Theorie in praktijk
Het dogma: van de leefwereld naar de wiskundewereld

P. Verstappen
S.L.O., Enschede

Summary
That the relationistical nature of mathematics has really to appoint the structure of mathematics education, is the principal idea of this argument. Its present denial, forced by a dominant pragmatical image of man, has led to the shortening of the hypothetical-deductive concept in the favour of the reality concept. The didactical dogma, that the student must get from his living world into the mathematical world, is the radical extension of the operative principle. The basic idea of this dogma is that the mathematics theory is in practice. This reductionistical principle is contrary to the mathematical method, that from the beginning works with forms and not with meanings. The postponing of the formal thinking works negatively. If the young child is not confronted with the mathematical thinking, it will learn it only laboriously and faulty later .

De relationistische aard van de wiskunde dient wel degelijk de opzet van het wiskundeonderwijs te bepalen is de hoofdgedachte van dit betoog. De huidige ontkenning daarvan, onder druk van een dominant pragmatisch mensbeeld, heeft geleid tot het inkorten van het hypothetisch-deductief concept ten gunste van het realiteitsconcept. Het didactisch dogma dat de leerling vanuit zijn leefwereld tot de wiskundewereld moet geraken is de radicale uitbreiding van het operatieve principe. De wiskundetheorie bevindt zich in de praktijk is de grondgedachte van dit dogma. Dit reductionistisch principe staat haaks op de wiskundige methode, die vanaf het begin met vormen werkt en niet met betekenissen. Het uitstellen van het formele denken werkt negatief. Als het jonge kind er niet mee wordt geconfronteerd leert het later het wiskundig denken slechts moeizaam en gebrekkig.

1. Wiskunde leren vanuit de leefwereld
De geschiedenis van de wiskunde toont een lange en moeizame ontwikkeling, vooral de primaire fase van leefwereld naar symboolwereld heeft vele millennia geduurd. Tegenwoordig gaat de ontwikkeling zo snel dat zelfs genieën nauwelijks meer bij kunnen blijven. Vanwaar die versnelling, waar heeft men vroeger zo mee geworsteld? Het antwoord kan van belang zijn voor het wis-

kundeonderwijs, gezien het huidig streven wiskunde aan de hand van reële situaties en problemen te laten leren, dus vanuit de werkelijkheid op weg te gaan. Eerder was de werkelijkheid enkel doel in de zin dat de leerlingen de wiskunde moeten kunnen toepassen en aldus mikte men op wiskundigheid of gecijferdheid, een terminologie analoog met geletterdheid. Het streven, het reële zowel uitgangspunt als doelstelling te laten zijn, heet in het jargon de 'wiskunde in de werkelijkheid' of 'wiskunde in de reële verschijnselen'. Wiskundigheid als doelstelling zullen weinigen betwijfelen, integendeel, mijn betoog richt zich enkel tegen het uitgangspunt, het tegenwoordig door velen in de wereld van de wiskundedidactiek aangehangen methodische dogma: van leefwereld naar wiskundewereld. Het twistpunt is de spilfunctie van de reële problemen indien ze moeten fungeren als bron voor het leren van wiskunde, waaronder het rekenen, en dat de leerlingen zelf, eventueel onder begeleiding en in groepsverband, de gangbare en bruikbare wiskunde moeten verwerven. Kortweg: wiskunde leren door direct met de ervaring bezig te zijn. In de groepstaal heet dit 'wiskunde als een activiteit'. De wiskunde als systeem wordt niet gedoceerd, zoals in de dogmatische leervorm, waarin de leraar of lerares in hoofdzaak bewijzen en algoritmen eenvoudig meedeelt. De achtergedachte van de dogmatische leervorm is de menselijke kennis en kunde niet telkens te laten heruitvinden. Voordoen en nadoen zijn de activiteiten die mens en dier beoefenen en de kracht van de mensheid is dat ze beschikt over een representatief en redenerend taalvermogen dat dit leerproces boven het ostensieve uitbrengt.

In het wiskundeonderwijs van de laatste vijftig jaar hebben we niettemin slechte ervaringen gehad met de dogmatische leervorm, zozeer dat we zelfs spreken van het mechanistische onderwijs. Het voorkauwen van kennis kan er kennelijk gemakkelijk toe leiden dat kinderen niet zelf leren na te denken. Deugt de dogmatische leervorm op zich niet of ligt de oorzaak in de uitwassen ervan? In ieder geval het toepassen van wiskundige structuren had tot voor kort enkel plaats in de wiskunde zelf en was totaal ontaard. De realiteit kwam ternauwernood aan bod. De omslag naar heuristisch onderwijs en naar wiskunde in het dagelijks leven is zeker geen verrassend gebeuren. Desondanks vraag ik mij in dit artikel af of die omslag terecht is. Leren ze wel de wiskundige methode? Hoe is van leerlingen te verwachten dat ze de wiskunde niet aanleren, maar zelf vanuit het reële kunnen heruitvinden, als de historische ontwikkeling ervan zo traag en stroef verliep? De langzame ontwikkeling was te wijten aan de gedachte dat een lokale connectie bestaat tussen ervaring en wiskunde. Echter zelfs het toepassen van wiskunde geschiedt alleen globaal. Wiskunde is geen inductieve wetenschap met het bijzondere als object, integendeel, wiskunde is de wetenschap van het algemene.

2. Leren als het organiseren van ervaringen

Wiskunde in de reële verschijnselen, tevens pleidooi voor de heuristische leervorm, vertrekt vanuit de eigen ervaringen. 'Mathematiseren' als het organiseren van een veld aan ervaringen[1] is de nieuwe definitie. Voordien verstond men onder mathematisering het toepassen van mathematische methoden in andere wetenschappen.[2] Inderdaad, door ervaringen te organiseren verwerft de mens feiten, begrippen en instrumenten. Maar dit organiseren is qua denkvorm te onderscheiden van wiskundigheid in de zin van het zich bewegen in de structuur en het kunnen toepassen ervan. Het onderscheid ligt in de denkvorm. In het onderwijs spreken we van toepassen als de leerlingen een zich door leren eigen gemaakte kennis of vaardigheid in praktijk brengen. Het organiseren is enkel beoefenen met het alledaagse *gezonde verstand* en geen toepassen van wiskunde. De achtergedachte is dat het gezonde verstand niet bedorven is door onbegrepen kennis. Dat is een merkwaardige denkfout. Elementen van het gezonde verstand als kracht, lijn, energie, massa, breuk en tijd zijn juist weinig begrepen concepten, eerder misconcepties. Bovendien als het gaat om in samenhang zien of brengen van fysische ervaringen met behulp van het gezonde verstand dan is organiseren een fysicalistische activiteit. Het beroep op het gezonde verstand is kenmerkend voor de empiristische grondhouding, waarin de overtuigingen van de gewone man worden bevestigd als vaststaand, natuurlijk en onbetwijfelbaar. Met het gezonde verstand, al zou men het willen, kan men niet denken dat het parallellenaxioma niet geldt.

Het organiseren van ervaringen in plaats van het toepassen van wiskunde, spreekt velen aan, vooral de idee dat door reële handelingen de mentale activiteiten tot stand komen. De achtergrond is de abstractietheorie van reële activiteiten. Vico gebruikte al rond 1700 het aforisme: de mens kent wat hij maakt. In de leerpsychologie heet dit *het operatieve principe*, een denkbeeld dat in de jaren zeventig weer opgang maakte.[3] Wie kent niet de ontwikkelingsfasen: oriëntatie, materieel handelen, verbaliseren, innerlijke spraak, uitdrukken en reëel objectiveren. Het zijn de fasen die de sowjetpsychologie ontwikkelde vanuit de hypothese van de interiorizering. Dezelfde fasen vormen de kern van Bruners visie op de cognitieve groei, namelijk het tripel: enactief → iconisch → symbolisch. Vanuit het proefondervindelijke ontwikkelt zich een iconische activiteit, en deze ondersteuning door beelden kan overgaan in een verbale fase, waarin zinnebeeldig wordt gewerkt.

In de westerse pedagogische didactische cultuur gaat het operatieve principe gepaard met individualiteit, dus met zelfwerkzaamheid en specifieker zelfdenkzaamheid. Zo bedoelt men met activiteit in de opvoedkunde het principe van de geestelijke en lichamelijke (zelf)werkzaamheid van de leerling, gedreven door echte innerlijke belangstelling. Wat via activiteit is verworven, zo luidt de these, wordt beter begrepen en onthouden dan op meer passieve wijze aangeleerde kennis. Zelfactiviteit moet aldus leiden tot een heruitvinding van wiskunde, kortweg *hervinding door zelfvinding*. Hervinding is in het leren de opdracht om zelf de wiskunde te verwerven, niet door imitatie maar door zelfconstitutie. Vico's gedachte is in de achttiende eeuw verder ontwikkeld door Kant in zijn gelijkstelling van begrip en aanschouwing. Later werd de aanschouwing nadrukkelijk gegeneraliseerd tot activiteit. De gelijkstelling van begrip en aanschouwing houdt dan in: het is onmogelijk een begrip te denken zonder het te construeren. Men kan dus geen lijn denken zonder ze mentaal te tekenen. In die zin kan men spreken van de *gelijkstelling van begrip en activiteit*.

