Meetkundeonderwijs te midden van theorieën

F.J. van den Brink
Freudenthal Instituut
Universiteit Utrecht

Summary
A short report is given about the developmental research in spherical geometry for 16 year-olds. It is a rather unusual subject in geometry education and so were the author's experiences in the classroom. It is his concern to deal with the contributions that non-euclid geometries and radical constructivism can make to justify this new design in mathematics education.

1. Inleiding

Wat leer je van de praktijk? Wat leer je van een theorie? En hoe liggen de verbanden daartussen? Om theorieën te illustreren worden vaak onderwerpen uit de praktijk van het wiskundeonderwijs gekozen. Talrijk zijn de onderzoekingen in het rekenonderwijs om theoretische vermoedens over leergedrag en onderwijsgedrag statistisch te staven. Of dat terecht is of niet, laat ik hier buiten beschouwing.

Dit artikel gaat over een nieuw meetkunde-ontwerp en de relaties daarbij tussen praktijk en theorieën. Het ontwerp lokte in de praktijk fundamentele tegenstellingen uit betreffende de vlakke en de bolmeetkunde. Vanuit de theorie van de niet-euclidische meetkunde konden echter de discussies in de klas worden geduid en de plaats van het nieuwe ontwerp binnen het meetkunde-onderwijs worden gerechtvaardigd[1]. Ook andere theorieën gaven de ontwerper het noodzakelijke gevoel van zekerheid voor het nieuwe, afwijkende ontwerp. Ik noem de mathematisch-didactische theorieën van Freudenthal en van Van Hiele en een kennistheoretische filosofie (het radicaal constructivisme).

Omgekeerd bleek dat men vanuit de onderwijspraktijk deze theorieën beter kan begrijpen. Als je een aantal indrukwekkende lessen hebt meegemaakt, lijkt het wel of die ervaringen een veilig startpunt vormen van waaruit je een theorie beter kan doorgronden en zonodig kan bekritiseren. In dit artikel beschrijf ik hoe deze theorieën het onderwijs in de klas verklaren en, omgekeerd, waar kritische kanttekeningen bij die theorieën zijn te plaatsen vanuit de praktijk.

2. Bolmeetkunde

Zes lessen 'bolmeetkunde' hadden we ontworpen (zie: Van den Brink & Meeder, 1991), die in drie derde klassen mavo zijn gegeven aan 75 leerlingen van circa 16 jaar oud (Van den Brink, 1994). Bolmeetkunde is een (synthetische) meetkunde van het boloppervlak. Beginprobleem was 'Waar ligt Mekka?' en als (meetkundige) objecten kwamen aan bod onder andere de evenaar, parallelcirkels, grootcirkels, pool en tegenpool, kaartprojecties. De ontdekking dat de evenaar en de parallelcirkels niet alleen lijnen over de aarde zijn, maar ook als snijcirkels kunnen worden beschouwd, dwars door de aarde heen, confronteerde de leerlingen uiteindelijk met verschillende soorten meetkunde: de vlakke meetkunde, de bolmeetkunde en de ruimtemeetkunde.

Er waren drie activiteiten waarop tijdens de lessen vooral het accent kwam te liggen:

1. De leerlingen bedachten verschillende definities voor grootcirkel. Die waren ronduit imponerend.
2. Uit de gesprekken bleek dat de diversiteit aan definities voor grootcirkel voortkwam uit de verschillende wijzen waarop naar de aarde werd gekeken: de aarde als een vlakke wereldkaart, de aarde als een gebold groot oppervlak of de aarde als een volle bol. Deze verschillende gezichtspunten zorgden voor conflicten en intolerantie tussen de leerlingen onderling.
3. Genoodzaakt door de conflicten en aangespoord door hun leraar zochten de leerlingen nog meer eigenschappen van grootcirkels en legden verbanden met andere objecten (evenaar, middelpunten, tegenpolen, en dergelijke). Verschillende 'netwerken' van relaties ontstonden als verschillende soorten meetkunde. Op deze drie punten ga ik nader in.

Grootcirkels

Eén, nee, vele definities

De grootcirkel is een belangrijk object in de bolmeetkunde. Hij is over het boloppervlak dat wat de rechte lijn in het platte vlak is: drager van 'de kortste afstand' en van 'de richting' tussen twee punten. Maar hij is ook de grootste doorsnede van een ruimtelijke bol. Een dergelijk object kan van alle kanten worden bekeken door de leerlingen en ik vond ook dat dat moest:

a. om het abstraheren te bevorderen en,

b. om allerlei 'geheimzinnigheden' bolmeetkundig te kunnen ontrafelen.

ad.a. Vaak wordt beweerd dat 'abstraheren' 'afzien van bijzonderheden' is (Van Parreren, 1978). Dat is in theorie misschien het geval, maar de onderwijsgevende wordt daarmee mijns inziens op het verkeerde been gezet. In de praktijk van de basisschool deed ik de volgende ervaring op. Om de zogenoemde 'autobuspijlentaal' door kinderen te laten abstraheren tot een kale 'pijlentaal' moest niet van bijzonderheden (zoals autobuswieltjes en dergelijke) worden afgezien, maar moesten juist allerlei versieringen uit andere contexten met gebeurtenissen worden toegekend (Van den Brink, 1989, p. 30, e.v.). In theorie was 'abstraheren' wel 'afzien van bijzonderheden', maar om kinderen in de praktijk ertoe aan te zetten, moesten ze juist het tegengestelde doen. Zo ook, dacht ik, met grootcirkels. Niet één, maar verschillende definities waren mogelijk, en nodig om tot abstraheren te komen.

ad.b. Wat betreft de meetkundige geheimzinnigheden die in het 'dagelijks leven' bestaan, kan de meetkunde een vak zijn dat voor duidelijkheid zorgt. Maar dan moet de leerling wel de gelegenheid krijgen om de grootcirkel van alle kanten te bekijken. Neem het feit dat een vliegtuig startend vanaf Amsterdam en op weg naar Los Angeles niet direct in westelijke richting vertrekt (wat gezien de wereldkaart voor de hand zou liggen), maar in noordwestelijke richting. Of het feit dat de grootcirkel de kortste afstand én de startrichting tussen twee punten op aarde aangeeft. Maar hoe maak je duidelijk dat je, schuivend langs die kortste afstand in de richting van je eindpunt, toch steeds van richting moet veranderen? Zijn er rechte lijnen op aarde? Zijn er lijnen-recht-vooruit over de aarde die evenwijdig zijn?

Eigen produkties van leerlingen

Om enig idee te krijgen van wat het begrip grootcirkel voor de leerlingen inhield, voerde ik gesprekken met kinderen en verzamelde talrijke 'definities' die ze bedachten.

