiskunde in vier jaar, door middel van het nieuwe B-programma. Het B-programma is zo ontworpen dat leerlingen in het vijfde jaar eventueel kunnen herprofileren met het C-programma. Pedagogisch gezien is het te verkiezen dat de hoofdstroom van de vbo-leerlingen in ieder geval vanaf het derde leerjaar eerst een B-programma doet en in het vierde leerjaar afsluiten, boven het in grote aantallen afvallen van een C-programma in een heterogene klas, zoals nu in delen van het vbo gebruikelijk is.

Trajectenboek

In 1991 werd het Trajectenboek samengesteld, hierin staat het B-traject beschreven. In het B-traject zijn de kerndoelen van de basisvorming verwerkt. Het B-traject omvat wiskundeonderdelen uit alle vier de leerstoflijnen en begint in het derde leerjaar. Aangezien de leerlingen in het vbo in de eerste twee leerjaren op alle niveaus bij elkaar in de klas zitten, heeft het weinig zin om voor deze leerjaren een apart B-traject te beschrijven. In het Trajectenboek wordt in het eerste leerjaar wel aangegeven welke leerstofonderdelen (te) moeilijk zijn voor vbo-leerlingen. Deze leerstofonderdelen kunnen beter in het derde en vierde leerjaar (nog eens) aan de orde gesteld worden. In het tweede leerjaar zitten doorgaans alle vbo-leerlingen weliswaar nog steeds bij elkaar in de klas, maar er wordt in de praktijk vaak al een poging gedaan om te differentiëren naar niveau. In het Trajectenboek is voor de tweede klas een uitsplitsing gemaakt in lesuren voor het B/C-tra ject, het C/D-traject en het havo/vwo-traject. In het B/C-traject wordt aangegeven welke wiskundeonderdelen uit het tweede leerjaar voor het B-programma pas in het derde leerjaar aan de orde gesteld dienen te worden, zoals bijvoorbeeld de stelling van Pythagoras en systematisch tellen. Voor een aantal andere onderdelen van de leerstoflijnen is meer tijd nodig om ze te behandelen. Er is in het tweede leerjaar ook een wiskundeonderdeel toegevoegd voor het vbo, namelijk het metriek stelsel. Vanaf het derde leerjaar wordt een apart B-traject beschreven.

Het B-traject beschrijft wiskundeonderwijs dat tot het basispakket van iedere jong-volwassene moet behoren. Wiskundeonderwijs voor vbo-leerlingen moet wiskunde omvatten, die zich typeert door het nut van de wiskundeonderwerpen, de motiverende werking van de contexten en de relatie met de dagelijkse (beroeps)praktijk moet duidelijk zijn. Bij ieder onderwerp, maar ook bij iedere context kan met deze bril bekeken worden en beoordeeld worden of het aan deze voorwaarden voldoet.

Het B-traject vormt een minimum basisprogramma met wiskundeonderwerpen die de leerlingen moeten leren en beheersen in verband met hun zelfredzaamheid in de maatschappij en de toekomstige beroepspraktijk. De leerstoflijnen *algebra, meetkunde, rekenen, informatieverwerking en statistiek* en het sluitstuk *geïntegreerde wiskundige activiteiten* bevatten wiskundeonderdelen die voor alle leerlingen in het voortgezet onderwijs belangrijk zijn. In het B-traject worden andere keuzes gemaakt ten aanzien van iedere leerstoflijn in vergelijking tot het C-traject.

Algebra

'Hebben vbo-leerlingen, die het B-programma doen, algebra nodig? Dat manipuleren met variabelen is abstract en ze snappen niet waarvoor ze het nodig hebben.' In dit stuk worden een aantal wiskundeonderdelen van de algebra besproken, die zinvol zijn voor deze groep leerlingen. In het dagelijks leven komen allerlei verbanden voor. Voor het vbo zijn vooral de lineaire verbanden van belang, maar er zijn ook periodieke verschijnselen die bekeken kunnen worden in de wiskundeles. Het gaat hierbij vooral om het verkennen, aflezen en gebruiken van tabellen, grafieken en formules. De leerlingen moeten leren om structuur te zien en moeten gebruik kunnen maken van de rekenvoorschriften.

In het eerste leerjaar worden globale grafieken behandeld, dit is een interessant onderdeel omdat in kranten en op televisie steeds meer grafieken te zien zijn. Veel grafieken geven representaties van economische gegevens. Het is de vraag of vbo-leerlingen hierin geïnteresseerd zijn. Toch behoort het tot ieders bagage om iets te weten over het verloop en de samenstelling van grafieken. Bij het globaal bekijken van grafieken gaat het om de volgende aspecten: (sterker c zwakker) stijgen en dalen, periodiek zijn, hoogste waarde enzovoort Vbo-leerlingen kunnen leren om vanuit een kritische houding grafi sche voorstellingen op te stellen, te gebruiken en te interpreteren. B: het bekijken en maken van zowel globale als gedetailleerde grafieke wordt steeds uitgegaan van concrete situaties.

Veel formules kom je in het dagelijks leven tegen als de beschrij ving van een verband, dat gebruikt wordt als een rekenvoorschrift. I het nieuwe programma wordt het woord *woordformules* geïntrodu ceerd. Het is geen nieuw begrip, maar het geeft de noodzaak aan va het gebruik van woorden in formules, in plaats van een *x* of ander letters, die een variabele voorstellen. In het kader van het B-program ma is het ongetwijfeld een verbetering om leerlingen voornamelijk t laten werken met formules, waarbij duidelijk is waar de formules ove gaan en waar iedere variabele voor staat. Daar, waar in het C-pro gramma op een gegeven moment ook meer abstracte formules herlei moeten worden, beschrijft het B-traject alleen het werken met woord formules.

*De **elektriciteitsrekening** is samengesteld uit:*
een vast maandbedrag voor elektra: ƒ 4,62 en de kosten van elektr per KWh. Elektra kost ƒ 0,17 per KWh.

De totale kosten van het elektriciteitsgebruik kun je berekenen door d formule in te vullen:
totale kosten elektriciteit =
(elektriciteitsgebruik x prijs per KWh) + vast maandbedrag.

Het is zinvol als de leerlingen zo'n formule kunnen gebruiken bij h berekenen van de verhoogde energiekosten per maand, als er bijvoo beeld een droogtrommel wordt gekocht. Vbo-leerlingen moeten m formules kunnen werken, ze kunnen variabele gegevens in een fo mule invullen. Zolang het eenvoudige verbanden betreft behoort h tot de basiskennis van vbo-leerlingen. Ze leren dat het vergelijke van totale kostenplaatjes van produkten, die zijn opgebouwd uit v riabele en vaste kosten, met behulp van formules en/of grafieken e handige manier is. Dit is belangrijk voor leao-leerlingen maar oo voor andere vbo-leerlingen.

De vbo-leerling, als (toekomstig) consument, moet keuzes kunne maken. Wanneer kun je bijvoorbeeld beter een jaarabonnement 10-badenkaarten voor het zwembad kopen. En wanneer is het goe koper (los van het milieu-aspect) om oplaadbare batterijen voor d walkman te kopen?

Opgave: ***De Walkman***

Jochem heeft een walkman. Deze walkman speelt op twee batterijen. Jochem koopt altijd batterijen van het merk Almus. De batterijen van Almus koop je per vier stuks voor ƒ 8,60. Hij weet dat zijn walkman op twee van deze batterijen vier uur speelt.
Jochem gebruikt zijn walkman alleen als hij in de bus zit. Iedere dag gaat hij met de bus naar school. 's Middags gaat hij met de bus weer terug naar huis. De reistijd van huis naar school is 15 minuten.

1 *Na hoeveel dagen moet Jochem nieuwe batterijen kopen?*

2 *Welk bedrag heeft Jochem in totaal uitgegeven aan batterijen na 20 uren muziek?*

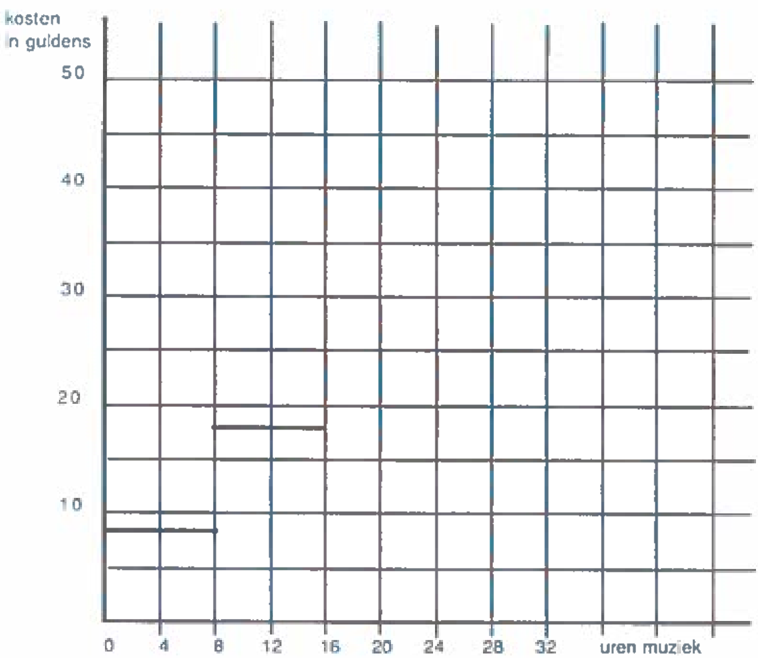
Hieronder zie je grafiek. In de grafiek zie je het verband tussen de kosten voor batterijen en het aantal uren dat de walkman kan spelen.