Het organiseren van een veld aan ervaringen is inherent aan de ervaringsleer, met als maxime dat alle voorstellingen en begrippen aan de ervaring te danken zijn. Het ervaringsdenken vertrekt vanuit de experimenterende denktechniek, kortweg het experimenteren. De methode is inductief en verifierend. Ze is een gissen en (meestal voor een deel) weerleggen. De experimenterende denktechniek construeert al denkend mogelijke reële samenhangen en toetst ze in de ervaring. De vraagstelling aan aanschouwing en ervaring is het wezen van de experimenterende denktechniek in de ruimste zin[4]. Centraal staat de concrete samenhang. Kortom haar methodisch denken is een *wisselwerking van door de ervaring geïnduceerde theorie en aanschouwing*, echter zo dat de theorie het instrument is om tot vragen te komen, waarop in de aanschouwing, door verificatie bevestigend of ontkennend kan worden geantwoord. Een samenhang of verband is waar als de ervaring ervan dit uitwijst. Zo geldt als men van zes meter lint een stuk van twee meter afknipt er nog vier meter overblijft en in dezelfde denkvorm geldt de dekpuntstelling: als men in een glas melk roert keert er minstens één deeltje terug naar zijn oude plaats.

3. De wiskundige denkvorm gaat aan de ervaring vooraf

In de wiskunde komt het gissen en weerleggen ook voor. Zo kan men vermoeden dat het aantal priemgetallen $< n$ gelijk is aan $n/\log n$, maar dit heeft geen enkele bewijskracht. Het is vandaag zonneklaar dat de wiskunde geen door ervaring geïnduceerde theorie accepteert en geen algemene regels afleidt uit bijzondere verschijnselen. Door experimenten de menselijke ervaring uitbreiden berust op een aan wiskunde totaal wezensvreemde denkvorm. Het wezen en de grondslag van het wiskundig denken vormt het hypothetisch-deductief redeneren. In deze grondslag ligt de kern van het onderscheid in experimenterend en wiskundig denken. Bij de één ligt de grondslag in de ervaring van de werkelijkheid, bij de ander in de ervaring van de structuur.

Door hypothetisch-deductief redeneren ontwikkelt zich de wiskundige structuur. Een heldere methode, desalniettemin vertoont wiskunde nogal een proteïsch karakter door het tamelijk diverse werkterrein en de vele toepassingen. Onmiskenbaar is de wiskunde formeel en de structuur bestaat uit een netwerk van formele systemen en het netwerk zelf is ook een formeel systeem bestaande uit veralgemeningen, inclusies en toepassingen. Welbegrepen is de wiskunde geen tak van de logica en ook niet constructief in de intuitionistische, Brouwerse zin. *Wiskunde schrijdt voort door eigen problemen op te lossen en de resultaten te verklaren door plaatsing in of uitbreiding van het netwerk.* Het wiskundig denken beoogt te verklaren en ontwikkelt daartoe instrumenten als oplossingen en algoritmen. Haar activiteit is relateren. De kwestie is wat zijn de objecten van dit relateren? Het antwoord is verrassend: de objecten zijn de relaties zelf en wil men de relaties zelf kennen dan gebruikt men daartoe het enige middel dat ter beschikking staat: de relatie. Zo wordt de continuïteit van een functie vastgelegd door een functie (de $\delta(\epsilon)$). Het wiskundig denken is een relationeel denken uitgaande van de primordialiteit van de relatie.

De crux voor het leren vanuit de leefwereld is dat deze relaties in de leefwereld moeten voorkomen en dat is niet het geval. Wel zijn er in ruime mate toepassingen van de wiskundige relaties voorhanden. Begrippen als getal, oppervlakte en kans worden wel gebruikt, maar ze zijn niet gerealiseerd tot reële objecten.

4. De wiskunde is niet te realiseren

Pas in de negentiende eeuw kreeg men goed door dat de wiskunde geen weerspiegeling is van de werkelijkheid en evenmin te realiseren is. Er bestaan wel aanhechtingspunten. In de wiskunde rekent men niet met de dingen. Wiskunde als menselijke schepping is onafhankelijk van de realiteit, derhalve een systeem op metaniveau, niettemin goed bruikbaar. Ook is het toepassen van wiskunde vaak afhankelijk van andere disciplines. Vooral de studie van de paradoxen heeft over de waarheidstypes meer licht gebracht. De apriori van wiskunde ten opzichte van de realiteit, hetgeen leidde tot een strikte tweedeling, vindt men analoog in de taal, doch niet als systeem. Het punt is dat geen enkele uitspraak zonder meer te verstaan is. Er bestaat weliswaar een gedeeltelijk voorspellende en daardoor tamelijk reguliere relatie tussen uitspraak en referent, maar deze relatie is nimmer direct en eenvoudig. Elke uitspraak zit als het ware in coderingen verpakt en kan pas worden verstaan als de toegesprokene de aanduidingen of de coderingen kent. De toegesprokene moet een geheel aan informaties, de metauitspraken, kennen om de uitspraak te begrijpen. De talige metauitspraken worden, in tegenstelling met de wiskundige, niet als een afzonderlijk systeem beschouwd en geleerd. In het algemeen bevinden de metauitspraken zich in een ander denkvlak dan de uitspraken. Het is de mens die deze metauitspraken bepaalt en toekent. De dingen bepalen niet hun namen, maar de mens en zo bepaalt een element niet de klasse, twee objecten bepalen niet de relaties ertussen, het bijzondere bepaalt niet het algemene en evenmin bepalen verschijnselen ordeningsmiddelen. Globaliter, de wiskunde verschilt van de werkelijkheid en gaat eraan vooraf. Deze metakennis, eigenlijk hun bepalingen, moeten de volwassenen aan de jongeren doorgeven.

De ervaring leidt niet tot de wiskunde, het is precies omgekeerd, de werkelijkheid wordt door het wiskundig denken gekend en uitgebreid. Derhalve is het onmogelijk de wiskunde uit de werkelijkheid te destilleren. Het volgende diagram draait met de wijzers van de klok en niet andersom:

$$\begin{array}{ccc}
\text{reële objecten} & \rightarrow & \text{reële activiteit} \\
\text{(mentaal object)} & & \text{(verbinden)} \\
| & & | \\
\hline
| & & | \\
\text{wiskundig object} \leftarrow \text{theorie} & \leftarrow & \text{wiskundige activiteit} \\
 & & \text{(relateren)}
\end{array} \quad \text{snede}$$

De snede benadrukt het principiële onderscheid tussen $\vdash$realiteit/praktijk$\dashv$ en $\vdash$wiskunde/theorie$\dashv$

Er is nog een kentheoretische snede en wel binnen de wiskunde die de sprong markeert van maken naar zijn, van constructie naar existentie, kortom van wiskundige activiteit → wiskundig object. Het constructieprincipe, hoe men tot een wiskundig object komt, is overigens in de wiskunde uitgebreider dan in het constructivisme, dat enkel entiteiten toelaat waarvan we weten hoe we ze moeten construeren. In het constructivisme specificeert men in termen van al aangenomen zaken. Het intuitionisme is een stroming binnen het constructivisme dat intuitieve kennis aanvaardt of waarheden verkregen via een reeks voor de intuitie toegankelijke stappen. De huidige wiskundigen zijn niet geïnteresseerd in een reëel bestaan van hun objecten, zelfs niet in een reële afkomst ervan.[5] Hun constructieprincipe is de *onderstelling 'dat' het object er is, gegeven bepaalde relaties.* Hun objecten existeren in het voldoen aan wiskundige equivalenties. Het symbool ½ is allereerst een getal en vervolgens bepaald door de vorm of de vergelijking $2x = 1$ en geen empirische abstractie van een halve taart of een ander ding. Evenzo is i een getal, bepaald als de oplossing van $x^2 + 1 = 0$, waardoor de ontbinding van de vergelijking verzekerd is.[6] In de wiskunde valt aldus te bewijzen.

Essentieel voor de wiskundige methode is de bepaling in en door een structuur en aldus het prijsgeven van het substantieel denken, derhalve de erkenning dat wiskundige objecten geen verinnerlijkte materiële objecten zijn. De lengte is geen stok, de oppervlakte geen stuk grond en kans is geen deel van een schijf. Een mentaal object als 2 meter is louter een ding waaraan een begrip gehecht is. Velen, waaronder zelfs grote geleerden, konden deze vaststelling niet accepteren en poogden alle theoretische objecten een objectieve, empirische kwalificatie te geven. De worsteling met het realiseringsprobleem werd al in de oudheid manifest bij de irrationale getallen en bij de oppervlakte als de gelijkheid van oneindig veel stukken en later bij de produkten en wortels van negatieve getallen[7]. Hier viel de theoretische aard niet meer te loochenen. Het enige wat men nog kon beweren was dat de wiskundige objecten niet louter fictief zijn. Zo beschouwde Kummer zijn algebraïsche getallen net als chemische componenten, die pas reëel zijn in sommige samenstellingen.[8]

In wezen zijn activiteiten met dingen, als het samenvoegen, weghalen, splitsen en verdelen, reëel en niet wiskundig. Het optellen van dingen kan niet anders dan zeer verwarrend werken. Dingen laten zich enkel samenvoegen, soms tot een nieuw ding zoals in de chemie, doch meestal niet en dan geraakt men enkel tot een geheel van dingen. Je kunt dingen van zo'n geheel weer weghalen maar ze zijn noch optelbaar noch aftrekbaar. Dat is enkel aan getallen voorbehouden. Wel kan ik voorwerpen tellen, dan maak ik gebruik van het getalbegrip, dat wil zeggen ik weet dat het niet uitmaakt in welke volgorde ik de voorwerpen tel. Zolang ik dit niet weet benoem ik enkel de voorwerpen en is van tellen nog geen sprake. Als we in het algemeen spreken over '2 dingen of een paar' dan is dit hetzij een telresultaat hetzij een niet gerealiseerd mentaal object. Het eerste is geen probleem, het tweede verdient wellicht een toelichting: ding en ding $\rightarrow 1+1 =: 2 \rightarrow 2$ dingen. De eerste pijl is een afbeelding van realiteit naar de wiskunde, derhalve een modellering van het samenvoegen in het optellen; de gelijkheid is een bepaling en wel van de wiskundige activiteit in een wiskundig object, de 2; vervolgens komt het mentale object '2 dingen' tot stand. Het is niet gerealiseerd omdat het niet één ding is, het is louter nog een mentaal geheel van dingen. Een realisering is niet mogelijk in de natuur want de relatie, zoals de gelijkheid van objecten, komt daarin niet voor. In de cultuur kan het wel. Zo zijn vijf guldens gelijk aan een geldstuk van vijf gulden. De gelijkheid is louter een gerealiseerd resultaat van de menselijke geest. Het is geen experimentele maar een existentiële gelijkheid. We zeggen eenvoudig dat de gelijkheid bestaat. De telactiviteit is in het geldstuk van vijf gulden niet meer terug te vinden. Het materiaal doet er niet toe, het gaat om de relatie tussen de vijf guldens en de vijf gulden. Ik denk dat alle materiële cultuurprodukten als klok, snelheid, huizen en een steriel gaasje realiseringen zijn van wetenschap en techniek.