Een 'tweedimensionale definitie'

In het leerlingenboek staat deze opdracht (fig.1):

'Cirkels door twee punten A en B:

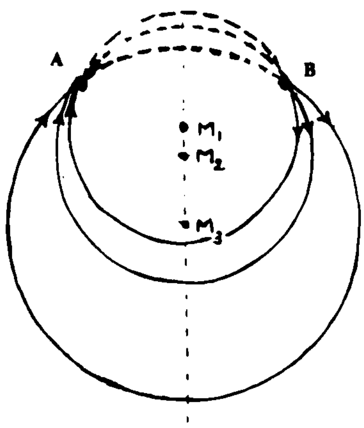

Fig.1.

Neem je passer en liniaal. Teken deze figuur over in je schrift.
(...............)
Kun je ook een cirkel bedenken op aarde die de allerlangste boog tussen A en B geeft?'

Een leraar vertelde me dat een leerling in zijn klas (ik noem hem Theo) vond dat je vanuit **B** hier op je papier steeds maar naar rechts moest gaan, onder de aarde door en dan weer links naar boven, naar A (fig.2). Dat is dan de grootste cirkel die je op aarde kan bedenken tussen de twee punten **A** en **B** op je papier.

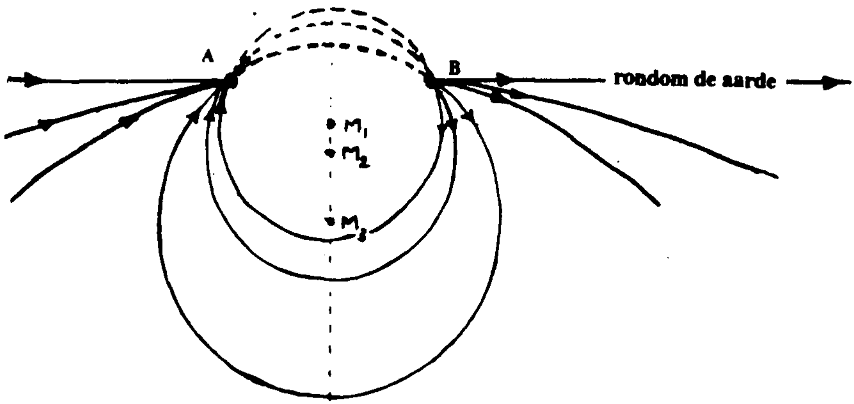

Fig.2.

Met het verhaal van Theo wordt duidelijk dat de rechte lijn **AB** op het papier deel is van de grootcirkel door **A** en **B** om de aarde heen. En omdat die rechte lijn de kortste afstand tussen **A** en **B** is, is de grootcirkel ook de drager van kortste afstand over het boloppervlak. Het is natuurlijk allemaal intuïtief, maar daarom niet van minder belang: alles blijft immers doorzichtig; de grootcirkel geeft bijvoorbeeld ook de *langste* omweg aan in een lijn recht vooruit van A naar B, namelijk om de aarde heen. Het verhaal van Theo heb ik om die doorzichtigheid in het leerlingenboek opgenomen.

Een 'driedimensionale definitie'

Een ander hoofdstuk in het leerlingenboek gaat over snijcirkels door de bol (fig.3):

Welke cirkel is de grootste snijcirkel? d of e ? Waarom?

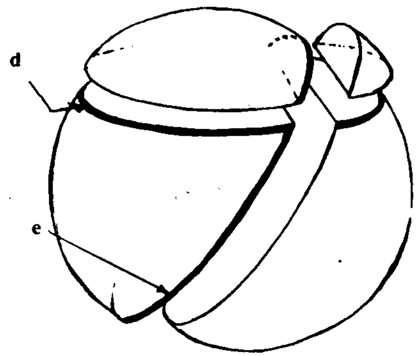

Fig.3.

Een leerling noemt cirkel e, 'omdat hij dichter bij het midden ligt'. 'Hij is de middendoorsnede', zegt een ander. Het is een precieze formulering van 'grootcirkel', maar nu als snijcirkel dwars door de *driedimensionale* aardbol. Want op het *tweedimensionale* aardoppervlak is de grootcirkel een lijn-recht--vooruit om de aarde heen, zoals Theo vertelde.

Eigen produkties van leerlingen het boek in
Ik verzamelde deze en andere 'definities' die leerlingen voor het begrip 'grootcirkel' bedachten. Sommige waren goed, andere fout. De foute omschrijvingen waren niet precies genoeg en gaven slechts een enkele eigenschap van de grootcirkel weer.

Deze produkties van kinderen - de goede en de foute - heb ik vervolgens wat bijgewerkt en onder één opgave opgenomen in het boek. Andere leerlingen kregen tot taak om deze 'definities' te beoordelen.
Enkele voorbeelden:

* *een grootcirkel is een cirkel die de aardbol in twee helften verdeelt* - goed of fout? Waarom?
  Omdat ....
* *een grootcirkel is een cirkel die de aardbol in twee stukken verdeelt* - goed of fout?
* *een grootcirkel is een cirkel die door de noordpool en de zuidpool gaat* - goed of fout?
* *een grootcirkel is een cirkel met als middelpunt het middelpunt van de aarde.*

* *als je steeds rechtdoor gaat rond de aardbol, maak je een grootcirkel om de aarde.*
* *een grootcirkel is een cirkel op aarde van 40000 km lengte.*
* *een grootcirkel is een cirkel op aarde die niet evenwijdig aan de evenaar loopt* - goed of fout?

Het opnemen van leerlingenwerk in een leerboek is een belangrijke 'truc' die elke educatief ontwerper mijns inziens moet kennen (zie bijvoorbeeld Goffree & Stroomberg, 1991). Er zijn verschillende redenen voor:

a. De bedoeling van de opgave was om het object grootcirkel 'van alle kanten' te laten bekijken door de kinderen - op hùn niveau. Daartoe zijn zogenoemde 'eigen produkties' onmisbaar.
b. Het beoordelen van werk van medeleerlingen is niet alleen motiverend, maar leidt vooral tot het zuiveren van misvattingen binnen de éigen theorie die een leerling opbouwt; een soort stille interactie tussen scholieren onderling wordt ermee opgeroepen.
c. Met het beoordelen van het werk van medeleerlingen, wordt de autoriteit van de zienswijze van de leraar omzeild. Gegeven de bedoeling van de opdracht om verschillende meetkundige zienswijzen te beoordelen is dit van doorslaggevend belang geweest.
d. In een wiskundige theorie begint men gewoonlijk met één definitie voor een object. Hoe de auteur tot die ene definitie kwam, waarom hij niet een andere definitie koos, kortom het proces van wikken en wegen en uiteindelijk het strak in de vorm brengen (het formaliseren) van het onderzochte, blijft uit het zicht van de lezer. Laat men, zoals in de bolmeetkunde-lessen, de leerlingen zelf talloze 'definities' bedenken en beoordelen, dan bestaat de kans dat de positie van de auteur van de theorie ook voor de leerling in beeld komt. De leerlingen moeten zelf tot afwegen van de definities komen: welke eigenschappen zijn essentieel, welke niet en welke zijn fout? Ik twijfelde of dat niveau wel was te bereiken. Maar ik was in goed gezelschap: Freudenthal had over de plaats van 'definities' in theorieën gezegd dat ze niet het begin, maar de 'finishing touch' vormden van een organiserende activiteit[2]. Om echt tot formaliseren te komen kun je niet buiten je eigen intuïtieve constructies om.
e. Opnemen van leerlingenwerk is een honorering voor het feit dat we 'eigen produkties' van leerlingen belangrijk vinden.