3 *Maak de grafiek af tot 32 uur.*

Je kunt oplaadbare batterijen kopen. Deze batterijen kosten per twee ƒ 25,00. Het opladen kost ook iets, maar daar houden wij hier geen rekening mee. Jochem besluit oplaadbare batterijen te kopen.

4 *Teken in dezelfde grafiek het verband tussen kosten voor batterijen en het aantal uren muziek.*

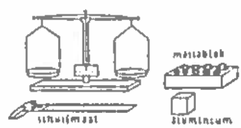
5 *Na hoeveel uren muziek zijn de oplaadbare batterijen voordeliger?*



In het lto komen de leerlingen bij vakken zoals natuurkunde en vak theorie op alle niveaus veel formules tegen. Deze formules worde vaak gebruikt als voorschrift voor berekeningen. De leerlingen hoe ven ze zelden zelf op te stellen, maar ze moeten ze wel kunnen toe passen: de waarde van een variabele invullen om de andere variabel te kunnen uitrekenen:

6 4 *Is piepschuim zwaarder dan ...?*

Van veel stoffen is de dichtheid bekend. Je hoeft die dus niet zelf te bepalen. In een tabel achterin het boek kun je ze vinden. De massa van voorwerpen kun je nu uitrekenen.



Je bepaalt van een blokje aluminium de massa met een balans. Je meet de lengte, breedte en hoogte op van dit blokje. Zoek in de tabel de dichtheid van aluminium op.

Het blokje aluminium heeft een massa van 162 g. Je rekent h.. volume van het blokje uit met: lengte × breedte × hoogte. De uitkomst is 60 cm³. De dichtheid van aluminium is 2,7 g/cm³. Het blokje aluminium heeft dus een massa van 60 × 2,7 = 162 g. De gemeten massa is ook 162 g. Op deze manier kunnen we de massa berekenen. Massa is het volume keer dichtheid

massa = volume × dichtheid

$$m = V \times \rho$$

Een stuk hout meet 10 cm × 5 cm × 8 cm.
De dichtheid van hout is 0,6 g/cm³.
a Bereken het volume.
b Bereken de massa.

Uit: Direkt 2 abcd; natuurkunde voor klas 2; J.P. Mulder e.a.

Voor veel vbo-leerlingen geldt dat zij zowel in de beroepspraktijk al in de maatschappij nooit zelf een formule hoeven op te stellen. Toc moeten deze leerlingen leren om voor een eenvoudig lineair verban een formule op te stellen omdat:

a de leerlingen op die manier iets leren over de samenstelling van ee formule en daardoor meer begrip kunnen krijgen van formules;

b de leerlingen formules, die complexer in elkaar zitten, beter kunne begrijpen.

Bij de basiskennis van iedere volwassene hoort kennis over negatiev getallen. Daarom is het ook voor vbo-leerlingen belangrijk om te kun nen werken met negatieve getallen. Voor vbo-leerlingen is het voor zinvol als negatieve getallen aan de orde gesteld worden in contexter

Een negatief getal wordt pas een duidelijk begrip als het gekoppeld wordt aan bijvoorbeeld 8 graden vorst, aan 10 centimeter onder het maaiveld of aan 2 meter onder het NAP. De belangrijkste rekenacties met betrekking tot het aftrekken en optellen van negatieve en positieve getallen wordt het beste begrepen aan de hand van voorbeelden uit het dagelijks leven. Het hebben van een saldotekort op een bank- of girorekening en het verhogen van dat saldotekort kan het begrip bevorderen bij de berekening: - *f* 300,25 + (- *f* 150,50) = .

Meetkunde

Bij *meetkunde* worden wiskundige vaardigheden ontwikkeld die het ruimtelijk inzicht kunnen bevorderen. In het trajectenboek staat voor klas 1 beschreven het onderdeel 'Kijklijnen en kijkhoeken': *De ruimte wordt onderzocht aan de hand van dagelijkse ervaringen en eenvoudige experimenten.* Dit is een programmaonderdeel voor alle leerlingen, maar het is voor vbo-leerlingen heel belangrijk tijdens de gehele opleiding meetkundige vaardigheden te leren aan de hand van dagelijkse ervaringen en eenvoudige experimenten. Voor vbo-leerlingen is het belangrijk dat dit onderdeel veel tijd en ruimte inneemt in het programma en in het wiskundeboek moeten veel praktische opdrachten zitten:

Opgave: ***Kijk waar je staat***

Benodigdheden: overtrekpapier, potlood, geo-driehoek, schaar, lijm. Hieronder zie je vier foto's van dezelfde paaltjes.

1 *Neem een velletje overtrekpapier en een potlood.*
Trek de bovenkant over van het paaltje waar de pijl naar wijst.
Doe dit bij alle vier de foto's. Plak het resultaat op.
2 *Heb je vier keer dezelfde vorm gekregen?*
Hoe komt dat, denk je?

Vanaf de eerste klas wordt geoefend in het tekenen van eenvoudig ruimtelijke figuren, zoals de kubus en de balk. Voorwaarde is da deze objecten in de klas te aanschouwen zijn. Het is noodzakelijk da de leerlingen met behulp van materialen ruimtelijke objecten maken zodat ze leren begrijpen hoe deze objecten in elkaar zitten. In samen werking met collega's handvaardigheid of techniek kan ervoor ge zorgd worden dat iedere leerling gedurende de schoolloopbaan de be schikking heeft over een eigen model van een kubus en balk. Het i moeilijk voor vbo-leerlingen om zich een voorstelling te maken van d vorm van een vlakdoorsnede van een kubus, op grond van een teke ning. Aan de hand van bijvoorbeeld een plexiglas model van een ku bus met een diagonaaldoorsnede kan de vorm van zo'n vlakdoorsne de bekeken worden.

In de beroepspraktijk moeten veel vbo-leerlingen een tekening va een patroon, een bouwtekening of een instructietekening kunnen le zen. De omgekeerde weg bewandelen is ook belangrijk: van een ruim telijk figuur een vlakke afbeelding maken kan door het te tekenen o door het maken van een bouwplaat. Deze onderdelen van de wiskun de zijn zeer geschikt om te oefenen in projectvorm in samenwerkin met collega's van de praktijkvakken.

Het onderdeel Plaatsbepalen bestaat uit situaties waarin gebrui wordt gemaakt van een handige nummering, zoals rij 4 stoel 8 iet zegt over een plaats in de bioscoop. De andere situatie is een beschrij ving van een plaats aan de hand van woorden in combinatie met cij fers: iemand de weg wijzen aan de hand van de beschrijving: de twee de straat rechts, aan het eind links. Het lijken allemaal vaardighede die volwassenen vanzelfsprekend beheersen zonder dat zij hierin le hebben gekregen. Het vraagt een goed oriëntatievermogen om iemand via de telefoon een route te beschrijven.Voor een aantal mensen be treft deze vaardigheid een natuurlijke gave, het kan ook zijn da (jong)volwassenen deze vaardigheid hebben verbeterd aan de han van oefeningen in de wiskundeles. Voor vbo-leerlingen is het zinvc om aan de hand van plattegronden de beschrijving van een route t oefenen of een plaats aan te geven in een plattegrond van een theate met behulp van de cijfermatige plaatsbepaling. Plattegronden c kaarten van landen, steden, huizen of van een dierentuin bieden ee rijke context. Aan de hand van zo'n context hoef je je niet te beperke tot het onderdeel plaatsbepalen, er kan vanuit een bepaald stand punt een zogenaamd 'kijkgebied' aangegeven worden:

Opgave: ***Het theater***

Hieronder zie je de plattegrond van het theater in Purmerend. Op het podium staan twee wanden met een opening ertussen. Op de plattegrond zie je het bovenaanzicht van de twee wanden.