Alleen de desbetreffende theorie is later niet meer in het eindprodukt te zien. Is men niet bekend met die theorie dan rest niets anders dan giswerk.

Met vermenigvuldigen loopt de realisering snel spaak. Als 2×4 wordt bepaald als $4+4$ dan hebben ze beide dezelfde realisering :: :: , de voorwerpen zijn hier geabstraheerd tot punten. Voor de associatieve eigenschap geldt deze realisering niet. Heeft $3\times(2\times 4)$ nog de realisering :: :: :: :: :: :: $(3\times 2)\times 4$ kent geen betekenis, immers ::: $\times$ :: is onbepaald omdat dingen niet te vermenigvuldigen zijn.

Is 2×4 het zinnebeeld van 'tweemaal vier dingen nemen' en maakt men $\frac{1}{3}\times 4$ dan is dat een restrictief gebeuren want $\frac{1}{3}\times 4$ is geen zinnebeeld van 'eenderdemaal vier dingen nemen'.

Vooral zodra inverse bewerkingen optreden wordt duidelijk hoe essentiëel verschillend de wiskundige en de reële activiteiten zijn. 4-2 is wiskundig het getal met de vorm $2+x=4$ en evenzo 4-5 is het getal met de vorm $5+x=4$. In eigenlijke zin bestaat aftrekken niet. De wiskundigen blijven optellen en daartoe breiden ze hun getallen uit en wel zo dat de commutatieve eigenschap en de associatieve eigenschap geldig blijven.

In de werkelijkheid, in onze cultuur wel te verstaan, gebeurt iets fundamenteel anders. De inverse bewerking van samenvoegen is weghalen met al haar beperkingen. Het is metterdaad een omkering. Haalt men van :: twee dingen weg dan blijven er twee over. Dat is geen probleem. Nu vijf weghalen. Dat kan eenvoudigweg niet. Dan schiet de wiskunde te hulp. Het object -1 van de getallenuitbreiding wordt toegepast en zo ontstaat het mentale object 'een tekort ding'.

Met delen is er geen houden meer aan. De wiskundigen voeren geen nieuwe bewerking in en breiden opnieuw hun getallensysteem uit. Zo is $3\frac{1}{2}$ het getal met de vorm $2\times x=7$ en de notatie 7:2. In de corresponderende realiteit introduceert men delen als herhaald weghalen. 7 : 2 lijkt geen probleem, haal twee dingen tezamen telkens van zeven dingen weg. Wat te doen echter met 2 : 7? Zeven dingen telkens tezamen van twee dingen afhalen is de methode. Hoe is 7 herhaald aftrekbaar van 2? Door met tekorten te werken zal de leerling denken als hij daarop getraind is en dan is hij volstrekt verdwaald in het donkere bos der aanschouwelijkheid.

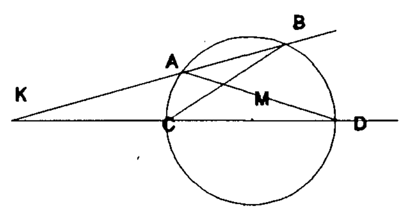
Voor delen is er geen reële corresponderende activiteit met dingen. In de werkelijkheid achter grootten en benoemde getallen zijn er wel de acties verdelen en herhaald verminderen. Bij verdelen zoekt men het aantal van de aangegeven eenheid, bij herhaald verminderen de eenheid bij het aangegeven aantal. In het eerste geval verplaatst men de voorwerpen naar laten we zeggen personen, in het tweede geval worden de personen aan de voorwerpen toegevoegd. Kortom in beide gevallen bepaalt de transformatie van objecten de activiteit, terwijl bij delen als een mentale activiteit de transformatie van de objecten, beter de existentie van de objecten bepaald wordt door de activiteit, hier vermenigvuldigen. Via progressieve schematisering van verdelen kan men niet tot delen komen enkel tot restklasserekenen en blijft men werken met gehele entiteiten. Volgens de verdeelmethode blijft een rest over, terwijl de deling tot een andere uitkomst voert. Een wiskundig georiënteerde richt zich in eerste instantie op de relatie tussen aantal voorwerpen en aantal personen, maakt er een lineaire functie van en spreekt dan over x personen per voorwerp. De verdeling bij wijze van voorbeeld van 14 personen over 4 auto's levert het mentale object '3½ man per auto', dat niet te realiseren is:

verdelen	→	deling
14 personen over 4 auto's		14:4
		↓
3½ persoon/auto	←	3½

Dit mentaal object heeft voor de wiskunde een typische functie. Het vertelt iets over het bestaan van een oplossing. Als er vijf personen in elk der auto's kunnen dan is een oplossing mogelijk. 3½ persoon is dus geen zinloos object, integendeel, het voegt kennis toe en geeft aldus meer zicht op de werkelijkheid. Een reëel georienteerde begint met de oplossing zelf, maakt er onmiddellijk een verdeelprobleem van en vraagt om meer informatie over de situatie, zoals het aantal chauffeurs, rokers en de verdeling ouderen/jongeren. Kortom een wiskundige geest denkt meteen 'kan het?' terwijl een reële geest zich afvraagt 'hoe moet het?' De ervaringskenner kan de verdeling op verschillende manieren aanpakken. Bijvoorbeeld telkens één persoon in elke auto (verdeling 4,4,3,3) of telkens vijf personen in elke auto (verdeling 5,5,4,0).

Dat het toepassen een globaal gebeuren is blijkt zelfs met de vermenigvuldiging in de meetkunde.

Beschouw de lijnenbundel door K buiten de cirkel (M,r). Stel de snijkoorde is 2p. Is er bij elke $0 \leq 2p \leq 2r$ de lijn l_{2p} te construeren? Dit is een existentievraag. Neem KM = a+r met $a \geq 0$ en $r > 0$. Constructie is bedoeld in de euclidische betekenis, dus louter van cirkels en rechte lijnen gebruik maken. In feite is hier de continuiteit aan de orde. Wordt elke tussenwaarde wel bereikt!



meetkunde AD en BC lopen antiparallel, zodat de driehoeken KAD en KCB gelijkvormig zijn

algebra KA:KC = KD:KB

KA×KB = KC×KD (*)

Als CD door M gaat en KA = x dan gaat de vergelijking(*) over in x (x + 2p) = a (a + 2r)

$x^2 + 2px = a^2 + 2ar$

$x^2 + 2px + p^2 = p^2 + a^2 + 2ar$

$(x + p)^2 = p^2 + a^2 + 2ar$

$x_1 = - p + \surd(p^2 + a^2 + 2ar)$ en

$x_2 = - p - \surd(p^2 + a^2 + 2ar)$

De discriminant $p^2 + a^2 + 2ar = p^2 + (a + r)^2 - r^2$ is stellig positief want a > o. Dus er zijn *twee* waarden die voldoen, de ene is positief de andere negatief. Nu terug naar de

meetkunde Hoe kan KA zowel positief als negatief zijn? Wat moet men aan met negatieve lijnstukken? Behalve het kruiselings vermenigvuldigen heeft elke bewerking een meetkundige interpretatie namelijk als de som van *oppervlakten* van rechthoeken en vierkanten. Cirkel (K,x) snijdt de (M,r) in twee punten, die elk verbonden met K de gevraagde lijn opleveren. Dit vraagstuk heeft vele wiskundigen in de achttiende eeuw geïntrigeerd. Het punt is dat alle bewerkingen aanschouwelijk zijn op het vermenigvuldigen en worteltrekken na.

Carnot (1753-1823) bedacht een oplossing: stel KB = x in de vergelijking (*): $(x - 2p)x = a^2 + 2ar$, die ook twee wortels heeft x_3 en x_4, met $x_3 = - x_2$ en $x_4 = - x_1$. Carnot introduceerde twee oervormen, die continu in elkaar overgaan. Een "oervorm I" is de figuur met $a \leq x \leq \surd(a^2+2ar)$ en de "oervorm II" is de figuur met $\surd(a^2+2ar) \leq x \leq a+2r$. De zinloze x_2 in oervorm I heeft betekenis in oervorm II. In de zogenaamde abstracte aanschouwing van beide oervormen tegelijk hebben alle wortels x_1, x_2, x_3, x_4 betekenis. Het is een voorbeeld van een onmogelijke realisering. De les die uit dit probleem kan worden getrokken is dat zelfs in de meetkunde, waar algebra wordt gebruikt, het algoritme, in dit geval het omzetten van de evenredigheid in een kruisprodukt, zich niet laat veraanschouwelijken in één configuratie. De theorie is in het globale niet te zien.

In het algemeen geldt dat het beoefenen van een wiskundige activiteit niet kan zonder het gebruik van een wiskundig instrument. Het duurde heel lang alvorens dit besef doordrong. Momenteel twijfelt geen wiskundige meer, wiskunde is een afgesproken systeem en als men nieuwe afspraken duidelijk vermeldt mits ze binnen het wiskundig taalgebied vallen, dan mag men dit systeem gerust uitbreiden. De wiskunde gaat *aan* de ervaring vooraf en berust er niet op. In de woorden van Poincaré (1902) is de wiskunde een conventie. De ervaring is wel geschikt om uit te maken welke conventie het eenvoudigste is.