Werkte het vermoeden om via de leerlingenprodukties de grootcirkel van alle kanten te laten bekijken? Ja. Gezien de resultaten op de toets die ik later afnam, konden alle leerlingen in nieuwe situaties eigenschappen van de grootcirkel gemakkelijk herkennen en ontwierpen ze met gemak verbanden tussen andere meetkundige objecten. Maar ook de ruzies in de klas over de verschillende definities wijzen op het feit dat de grootcirkel van alle kanten werd bekeken - en meer dan dat. Er werden verschillende mathematiseringen op touw gezet.

Verschillende gezichtspunten

Beschouw je de aarde als een platte wereldkaart of als een bol? Daarvan hangt de aard van de meetkundige kennis af die je ontwikkelt en waarin jouw definitie voor grootcirkel past (of niet past). Die ontwikkeling verwachtte ik wel, maar toch doorzag ik niet alle consequenties die dat heeft in de klas. De reacties van de leerlingen bleven daardoor verrassend nieuw.

Is de richting naar Mekka vanuit Havanna oost of noordoost? luidt de vraag in het boek. Peter: 'Het is oost op de kaart'. Ieder in de groep gaat ermee akkoord. Dan vervolgt hij tot mijn verbazing: 'Maar noordoost op de aarde, omdat de aarde rond loopt'. En ik herinner me dat Maarten dit beargumenteerde met: 'De kortste afstand tussen twee punten is meer naar het noorden toe, want die ligt altijd naar het smalste punt van de aarde'.

Deze kinderen denken dus eerst vanuit de platte wereldkaart. De kaart is in hun ogen waardevoller dan de globe. Dat de bol een 'echter' model is voor onze aarde (de richting is immers op beide: noordoost) komt nog niet bij hen op. Wel construeren ze van de wereldkaart een bol door er een cilinder van te maken en die aan de poolkanten samen te trekken. De afstanden tussen de punten op gelijke breedte worden naar het noorden toe kleiner. Dus de richting (met de kortste afstand) moet wel iets noordelijker lopen, zo denken ze.

Maar even later bij de volgende vraag in het boek is dit geconstrueerde verband tussen kaart en bol verdwenen. *Een vliegtuig dat van Havanna naar Mekka vliegt, vertrekt naar het noordoosten en niet naar het oosten. Waarom denk je?* Peter, Bart en Betrick kijken naar de kaart (fig.4) en zien de boog Havanna - Mekka.

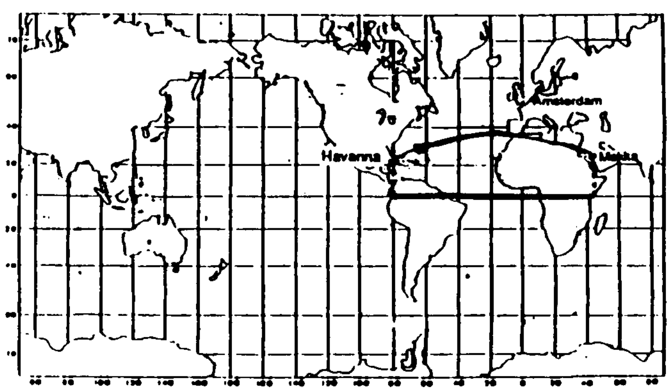

Fig.4.

Allerlei redenen bedenken ze: via Spanje om te tanken, met de wind mee, om de woestijn heen. Dan ontdekt Betrick: 'O, het is met de globe gedaan - het is de globe-richting, niet de kaart-richting. Ze hebben de globe-richting op de kaart getekend.'

De leerlingen onderscheidden aanvankelijk twee aparte richtingen (en kortste afstanden): één op de kaart en één op de bol en houden die stevig geïsoleerd van elkaar. Dat een *bol*richting ook op de *kaart* kan worden afgebeeld, is nieuw voor hen. En dat die rechte lijn op de bol een kromme lijn wordt op de kaart via Spanje, is ook een ontdekking. De leerlingen houden blijkbaar van nature de bolmeetkunde en de vlakke meetkunde gescheiden.

Intolerantie voor verschillende gezichtspunten

Heidy, Anette, Maarten en Jan zijn bezig met het beoordelen van de 'definitie': *Een grootcirkel is een cirkel met als middelpunt het middelpunt van de aarde. Goed of fout?* 'Fout', zegt Heidy. Ik kan mijn oren niet geloven. Het is dé definitie voor grootcirkel. Fout? 'Een grootcirkel gaat óver de aarde heen, toch niet dóór de aarde?', zegt ze.

Anette denkt daar anders over en probeert uit te leggen: 'Als je dit bolletje hebt (ze toont een piepschuimen bolletje met een lasrand op de plaats van de evenaar en doet alsof ze het bolletje over die rand breekt) heb je twee helften. Dat geeft twee grootcirkels met hun middelpunt in de aarde.' 'Waar je een streep trekt, daardoor heen breken, dat bedoelen jullie,' herhaalt Heidy de woorden van Anette. 'Dan kom je bij het middelpunt van de aarde, ja, dat begrijp ik. Maar een grootcirkel is toch een rechte lijn over de aarde heen en niet het snijvlak door de aarde zoals jullie bedoelen. En een rechte lijn heeft geen middelpunt. Dat heeft alleen een cirkel.' Hulpeloos draait ze zich naar me toe en zegt: 'Meester, wie heeft er gelijk?'

De grootcirkel als rechte lijn over het aard*oppervlak* heeft inderdaad geen middelpunt op het aardoppervlak en is ook geen cirkel op dat oppervlak. De grootcirkel als grootste snijvlak door de aardbol heen heeft dat wel. Het zijn twee zienswijzen, die elk op zich juist zijn. Dus ik zeg: 'Jullie hebben alle twee gelijk' en leg nog eens beide standpunten uit. Maar ze hebben er moeite mee: één van de twee moet toch gelijk hebben? Dat er twee soorten meetkundes kunnen bestaan, gebaseerd op verschillende zienswijzen en die fundamenteel verschillen in de axioma's, wil er bij hen niet in.