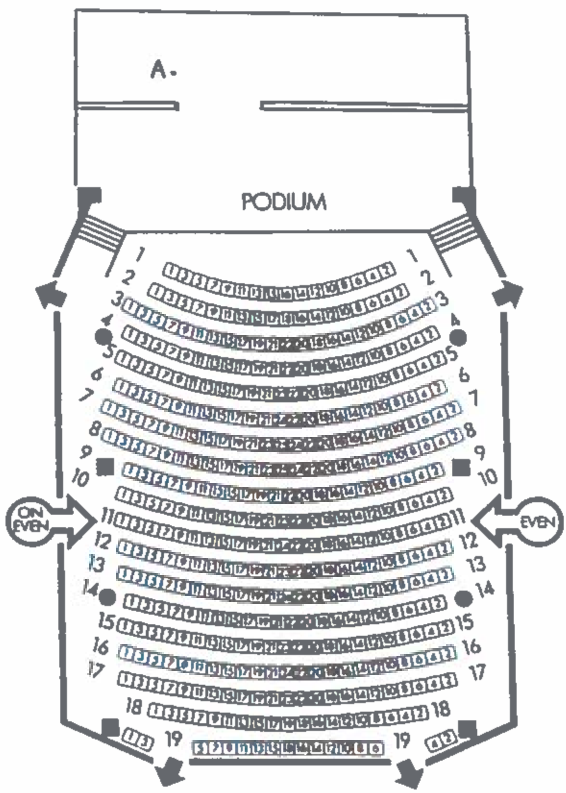
Stefan en Meike zitten in de zaal. Stefan zit op de zevende rij op stoel 9 en Meike zit op de elfde rij op stoel 2.

12 *Geef de plaatsen van Stefan en Meike op de plattegrond aan met een kleur. Stefan = rood; Meike = blauw.*

Achter de linkerwand bij punt A staat een speler te wachten.

13 *Wie van de twee, Stefan of Meike, kan deze speler zien staan? Licht je antwoord toe met een tekening..*

14 *Geef het gebied aan achter de wanden, dat zowel door Meike als Stefan kan worden gezien.*



Je kunt ook berekeningen uitvoeren over afstanden en afmetinge aan de hand van de gegeven schaal. Het begrip schaal moeten vbo leerlingen beheersen voor de beroepspraktijk. Bij de technische vak ken, maar ook voor het vak huishoudkunde is schaalbegrip nodi (bijvoorbeeld bij het onderwerp woninginrichting).

Rekenen

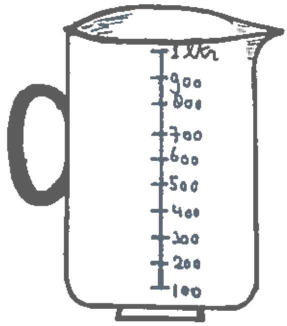
Rekenen is een belangrijk onderdeel in het nieuwe leerplan en de or derdelen die beschreven zijn in het Trajectenboek zijn van groot be lang voor het vbo. In het B-traject worden meer lesuren geadviseer voor dit onderdeel dan voor de andere trajecten.

Veel vbo-leerlingen hebben niet kunnen voldoen aan de eindter men basisschool. Zij beheersen een aantal essentiële rekenvaardig heden, zoals het cijferen en hoofdrekenen, niet of onvoldoende. Dez leerlingen hebben ook vaak een grote faalangst en weerzin opge bouwd ten aanzien van het vak rekenen. Daarom is het nodig dat i het eerste leerjaar wordt begonnen met andere wiskundeonderdeler Later in dat eerste leerjaar kan een begin gemaakt worden met he handig rekenen in toepassingssituaties, bijvoorbeeld met behulp va verhoudingsvraagstukken. Het is belangrijk dat deze leerlingen op nieuw te maken krijgen met eenvoudige berekeningen met procen ten, dit onderdeel dient vooral in samenhang met toepassingen uit d dagelijkse praktijk behandeld te worden, zoals kortingspercentages

Vbo-leerlingen hebben meestal een leemte in de kennis van he maatstelsel, hierin staan zij overigens niet alleen. Alhoewel de leerlir gen dit op de basisschool geleerd hebben, blijken zij veel vergeten t zijn. Voor zwakke leerlingen moet er veel geoefend en herhaald wor den om de kennis paraat te houden. Het metriek-stelsel zal aan d orde gesteld worden in het voortgezet onderwijs, echter niet als ee losstaand geheel, maar ingebed in praktische toepassingssituaties i een reële context. Voor leerlingen zal het meer aanspreken om slag room en ijs als voorbeelden te nemen bij de bespreking van de liter maten, dan rijtjes opsommingen of voorbeelden waarbij ze zich niet kunnen voorstellen.

Opgave: ***Spaghetti***

100g gekookte ham - 1 eetlepel olie of boter - 500g rundergehakt - gesnipperde uien - in stukjes gesneden knolselderij - 2 in stukjes ge sneden wortelen - 1 blikje tomatenpuree - 1 eetlepel bloem - 2 $\frac{1}{2}$ dl kip pebouillon (van blokjes) - 1 $\frac{1}{4}$ dl witte wijn - 1 gesnipperd teentje kno look - zout - peper - thijm - 500 g spaghetti - 100 g geraspte Parmezaan *se kaas.*



Op mijn maatbeker staan alleen ml.

1 *Hoeveel ml is $2\frac{1}{2}$ dl kippebouillon?*
2 *Hoeveel ml is $1\frac{1}{4}$ dl witte wijn?*
3 *Geef met een pijltje (3 ->) aan tot hoever de witte wijn komt.*
4 *Geef met een pijltje (4 ->) aan tot hoever de kippebouillon komt.*

Naast het omrekenen van maten en de precieze maatkennis (1 liter is hetzelfde als 1000 milliliter) leren leerlingen dat de inhoud van een koffiebeker beker ongeveer 125 ml is.
Het is belangrijk dat de leerlingen aan de hand van een eigen referentiekader afstanden en maten kunnen schatten. De eigen maten kunnen een belangrijke rol spelen in het ontwikkelen van dat referentiekader. Andere referentiepunten, zoals de afmetingen van een deur, de inhoud van een babybox (ongeveer 1 m^3) of het schoolbord (zijbord heeft een oppervlakte van ongeveer 1 m^2) zijn herkenbaar voor leerlingen. De school en het schoollokaal kunnen ook gebruikt worden bij het ontwikkelen van het referentiekader.

Leerlingen worden zich ervan bewust dat je ongeveer 15 km per uur fietst en 5 km per uur wandelt. Leerlingen leren om schattend te werken met maten. Het is daarbij belangrijk om referentiepunten te gebruiken, die voor de leerlingen herkenbaar zijn. Ze moeten zich bijvoorbeeld realiseren dat een straat die een kilometer lang is, wel een erg lange straat is. Ze kunnen bijvoorbeeld in de les eens gaan schatten hoe lang de straat is waarin ze zelf wonen. Dan kun je de breedte van een huis als referentiepunt nemen, maar als je aan een lange dijk woont kun je beredeneren hoe lang je fietst of loopt van het begin tot het eind.

Rekenmachine

Het gebruik van de rekenmachine wordt ook vanaf het eerste leerjaar ingevoerd. Veel vbo-docenten zijn bang dat de invoering van de rekenmachine in de eerste leerjaren van het vbo betekent dat de leerlingen simpele sommen niet meer uit het hoofd berekenen. Dit kan voorkomen worden door het gebruik van de rekenmachine selectief toe te staan en aparte lessen over het gebruik van de rekenmachine in te voeren. Het is wel belangrijk dat deze leerlingen goed leren wer ken met de rekenmachine. Ze moeten leren een schatting te maker van een berekening, om de uitkomst te kunnen vergelijken met d uitkomst op de rekenmachine. In combinatie met schattend en han dig rekenen kan het hun rekenvaardigheid in praktijksituaties ver groten.

Informatieverwerking en statistiek

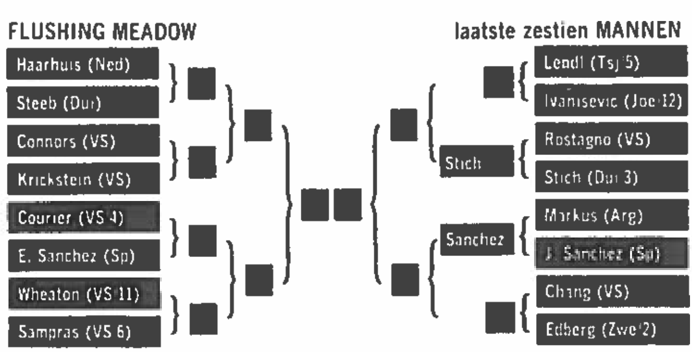
Tegenwoordig wordt veel informatie aangeboden in tabellen en grafi sche representaties. Op de deur van de meeste winkels hangt tegen woordig een standaardkaartje met openingstijden. Er staat niet mee duidelijk op:

maandag	13.00 uur tot 18.00 uur
dinsdag	10.00 uur tot 18.00 uur
woensdag	10.00 uur tot 18.00 uur
donderdag	10.00 uur tot 21.00 uur
vrijdag	11.00 uur tot 18.00 uur
zaterdag	10.00 uur tot 17.00 uur
zondag	gesloten

Nee, anno 1992 moet je een grafische representatie ontcijferen, die e niet al te eenvoudig uitziet. Het is belangrijk dat vbo-leerlingen dez informatie ook kunnen lezen. In de media wordt veel informatie geïl lustreerd met plaatjes van grafische voorstellingen: bijvoorbeeld d verkiezingsuitslagen, een grafiek over het bestedingspatroon van jon geren, informatie over een sporttournooi

Opgave: ***Tennistoernooi***

Hieronder zie je een overzicht van de overgebleven zestien spelers voo het tennistoernooi op Flushing Meadow.