5. De wiskundige denkstijl

Het substraat van de zekerheid is voor empiristen het werkelijke en voor de positivisten het feit. Aan deze ultieme gronden worden in het ervaringsdenken alle waarheden getoetst, maar ze zijn niet de gronden voor wiskunde. De verificatie is in strikte zin geen bewijs maar een tautologie, zoiets als $A=A$. Ook $2+2=4$ valt hieronder. Om aan te tonen dat $2+2=4$ moet men aannemen dat $1+1=2$, $2+1=3$, $3+1=4$ en de operatie 'met 2 optellen' met de relatie $a+2=(a+1)+1$. Dan geldt $2+2 = (2+1)+1 = 3+1 = 4$. Alle gelijkheden zijn hier verificaties. Het ware wiskundige bewijs is niet tautologisch. Het vertelt ons meer dan in de premissen staat. Dat voor een *bepaalde* kaart met zes 'landen' slechts vier kleuren nodig zijn, zó dat de landen met een gemeenschappelijke grens verschillend zijn gekleurd is geen wiskundig bewijs. Bewijzen slaan op algemene objecten. Dan gaat het om de vraag of voor *alle* kaarten met zes landen met vier kleuren kan worden volstaan of, nog algemener, om het vierkleuren-probleem. De drang tot zeker weten en de drang tot algemeen weten zijn inherent aan twee verschillende stijlen van de kennende mens, die ik kenschets als de verband zoekende ervaringsdenker en de relatie toepassende wiskundedenker. De kern van het stijlverschil zit in de vorming van het algemene object. Het natuurlijk getal is daarvan een elementair voorbeeld. Het wordt gevormd door een onbeperkte successie. De optelling geschiedt op dezelfde wijze $a+1 =: a'$ en $a+b =: (a+(b-1))+1$. Het principe is de volledige inductie, dat in één formule oneindig veel syllogismen uitdrukt. Het operatieve principe leidt wel tot $3+2 = 2+3$ maar nimmer tot algemene eigenschappen als $a+b = b+a$ en $(a+b)+c = a+(b+c)$. Neem de associativiteit. Het bewijs verloopt in twee fasen: allereerst voor $c=1$ en vervolgens als de associativiteit geldt voor c dan geldt ze ook voor $c+1$. Dat $(a+b)+1 = a+(b+1)$ volgt direct uit de definitie van optelling. Verder $(a+b)+(c+1) = ((a+b)+c)+1 = (a+(b+c))+1 = a+(b+(c+1))$. De eerste en de derde gelijkheid volgen uit de definitie van optellen, de tweede uit de inductiepremisse.

In het wiskundig denken wordt de onbeperkte herhaling gevat in een algemeen object, meestal gesymboliseerd in een letter of een letterformule. Wiskunde zonder te formaliseren is louter tautologisch en brengt ons niet verder dan de afspraken. De tautologie is typisch voor de huidige konsumentenwiskunde, die ternauwernood gebruik maakt van de wiskundige methode.

De onbeperkte herhaling is niet aan de ervaring te ontlenen. Zonder algemene eigenschappen bedrijft men geen wiskunde. De inductie van de natuurwetenschap verschilt essentieel van de wiskundige inductie. De natuurkundige inductie geeft geen absolute zekerheid, de wiskundige inductie wel.

De wiskunde werkt niet van bijzonder naar algemeen, maar van algemeen naar algemener. Bijvoorbeeld van $a+1 = 1+a$ naar $a+b = b+a$. Beide gelijkheden zijn relaties tussen twee algemene objecten. Het wiskundedenken is de inverse van het ervaringdenken. Het neemt een algemeen object, met als vorm een algemene relatie, als bestaand aan. Het ervaringsdenken blijft in de activiteit met bestaande objecten steken.

6. Reële problemen bevorderen niet het leren van de wiskundige denkstijl

Stel er ligt een belegde boterham op tafel en men vraagt zich af of deze boterham met een messnede te halveren is, zó dat de beide helften evenveel brood als beleg hebben. Constructivisten richten zich dan op het *hoe*, dus hoe maak je de helft? Mathematen richten op het *dat*, dus dat er een midden is en hun existentiebewijs berust op de toepassing van de tussenwaardestelling. Het hoe is een experimentele kwestie. In het onderwijs kun je zo'n reëel vraagstuk de leerlingen niet voorzetten, tenminste niet om wiskunde te leren, daar alle leerlingen volledig op het hoe gericht zijn.[9] *De sprong van activiteit naar object, van maken naar zijn, van constructie naar existentie, van het hoe naar het dat, is essentieel voor het wiskundig denken en mijn these luidt dat reële problemen, hoewel ze vaak leiden tot nieuwe wiskundige structuren, niet bevorderlijk zijn voor het leren vormen van wiskundige structuren.* Let wel, ik heb het hier niet over het leren toepassen van wiskundige structuren. Deze these is eigenlijk evident, tenminste als men erkent dat de wiskunde zich ontwikkelt door wiskundige problemen op te lossen. In mijn betoog kwam naar voren dat:

- het algemene (algoritme, bewijs, uitkomst) geen afspiegeling van de werkelijkheid is, ook niet van mentale objecten;
- de oplossing existentieel is, altijd definitorisch, in het bijzonder de condities van de activiteit;
- het algemene een produkt is van het structuuronderzoek.

In wezen gaat het om kentheoretische sneden die er toe leiden dat de leerlingen geconfronteerd met een reëel probleem:

- het algemene niet kunnen aanschouwen of uitvinden in het concrete;
- in het bijzondere blijven steken, geen behoefte hebben aan het algemene als de opdracht dat niet vereist;
- niet de beschikking over het algemene hebben als het vraagstuk dat wel vereist.

Laat ik deze punten in de volgende drie paragrafen verder toelichten.

7. Het algemene is geen afspiegeling

Het inzetten van concreet materiaal hoeft helemaal niet gunstig te zijn. Concreet materiaal draagt immers geen kennis uit, hoewel ze kennisdragers kunnen zijn, maar dan subjectief. Wat de één er aan hecht, kan verschillen van wat de ander er in ziet. De leerling beziet het materiaal met andere ogen dan de ontwerper van het materiaal. De leerling heeft een eigen werkelijkheid voor ogen en moet zelf kennis in het materiaal stoppen. Er wordt dan ook niet bij voorbaat bepaald welk wiskundig object aan het materiaal gehecht is, dat moet de leerling zelf doen. Het materiaal is louter een middel voor de activiteit. Als een schilderij precies het landschap weergeeft, dan heeft de schilder niets van zichzelf ingebracht. Evenzo, *hoe meer de representatie van een object of gebeuren gelijkt op het origineel, hoe minder de wiskundige aan het werk was*. De situatie zegt niet de relatie dat doet de mathemaat zelf. Bovendien, zolang het reële object in de afbeelding nog als reëel object kenbaar is, heeft het ervaringsdenken de overhand. Dat uit zich ook in misverstanden. Soms zijn ze klein, niettemin verwarrend. Zo is een model van een tegelvloer voor de leerlingen een stelsel van naast elkaar gelegen vierkanten en niet zoals in het wiskundig denken een stelsel van in elkaar vervlochten vierkanten. En wat kan het vierkant niet betekenen: kwadraat oppervlakte, 1, maar ook 1000!

Aangezien reëel materiaal niet direct de mathematiek weergeeft zal de *zelfactiviteit om te relateren miniem* zijn. De leerlingen hebben weinig of geen ervaring met de wiskundige activiteit en weten doorgaans uit zichzelf niet wat te doen. Alle handelingen zullen uit opdrachten plaats hebben. Zelfvinding is hier beslist elitair.

Hoe meer gelijkend hoe ideografischer de middelen en dat brengt de beperking tot de *visuele* relaties met zich mee. Formules en symbolen worden in het nieuwe leerplan gemeden. Gewapend met een of meer visuele relaties en geleid door het eigen gezond verstand dienen de leerlingen dan de problemen op te lossen. De visuele relatie heeft aldus de functie van werktuig voor wiskunde als beschrijvende activiteit.

Als het gebruik en de ontwikkeling van de mathematische theorie geen doel meer is, maar het begrijpen van de leefwereld met het gezond verstand dan is dat een positivistische en pragmatische grondhouding. Immers de kennis baseert zich op waarnemingen en vindt daarin haar grenzen. De positivist komt tot wetten en regels door het opsporen en nauwkeurig vaststellen van de regelmaat van verschijnselen. De positivist *beschrijft* en de wiskundige *verklaart*.

In de dogmatische leervorm wordt uitgegaan van de aanwezige kennisstructuur in elke leerling en wordt nieuwe kennis ingebouwd in die structuur. De realistische theorie ziet in de structuur van de creatieve activiteit een bemiddelaar tussen realiteit en theorie. Ze kent objecten in een concreet verband (context), die te relateren en vervolgens verder te synthetiseren zijn met het gezonde verstand, een activiteit van het ervaringsdenken. Hier vindt men de didactische misslagen, zoals 3 appels en 2 appels zijn 5 appels als illustratie van $pa + qa = (p + q)a$, de distributiviteit van de vermenigvuldiging. Wiskunde kent na de realistische wending van de achttiende en negentiende eeuw geen geabstraheerde, relaterende voorstellingen, enkel algemene relaties. Een crux van het realistisch wiskundeonderwijs is het essentiële verschil in denkbenadering van de concrete bewerkingen en de symbolische operaties.