Als ik later aan het voorval terugdenk, realiseer ik me dat aandacht voor verschillende meetkunden van de kinderen begrip en tolerantie voor *elkaars* zienswijzen en 'spelregels' eist. Meetkundeonderwijs kan blijkbaar deze pedagogische waarde hebben.

Het ontstaan van verschillende netwerken, van verschillende meetkunden

Empirisch zoeken naar verbanden

De leraar vestigde met nadruk de aandacht op de grootcirkel. Zelfs in de vierde les riep hij: 'Noem zoveel mogelijk eigenschappen van grootcirkels'. 'Alweer grootcirkels?', dacht ik. Maar het was verbazingwekkend hoe bedreven de klassen doorstootten naar fundamentele eigenschappen en relaties.

'De grootcirkels zijn allemaal even lang', redeneerde een leerling, 'want ze zijn net zo groot als de evenaar'. De evenaar werd door de leerlingen als model voor grootcirkel gebruikt. 'Elke grootcirkel gaat door het middelpunt van de aarde, omdat hij de aarde in gelijke helften verdeelt', vond een meisje. 'Met parallelcirkels is dat anders', redeneerde ze verder, 'Die verdelen de aarde niet in twee gelijke stukken, dus de middelpunten liggen nooit in het middelpunt van de aarde'. Een andere leerling viel op dat elke grootcirkel zowel op het noordelijk als op het zuidelijk halfrond ligt. En toen klonk door de klas: 'Elke grootcirkel gaat door de evenaar'. Maar dan ligt het ook voor de hand dat 'twee grootcirkels elkaar altijd snijden'; de evenaar staat immers model voor grootcirkel.

Conclusie: er zijn geen grootcirkels die evenwijdig zijn. Dus: lijnen-rechtvooruit over de aarde heen, snijden elkaar altijd. Er bestaan eenvoudigweg geen evenwijdige rechten op aarde. Dat is toch wel een bijzondere ontdekking.

Niet-euclidische meetkunde

Door uitputtend naar eigenschappen te zoeken werd wikkend en wegend een netwerk van relaties opgebouwd, dat enigszins leek op een niet-euclidische meetkunde: de elliptische meetkunde. Elk tweetal rechte lijnen snijden elkaar; er is geen evenwijdigheid op het boloppervlak. De kinderen kwamen uit eigen onderzoek en ervaring zelf op dit axioma terecht, dat een fundamenteel verschil aangeeft tussen de vlakke en de bolmeetkunde.

Een ander axioma van de vlakke meetkunde luidt: 'Door twee verschillende punten gaat één en niet meer dan één rechte lijn'. Ook dàt axioma geldt niet voor de bolmeetkunde (denk maar aan grootcirkels door pool en tegenpool). Zo'n tegenvoorbeeld maakt dat het axioma niet een voor de hand liggend feit is en maakt daardoor het 'afspreken' zinvol. Zou dit axioma ook gelden voor de elliptische meetkunde? We komen daar later op terug (zie onder 3: niet-euclidische meetkunden).

Onderwijstheorieën van de Van Hiele's

Het ontwikkelen van een relatie-netwerk (zelfs meerdere - één voor de vlakke en één voor de bolmeetkunde) door de klas zelf deed me onwillekeurig denken aan het onderzoek van de Van Hiele's. Zij startten in de eerste klas vanuit 'concrete vierhoeken' en lieten die op eigenschappen onderzoeken. Ze lieten relaties leggen. De kinderen bevonden zich op het zogenoemde 'nulde denkniveau' en tendeerden naar een netwerk van verbanden tussen de vierhoeken. Daarmee werd het eerste denkniveau bereikt (Van Hiele, 1957).

In de bolmeetkunde-lessen in 'drie mavo' was eveneens sprake van 'meetkunde-op-het-nulde-niveau' à la Van Hiele. Met het onderzoek naar eigenschappen van de grootcirkel en het aanleggen van een netwerk van relaties tussen deze en andere objecten, kunnen we zeggen dat het eerste denkniveau werd bereikt. Bovendien kwamen verschillende netwerken, dat wil zeggen verschillende meetkunden, in opspraak en werd duidelijk dat echt formaliseren niet zonder intuïtieve 'meetkunden-op-het-nulde-niveau' kan.

Didactische activiteiten in de klas

In de klas zag je ook hoe vanuit die intuïtieve meetkunden het 'doordrammen' naar een geformaliseerd netwerk in zijn werk kon gaan. Er werden daarvoor verschillende didactische activiteiten ondernomen. Eerst werd gevraagd een eigen definitie te geven voor grootcirkel (eigen produkties); daarna werden andermans definities beoordeeld. In discussies werd vervolgens gewerkt met tegenvoorbeelden om de eigen theorie te zuiveren van misvattingen en werden de leerlingen uitgenodigd om met elkaar uitputtend op zoek te gaan naar nog meer eigenschappen en relaties. Tenslotte ging de klas op gewaagd avontuur uit[3] en werden de eigenschappen tegen elkaar afgewogen[4] (zie fig. 5).

vlakke meetkunde	bolmeetkunde
punt in het vlak	punt op de bol
rechte lijn	grootcirkel
a. één rechte lijn door twee punten	a. ....
b. twee rechten zijn evenwijdig of snijden elkaar	b. ....
c. twee punten op een lijn verdelen die lijn in drie stukken	c. ....
d. één van de drie stukken kun je als te meten afstand nemen	d. ....
....	

Fig.5.

De toets

De kinderen scoorden laag op onderwerpen die strikt technisch en algoritmisch waren en die op 'weetjes' berustten, zoals het werken met coördinaten-stelsels op de globe. Dit gold ook voor onderwerpen die nog weinig aan bod waren gekomen in de klas, zoals de kortste afstand en de meer noordelijke koers van een luchtlijn op het noordelijk halfrond.

De kinderen konden echter gemakkelijk in allerlei nieuwe situaties met grootcirkels, polen en tegenpolen werken. Ze legden snel relaties tussen deze objecten. Sommige leerlingen bedachten nieuwe verbanden. We kunnen concluderen dat het ontwerpen en beoordelen van 'eigen produkties' (grootcirkeldefinities) een uitstekend middel is om binnen het meetkunde-onderwijs tot formaliseren te komen. De 'intuïtieve' meetkunde is een noodzakelijk startpunt op de weg naar de meer formele meetkunde.

Werkbladen die in de eerste les waren gemaakt, werden achteraf verbeterd: rechte pijlen naar Mekka werden vervangen door gekromde 'grootcirkel'-pijlen. De kinderen toonden hiermee dat ze iets geleerd hadden.

De verschillende soorten meetkunde die dit pakket opriep, stimuleerden het redeneren. In een toetsopgave over een discussie namen de leerlingen bewust verschillende meetkundige standpunten in en beargumenteren de oplossingen vanuit die standpunten.

