De grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs

P. Drijvers en M. Doorman
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

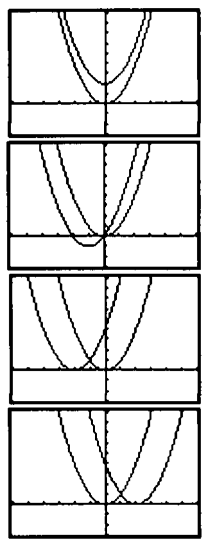
Summary

The article reports about the project 'The graphics calculator in mathematics education', that has been carried out by the Freudenthal institute between August 1991 and September 1994. The realistic view on mathematics education was a starting point for the formulation of the hypotheses. The developmental research design was used. The observations of students' behaviour during experimental lessons support the assumption that the graphics calculator can stimulate

- *the use of realistic contexts*
- *the explorative and dynamic approach of mathematics*
- *a more integrated view on mathematics*
- *a more flexible problem solving behavior.*

1. Inleiding

Docent: 'Hoe schuif je de grafiek van $y = x^2$ twee naar rechts?'
Johan: '$y=x^2 + 2$'
Hij toetst dit in en drukt op GRAPH.
'... oh nee! $y = x^2 + 2x$, GRAPH ... ook niet goed.'
Alex: '$y = x^2 + 4x + 4$, ... klopt niet, de grafiek is twee naar links.'
'Dan is het $y = x^2 - 4x + 4$.' Klopt.
Docent: '... en drie naar rechts verschuiven?'
Na proberen met de grafische rekenmachine zegt Alex: '$y = x^2 - 6x + 9$'.
Herschrijven van de formules geeft $y = (x - 2)^2$ en $y = (x - 3)^2$.
Erik Jan: 'En als je $y = x^2 + 2x$ hebt en je schuift die drie naar rechts?'
Docent: 'Wat denk je?'
Erik Jan: 'Eerst kwadraat afsplitsen, dat geeft $y = (x + 1)^2 - 1$, en dan drie naar rechts, dus -3 tussen haakjes, dat wordt: $y = (x - 2)^2 - 1$.'



Bovenstaande dialoog vond onlangs plaats tijdens een wiskunde-B-les in HAVO 4. Alle leerlingen van deze klas hadden in het kader van het project. 'De grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs' de beschikking over een grafische rekenmachine, waarmee ze op dat moment al behoorlijk vertrouwd waren. Zoals u ziet kan de onmiddellijke feedback die een dergelijke machine geeft aanleiding zijn voor het ontdekken van verbanden tussen formule en grafiek.

De ontwikkeling van de grafische rekenmachine heeft ook bij onderzoekers van wiskundeonderwijs een levendige discussie teweeg gebracht. Hoe moet een dergelijke machine, die het tekenen van grafieken reduceert tot een druk op de knop, in het wiskundeonderwijs geïntegreerd worden? Welke mogelijkheden biedt de nieuwe technologie en welke moeilijkheden zijn daarbij te verwachten?

Het internationale onderzoek op dit terrein heeft geresulteerd in een stroom van publikaties. Goldenberg (1988) heeft onderzocht met welke problemen leerlingen geconfronteerd kunnen worden als ze met een grafische rekenmachine werken. Welke waarde de grafische rekenmachine voor het wiskundeonderwijs zou kunnen hebben wordt aangegeven door Ruthven (1992). Monaghan (1993) gaat in op de relatie tussen het gebruik van de grafische rekenmachine en de ontwikkeling van het inzicht. Een calculusmethode waarin de grafische rekenmachine als hulpmiddel een vooraanstaande rol speelt is ontwikkeld door Demana (1992).

Ook Nederland blijft niet achter. In de periode 1991-1994 heeft het Freudenthal Instituut met steun van het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen een project uitgevoerd onder de titel 'De grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs'.