8. Geen behoefte aan het algemenere

Het ervaringsdenken is een substantieel denken met als bewerkingen knippen en plakken, tellen en meten, samenvoegen en weghalen, die in de wereld van grootten en benoemde getallen hoogstens kunnen leiden tot (herhaald) optellen en (herhaald) aftrekken. Zelfs aan vermenigvuldigen en delen komt men in het ervaringsdenken niet toe, er is geen behoefte aan een hogere bewerking. Algemeen geldt: hoe metrologischer de context, hoe eenvoudiger de wiskundige bewerking. De contexten bevatten specifieke systemen van getaltekens zoals in de techniek van het landmeten of in de maten of gewichten van het economisch gebeuren. De metrologie heeft deze specifieke constructies voortgebracht. De bewerkingen voor het oplossen van problemen uit de metrologie zijn contextafhankelijk en bestaan uit de constructies zelf of de mentale modellen ervan, die een coördinerende uitwerking hebben op die metrologische constructies. Dit alles klinkt wellicht nogal abstract, laat ik een voorbeeld geven.

Een boerderij met 20,5 ha akkerland produceert 5,3 ton koren per hectare.
Hoeveel is dit in totaal?

Naast de contextafhankelijke bewerkingen kennen we de mathematische bewerkingen bepalend voor de structuur van wiskundige relaties. Aan de orde is hier het quotient van twee grootten: gewicht en oppervlakte, derhalve ton : hectare. Dit object, begrepen als een quotient, leidt tot het produkt. Kortom de situatie kan globaal worden beschouwd met de wiskunde die eraan voorafgegaan is. In dit geval is de relatie de lineaire functie f: hectare $\rightarrow$ ton, een bijzonder geval van f: $f(x)=ax$, hetgeen hier het produkt $5{,}3 \times 20{,}5$ is.

De oplossing met de metrologische methode berust op de hectaarsgewijze samenvoeging: 1 ha = 5,3 ton, 2 ha = 10,6 ton, enzovoort tot 20 ha = 106 ton en daar komt dan nog de helft van 5,3 ton bij, in totaal 108,65 ton.

De leerlingen komen zo wel tot een oplossing maar leren niet het vermenigvuldigen.

In het algemenere geval hebben we de evenredigheid $a : b = c : d$ van twee verschillende grootten, als aantal koekjes en kosten of afgelegde wegen en tijden. Zolang de problemen binnen de eigen maten blijven voldoet het ervaringsdenken. Dat verandert fundamenteel bij de kwestie of men de binnentermen b en c mag verwisselen? Deze vraag is binnen het ervaringsdenken niet te beantwoorden. Binnen het wiskundig denken met a, b, c en d als getallen wel, namelijk eerst het kruisprodukt ad = bc vervolgens de commutativiteit ad = cb en dan terug a : c = b : d.

Dat de reële situatie geen behoefte wekt aan een hogere wiskundige operatie ziet men temeer bij het *delen* dat gewoonlijk in verdelen blijft steken.

Zolang het reële probleem met eenvoudige middelen van het gezonde verstand kan worden opgelost ontbreekt de behoefte om een andere denkpositie in te nemen. Zo kan men in de huidige leerboeken tientallen tel- en verdelingsvraagstukken tegenkomen, die alsmaar op het laagste niveau kunnen worden opgelost. Op dit niveau worden wel wiskundige middelen gebruikt, maar ze sporen niet aan andere en betere middelen te gebruiken. Men blijft als het ware horizontaal mathematiseren. In vele vakken lost men reëele problemen op en past men wiskunde toe. Zo behoort de hoek- en afstandmeting met topografische kaarten tot de geografie en zo is evident het tellen van reëele voorwerpen die onzichtbaar klein zijn of zeer snel rondvliegen een fysische kwestie omdat er dan veel fysicalisme wordt gevraagd. Binnen het wiskundig systeem valt alleen uit te maken of men goed of fout heeft geteld. Ook het meten van een parcours en of een stok 1 meter is, rekening houdend met omstandigheden als temperatuur en druk, is een fysische aangelegenheid. In het toepassen wordt immers dikwijls gewerkt met niet-wiskundige principes. Men werkt in de toegepaste wiskunde bijvoorbeeld met een lichtstraal, die al dan niet een rechte lijn volgt. De waarheid van zo'n principe ligt niet in de wiskundige discipline. Wiskunde baseert zich op zijn eigen waarheid en die ligt niet in de realiteit. Dat één meter honderd centimeter is, is wel een mathematische zaak. De daadwerkelijke controle van de reëele activiteit wat betreft het mathematische aspect gebeurt binnen het bestek van de wiskunde door de reëele activiteit te vergelijken met de wiskundige activiteit. Kortom acties als tellen, meten, vergelijken in daadwerkelijke uitvoering behoren slechts beperkt tot de wiskunde. Wat momenteel in het nederlandse onderwijs veel gebeurt is dat vraagstukken van andere vakken ook in de wiskunde worden behandeld. Wiskunde heeft zodoende een imperialistisch karakter. Daarnaast zijn er vele vragen die inhoudelijk geen nieuws bevatten, zoals steeds opnieuw handig tellen (plaatsen in het stadion, passerende auto's, appels in een doos, enzovoort).

Kortom het reëele probleem vergt weliswaar het toepassen van wiskunde, maar het toepassen van wiskunde is vaak geen wiskunde en kan gemakkelijk ontaarden in bezighouden. De werkelijke grond van het niet op gang komen van het verticale mathematiseren is de inzet van reële problemen en aldus blijft men steken bij de reële activiteit. Aan het algemene algoritme is geen behoefte. Binnen het reële heerst de empirie, die alleen op een inductieve manier generaliseert. Het verticaal mathematiseren, het ontwikkelen van wiskunde als systeem, kan niet natuurlijkerwijs voortvloeien uit het horizontaal mathematiseren wegens het verschil in aard. Het is niet voor niets dat er zo weinig terecht komt van het verticaal mathematiseren! Het vertikaal mathematiseren is een metagebeuren, en vergt een gedachtensprong en is geen geleidelijke afleiding. Precies zoals een codering van een bericht niet uit het bericht zelf valt af te lezen of de naam uit het ding of de klasse uit haar elementen. Er is geen geleidelijke overgang van het ervaringsdenken naar het wiskundig denken en dus ook niet van activiteit naar object.

Verwisseling van elementen van verschillende typen kan leiden tot mathematische absurditeiten. Een constatering dat een verband waar is is van een heel andere orde dan dat een relatie geldt. Het verband is een feit of een conclusie van een experiment. De relatie is een wiskundige waarheid, die we toepassen voor het kennen van de realiteit en voor dit wiskundig kennen gebruiken we wiskundige werktuigen die we, indien niet voorhanden, eerst construeren. De overgang van het ervaringsdenken naar het relationele denken was een kwestie van opschonen van de methode, waardoor het waarnemen definitief de plaats ruimde voor het hypothetisch en algoritmisch redeneren. Het is een kentheoretische misvatting om de waarheid van een relatie te laten afhangen van de waarheid van een corresponderend verband. Kortom, *geen denkvormen door elkaar nemen.*

De opschoning van de wiskundige denkvorm werkte niet voldoende door in de schoolwiskunde en in het bijzonder in het realistisch wiskundeonderwijs. Ik heb een paar jaar geleden leermateriaal ontworpen voor IBO-leerlingen. Een vraag begon met de subvraag om met de zakrekenmachine van 1000 herhaald 16 af te trekken tot een getal in het venster komt dat kleiner is dan 16. In het tweede onderdeel was een tekening gegeven van een persoon die van een lint van 1000 cm telkens een stuk van 16 cm afsneed. Eronder stond: De zakrekenmachine is exact. Blijft er met het afsnijden ook precies 8 over? Men kon kiezen uit twee antwoorden: ja, want ... of nee, want ... Ik zal niet ingaan op de finesses van deze opgave, zie daartoe Verstappen 1990. Waar het hier om gaat is dat sommige docenten de onderdelen eenvoudig verwisselden, dus eerst moesten de leerlingen daadwerkelijk de rest vinden door afknippen van een touw of papierstrip en daarna pas de rekenmachine gebruiken. Een lerares had zelfs voor elke leerling een papierstrook van tien meter gemaakt. Een van haar leerlingen was zo verstandig, in haar ogen helaas tegendraads, om met de zakrekenmachine snel de rest te berekenen en sneed toen 8 cm af en gaf dit aan de lerares.

Het meest fundamentele bezwaar is derhalve van kennistheoretische aard. De denkrichting, van algemeen naar bijzonder, is het kenmerk van de mathematische denkvorm. Het idee om reële problemen te gebruiken voor het leren van wiskunde roept de op het bijzondere gerichte fysicalistische denkvorm op en niet de op het algemene gerichte wiskundige denkvorm. Kenmerkend voor de laatste is juist de inpassing van de oplossing in de aanwezige wiskundige structuur. Dat zich wenden tot het bijzondere om het algemene te leren is paradoxaal. Het bijzondere probleem lossen de leerlingen wel op, maar het algemene komen ze niet tegen. Aan het algemene <object of algoritme> is geen behoefte, terwijl juist de bewegingsrichting, namelijk van algemeen naar bijzonder of van eenzinnig naar veelzinnig een hoofdkenmerk van wiskundig denken is.

Het gezonde verstand en de wiskundige rede kennen de situatie op een verschillende manier, die zich kenmerkt door enerzijds de betekenis uit te breiden en anderzijds de betekenis te reduceren overeenkomend met de tegenstelling tussen het algemene en het bijzondere. Beide stijlen leiden niet tot hetzelfde resultaat. Het wiskundig kennen gaat in tegenstelling tot het reële kennen, dat een inductief, toenemend bijzonder kennen is, terug in de ontwikkeling naar het deductieve en algemene kennen.