3. Theorieën

In een artikel in dit tijdschrift over het theoretiseren in ontwikkelingsonderzoek wijst Streefland (1994) op het feit dat men getroffen kan worden door de sterke overeenkomst van een geobserveerd leerproces in het ene onderzoek met dat in een ander onderzoek, terwijl zowel wiskundig onderwerp als context wezenlijk verschillen. In een ander artikel laat hij in een onderzoek over negatieve getallen de kinderen 'dooi-dag' en 'vriesdag' definiëren. Hij spreekt daarbij de verwachting uit, dat het definiëren onderdeel kan zijn van voortgaande mathematisering (Streefland,1993, p. 123). In de bolmeetkunde-lessen is zo'n verwachting na het definiëren van grootcirkels zeker uitgekomen.

Deze theoretiserende overwegingen binnen het ontwikkelingsonderzoek geven aan de ontwerper een zeker vertrouwen in het nieuwe en vaak controversiële ontwerp dat hij maakt. Ook kunnen, zoals al in het voorgaande is opgemerkt, bestaande theorieën (niet-euclidische meetkunde, Van Hiele's theorie, Freudenthal's analyses) een belangrijke steun geven voor een nieuw ontwerp. Gebeurtenissen in de klas kunnen we vanuit theorieën op hun waarde schatten en het belang van het ontwerp voor het onderwijs verklaren.

Omgekeerd zijn vanuit de onderwijspraktijk kritische kanttekeningen bij de theorieën te plaatsen. In deze paragraaf zullen we de niet-euclidische en andere soorten meetkunden, alsmede het radicaal constructivisme nader bekijken op die bovengenoemde legaliserende functie. Ik zal ze ook steeds vanuit de bolmeetkunde-lessen nader toelichten.

Niet-euclidische meetkunden

De kinderen ontdekten dat twee rechte lijnen op aarde uiteindelijk niet evenwijdig kunnen zijn. Hoe zit dat strikt meetkundig? De wiskunde-theorie die er nauw mee verwant is, is een zogenoemde niet-euclidische meetkunde. De *euclidische* meetkunde zelf is als logisch systeem gebaseerd op een aantal axioma's, zoals:

* Door twee verschillende punten gaat één en slechts één rechte lijn.
* Iedere lijn kan met behoud van de volgorde van punten éénduidig op de getallenrechte worden afgebeeld.
* Door een punt P buiten een lijn l gaat één en niet meer dan één rechte lijn m die l niet snijdt ('parallellenaxioma'). Deze drie axioma's van de euclidische meetkunde gelden wel in de vlakke meetkunde, maar niet in de bolmeetkunde (Door pool en tegenpool bijvoorbeeld gaan oneindig veel grootcirkels).

Geschiedenis

De vraag of het 'parallellenaxioma' wel een onafhankelijk axioma is, dan wel een stelling die uit andere (meer eenvoudig schijnende) axioma's kan worden afgeleid, heeft meer dan tweeduizend jaar de wiskundigen bezig gehouden. Gauss was de eerste die de onafhankelijkheid van het parallellenaxioma vermoedde en dus tot de conclusie kwam dat er logischerwijs ook een andere meetkunde mogelijk was, die op een vervangend axioma berustte (Struik, 1980, p. 211). Met de vervanging van het 'parallellenaxioma' door een ander, namelijk zijn tegengestelde ('Door een punt P buiten een lijn l gaan twee of meer lijnen evenwijdig aan l') werd dus een nieuwe meetkunde geformuleerd. Gauss noemde die 'niet-euclidische meetkunde'; Lobatschewsky hield in 1826 voordrachten over onderwerpen uit die meetkunde en Bolyai schreef er een verhandeling over in 1832. Maar het wantrouwen tegen de niet-euclidische meetkunde bleef bestaan. Men vermoedde een fout in de redenering.

Riemann was de eerste wiskundige van naam die 20 jaar later (in 1854) ook andere vormen van meetkunde toeliet door wijzigingen in de axioma's voor te stellen (zie bijvoorbeeld Freudenthal, 1957). Hij had een andere ontkenning voor het euclidische 'parallellenaxioma', namelijk 'Er bestaat *geen* rechte lijn evenwijdig aan een rechte l door een punt P buiten l'. Twee grootcirkels bijvoorbeeld zijn niet evenwijdig, zoals door onze leerlingen werd ontdekt. De bolmeetkunde kan, wat het parallellenaxioma betreft, als model dienen voor deze niet-euclidische meetkunde van Riemann. De acceptatie van de niet-euclidische meetkunden kwam echter pas na 1870, toen afbeeldingen van de ene meetkunde in de andere werden onderzocht. In 1871 lukte het Klein daarmee aan te tonen dat de niet-euclidische meetkunde ook kon worden opgevat als projectieve meetkunde met een bijzondere metriek. De ontdekking van deze afbeelding bracht vele wiskundigen, die nog steeds hadden geloofd dat er ergens wel een logisch foutje zou zitten in de niet-euclidische meetkunde, tot inkeer. Dat die fout dan ook in de projectieve meetkunde en dus in de euclidische zou moeten voorkomen was voor velen, zo niet allen, te ketters, aldus Struik (1980, p. 225). De twee niet-euclidische meetkunden (alleen op het parallellenaxioma afwijkend, de andere axioma's worden gehandhaafd), werden nu algemeen geaccepteerd. Die van Gauss, Lobatschewsky en Bolyai werd aangeduid als een 'hyperbolische meetkunde', de andere vorm, door Riemann aangegeven, als een 'elliptische'. Uit de historie is duidelijk dat de ontwikkeling van de niet-euclidische meetkunde niet zonder slag of stoot is verlopen. Een frappante overeenkomst met de gebeurtenissen in de klas.

Onthechting?

Het is echter vreemd dat de elliptische meetkunde (van Riemann) ruim 20 jaar later werd geformuleerd dan de hyperbolische (van Gauss, Lobatschewsky en Bolyai). Voor de elliptische meetkunde was al een goed model voor handen: de bolmeetkunde met zijn toepassingen in de zeevaart bestond immers al eeuwen.

Deze gang van zaken geeft misschien aan hoe onthecht de wiskundigen destijds waren van het 'praktische leven' en hoe sterk ze hun onderzoek richtten op de formele axiomatiek. De ontwikkeling in de klas liep in dit opzicht niet parallel met de historische ontwikkeling van soorten meetkunde. Het realistisch meetkundeonderwijs is daarvoor te zeer verbonden aan de wereld.