1 *Hoeveel partijen moeten er in dit toernooi nog gespeeld worden?*
2 *Als Lendl (Tsj/5) in de finale wil komen, van welke spelers moet hij dan nog winnen?*
De finale wordt gespeeld door twee spelers uit de VS.
3 *Schrijf alle mogelijke finale partijen op.*

Tegenwoordig is de informatie over bus- en metrolijnen aan de hand van grafen weergegeven. Dit geeft het belang aan van het onderdeel grafen. In veel boeken die gaan over (historische) familierelaties zoals streekromans staan deze familierelaties weergegeven in een stamboom, een mooi voorbeeld van een graaf. Het lezen en interpreteren van tabellen, grafische voorstellingen en grafen is voor deze leerlingen vrij moeilijk. Hun zelfredzaamheid en algemene ontwikkeling is er in ieder geval bij gebaat dat ze dit goed leren. Het lijkt minder zinvol om hen te leren zelf een keuze te maken tussen een graaf of tabel als hulpmidddel om informatie weer te geven. Het is wel belangrijk dat ze zelf een tabel kunnen opstellen of een graaf kunnen samenstellen, bijvoorbeeld aan de hand van een gecompliceerde familierelatie.

Bij het onderdeel statistiek moet de nadruk liggen op de ontwikkeling van een aantal basisbegrippen en -technieken uit de beschrijvende statistiek. Leerlingen moeten tenslotte diverse diagrammen kunnen interpreteren. Daarnaast moeten ze statistische gegevens kunnen verzamelen en weergeven in een tabel en in een bepaalde diagramvorm. Dit is vooral van belang voor de leao- en lhno-leerlingen. In veel praktijkvakken moeten ze deze basiskennis over statistiek gebruiken.

Geïntegreerde wiskundige activiteiten

Geïntegreerde wiskundige activiteiten in de wiskundeles bevatten interessante wiskunde: naar de actualiteit - zoals het plannen van een schoolreisje en naar de lokatie - zoals het inrichten van een tuin -.

Het is mogelijk om één of meer lessen rond een onderwerp op een alternatieve wijze te laten verlopen. Net als bij de meer specifieke wiskundige begrippen en methoden moet het wiskundeonderwijs vanaf het eerste leerjaar werken aan de ontwikkeling van deze geïntegreerde wiskundige activiteiten. Deze activiteiten vragen de leerlingen om onderzoekend bezig te zijn, om eigen keuzes en plannen te maken, om zelf iets te ontwerpen en te bedenken, om zelf iets mondeling of schriftelijk te presenteren.

Tussen het meer op de ontwikkeling van wiskundige begrippen en methoden gericht lesmateriaal staan lessen gepland, die een actuele context als centrum van alle activiteiten heeft. De leerlingen moeten leren om binnen zo'n context te zoeken naar handige wiskundige en andere werkwijzen. In eerste instantie kan dit geleerd worden aan de hand van opdrachten, totdat de leerlingen hun eigen ontwerp kunnen maken. De transfer van de wiskundeles naar de werkelijkheid blijkt pas als leerlingen uit zichzelf het wiskundig gereedschap gaan gebruiken in een situatie buiten die wiskundeles.

Leerlingen kunnen ook in groepjes werken aan een project met bij voorbeeld als onderwerp de wijk of de stad waarin de school staat. Zij moeten opdrachten maken en een onderzoekje doen met wiskundige activiteiten:

Leerlingen krijgen een aantal wiskundige vragen en opdrachten naar aanleiding van de plattegrond van de wijk:

- In de Prinses Irenestraat staan alleen woningen in rijtjes van zeven. Maak een schatting van het aantal huizen dat in deze straat staat. Verklaar je antwoord.
- Maak een nieuwe plattegrond van het kleine stukje wijk dat grijs gekleurd is. In deze wijk staat de school. Bedenk zelf een nieuwe schaal.
- De stichting 'Tafeltje dek je' bezorgt warme maaltijden bij mensen die zelf niet (meer) kunnen koken. Op de plattegrond staan een aantal kruisjes bij de huizen van deze mensen. De 'T' geeft het gebouw aan met de keuken waar de maaltijden gekookt worden. Vanuit dat gebouw rijdt iemand met een auto langs de klanten. Geef de kortste route aan, zodat een medewerker de maaltijden snel kan bezorgen.
- De wijkagenten lopen iedere dag met z'n tweeën door de wijk. Tijdens de dienst moeten zij door alle straten lopen, geef een handige route aan. Motiveer je antwoord.

De leerlingen kunnen tijdens deze lessen ook zelf vragen bedenken bij de plattegrond voor andere groepjes. Daarna gaan de leerlingen 'de wijk in' met gerichte opdrachten:

In een klein gedeelte van de wijk moeten ze een schatting maken van het aantal mensen dat er woont. Zij moeten dus zelf door de wijk lopen en het aantal woningen en type woningen betrekken in hun analyse. Uiteraard moet dit gepaard gaan met een uitgebreide motivatie van hun antwoord. Er kan een onderzoekje gedaan worden in het gemeentehuis naar de bevolkingssamenstelling in een wijk of in de stad. Het aantal winkels en scholen kan betrokken worden bij dit onderzoek.

- In de ene stad of wijk zijn veel meer inwoners per bakkerij dan in een andere stad. Onderzoek het aantal inwoners per bakkerij in jouw wijk/stad. Verklaar je antwoord en vergelijk het met het antwoord van andere leerlingen of groepjes.
- Maak vanuit een aantal hoeken foto's van een ruimte of een voorwerp in of in de buurt van de school. Als de foto's ontwikkeld zijn, kun je aangeven vanuit welke hoek de foto's genomen zijn. Laat een ander groepje leerlingen dit doen bij de foto's, die jullie gemaakt hebben enz. Dit soort onderzoekjes en projecten kunnen getoetst worden aan de hand van een afsluitend werkstuk of een presentatie van een groepje leerlingen.

Er is geen standaard A-programma

Het B-traject beschrijft een programma waarin alle kerndoelen aan de orde worden gesteld. Het is een programma voor de hoofdstroom van het vbo, dat door die groep kan worden gehaald. Deze leerlingen moeten dan wel de kans krijgen om in eigen tempo en eigen abstractievermogen, gestimuleerd door positieve leerervaringen dat programma te doorlopen. De leerlingen die dit B-programma niet aankunnen hebben waarschijnlijk over de breedte van alle vakken leerproblemen. Een groot deel van deze leerlingen vinden we in het individueel voorbereidend beroepsonderwijs (ivbo). Meer dan tot nu toe bij het huidige B-programma zal het voorkomen dat leerlingen van het ivbo het nieuwe B-programma wiskunde met succes afronden. De integratie van ivbo en vbo in de hogere leerjaren wordt bevorderd als beide groepen leerlingen een B-programma volgen, waarin ook de leerlingen van ivbo minstens voor een deel mee uit de voeten kunnen.

Toch valt het te verwachten dat het nieuwe B-programma door een deel van de leerlingen van vbo of ivbo niet integraal met succes kan worden afgesloten. Gezien de soms heel specifieke problemen van de bedoelde leerlingen is een algemeen afgezwakt B-programma (wat dan het A-programma zal worden) geen oplossing. Deze leerlingen kunnen sommige onderdelen goed aan en blijven bij andere problemen houden. De exameneisen zouden voor hen meer individueel moeten worden gesteld. Deze leerlingen moeten samen met de docent een leerweg en een afronding zoeken die past bij hun kwaliteiten. Delen van dat individuele pad vallen samen met het B-traject.

Een afsluiting van het vbo met wiskunde A kan dan ook eenvoudig vergezeld gaan met deelcertificaten, waarop staat vermeld wat die leerling wel kan. Een afsluitend A-examen kan bijvoorbeeld deels bestaan uit opgaven van het B-examen, waaruit de leerling mag kiezen om zijn/haar A-programma af te ronden. Een diploma met wiskunde A is in dit geval voor het vak wiskunde een dossierdiploma, met onderdelen zoals 'Praktisch rekenen', 'Grafieken', 'Statistiek', 'Verbanden', 'Meten en maten', 'Ruimtelijke meetkunde' en dergelijke. Op die manier kunnen de individuele verschillen tussen leerlingen positief worden gehonoreerd.