De verwarring van beide stijlen is kenmerkend voor het realistisch wiskundeonderwijs en de arme leerlingen weten voortdurend niet waar ze aan toe zijn. Vooral de zwakke leerlingen zijn er de dupe van, want zij komen niet los van de werkelijkheid en verzanden in de bijzonderheden. Juist zwakke leerlingen zijn weinig bereid om buiten het reële te gaan. Een aardige vraag waaruit dit blijkt luidt: 'Johan en Dorien drinken altijd samen thee. Dorien drinkt nu thee, wat doet Johan?' Met een logische denkpet op moet men antwoorden: 'Johan drinkt ook thee'. Uit een groots opgezet bijna mondiaal onderzoek blijkt dat zwakke leerlingen en niet schoolgaande mensen anders redeneren. Men hoort dan uitspraken als: 'Neen, ze hoeven niet samen thee te drinken, want ze hadden gisteren ruzie'. Uit het eerste zinsdeel blijkt dat ze wel degelijk de logische vraag begrijpen, alleen ze willen niet louter hypothetisch redeneren, daartoe zitten ze nog te vast aan het alledaagse (Tulviste 1989).

Leerlingen komen vaak van het concrete niet los, ze weigeren als het ware een andere denkvorm te aanvaarden. Bij zwaklerenden valt deze gebondenheid het sterkst op. Door experimenten zullen de leerlingen en soms zelfs docenten in volledige *verwarring* geraken *over de grondslag van de redenering*. Ze beschrijven of tekenen precies wat ze zien en tonen zich onwillig om in relaties te denken, dat wil zeggen deductief te denken.

9. Geen beschikking over het algemene

Schematiseren en relateren zijn wiskundige activiteiten, net als symboliseren en formaliseren. Deze activiteiten zijn dan slechts mogelijk als men over schema's en structuren beschikt. Zonder een structuur valt er niet te structureren. Realisten laten de leerlingen die structuur, zij het soms onder geleiding, zelf uitvinden. De ervaring van de mensheid hervinden dat is hun kern en principe. Dit is een harde boodschap, omdat heel wat historische fouten of misvattingen zelf moeten worden ervaren en op eigen kracht ondervangen. De gedachte van pure zelfactiviteit en zelfervaring miskent volledig de aard van de wiskundige vinding, welke niets vindt zonder werktuigen - objecten en algoritmen -, dus zonder de produkten van de algemene menselijke activiteit. In elk geval is volledige zelfproduktie van algoritmen een oneconomisch en elitair gebeuren. *Zelfwerkzaamheid en zelfervaring kosten zeer veel tijd en energie.* Inderdaad als men zelf een probleem kan oplossen dan is er een volledig begrip, dat stellig ook beter wordt onthouden. 'Hervinding' is ongetwijfeld veruit verkieslijk. Ongelukkigerwijs, alleen genieën zijn ertoe in staat. Alleen zij bezitten een voldoende orienteringsgrond en de benodigde denkcapaciteit. Voor gewone mensen betekent hervinding verspilling van tijd en energie.

Of het nu de leefwereld zelf betreft of om van de leefwereld tot de wiskundewereld te komen, in beide gevallen moeten de leerlingen problemen oplossen. Dat oplossen vergt soms niet meer dan het gebruik van het gezond verstand, zoals bij tellen en meten of bij puzzelachtige vraagstukken. Ingewikkelder problemen zijn slechts aan te pakken door eerst de gebeurtenissen of betrekkingen tussen de reële dingen te transformeren in relaties, vaak modellen genoemd. Als leerlingen deze relaties niet kennen kunnen ze ze ook niet aanwenden op hun leefwereld. De realisten kunnen niet terugvallen op wiskundige begrippen als een lineaire functie $y = ax$. Ze moeten de relatie in restrictieve zin invoeren en vallen daarbij terug op het operatieve principe: de leerlingen moet zelf de relatie maken. Daartoe gaat meestal aan het eigenlijke probleem een opdracht vooraf, zoiets als teken in deze figuur de gegevens over tijd en temperatuur. De ideale situatie: leefwereld ↔ relatie ↔ theoretische structuur wordt gereduceerd tot leefwereld ↔ restrictieve relatie. De relatie is dus om twee redenen restrictief. Ze is activiteit en nog niet geobjectiveerd en ze dient enkel voor de oplossing van het reële probleem.

Nu de concrete dingen niet de wiskunde bevatten en de wiskunde een eigen methodologische context bezit, kan ze zich niet direct uitspreken over de werkelijkheid en rijst het probleem van de realiteitsrelevantie van de wiskunde. Met wiskunde kan men mentale objecten vormen, zoals 3½ persoon, waarvan sommige zelfs gerealiseerd zijn, denk aan het geldstuk van vijf gulden. Het belang zit echter hoofdzakelijk in het verklaren van verbanden en wel rechtsstreeks door reële problemen op te lossen en wellicht belangrijker door de studie van de mogelijke oplossingsmethoden en de inherente voorwaarden. Dat de wiskunde als systeem toepasbaar is vinden vooral leken maar raar. Wat moet je in de werkelijkheid aan met incommensurabele paren van getallen, met oneindige rijen, met abstracte groepen en dergelijke? Dat natuurlijke getallen een grote relevantie bezitten staat wel buiten kijf. De crux vormt de intuïtie. Staat die voorop dan is ze vlug een blok aan het been, want wiskunde is een menselijk maaksel, enkel oppervlakkig beïnvloed door ervaring. Op het grensgebied bevinden zich bijvoorbeeld de rationale getallen, die nog wel als empirische begrippen zijn voor te stellen, hoewel ze dat niet zijn. De irrationale getallen, duidelijk geen ervaringsbegrippen, bevinden zich in het binnengebied. Je kunt ermee equivalenties tussen relaties van rationale getallen veralgemenen en ze zijn aldus handig in het gebruik. De irrationale getallen zijn niet te reduceren tot rationale getallen en dus niet intuitief te verstaan. Het is derhalve zinloos in het onderwijs dat te proberen.

De wiskundige kan een reële situatie of een reëel probleem, vaak verkregen uit meetgegevens, representeren in een doorgaans vereenvoudigde wiskundige relatie. Het relateren is een doorgaans complex gebeuren, waar veel wiskunde aan te pas komt. Denk aan het schaalmodel van een gebouw of van een kust en nog evidenter aan de windtunnel voor turbulentiemetingen, waar de relaties veranderen met de schaal. De wiskundige tracht de verbanden of gebeurtenissen om te zetten in een vereenvoudigd relatiestelsel. De vereenvoudiging geschiedt door de beperking tot de hoofdzaken, bij wijze van voorbeeld door bij de trillende snaar zich te beperken tot de tweede orde termen van de partiële differentiaalvergelijking ervan.

De toepasser beschikt naast een mathematisch systeem over een geschoolde mathematische intelligentie, verworven in een jarenlange praktijk. Met zijn intelligentie idealiseert of simplificeert hij een verband tot een lineaire functie of een differentiaalvergelijking of iets dergelijks. De leerlingen in het huidige wiskundeonderwijs kunnen dezelfde intelligentie ternauwernood ontwikkelen omdat ze de taal daartoe missen. De procedure, zo ze tot de ervaring behoort, blijft vaak ervaringsgegeven van kinderen zonder reflectie. Voor het reflecteren, derhalve relateren is een metataal nodig en daarover beschikken de leerlingen in het realistisch onderwijs niet of nauwelijks. Stel de leerlingen hebben de volgende problemen opgelost:

1. An en Toos lopen elkaar tegemoet. An loopt normaal net als Toos het traject in één uur, doch vandaag draagt ze een koffer en dat scheelt tien minuten. Ze vertrekken tegelijk, na hoeveel tijd ontmoeten ze elkaar?
2. Jan schildert een huis in twee dagen, terwijl Kees er drie dagen over doet. In hoeveel dagen hebben ze samen één huis klaar?

3. Opa heeft een prachtig aquarium. Laatst vertelde hij me dat hij voor vijftig gulden twintig goudvissen had gekocht. Voor de grote moest hij drie gulden per stuk betalen en voor de kleine twee gulden. Ik vroeg hem hoeveel grote hij had gekocht. "Dat moet je zelf maar uitzoeken", zei hij.

In twee van de vraagstukken zit dezelfde structuur. Door te reflecteren zouden ze die structuur moeten vinden, maar hoe moeten ze die structuur uitdrukken? Vanuit een intuïtief gevoel van begripniveaus, waarbij perceptie de laagste is, gevolgd door procedurele en empirische abstractie (Herscovics 1988), worden de hogere niveaus niet behandeld, hoewel de kinderen er eigenlijk niet omheen kunnen. Zonder die structuur te expliciteren vormt men geen wiskundige kennis. De schema's van wiskundige activiteiten bestaan dan uit nieuwe objecten, gevormd vanuit de reflectie op de handelingen en posities en niet op de objecten.[10]

Voor het kennen zijn geobjectiveerde mentale werktuigen noodzakelijk. Bijgevolg schiet onderwijs dat niet gericht is op de ontwikkeling van hoogwaardige algoritmen tekort. Nu hoeft het uitstel van algoritmen geen afstel te zijn. Sommige realisten streven wel degelijk naar de hoogwaardige algoritmen. Het bezwaar richt zich op het *eerst eigenmaken van een werkwijze om deze later af te leren en te vervangen door een algemeen algoritme.* Als dit vervangen lukt dan blijft het nog een inefficiënte leerweg. Lukt de vervanging niet (Boero, 1989) dan blijft men zitten met een vorm van ongecijferdheid.

Particuliere oplossingen, in het bijzonder hoofdrekenen en ontbinden in factoren worden er door gekenmerkt, zijn best aardig tenminste voor de liefhebbers. De kracht van de wiskunde ligt juist in het algemene! Wiskunde dient eenvoudig te zijn, hetgeen kan mits de normale, *algemene* rekenmanieren worden gevolgd, want tenslotte is wiskunde de wetenschap van het algemene.