Bolmeetkunde

De bolmeetkunde is een meetkunde die zowel afwijkt van de euclidische meetkunde, als van de twee niet-euclidische meetkunden. De niet-euclidische meetkunden verschillen namelijk alleen in het parallellenaxioma van de euclidische. De bolmeetkunde wijkt ook af op andere axioma's. Door twee verschillende punten kan precies één rechte lijn gaan, maar in de bolmeetkunde kunnen er ook oneindig veel door twee punten gaan; het boloppervlak is compact, dat wil zeggen dat het alle verdichtingspunten bevat, zodat een 'rechte lijn' gesloten is (grootcirkel) en dus niet één-éénduidig kan worden afgebeeld op de (open) reële getallenrechte. Toch vond Klein dat men de bol tot aanschouwelijk model voor de elliptische meetkunde kan vervormen. Hij definieerde daartoe een elliptisch punt als een paar van twee bolpunten die elkaars tegenpolen zijn. Door twee van dergelijke elliptische punten gaat dan precies één elliptische lijn. Ook aan de andere axioma's wordt voldaan, met uitzondering van het parallellenaxioma (zie bijvoorbeeld: Oosten, 1970).

Zeevaartkunde

In de zeevaart is de bolmeetkunde een beroepsmeetkunde met specifieke activiteiten die echter ook voor het meetkunde-onderwijs in het algemeen geschikt zijn. Twee kaartprojecties worden bijvoorbeeld handig gecombineerd om een koers uit te zetten: de mercatorprojectie (waarop elke rechte lijn een route met vaste koers aangeeft, een 'loxodroom' over de bol) en de centrale projectie (waarop elke rechte lijn een grootcirkel aangeeft, dus de kortste afstand over de bol). In de zeevaart wordt het liefst via een loxodroom gevaren. Er zijn dan geen koersveranderingen nodig. In het algemeen is een loxodroom echter geen grootcirkel, dus niet de kortste afstand. Om aan beide eisen (een vaste koers én de kortste afstand) tegemoet te komen, wordt een samengestelde koers ('composed track') uitgezet[5].

Een ander meetkundig vraagstuk is dat de parallelcirkels op een centrale projectie verschillende soorten kegelsneden zijn, niet ontstaan uit doorsnijdingen van één kegel met verschillende vlakken, maar uit doorsnijdingen van één vlak (het projectievlak) met verschillende kegels. Er is dus meetkundig empirisch[6] onderzoek te over, binnen de bolmeetkunde.

Radicaal constructivisme

Het radicaal constructivisme (RC) van Ernst von Glasersfeld is een filosofische kentheorie[7]: men denkt na over de vraag hoe kennen en kennis tot stand komt. Men heeft daarover ideeën die nauw aansluiten bij visies van het 'realistisch reken- en wiskundeonderwijs', maar ook enkele denkbeelden die als verschilpunten kunnen worden aangemerkt. Hieronder zullen we vanuit de bolmeetkunde-lessen enige opvattingen binnen deze filosofie systematisch uitwerken.

Een wereld buiten

In het meningsverschil tussen Heidy en Anette over een grootcirkeldefinitie pakte Anette een piepschuimbolletje om haar gelijk over de grootcirkel te tonen. Zij deed dat met andere middelen dan Heidy, die naar de omgeving wees als deel van het hele aardoppervlak. Toch hadden ze het over hetzelfde object (grootcirkel) uit de objectieve wereld rondom. Von Glasersfeld stelt dat we over die objectieve wereld op zich niets kunnen weten. Wel over onze kennis van de wereld, die ieder zelf heeft geconstrueerd. Het kennen van de omringende wereld komt tot stand door persoonlijke ervaringen via de zintuigen. De kennis over een object (zijn eigenschappen, zijn relaties) hangt af van met welke zintuigen we het object hebben waargenomen: een ander zintuig kan voor een andere waarheid zorgen over hetzelfde object (Von Glasersfeld, 1991). Om deze reden is kennis van een 'actor' zoals Anette een andere kennis dan die van een 'beschouwer' zoals Heidy over een zelfde object.

Je zou kritiek kunnen hebben op de radicaal constructivistische opvatting dat 'kennen' tot stand komt via de zintuigen, als organen van het menselijk lichaam. Er zijn tevens verschillende standpunten in het geding van waaruit je naar de wereld kijkt: de wereld als platte kaart bijvoorbeeld, of als omgeving direct rondom ons heen, de wereld als gekromd oppervlak zoals vanuit een satelliet is te zien, maar ook de wereld als bolletje dat je in gedachte kan doorsnijden. Natuurlijk is het boloppervlak binnen een klein gebied vergelijkbaar met het platte vlak, maar het wijkt af zodra je het boloppervlak als geheel bekijkt. En daarmee wijkt ook de kennis af[8]. Kennis is als het ware een nadere detaillering van het globale beeld dat je allereerst ontwikkelt.

'Subjective environment'

Geconstrueerde kennis is niet beperkt tot afzonderlijke objecten. Ook kennis over de omgeving zelf wordt subjectief geconstrueerd. Ieder maakt een eigen beeld van de wereld. Von Glasersfeld noemt die kennis 'subjective environment' en merkt op dat ieder van ons meent dat zijn of haar wereldbeeld dé objectieve wereld is. Hij verwerpt dat standpunt. Je kan je van alles verbeelden als 'net echt', maar of het beeld echt objectief is, zal altijd een vraag blijven. Daarover valt niets te zeggen, omdat je slechts op je eigen ervaringen kunt bogen.

Anette en Heidy gingen met elkaar in debat. Ze verdedigden stevig hun eigen standpunten. Maar het verontrustte hen toch ('Meester, wie heeft er nou gelijk?'), toen bleek dat een objectieve waarheid niet bestond. Het ging om twee verschillende manieren van kijken naar de wereld en de daaruit voortvloeiende verschillen in kennis (in casu: meetkunden).

'Subjective environment' als een 'fitting'

In die subjectief geconstrueerde omgeving moet een verschijnsel passen, zoals een lamp in een fitting. De juistheid van een grootcirkel-definitie hangt af van het feit of hij past ('fit') of niet past binnen de reeds aanwezige meetkunde. Lukt dat niet, dan ontstaat 'aangeplakte ' kennis (Von Glasersfeld spreekt hier over 'matching' in tegenstelling tot 'fitting'). Deze storing kan echter ook aanleiding zijn om de subjectieve omgeving zelf te herzien en de restricties die de omgeving scheen op te leggen, bij te stellen.

De overeenkomst met de ontwikkeling van de verschillende meetkunden in de klas is duidelijk. Het geknutsel van elke leerling om greep te krijgen op objecten als grootcirkel, rechte lijn, en dergelijke, om ze in relatie met elkaar te brengen en een netwerk op te bouwen, is te zien als de constructie van een deel van de 'subjective environment'. In geformaliseerde vorm zijn dat: de bolmeetkunde, de vlakke meetkunde of de ruimtemeetkunde.

Onveranderlijke omgeving?