Het B-traject geeft de richtingwijzers, maar de weg moet geplaveid worden met goed leerlingenmateriaal. Het is van groot belang dat er lesmateriaal beschikbaar komt, waarmee ook de leerlingen kunnen werken voor wie delen van het B-programma te moeilijk zijn. W12-16 heeft maar weinig lesmateriaal voor die groep kunnen maken. Er zijn twee projecten, die zich tot doel hebben gesteld om in deze lacune te voorzien. In het OWI-project (Ontwikkeling Wiskunde IBO) is enkele jaren ervaring opgedaan met het maken en beproeven van lesmateriaal voor het ibo. Die pakketjes worden nu omgewerkt en aangevulc tot leerboeken voor het ivbo. Vanaf het voorjaar van 1993 komen di leerboeken uit. Het WIBO-project[4] (Wiskunde voor het Beroeps On- derwijs) heeft tot taak om lesmateriaal te ontwikkelen voor het vbo(i) waarmee zowel de hoofdstroom van het B-programma als de door- stroming naar het C-programma en de individuele deelprogramma's voor A kunnen worden gerealiseerd. Dat lesmateriaal bouwt voort op de praktijkervaringen in vbo en ivbo met een bestaande wiskundeme thode.

Vbo-B examen

Inleiding

Er bestaan geen landelijke A- en B-examens voor het vbo. Ieder school heeft de vrijheid om per vak een eigen examen samen te stel len. Aan het eind van het vierde leerjaar vindt op veel vbo-scholen ee afsluitend schoolonderzoek van het B-programma plaats. Hierin wordt de gehele leerstof getoetst en men noemt het vaak een A- en B examen. Veel scholen maken gebruik van de A- en B-examens van d examengroepen Apeldoorn en de groep Zuid-West Nederland. Dez twee groepen maken voor bijna alle vakken van het vbo, A- en B-exa mens. Deze examens hebben een ander gewicht dan de C- of D-exa mens. Soms worden deze examens gebruikt als derde of vierd schoolonderzoek, bij andere scholen telt zo'n examen voor de helf mee.

Het bestaan van deze examengroepen en het feit dat veel schole deze examens gebruiken, zorgt voor enige uniformiteit bij het A- e B-examen. Deze uniformiteit is belangrijk voor het aanzien van ee vbo-B diploma. Daarom is het belangrijk dat er een algemeen erken afsluitend B-examen komt, waar scholen gebruik van kunnen ma ken. Voor het eindexamenjaar 1991/1992 hebben wij een experi mentele eindtoets wiskunde voor het vbo-B samengesteld. Hoewel e officieel geen A- of B-examen wordt afgenomen, noemen wij dez eindtoets 'experimenteel wiskunde-examen voor vbo-B'.

Het experimentele wiskunde-examen voor vbo-B

Het experimentele B-examen bestaat uit opdrachten, die gebaseer zijn op het B-traject. De structuur van het examen onderscheidt zic op twee belangrijke punten van de reguliere A- en B-examens die o scholen gebruikt worden. Ten eerste wordt er alleen wiskunde ge toetst aan de hand van contexten. Ten tweede bestaat het examen u opdrachten die gegroepeerd zijn rondom een beperkt aantal conte ten. Verder worden alleen contexten gebruikt die interessante aspe ten bevatten voor de vbo-leerlingen, ze moeten zich daadwerkelij iets kunnen voorstellen bij de gebruikte contexten.

Het B-traject omvat wiskundeonderwerpen die zoveel mogelijk aan de hand van situaties uit het dagelijks leven en uit de beroepspraktijk aan de orde gesteld dienen te worden. Wij vinden dat de leerlingen ook in hun examen wiskundeopdrachten moeten krijgen aangeboden, die afgeleid zijn van herkenbare situaties. Om deze reden zijn er geen wiskundeopgaven zonder context.

De meeste contexten zijn zo rijk dat er verschillende wiskundeonderwerpen getoetst kunnen worden aan de hand van één context. De mogelijkheden die zo'n context biedt, moeten zoveel mogelijk benut worden. Bovendien is het voor deze groep leerlingen gewenst om tijdens een examen niet te vaak van context te wisselen, zodat ze zich niet steeds hoeven te verdiepen in een nieuwe situatie. Daarom bestaat het voorbeeld B-examen uit opgaven verbonden aan een beperkt aantal contexten.
Het niveau van het examen kenmerkt zich door het concrete niveau waarop de opdrachten gesteld zijn.

Ideeën voor alternatieve schoolonderzoeken

Tijdens de ontwikkeling van de nieuwe wiskundeprogramma's wordt ook aandacht besteed aan alternatieve manieren van toetsing[5]. Het is wenselijk om ook in het vbo hiermee te gaan experimenteren. Als alternatief schoolonderzoek kan gedacht worden aan een werkstuk of een presentatie gekoppeld aan een project. Als er in het examenjaar gewerkt wordt aan een GWA-project waarin verschillende wiskundeonderwerpen aan de orde gesteld zijn, dan is het geschikt om er een alternatief schoolonderzoek aan te koppelen. Zoals al bij het onderdeel GWA is uitgewerkt, moeten leerlingen in de loop van het wiskunde-onderwijs, leren een eigen ontwerp, onderzoekje, werkstuk of presentatie op te zetten en uit te voeren. Dat behoeft niet beslist gekoppeld te zijn aan een groot GWA-project. In de GWA-bundel staan activiteiten die geschikt zijn voor het vbo, zoals de voorbereiding van een schoolreisje naar Amsterdam en een aantal lessen met voorbeelden van de geschiedenis van de wiskunde. In het lesmateriaal van het al genoemde WIBO-project komen in de Bouwstenen bijvoorbeeld het ontwerpen, tekenen en maken van een nestkastje voor, het plannen van een vakantietocht op de fiets, het berekenen van de kosten van een opknapbeurt van je eigen kamer, het invullen op een plattegrond van een uitbreidingsplan, enzovoort.
Het werkt motiverend voor vbo-leerlingen om voorbeelden te zien van toepassingen van de wiskunde in de beroepsgerichte vakken. Het verdient aanbeveling om dit ook in schoolonderzoeken terug te laten komen, bijvoorbeeld op de volgende wijze:

- in ieder schoolonderzoek en/of het wiskunde-examen voor vbo-B zitten wiskundeopdrachten gekoppeld aan een beroepsgerichte context

uit diverse beroepsrichtingen;
- één schoolonderzoek wiskunde is helemaal samengesteld uit opdrachten met contexten uit de beroepsrichting waarin de leerling af studeert;
- als schoolonderzoek wordt een ontwerpopdracht gekoppeld aan d beroepsrichting van de individuele leerling;
- in samenwerking met de docenten van de specifieke beroepsrichtingen wordt een schoolonderzoek samengesteld in projectvorm.

Kortom in overleg met de desbetreffende docenten kan veel moois to stand komen.

Geen experimenteel wiskunde-examen voor vbo-A

Er is geen A-traject ontwikkeld, zodat er ook geen experimenteel A examen is. Het experimentele B-examen kan voor veel van deze leerlingen gebruikt worden als opgavenbron. De docent kan bijvoorbeel vantevoren een keuze maken, die eventueel wordt aangevuld met opdrachten die beter passen bij het individuele pad van een leerling Aangezien er geen landelijke eisen gesteld worden aan de vorm va een A-examen, heeft de docent de vrijheid om het examenjaar af t sluiten met een mondeling schoolonderzoek. Een mondeling schoolonderzoek past immers beter bij een meer individuele leerweg. Ee ander alternatief is een afsluitend werkstuk over wiskunde, eventueel in samenwerking met één of meer praktische vakken. Dit vraag extra tijd en inspanning van de docent, maar het is de moeite waar om het een keer uit te proberen. Collega's bij andere vakken doen a jaren mondelinge examens, dus waarom niet bij wiskunde. Een individuele toetsing doet meer recht aan de mogelijkheden van de VBC leerling, die het complete B-examen niet kan maken.

Goed wiskundeonderwijs voor vbo-leerlingen

Wiskundeonderwijs aan vbo-leerlingen vraagt extra inspanninge van de docenten. Zij hebben een extra zware taak om de leerlingen t motiveren en de aandacht van de leerlingen vast te houden[6]. Hierb spelen twee facetten een belangrijke rol. Ten eerste is er een specifie ke didactiek nodig, ten tweede zijn er een aantal voorwaarden te no men voor goed lesmateriaal.
Hieronder worden een aantal criteria beschreven waaraan de didac tiek en het lesmateriaal moeten voldoen.