10. Concluderende opmerkingen gerelateerd aan het leerlingbeeld

Mijn kritiek baseert zich op één doorslaggevende en zich overal opdringende grondregel: de gebrekkige kennis van de wiskundige structuren en van de wiskundige denkvorm breekt de leerlingen voortdurend op. Hoe kan dit zal wellicht de lezer(es) opmerken, het gaat toch om onderwijs in de wiskunde! Helaas de vorming van wiskundige structuren is achtergesteld ten opzichte van de leefwereld. Anders en gemodereerder gezegd, het gaat om optimalisering van de alledaagse ervaring en de minimalisering van de daarbij benodigde wiskunde. Er heeft in het denken van vele onderzoekers, ontwikkelaars, begeleiders, nascholers, nog niet bij de gewone docenten, een doel-middel-conversie plaatsgevonden. Tot voor kort gold onmiskenbaar nog het dogma: van de leefwereld naar de wiskundewereld, nu is het dogma de leefwereld zelf. Volgens dit nieuwe dogma is wiskunde op te vatten als de descriptieve wetenschap, op het leerlingniveau vanzelfsprekend, derhalve niet normatief als verklarende wetenschap. Het doel is bovenal beschrijven. Het verklaren ging naar de achtergrond. Dat kan ook niet anders want voor verklaren dient juist de wiskunde als structuur. Hier uit zich de dominantie van de leefwereld vanuit een pragmatisch mensbeeld. *Precies het ervaringsdenken wordt in het onderwijs omarmd, met verwaarlozing van het wiskundig denken.* Zelden wordt dit openlijk erkend. Het ervaringsdenken wordt simpelweg ook onder wiskundig denken gerangschikt en dat blokkeert de discussie of ontwapent de andersdenkende. Enige tijd geleden had ik een gesprek met een collega leerplanontwikkelaar over de geringe wiskundige vorming van de huidige ontwerpen. Daarop werd hij emotioneel en riep uit: 'De leerlingen hebben in het geheel geen behoefte aan wiskunde!' Hij bedoelde onmiskenbaar de wiskunde als structuur. Hierin zag hij geen enkel nut en uit het gesprek bleek verder dat hij kwalitatieve en empirische deductie al voldoende kader achtte voor experiment en voorspelling. De ingewijde dient zich zorgen te maken over de ontaarding, inherent aan de doel-middel-omkering.

De wiskunde is niet zomaar af te leiden uit situaties en problemen in de werkelijkheid. Er is een eigen wiskundige denkwijze voor nodig die afwijkt van het ervaringsdenken en die vandaaruit alleen via een discontinu proces, een 'sprong' bereikbaar is. In realistisch wiskundeonderwijs wordt die discontinuïteit ontkend en daardoor leren leerlingen langs deze weg wel sommetjes maken, maar ze leren geen echte wiskunde. Het heersend dogma is reductionisme: het geloof dat elke zinvolle uitspraak een logisch maaksel van het alledaagse verstand is, waarvan de termen direct verwijzen naar de ervaring. Het beoefenen van wiskunde volstaat niet met het gezond verstand doch is het toepassen van wiskundige methoden in andere wetenschappen of het alledaagse en natuurlijk in wiskunde zelf. Methoden die leerlingen uit zichzelf niet kennen of beheersen. De realistische theorie laat zich niet verenigen met de relationele en conventionele aard van de wiskunde en zo haspelen leerlingen en docenten met twee verschillende denkvormen: ervaringsdenken en relationeel denken.

Betoogd is verder dat het met de dingen rekenen leidt tot eigen strategieën en niet tot algemene oplossingsstrategieën en evenmin tot een behoefte aan het algemene.

Het verengde begrip van socialiseren door dominant realisme

Wiskunde voor allen is het streven wiskunde ten bate van allen doen strekken. Het is het streven tot het socialiseren van de wiskunde, derhalve zowel de methode als de resultaten van de wiskunde voor het publiek toegankelijk te maken. De crux is de professionalisering van de wiskunde, die zo op afstand staat van de leefwereld. Aanpak en inhoud hoeven niet dezelfde waarde te hebben. Socrates merkte al op dat er twee verschillende beoefenaren van rekenen zijn. De een gaat het om de dingen, om de te tellen objecten, de ander, de ware wiskundige om het tellen zelf. De een staat in de realiteit, de ander beweegt zich in een mentale wereld. De een wil reële problemen oplossen, de ander een wiskundig systeem bouwen. De een stelt zich hoe-vragen, zoekt het hoe van het kunnen. De ander stelt zich voortdurend waaromvragen en zoekt de achterliggende kennis. De actor beoogt in eerste instantie een antwoord. De aanpak, hoe je aan het antwoord komt is louter middel geen doel. Ik gebruik bewust aanpak en niet methode, dat ik zie als een weldoordachte wijze van handelen. Een geavanceerde oplossing werkt voor de actor enkel doelmatiger. Het gebruik van hogere wiskundeinstrumenten is voor de rasechte realist geen doel. Zo behoeft de realist geen bewerkingen met reële of complexe getallen. Hij vat het begrip socialiseren veel enger op dan de systeembouwer. De systeembouwer is niet wereldvreemd. Integendeel hij zal trachten met zijn vormen een beter perspectief op de wereld te verkrijgen. Wil men de kloof tussen theorie en praktijk, tussen kennen en handelen dichten dan moet kennen een plaats krijgen in het dagelijks leven. Wat nu gebeurt in het wiskundeonderwijs, onder druk van een dominant realisme, is het inkorten van het rationaliteitsconcept, bepaaldelijk het formaliseren nodig voor het vergroten van het realiteitsconcept.

Van betekenis naar vorm

Fataal is de huidige identificatie van betekenis en vorm, van de reële objecten met de wiskundige objecten; een identificatie van leefwereld en wiskunde. Ga uit van een getal en geef een lijnstuk een betekenis door dit getal. Doe dit evenzo met een rechthoek. Dit levert geen enkele moeilijkheid op. Draai echter de procedure om en de leerlingen staan voor een grote crux. Abstraheer een lijnstuk en een rechthoek tot eenzelfde getal, is nu de lengte gelijk aan een oppervlakte? Veel leerlingen identificeren betekenis en vorm, denken louter substantieel en trachten ideografisch hun kennis weer te geven. Voor hen is lengte een lijnstuk en oppervlakte een rechthoek.

De pragmatische mens, volledig gericht op de oplossing van een reëel probleem, verwacht wel een kennistoename, maar dat is in hoofdzaak een kennis in het handelen, geen metakennis over het handelen. De toename van de kennis wordt gebaseerd op het operatieve principe dat het proces van ervaring naar structuur moet beheersen. De achtergedachte is dat de theorie in de praktijk, de structuur in de ervaring zit en dat door abstraheren en interiorizeren de weg vrijgemaakt wordt voor formalisering. Het inzicht komt als het ware vanzelf tot stand.

De economische mens zal niet tevreden zijn met een oplossing doch zoeken naar de beste methode, hetgeen aanmerkelijke hogere eisen stelt aan zijn theoretische bagage.

De kritische mens, dat is de ware wiskundige, zal zich met zijn waaromvragen richten op de voorwaarden van de oplossingsmethoden. Hij zal trachten de grenzen van zijn handelingen te verleggen. Hij is noch bijvoorbeeld voldaan met het kunnen tellen, noch met zo doelmatig mogelijk tellen door te vermenigvuldigen of iets dergelijks, maar vraagt zich af of alles telbaar is. De echte wiskundige zal de theorie uitbreiden vanuit de idee dat deze een nieuw perspectief biedt op de werkelijkheid. Dat niet geldt betekenis → vorm, maar omgekeerd vorm → betekenis werd pas laat duidelijk toen men vormen vond zonder een directe reële betekenis.

Formaliseren volgens stadia?

De mens heeft de potentie tot het toepassen van gedachten tot metadenken, dus om over een situatie te denken met middelen buiten die situatie. Die denkinstrumenten zijn de vormen, zoals woorden, zinnen, getallen, relaties en symbolen. Op zijn beurt kan de mens over die vormen denken en wel met nieuwe middelen, de metavormen. Zo beweegt zich in het bijzonder het wiskundig denken in steeds hogere sferen. Het metadenken heeft een toepassend karakter. Het toepassen van de vorm geeft het denken voordeel, het ziet met een object, hetgeen gewoonlijk inzicht wordt genoemd. De mens gebruikt zijn kennis in plaats van almaar een activiteit te verrichten. De betekenis is een toepassing van de vorm en niet omgekeerd. Met het negatieve getal kan de temperatuur handig worden gedimensioneerd en verlopen vele bewijzen eenvoudiger. Het negatieve getal is niet nodig, enkel handig. Zo kan de temperatuur zonder het negatieve getal. Dan zet men de nul bij het absolute nulpunt.

De wiskundigheid verhoogt het menselijk denken door de activiteit te reduceren. Ik denk dat ieder dit zal bevestigen. Het probleem vormt het leren. Is het verstandig om zo lang de activiteit te laten verrichten dat het inzicht als het ware vanzelf komt? Laat de leerlingen maar tellen en nog eens tellen. Op den duur gebeurt het tellen handiger, zoekt de leerling verkortingen en komt hij uiteindelijk bij de vermenigvuldiging terecht. Een kind leert echter de woorden niet uitvinden vanuit de eigen activiteit maar door te luisteren naar hoe anderen ze gebruiken. Dat is een supersnel verlopend proces en hoe jonger hoe sneller. Ouderen leren een taal veel moeizamer. Met wiskunde gaat het eender. Laat de kinderen niet modderen, leer ze de vormen waarmee ze actief kunnen zijn.