Gaat het om 'inpassen' in (fitting) of om 'aanpassen' aan de beperkingen die een reeds bestaande onveranderlijke omgeving oplegt?

Piaget onderscheidde verschillende aanpassingsvormen van het organisme aan de omgeving (adaptatie, accommodatie, assimilatie) en hij moet er zich bewust van zijn geweest dat met name bij assimilatie sprake is van een wisselwerking tussen organisme en omgeving. Het is slechts schijn dat bijvoorbeeld graniet onveranderlijk zijn wetten oplegt aan het organisme dat daar leeft. Langzaam verandert het organisme ook de granieten omgeving. Veel van wat als tijdloze beperkingen te boek staat, blijkt bij nadere beschouwing aan veranderingen onderhevig te zijn (Lewin, 1994, p.8). Von Glasersfeld heeft dit idee beklemtoond met zijn begrip 'subjective environment'. Hij meent 'Intelligence organizes the world by organizing itself' (Von Glasersfeld, 1982, p. 613). De beperkingen van de omgeving en de middelen om te overleven *ontstaan gezamenlijk*. Met andere woorden: aanpassing is tijdgebonden en wederzijds.

Levensvatbaarheid en beperkingen

In plaats van 'aanpassing' spreekt Von Glasersfeld over 'levensvatbaarheid'. 'Viability' is het vermogen waarmee het organisme middelen ontwikkelt in wisselwerking met de beperkingen van de omgeving. Hij geeft als voorbeeld het begrijpen van taal. 'We believe to have 'understood' a piece of language whenever our understanding of it remains viable in the face of further linguistic or interactional experience' (Von Glasersfeld, 1983. p. 213). Het begrijpen blijft 'levendig', als er uitzicht blijft op toekomstige activiteiten, op verdergaande verdieping van kennis in de toekomst.

De overeenkomst met de lessen in de klas is frappant. Kennis van afzonderlijke objecten en de opbouw van een netwerk dat steeds meer beperkingen oplegt aan die objecten, gingen gelijk op. De levendigheid in kennis bleef gewaarborgd doordat de leerlingen werden aangespoord tot verder onderzoek door hun vondsten, hun medeleerlingen, en hun leraar.

Het werd duidelijk dat het soort netwerk samenhing met de eerste kijk van de leerling op de wereld (plat of bol). De beperkingen opgelegd door deze kijk en de middelen om de wereld te blijven begrijpen (hoe zij bestaat), kwamen gezamenlijk tot stand. Kennis van de omgeving (de meetkunden) werd een individueel ontwerp.

Deze opvatting leidt ertoe dat wiskunde niet als een collectie van tijdloze structuren kan worden beschouwd die hun beperkingen opleggen, maar van structuren die door de mensen worden ontworpen. En daarover heeft het realistisch wiskundeonderwijs geen andere gedachte.

Paradox of the happy agreement

En van de kritieken op het RC is de zogenoemde 'paradox of the happy agreement': 'Each knower, independently pursuing his or her best intuitions, somehow comes up with the identical solution as all others. We all conclude that alternate interior angles are congruent ......' (Lewin, 1994, p. 11). Hoe verschillend alle individuele gedachteconstructies ook mogen zijn, alle antwoorden worden uiteindelijk dezelfde. Voor het onderwijs is dit constructivistische standpunt reeds op vele manieren bezongen, bijvoorbeeld als 'negotiation of meaning' (Cobb, e.a., 1992). Ik meen echter dat de 'happy agreement' eerder vanuit het onderwijs komt, dan vanuit het RC.

Bij de bolmeetkunde-lessen liep het helaas volkomen mis. Ik merkte dat leerlingen van een jaar of 16 *niet* de spontane neiging vertoonden om een mening te delen. Het bestaan van andere meningen werd slechts voor lief genomen. De eigen ideeën bleven prevaleren, soms tegen beter weten in. Die houding was overigens te prijzen. Ze kwam ten goede aan het meetkunde-onderwijs. Om je mening te handhaven en de medeleerlingen te overtuigen moet je namelijk je eigen systeem onderzoeken op zijn consequenties, consistentie, beperkingen en regels.

Deze 'disagreement' past ook veel beter bij het RC, dat immers uitgaat van het ontstaan van een diversiteit aan subjectieve wereldbeelden in de klas. Bovendien: juist het voorbeeld dat Lewin noemt ter illustratie van de 'happy agreement' - iedereen ontdekt tenslotte dat verwisselende binnenhoeken gelijk zijn - is niet juist. Ze zijn namelijk inderdaad gelijk in de vlakke meetkunde, maar niet in de bolmeetkunde. De 'agreement' vindt dus niet plaats op het niveau van 'verwisselende binnenhoeken', niet binnen één en hetzelfde systeem, maar op het niveau van welke soort meetkunde je op 't oog hebt, welke 'spelregels' je volgt. Veel fundamenteler dus.

Paideia

Een andere kritiek op het RC is dat er binnen deze filosofie geen plaats is ingeruimd voor opvoeding, voor 'Paideia' (Lewin, 1994). In een Grieks woordenboek vond ik ook 'Paidia': 'spel', 'spelen', maar ook 'kinderachtig spel', 'scherts'. Paidia heeft te maken met spelregels van allerlei aard. Zo beschouwd, als spelen, passen de euclidische en de niet-euclidische meetkunden wonderwel. Discussies gebaseerd op verschillende meetkundige gezichtspunten eisten van de kinderen een tolerantie en aandacht voor de gedachteconstructies van hun buren, voor de andere 'regels' die ze volgden en het andere spel dat ze speelden. Dat is de pedagogische waarde van het meetkundeonderwijs, let wel, vanuit een fundamenteel meetkundig onderwerp zelf: het onderzoek naar verschillende typen meetkunde.

Realistisch onderwijs en RC

Vanuit het mathematisch-didactisch Realisme wordt het RC verweten dat het geen theorie is die uit het onderwijs voortkomt. In het RC worden geen hints gegeven voor het onderwijs van alle dag. De filosofie geeft aan hoe kennen en kennis tot stand komt, maar niet hoe je dat proces kan stimuleren en sturen.

Die kritiek is niet helemaal terecht. De didactische activiteiten waarmee de leerlingen tot bolmeetkundig onderzoek werden gestimuleerd kwamen wel vanuit het onderwijs naar voren en niet uit de filosofie, maar vanuit het RC zijn die ontwikkelingen goed te begrijpen via begrippen als 'subjective environment' en 'viability'.