Didactiek

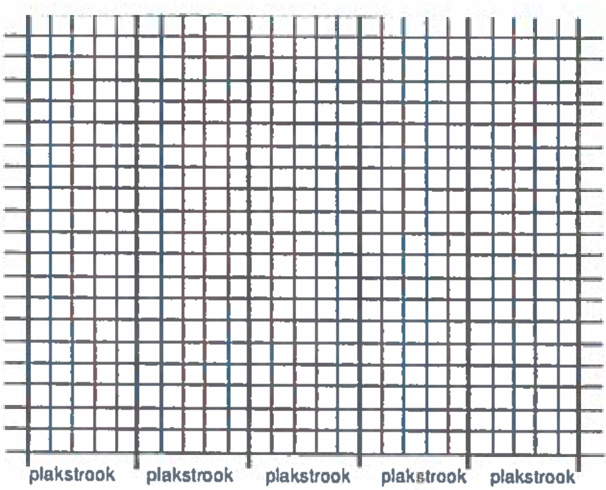
Het is belangrijk voor vbo-leerlingen, dat ze het nut kunnen zien va de wiskunde. Voor vbo-leerlingen, die het B-programma volgen, is d een absolute voorwaarde. Het bevordert de motivatie, als de docer de wiskundeproblemen koppelt aan voorbeelden uit het dagelijks l ven of uit de beroepspraktijk. Daarnaast moeten ze wiskunde krijgen op een praktische manier, er moeten veel doe-activiteiten ingebouwd worden in de wiskundeles:

Wiskundewerklokaal

In het nieuwe leerplan wordt aandacht besteed aan de noodzaak van een wiskundewerklokaal. Het is de bedoeling dat docenten wiskunde geven die uitdaagt tot knippen en plakken, kijken, tekenen en soms leidt tot excursies, interviews en wandelingen door de omgeving van de school. De leerlingen zijn daarbij 'gewapend' met liniaal, touw en kompas. Dit is aantrekkelijk wiskundeonderwijs voor alle leerlingen, voor vbo A/B-leerlingen is het noodzakelijk om andere leermiddelen te gebruiken naast het boek. De leerlingen zijn praktisch ingesteld, het is belangrijk dat er veel aandacht besteed wordt aan 'doe-activiteiten' binnen de wiskundeles en dat de docent zoveel mogelijk concrete materialen gebruikt. Deze leerlingen moeten eerst iets doen of een model bekijken voor ze de wiskunde kunnen begrijpen en onthouden.

Leservaring vbo, klas 2:

'Met een klas van 26 leerlingen behandelde ik het metriek stelsel. Ik had echter de indruk dat de leerlingen zich nauwelijks een voorstelling konden maken bij begrippen als: meter, centimeter enz. Ik besloot om de leerlingen zelf hun eigen meterlat te laten maken. Een proefwerkblaadje met ruitjes van 1 cm bij 1 cm kon uitstekend dienst doen. Ik liet ze het blaadje als volgt verdelen:



Vervolgens moesten ze de vijf stroken, die door knippen ontstonden, aan elkaar plakken. Ze hadden nu hun eigen meterlat. Daarna moesten ze de meterlat verdelen in tien gelijke stukken. Eén van deze tien stukken moest weer worden onderverdeeld in tienen. Tenslotte moesten ze ook een cm verdelen in tien gelijke stukken. Met deze lat liet ik ze oefeningen doen waar m, dm, cm en mm aan te pas kwamen.
Omdat ik nu 27 meterlatten had, kon ik leerlingen duidelijk maken wat een dam was door tien van de meterlatten achter elkaar te leggen. Het bleek al een aardige eye-opener te zijn, dat een dam niet in het lokaal gelegd kon worden. Ook konden we met deze hoeveelheid latten aardig de lengte en de breedte van het lokaal bepalen. Eerst liet ik ze deze maten schatten en vervolgens gingen een aantal leerlingen de werkelijke afmetingen opmeten. Hiermee eindigde de eerste les.
De tweede les stonden de oppervlaktematen centraal. De meterlatten konden weer dienst doen. De breedte van de latten was namelijk precies vijf cm. Twintig latten aan elkaar geplakt zouden dus precies een vierkante meter opleveren. De leerlingen moesten in deze les met elkaar de vierkante meter maken. Ik liet hen de tafels en stoelen aan de kant schuiven, zodat ze in het midden de meterlatten tegen elkaar konden leggen en aan elkaar konden plakken. Ik had verwacht dat deze onderneming heel wat hilariteit zou opleveren. Wie schetst mijn verbazing toen bleek, dat de leerlingen goed in staat waren om in gezamenlijk overleg deze opdracht voor elkaar te krijgen.'

Leerlingen maken zelf wiskundige modellen van karton, rietjes, stof en andere materialen. Er wordt gerekend bij het metriek stelsel aan de hand van verpakkingsmateriaal, maatbekers en de directe omgeving van de leerlingen, zoals het klaslokaal, de school, de straat enz. Er worden schetsen en uitslagen gemaakt van verpakkingsmateriaal voor wonderlijke modellen van flesjes, potjes en doosjes.

In de bundel 'Wiskundewerklokaal' van de SW12-16[7] is een inventarisatie gemaakt van materialen, die tijdens het experiment op diverse scholen gebruikt zijn. Hierin zijn ook de verkoopadressen van de hulpmaterialen voor de wiskundeles opgenomen.

Afwisseling in werkvormen

Het is noodzakelijk dat er geregeld afwisseling in werkvormen plaatsvindt. De klassikale instructie en nabespreking kan niet ontbreken. Wij vinden dat het motiverend werkt als de klassikale instructie geregeld afgewisseld wordt met groepswerk, individuele opdrachten, werken met concrete materialen door leerlingen. Het verdient ook aanbeveling om de leerlingen werkstukken te laten maken. In het voorgaande beschreven wij het belang van projectwerk dat eventueel in samenwerking met docenten van andere (vooral praktijk) vakken gedaan kan worden. Deze werkvormen doen een beroep op het eigen inzicht van de leerling, dit is juist voor deze leerlingen heel moeilijk. Alle werkvormen waarbij leerlingen verschillende leerprocessen doormaken, zijn voor de docent veel moeilijker, beter gezegd vragen van de docent veel deskundigheid, vakmanschap en energie.

Er bestaat niet zoiets als de beste werkvorm, een specifieke werkvorm moet ook bij de docent passen, wil het succes hebben. Toch verdient het aanbeveling om juist voor deze leerlingen een afwisseling in werkvormen toe te passen om tegemoet te komen aan de verschillende leerstijlen.

Redeneren

Zodra het zinnetje: 'De leerlingen moeten leren *redeneren* wanneer zij een tabel of een grafiek gebruiken ...' opduikt in het programma voor vbo-leerlingen, dan sputteren de vbo-docenten tegen. 'Vbo-leerlingen kunnen geen redenatie opbouwen, allereerst schieten hun communicatieve vaardigheden tekort en het vraagt om abstractievermogen dat ze niet hebben'. Toch zijn wij van mening dat ook vbo-leerlingen in de loop van de vier leerjaren kunnen leren redeneren op een eenvoudig niveau. Het is belangrijk dat tijdens de wiskundeles de 'Waarom'-vraag meer aan de orde gesteld wordt, dat er meer aandacht is voor reflectie op de antwoorden die gegeven worden. Wij bevelen aan om leerlingen vaak schriftelijk te laten verwoorden hoe ze tot hun oplossing gekomen zijn. Als dit vanaf de eerste klas regelmatig geoefend wordt, denken wij dat deze leerlingen ook op een examen een eenvoudige redenering kunnen geven bij de oplossing van een wiskundeopdracht.

Samenwerking met de beroepsgerichte vakken

Geïntegreerde wiskundige activiteiten als onderdeel van het wiskundeprogramma biedt ook mogelijkheden om met collega's van de beroepsgerichte vakken in het derde en vierde leerjaar gezamenlijke projecten uit te voeren. Voor vbo-leerlingen, die het B-programma volgen, is het heel belangrijk dat de theoretische vakken meer gekoppeld worden aan de praktijkvakken. Dit gebeurt in de huidige schoolpraktijk vaak nog veel te weinig. Het zou goed zijn om zo'n samenwerking in een projectvorm te laten plaatsvinden. Voorbeelden hiervan zijn:
Het maken van een kleuterstoel, in samenwerking met het vak bouwtechniek. Hierbij moeten veel berekeningen uitgevoerd worden. De wiskundedocent kan er een aantal nieuwe opdrachten bij bedenken zoals:

a de berekening van de kosten van een bestelling hout voor één of meer klassen;
b aanzichten laten tekenen van de voorbeeldstoel;
c van één aanzicht een nauwkeurige tekening op schaal laten maken.

In een vbo-afdeling mode en kleding kan het vak wiskunde betrokken worden bij een modeshow, waarbij bijvoorbeeld ruimtelijke figuren als decorstukken kunnen dienen.

Er zou echter ook meer afstemming moeten komen tussen wiskunde en de beroepsgerichte vakken. In de praktijk vraagt de docent van een beroepsgericht vak vaak aan de wiskundedocent of hij/zij het onderdeel procenten, het liefst nog diezelfde week 'even wilt behandelen'. Het contact tussen de vakken kenmerkt zich meestal door ad hoc beleid. Om te voorkomen dat wiskunde een soort 'u vraagt en wij draaien' vak wordt, denken wij dat de schoolwerkplannen in een langere termijn planning op elkaar afgestemd moeten worden. Het is voor wiskundedocenten in het vbo ook meer bevredigend om het onderdeel procenten vrijwel gelijktijdig of voorafgaand aan procenten bij handelsrekenen aan de orde te stellen. De wiskundedocent kan tijdens de wiskundeles namelijk verwijzen naar de toepassingen bij het andere vak.