De achtergedachte van metadenken is dat de vormen buiten de praktijk liggen. Dit buiten de werkelijkheid, bijgevolg in de mens is een klassiek filosofisch thema temeer daar de mens zelf deel van die werkelijkheid uitmaakt. Tegenwoordig accepteert men toch dat veel van het menselijk gedrag, inclusief zijn denken, bepaald is door zijn unieke gesteldheid van de genen. Twintig jaar geleden zou dit een onwetenschappelijke uitspraak zijn. Alle kinderen zouden onder geschikte omstandigheden alles kunnen leren. Toen was het milieu de bepalende factor en de rijpheid wel onderkend, bleef miskend.

Herkennen, bijvoorbeeld een eerder getoonde foto, is vermoedelijk een aangeboren vermogen. Herinneren, zich zelf een beeld vormen, is verworven en afhankelijk van de interne ontwikkeling van een symboolsysteem waarmee we de buitenwereld kunnen weergeven en van een verzameling vaardigheden om die symbolen in het geheugen op te sporen. In de formule of vorm kristaliseert zich het eerdere, de geschiedenis. De formule biedt de mogelijkheid de geschiedenis of ontwikkeling te vergeten. De formule maakt ruimte voor de nieuwe ontwikkeling. In a is de variantie opgeslagen, die je zo kunt vergeten en de mogelijkheid biedt om a als een vast object te beschouwen in de volgende handelingen ermee. Als de mens niet de herkenning inperkt, en aldus de kennis kompakter opslaat, dan zou hij niet meer zijn kennis wegens het chaotische karakter ervan kunnen uitbreiden en dus niet meer kunnen leren.

Vygotsky (1979, 114 e.v.) verhaalt hoe hij drie- tot vierjarigen vroeg om notaties te maken om een aantal zinnen te onthouden. Er waren er een paar bij die betekenisloze en nauwelijks te onderscheiden krabbeltjes en lijntjes tekenden en bij het reproduceren van de zinnen ze gebruikten alsof ze ze lazen. Zo'n kind gaf ook aan welke zin bij welk krabbeltje hoorde. De tekens werden echte mnemotechnische symbolen.

De belangrijkste kwestie is moet je met die tekens wachten tot de tijd er rijp voor is? Dus tot de genetische ontwikkeling zover is gevorderd. Er bestaat aldus Piaget immers naast het genetisch vlak een aantal vlakken van de hogere ontwikkeling, die niet straffeloos te passeren zijn. Vygotsky en Freudenthal beweerden van niet. Zelfs zeer jonge kinderen blijken onder invloed van de verbale interactie met volwassenen psychische processen te vormen. Zo verandert het geheugenproces door de taalverwerving. Het is zeker niet 'natuurlijk'. Kinderen leren het gebruik van tekens en converteren hun natuurlijke mentale functies in 'sign-mediated cultural functions' (p 139). De nativist Chomsky (1957) hield ons voor: De mens wordt geboren met linguïstische, grammaticale principes die op de harde schijf in de hersenen staan. Die principes zijn toepasbaar op elke natuurlijke taal waarmee het jonge kind wordt geconfronteerd. Taal is een functie van de hersenen, een mentaal orgaan dat groeit zoals hart en nieren dat doen. Chomsky zette zich af tegen de environmentalisten.

De nieuwe generatie neemt onder geschikte omstandigheden veel sneller de kennis van de vorige periode op dan de bedenkers ervan. Algemeen wordt aangenomen dat het kind voor de puberteit met natuurlijke taal moet worden geconfronteerd om daadwerkelijk tot ontwikkeling te komen. Ik ben ervan overtuigd dat hetzelfde geldt voor het wiskundig taalsysteem.

Noten

1. Deze formulering vormt de grondgedachte van A. Treffers (1978) in zijn proefschrift.
2. E.J. Dijksterhuis: "Men duide de toepassing van mathematische methoden in andere wetenschappen (fysica, biologie, sociale wetenschappen) aan met hun ware naam, mathematisering. ... De toepassing van algemeen natuurwetenschappelijke denkwijzen in andere wetenschappen noeme men fysicalisme. De invoering van rekenwijzen die zuiver formeel gehandhaafd kunnen worden duide men met algoritmisering aan.", De mechanisering van het wereldbeeld, 1951, opgenomen in Clio's stiefkind, uitg. Bert Bakker 1990, p 196.
3. Men leze het kritische artikel van Ludwig Bauer over het operatieve principe.
4. Zie voor een bespreking van de experimentele denktechniek Jaspers K. (1922).
5. Des te merkwaardiger is de psychische beleving van de wiskundigen. Ze ervaren hun problemen, oplossingen en begrippen als reëel. Praktisch zijn wiskundigen platoonse realisten.
6. Bekend is de strijd tussen Cantor en Kronecker. Cantor gaf het constructiebegrip een existentiële en extensievere inhoud. Cantors constructie komt neer op een mentale infiniete activiteit, waarin schakels in het algoritme kunnen ontbreken. Bijvoorbeeld verander in de decimale voorstelling van de wortel uit drie alle zessen in vieren. Ontstaat zo een nieuw getal? De clou is dat men niet weet waar de zessen staan. De zes-posities zijn niet direct te zien en er bestaat geen algoritme voor, zodat 'constructie' een idealistische interpretatie heeft.
7. Een komische poging is van Herman Scheffler, die in 1851 schreef: "De leeftijd x van een zeker iemand A wordt bepaald door de uitspraak, voor 10 jaren was het kwadraat van de leeftijd van A gelijk aan de toenmalige leeftijd van een ander persoon, die nu 6 jaar oud is. De uitkomst is $x = 10 \pm 2\sqrt{-1}$". Scheffler koppelt dan die 10 aan het verschijnsel van de jaren van A en het imaginaire getal aan de duur van een ander verschijnsel: de leeftijd van een persoon B, die tegelijk met A geleefd heeft en momenteel twee jaar is of over twee jaar zal worden geboren. Zie Hermann Scheffer: Der Situationskalkul, Braunschweig 1851.
8. Zie daartoe bijvoorbeeld de Introduction in Harris Hankock, Foundations of the Theory of Algebraic Numbers, Dover Publications, New York, 1931.
9. Zie bijvoorbeeld J. Davis, R. Hersh, (1981) p.274 e.v., ofschoon de auteurs de kern van de problematiek niet hebben onderkend. De leerlingen staan voor de vraag: kan men twee pannekoeken door één messnede in twee gelijke delen verdelen. De leerlingen zijn op zoek naar de methode, de docent daarentegen geeft enkel het bewijs dat het kan.
10. Illustratief zijn de vorm en de grootte van een getal. De vorm is produkt van de reflectie op het tellen en de grootte van de reflectie op de afbeelding.

Literatuur

Boero P., P. Ferrari, E. Ferrero, (1989). Meanings and Procedures in the Transition to a written Algorithm, *For the Learning of Mathematics* 9.

Comte, A. (1979). *Het positief denken.* Meppel: Boom, originele tekst: Discours sur l'esprit positif, 1844.

Davis, J. & R.Hersh (1981). *The mathematical experience.* Londen: Penguin.

Freudenthal, H. (1979). Structuur der wiskunde en wiskundige structuur; een onderwijskundige analyse. *Pedagogische Studiën*, 56, 2.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education, China Lectures.* Dordrecht: Kluwer.

Gal'perin, P. (1978). De organisatie van de cognitieve activiteit en de optimalisering van het onderwijsleerproces. *Pedagogische Studiën, 55*, 218-227.

Gravemeijer, K. (1989). Het gebruik van concreet materiaal onderwijstheoretisch beschouwd. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, Panama-Post*, 8, 1.

Herscovics N. & J.Bergeron (1984). A constructivist vs a formalist approach in the teaching of mathematics. *Proceedings PME 8*, 190-197.

Herscovics N. & J.Bergeron (1988). An Extended Model of Understanding. C. Lacompagne and M. Behr(eds), *Proceedings of PME-NA.X> De Kalb: PME/NA:NIU*, 15-22.

Jaspers, K. (1922). *Psychologie der Weltanschauungen* 2. Berlin: Verlag Julius Springer.

Kant, I. (1966). *Kritik der reinen Vernunft.* Stuttgart: Reclam.

Nelissen J. & A.Vuurmans (1983). *Aktiviteit en de ontwikkeling van het psychische, kernthema's uit de sovjetonderwijspsychologie.* Amsterdam: SUA.

Poincare, H. (1979). *Wetenschap en hypothese.* Meppel: Boom, originele tekst: La science et l'hypothese, 1902.

Streefland, L. (1980). Cognitieve ontwikkeling en wiskundeonderwijs. *Pedagogische Studiën*, 57, 344-357.

Treffers, A. (1978). *Wiskobas Doelgericht.* Utrecht: Institiuut voor Ontwikkeling van het Wiskundeonderwijs.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions.* Dordrecht: Reidel.

Treffers, A. (1989). *Het voorkomen van ongecijferdheid op de basisschool.* OW&OC, Rijksuniversiteit Utrecht.

Tulviste, P. (1989). Denktypen und traditionelle Beschäftigungen. *Gesellschaft Wissenschaften.* 2, 77-85. Moskou: Akademi der Wissenschaft der UDSSR.

Verstappen, P. (1989). *OWI in de Kijker.* Enschede: Instituut voor Leerplanontwikkeling.

Verstappen, P. (1991). *Easier theorized than done.* Enschede: SLO.

Verstappen, P. (1992). Theory and Practice in Mathematics for less ables. Falk Seeger and Heinz Steinbring (eds), *The Dialoque between Theory and Practice in Mathematics Education: Overcoming the Broadcast Metaphor.* IDM, Bielefeld: Materialen und Studien Band 38.

Vygotskij, L.S. (1976). *Mind in Society.* Cambridge: Harvard Univ. Press.