Maken we een vergelijking tussen het mathematisch-didactisch Realisme en het RC dan valt allereerst op dat er volgens het Realisme wel degelijk een objectieve realiteit buiten het individu om bestaat die, zij het niet geheel, dan toch in gedeelten door individuen is te kennen. Het RC meent daarentegen radicaal *niets* objectiefs over die wereld te kunnen zeggen. Het betoogt dat daarom noodzakelijkerwijs conflicten tussen mensen moeten ontstaan. Het Realisme stelt dat er door een ieder objectief te kennen problemen bestaan, zogenoemde 'contextproblemen' en het streeft daarmee de geleidelijkheid na binnen het onderwijs, het stapsgewijze compromis. Het RC daarentegen laat zelfs het begrip 'context' uit uitsluitend subjectieve denkbeelden en ervaringen bestaan. Het Realisme wil daar niet aan: over 'contexten' is te weinig 'objectiefs' te zeggen. 'Contextproblemen' - daar gaat het om.

Toch zijn er ook overeenkomsten aan te wijzen tussen het Realisme en het RC. De denkbeelden van kinderen kunnen gebruikt worden om er onderwijs van te maken. Ze kunnen een weg aangeven voor een leerplan. Bollebozen kunnen voortrekkers zijn in de klas. Deze overeenkomsten berusten op een grote gemeenschappelijke waardering voor het individu met zijn of haar denkbeelden zowel in het RC als in het Realisme.

Noten

1. Die functie geldt overigens niet alleen voor wiskundige theorieën, ook een leerplan is bij machte de plaats van een ontwerp te rechtvaardigen. Grootcirkels bijvoorbeeld, komen in het nieuwe wiskundeprogramma voor de Nederlandse scholen alleen voor in het pakket 'Mekka' (zie: Team W 12-16: Achtergronden van het Nieuwe Leerplan Wiskunde 12-16, 1992). Toch passen ze goed in het programma als geheel. Ze vormen een onderwerp binnen de ruimtemeetkunde , ze passen bij 'doorsneden', 'kijklijnen', 'plaats bepalen' en 'rekenen in de meetkunde', dat wil zeggen, bij de onderdelen waaruit het leerplan is opgebouwd. Daarom is de verwachting dat in de toekomst enige aandacht aan grootcirkels en andere onderwerpen uit de bolmeetkunde zal worden besteed.

2. Freudenthal (1971): 'Definitions are not preconceived to derive something from them, but more often they are just the last element of analysis, the finishing touch of organizing a subject. Children should be granted the same opportunities as the grown-up mathematician claims for himself' (424). Maar hij waarschuwt: 'Geometrical axiomatics cannot be meaningful as a teaching subject unless the student is allowed to perform these activities himself' (426).
3. Bijvoorbeeld door op zoek te gaan naar de kortste afstand tussen twee punten op aarde (langs een grootcirkel) én zonder daarbij van koers te hoeven veranderen (langs een 'loxodroom'). Leerlingen menen: 'Via een meridiaan?', 'Via de evenaar?', 'Langs een parallelcirkel?'.
4. We merkten tendensen bij kinderen om hun 'definities' van grootcirkels af te wegen (Welke is de 'beste'? Welke is de 'allesomvattende'?) zoals bij het formaliseren van een wiskundig systeem het geval is. Johan formuleerde twee aparte definities: 'De cirkel die recht om de aarde loopt' en 'Waar de aarde het dikste is', maar hij koos niet 'de beste'. Peter formuleerde spontaan: 'Een grootcirkel is een cirkel recht door het midden van de aardbol die in hetzelfde punt aankomt'. Hij maakte een gecompliceerde definitie van een snijcirkel door de 'driedimensionale' bol en de lijn rechtuit over het tweedimensionale 'boloppervlak'.
5. Een stuurman vertelde me: 'Eerst zet ik een rechte lijn op de centrale projectie kaart. Die rechte is een grootcirkel. De snijpunten met de meridianen neem ik over op een mercatorprojectie. Die liggen in een boogje. Ik verbind die punten met rechte lijnen, die op de mercatorprojectie loxodromen zijn. Ik vaar dus loxodromisch naar punten van een grootcirkel toe. We noemen dat een 'composed track'.
6. Wiskunde is een empirische wetenschap - of je nu de axiomatiek onderzoekt of een model van de wereld met grootcirkels en dergelijke ontwikkelt.
7. In de VS doet het radicaal constructivisme veel stof opwaaien: kritische kanttekeningen worden gemaakt, bepaalde facetten worden geaccentueerd en uitgebreid (socioconstructivisme, social constructivisme, didactic constructivism).
8. Ook in de natuurkunde wordt vanaf verschillende standpunten naar de wereld (de werkelijkheid) gekeken met als gevolg het bestaan van een diversiteit aan theorieën (Newtons wereldbeeld, relativiteitstheorie, quantummechanica).

Literatuur

Brink, F.J. van den (1989). *Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen.* Utrecht: OW&OC.

Brink, F.J. van den & M. Meeder (1991). Mekka. *Nieuwe Wiskrant, 11*, 1, 80-84.

Brink, F.J. van den (1994). Bolmeetkunde-lessen. *Nieuwe Wiskrant 13*, 3, 28-34.

Cobb, P., E. Yackel & T. Wood (1992). A constructive alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education 23*, 1, 1-53.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics, 3*, 413-435.

Freudenthal, H. (1971). Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie. *Nieuw Archief voor de Wiskunde, 4*, 5, 105-142.

Glasersfeld, E. von (1991). *A Constructivist's View of Learning and Teaching*. Bremen.

Glasersfeld, E. von (1982). 'An interpretation of Piaget's Constructivism'. *Revue Internationale de Philosophie, nos 142-143*, 612-635.

Glasersfeld, E. von (1983). 'On the concept of interpretation'. *Poetics, 12*, 207-218.

Goffree, F. & H. Stroomberg (1991). *De educatieve ontwerper*. Amsterdam: UvA, Enschede: SLO.

Hiele, P.M. van (1957). De problematiek van het inzicht, gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen. *Meetkunde-leerstof.* Amsterdam.

Lewin, P. (1994). *Constructivism and Paideia* - a paper prepared for a conference in honor of Ernst von Glasersfeld. Atlanta: Georgia.

Oosten, A.B. (1970) Niet euclidische meetkunde. *Pythagorasfestival.* Groningen. 185-197.

Parreren, C.F. van (1978). *Niveaus in de ontwikkeling van het abstraheren.* Utrecht.

Streefland, L. (1993). Ontwikkelingsonderzoek Negatieve Getallen. In: R. de Jong en M. Wijers (Eds.). *Ontwikkelingsonderzoek* (pp.111-130), Utrecht: Freudenthal Instituut.

Streefland, L. (1994). Theoretiseren in ontwikkelingsonderzoek. *Tijdschrift voor Didactiek der β-Wetenschappen, 12*, 21-34.

Struik, D.J. (1980). *Geschiedenis van de Wiskunde.* Utrecht: Het Spectrum.

Team W12-16 (1992). *Achtergronden van het nieuwe leerplan wiskunde 12-16, deel 2.* Utrecht/Enschede: Fi/SLO.