Lesmateriaal

Contexten

Het lesmateriaal moet opgebouwd zijn uit contexten die bij voorkeur dichtbij de leefwereld en de culturele achtergrond van vbo-leerlingen staan. Dit betekent dat iemand die de contexten uitkiest erop bedacht moet zijn dat deze leerlingen zich vaak moeilijk kunnen inleven in situaties die voor auteurs heel vanzelfsprekend zijn. Voorkomen moet worden dat de contexten te kinderachtig zijn. Men dreigt deze leerlingen soms via het lesmateriaal 'op de hurken' te benaderen. Zoals wij al eerder benadrukten kunnen deze leerlingen moeilijk abstraheren. Formeel wiskundige contexten lijken daardoor niet geschikt.

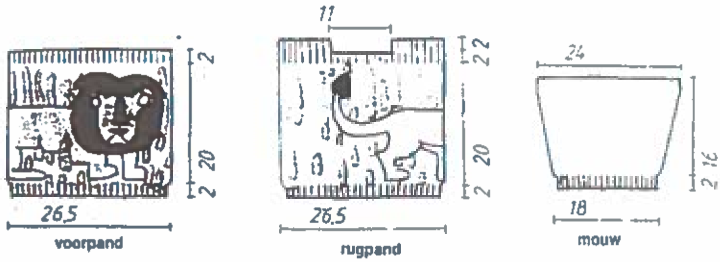
Beroepskleuring

Vbo-leerlingen worden opgeleid in een beroepsrichting waarvoor zij meestal interesse tonen. Het zal motiverend werken om de wiskunde aan te bieden met contexten uit de beroepsgerichte vakken. Het wordt de leerlingen dan duidelijk dat wiskunde niet een op zichzelf staand vak is, maar dat je wiskundige vaardigheden moet gebruiken in de beroepspraktijk.

Opgave: ***Trui***

Myrthe gaat voor haar neefje een truitje breien. Ze breit op pennen 3.5 Ze heeft eerst een proeflapje gebreid van 10 steken en 20 toeren. Ze heeft nu de volgende gegevens :
10 STEKEN = 3 cm *20 TOEREN = 8 cm*

Hieronder zie je het patroon van het truitje. De maten zijn gegeven in cm.

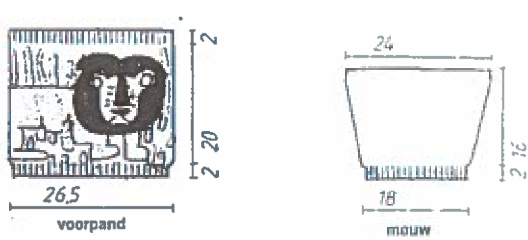


1 *Hoeveel steken moet Myrthe opzetten voor het rugpand?*
2 *Hoeveel toeren zitten er in een mouw?*

Myrthe breit gemiddeld bij het voor- en rugpand vier toeren per vijf minuten en bij de mouwen acht toeren per vijf minuten.
3 *Hoeveel tijd moet zij uittrekken voor het breien van het voorpand?*
4 *Hoe lang zal Myrthe over het breien van dit hele truitje doen? Bij het breien van de mouwen moet Myrthe meerderen.*
5 *Bereken hoeveel steken Myrthe moet meerderen.*

Je meerdert meestal door aan het begin van een toer en aan het eind van diezelfde toer een extra steek te maken.
6 *Om de hoeveel toeren ongeveer moet Myrthe meerderen om een mooi regelmatig verloop in de mouw te krijgen?*

Hieronder zie je nog eens het voorpand en de mouw afgedrukt.
7 *Geef in de tekening van het voorpand aan op welke punten de mouwen ingezet zullen worden.*



Er is wel sprake van een dilemma: moeten die contexten alleen aansluiten bij de specifieke beroepsrichting waarvoor een leerling wordt opgeleid?

Aan één kant wil je de beroepsgerichte voorbeelden laten aanslui-ten bij hun beroepsrichting omdat dit het dichtst bij ze staat. Aan de andere kant gaat een klein gedeelte van de vbo-leerlingen werken in de beroepsrichting waarvoor ze zijn opgeleid. Het zou een enge invulling van het vak wiskunde geven om de 'jongens' van metaal alleen wiskunde te geven die ze nodig hebben bij die beroepsrichting en alleen voorbeelden uit het metaalbewerkingsvak te gebruiken.

Uit een inventarisatie van lesmateriaal van de beroepsgerichte vakken blijkt dat in heel diverse beroepsrichtingen dezelfde wiskundige vaardigheden nodig zijn. Verhoudingen, procenten, doorsneden symmetrie, oefening van het ruimtelijke voorstellingsvermogen en het onderdeel 'op schaal tekenen en rekenen met schaalverhoudingen' komen zowel bij huishoudkunde, textiel als bouwtechniek voor. Het is belangrijk dat met diverse beroepsgerichte contexten wordt gewerkt, als deze wiskundige onderwerpen worden behandeld in de klas of getoetst in het examen. Zo'n wiskundeonderdeel moet in lesmateriaal met die (beroepsgerichte) contexten aangeboden worden zodat de leerlingen de geleerde wiskunde herhaald kunnen oefenen Jongens en meisjes worden geconfronteerd met verschillende beroepsrichtingen, de leerlingen kunnen zo ook ervaren dat zij snapper wat er bij 'anderen' gebeurt. Het gaat namelijk wiskundig gezien om dezelfde dingen.

Bij het wiskundeonderdeel 'Rekenen met verhoudingen' kan gebruik gemaakt worden van contexten over het maken van cakebeslag, betonspecie en handcrème. Je hebt de 'ingrediënten' in een bepaalde verhouding nodig. Een ander voorbeeld is dat er bij de inkoop van kleding en schoenen altijd gebruik wordt gemaakt van een bepaalde verhouding in maten. Van de ene maat wordt meer verkoch dan van de andere maat.

Structuur lesmateriaal

Lesmateriaal voor zwakke leerlingen moet een duidelijke structuu hebben. Vanaf het begin moeten ze houvast hebben en weten wat z moeten doen. Een duidelijke structuur helpt leerlingen het overzich te bewaren en maakt het gemakkelijker om nog eens iets terug te zoeken. Een introductie moet aansluiten bij oude kennis en deze kenni moet met behulp van een paar vragen of een 'geheugensteun' ver haaltje herhaald worden.

Leerlingen lezen niet uit zichzelf een verhaaltje bij een context. Z kijken vaak niet goed naar een plaatje van een tabel of een grafiek Het is daarom belangrijk om na een tabel of grafiek altijd een paa inleidende vragen te stellen, waardoor ze gedwongen worden om d tabel of de grafiek te lezen en te interpreteren.

De moeilijkheidsgraad van de leerstof en de opgaven moet lang zaam opgevoerd worden. Als een nieuw begrip duidelijk is geworden kunnen ook vbo-leerlingen meer open opgaven maken en leren structureren bij het oplossen van die opgaven. Er moeten veel oefenopgaven zijn die de leerlingen zelfstandig kunnen oplossen, dit vergroot hun zelfvertrouwen. Hierbij denken wij niet aan rijen sommen, maar bijvoorbeeld aan het maken van een tabel:

Betoncentrales

Beton voor grote bouwwerken wordt gemaakt in betoncentrales. Het zijn speciale fabrieken waar grote hoeveelheden betonmengsels worden gemaakt. De delen cement, zand en grind worden in een vaste verhouding gemengd. Vrachtauto's, voorzien van grote ronddraaiende trommels, leveren de mengsels op de bouwplaats af. Zoals je gelezen hebt, kun je met emmers werken. Je kunt natuurlijk ook werken met scheppen of met kilogrammen. In de betoncentrales werken ze met kilo's beton.

Voor een vloer gebruiken ze beton in verhouding van 1 : 2 : 3, voor werkvloeren worden de droge stoffen in een andere verhouding gemengd: 1 : 3 : 5.

Hieronder zie je een verhoudingstabel voor werkvloeren:

tabel voor betonspecie voor werkvloeren

kg cement	*1*
kg zand	*3*
kg grind	*5*
totaal	*9*

1 *Hoeveel kg zand en kg grind heb je nodig als je een zak cement van 25 kg neemt ?*

2 *Hoeveel kg cement en kg zand heb je nodig als je 100 kg grind neemt?*

3 *Hoeveel kg cement en grind heb je nodig als je 7,5 kg zand neemt?*

De leerlingen worden uitgenodigd om hun eigen systeem te ontwikkelen bij het invullen van de tabel. Hierdoor voeren ze niet alleen rekenalgoritmes uit maar ontwikkelen ook inzicht in de structuur.

Veel leerlingen die het B-traject volgen, hebben behoefte aan bevestiging. Oefening geeft de leerlingen op een gegeven moment het gevoel dat ze de stof beheersen. Dit is belangrijk voor hun zelfvertrouwen en werkt motiverend om met een nieuw wiskundeonderwerp te beginnen. Het werkt heel frustrerend als iedere opgave een nieuw wiskundeprobleem bevat.

Indien wiskundeonderwerpen niet regelmatig herhaald worden, zakken de bijbehorende vaardigheden snel weer weg. Naast alle contexten zijn dus ook oefenopgaven nodig. Dit kan door het wiskundeprobleem te oefenen met dezelfde soort opgaven, die in verschillende contexten verwerkt zijn. Het is ook mogelijk om in één contextsituatie dezelfde soort opgaven te maken met andere getallen.

Opgave: ***Pudding***

vloeistof	benodigde hoeveelheid gelatine	
1 dl water of melk	2 1/2	gram
1 dl vruchtesap, karnemelk	3	gram
vruchtenpuree	2 1/2 - 3	gram
1 dl ongeklopte room	2	gram
1 dl slagroom die wordt stijfgeklopt	1 1/2	gram
1 dl drank	4	gram
1 stijfgeklopt eiwit	1	gram

In gembervla gaan drie stijfgeklopte eiwitten, 0,5 dl melk, sap van één sinaasappel (= 1 dl) en gemberpoeder.

16 *Hoeveel gram gelatine heb je nodig voor drie stijfgeklopte eieren ?*
17 *Hoeveel gram gelatine voeg je toe aan 0,5 dl melk?*
18 *Hoeveel gram moet je er nog aan toevoegen voor het sinaasappelsap ?*
19 *Hoeveel gram gelatine heb je nuin totaal nodig ?*
20 *Hoeveel blaadjes gelatine zou je dus bij de gembervla voegen ?*

Frambozengelei maak je van 1 dl frambozensap en 2 dl witte wijn.

21 *Reken nu zelf eens uit hoeveel gram gelatine je totaal voor frambozengelei nodig hebt.*
22 *Hoeveel blaadjes gelatine zou jij nu aan het recept voor frambozengelei toevoegen ?*
23 *Maak zelf een recept voor je lievelingspudding (met drie vloeistoffen) Maak het recept voor vier personen.*

Een hoofdstuk kan ook afgesloten worden met een opgave, die de leerlingen zelf moeten bedenken. Zo'n opgave wordt bijvoorbeeld opgelost door één of meer andere leerlingen uit de klas.

Taligheid

Wiskundedocenten in het vbo zijn bang dat de leerlingen meer moeite krijgen met de wiskunde, omdat er veel taal zit in de contexten. Wij zijn van mening dat leerlingen ook binnen de wiskundeles moeten kunnen omgaan met taal. Als de videorecorder hapert moeten ze de gebruiksaanwijzing inclusief de begeleidende illustraties kunnen lezen en interpreteren.

Het zou niet goed zijn als taal het grote struikelblok wordt bij wiskunde. Daarom moet er bij het schrijven van wiskundemethoden extra gelet worden op het gebruik van de taal. Het verdient bijvoorbeeld aanbeveling om in het eerste en tweede leerjaar vrij korte leesteksten en begeleidende teksten bij plaatjes te geven. In het derde en vierde leerjaar moeten de leerlingen ook iets langere leesteksten, aankunnen. Deze teksten worden vaak overgenomen uit tijdschriften en kranten. Het is wel belangrijk dat hierbij vooral populaire tijdschriften en kranten gebruikt worden. Lectuur die geen moeilijke, lange artikelen bevatten. Een illustratie in de vorm van een plaatje, een tabel etc. kan het verhaal verduidelijken.

Er is nog een aantal aandachtspunten waarop gelet moet worden bij het gebruik van taal. In het artikel 'Taalproblemen' geeft Lagerwerf een uitgebreide beschrijving van deze aandachtspunten[8].

Er zijn veel woorden die een andere betekenis hebben in het dagelijks leven, zoals bijvoorbeeld de woorden figuur, macht, graaf, schaal enzovoort. Bij het gebruik van deze woorden hebben veel leerlingen vaak een ander beeld voor ogen. Dit kan hen belemmeren bij de begripsvorming van de wiskundige probleemsituatie. In de Wiskrant Special beschrijft Mulder de verwarring in de wiskundeles rondom het woord 'figuur'[9]. De begripsvorming kan ook tegengewerkt worden door het gebruik van moeilijke, vreemde woorden of zogenaamde laagfrequente woorden. Deze woorden hebben voor de leerling vaak nauwelijks betekenis: energievoorraad, ingrediënten, structuur. Het is vaak moeilijk voor een vbo-leerling om de betekenis van zo'n woord af te leiden uit de zin of de gehele tekst.

In teksten worden vaak veel verwijswoorden gebruikt, zoals die, dit, dat, deze, men. Het gebruik van verwijswoorden kan de leerling in verwarring brengen, doordat ze niet doorhebben waar 'dit' of op wie 'men' slaat.

In teksten voor vbo-leerlingen moeten, zeker in de eerste leerjaren, te lange zinnen met bij- en tussenzinnen vermeden worden. De informatie die bij elkaar hoort, moet dicht bij elkaar staan. Door het

gebruik van een tussenzin wordt informatie vaak uit elkaar gehaald, terwijl het meestal makkelijk anders kan. Te compacte taal leidt ertoe dat de leerlingen zich moeilijk een voorstelling van de beschreven situatie kunnen maken. Het gebruik van dynamische en directe actietaal spreekt vaak wel tot de verbeelding. In plaats van het gebruik van: 'Hoeveel kilometer komt overeen met.....' kan actietaal gebruikt worden: 'Hoeveel kilometer leg je af....'
Wij verwachten dat de teksten in wiskundeboeken gescreend zullen worden op grond van criteria over taalgebruik rondom contexten. Toch zullen docenten vaak uitleg over teksten uit het wiskundemateriaal moeten geven. Zij moeten er daarbij voor zorgen dat leerlingen altijd verband kunnen leggen tussen de mondelinge uitleg en de tekst in hun materiaal.

Conclusie

Het nieuwe wiskundeprogramma volgens het B-traject bevat wiskundeonderdelen, die belangrijk zijn voor de vbo-leerlingen. Zij leren om wiskunde als hulpmiddel te gebruiken bij het begrijpen en beoordelen van allerlei situaties in het dagelijks leven, bij andere vakken en in de wereld van beroepen. In het nieuwe programma wordt voornamelijk uitgegaan van voorstelbare, concrete situaties die de leermotivatie kunnen verhogen. Ons uitgangspunt is dat de leerlingen de leerstof als nuttig en boeiend ervaren. Wij denken dat de wiskundedocent nu beter duidelijk kan maken aan vbo-leerlingen waarom ze wiskunde moeten leren. In onze maatschappij wordt de besluitvorming en de berichtgeving vaak onderbouwd met getallen, tabellen, percentages en grafische datapresentaties. De leerlingen moeten voorbereid worden op hun redzaamheid in de maatschappij en het uitoefenen van hun beroep. Wiskundeonderwijs kan hieraan een zinvolle bijdrage leveren.
Er is geen landelijk B-examenprogramma voorgeschreven, toch spreken wij de hoop uit dat er wiskundeboeken voor het vbo komen waarin de leerinhouden van het B-traject verwerkt zijn. Verder is het belangrijk dat er in samenwerking met de examengroepen Zuid-West Nederland en Apeldoorn in de komende jaren gewerkt wordt aan B-examens. Deze examens dienen als voorbeeld voor een goede afsluiting van het nieuwe wiskundeprogramma volgens het B-traject.

Noten

1 Gerrits, J.: *Basisvorming in ware proportie. Na kamerbehandeling.* Herziene versie. Katholiek Pedagogisch Centrum, 's Hertogenbosch, 1991.
2 Streun, dr. A. van: *De hoofdstroom van ibo-lbo of vbo (1)*, Werkgroep Didactiek van de wiskunde, RU Groningen.
3 OWI, Ontwikkeling Wiskunde IBO, SLO Enschede.
4 WIBO, Wiskunde voor het Beroepsonderwijs, APS Amsterdam en KPC 's Hertogenbosch.
5 Obdeijn, Th. e.a .(1990). Schoolonderzoek in Oldenzaal, *Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs* (Nieuwe Wiskrant Special W12-16), *10* (1), Utrecht: Freudenthal instituut.
6 Zorgverbreding wiskunde, Algemeen Pedagogisch Studiecentrum, Amsterdam 1992.
7 APS, SW 12-16: *Wiskundewerklokaalbundel*, Amsterdam 1991.
8 Lagerwerf, B. (1992) Taalproblemen, *Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs* (Nieuwe Wiskrant), *11* (4), Utrecht: Freudenthal instituut.
9 Mulder, F. (1991) Een uur heen, een uur terug. *Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs* (Nieuwe Wiskrant Special W12-16), *10* (1), Utrecht: Freudenthal instituut.