Dit onderzoek heeft zich gericht op het voortgezet onderwijs, met een accent op de rol van de grafische rekenmachine bij wiskunde B - dat voorbereidt op exacte vervolgstudies - in klas 5 van het VWO. De keuze voor wiskunde B hangt samen met het feit dat juist de inhoud van dit vak ter discussie staat (De Lange e.a., 1994) en daarnaast met het idee dat de invloed van de grafische rekenmachine bij wiskunde B ingrijpender zal zijn dan bij wiskunde A. Immers, bij wiskunde A, dat gericht is op vervolgopleidingen in de sociale wetenschappen, staan de toepassingen centraal. De formules, die in deze toepassingen gebruikt worden, beogen een representatie van de werkelijkheid te zijn. Vanwege dit modelmatige karakter kan daarbij vaak volstaan worden met benaderende antwoorden. Bij wiskunde B daarentegen worden in het algemeen exacte antwoorden verlangd. De numerieke oplossingen die de grafische rekenmachine levert, lijken daarmee soms op gespannen voet te staan.

In het kader van het bovengenoemde project is op twee scholen uitgebreid geëxperimenteerd met de grafische rekenmachine. De leerlingen hadden elke wiskundeles een apparaat tot hun beschikking. In een latere fase van het project konden ze hun machine ook mee naar huis nemen. In de lessen is voornamelijk het gangbare leerboek gebruikt, maar ook heeft het projectteam specifieke lespakketten ontwikkeld waarin de grafische rekenmachine nadrukkelijker aan bod komt. Met name de lessen waarin dit experimentele materiaal gebruikt werd, zijn nauwlettend geobserveerd. Met een fragment van zo'n observatieverslag is dit artikel geopend. Dergelijke observaties vormen de basis van de theoretische kant van het onderzoek: het beantwoorden van de onderzoeksvragen die bij de start van het project geformuleerd zijn.

De resultaten van het project zijn gepubliceerd in een onderzoeksrapport met dezelfde titel (Doorman e.a., 1994). Dit artikel nu beoogt een beeld te geven van het project en van de belangrijkste resultaten.

In het vervolg wordt eerst toegelicht wat realistisch wiskundeonderwijs inhoudt, en hoe de mogelijke bijdrage hieraan van de grafische rekenmachine gezien wordt. Dit leidt tot een vijftal hypothesen, die de uitgangspunten voor het onderzoek vormen.

Paragraaf 3 gaat over de projectuitvoering. Eerst wordt de onderzoeksmethode, het zogenaamde ontwikkelingsonderzoek, beknopt beschreven. Binnen dit type onderzoek is de ontwikkeling van experimenteel lesmateriaal van groot belang. De keuze voor de onderwerpen van het experimentele lesmateriaal wordt kort toegelicht.

In paragraaf 4 wordt gedetailleerder ingegaan op een fragment uit het ontwikkelde lesmateriaal. De gegevens uit de observaties, die in paragraaf 5 beschreven worden, geven een beeld van de manier waarop de leerlingen in de klas met dit materiaal hebben gewerkt. De reflectie op het gepresenteerde voorbeeld en op de uitgangspunten van het onderzoek in het algemeen vindt plaats in paragraaf 6. Tot slot gaat paragraaf 7 kort in op de ontwikkelingen die in de nabije toekomst in gang zullen worden gezet.

2. Realistisch wiskundeonderwijs en grafische rekenmachines

Onder invloed van het voormalige IOWO heeft de filosofie van het realistisch reken- en wiskundeonderwijs de laatste decennia in Nederland school gemaakt. Volgens deze onderwijsvisie horen realistische toepassingen van meet af aan een belangrijke rol te spelen in het leerproces. Oplossingsmethoden worden door de leerling zelf ge(re-)construeerd aan de hand van problemen die aansluiten bij zijn of haar realiteit. Enkele belangrijke kenmerken van realistisch wiskundeonderwijs zijn:

- variatie in oplossingsstrategieën,
- eigen inbreng van leerlingen,
- gebruik van informele strategieën en informele kennis,
- aangrijpingspunten voor reflectie,
- stimulans voor niveauverhoging, generaliseren en formaliseren.

Voor een uitgebreide bespreking van de theorie van het realistisch wiskundeonderwijs verwijzen we naar Freudenthal (1991) en Treffers (1987).

Hoe laten deze algemene uitgangspunten van het realistisch wiskundeonderwijs zich nu vertalen naar de situatie dat de grafische rekenmachine in de wiskundeles wordt geïmplementeerd? In de loop van het project is deze onderwijsvisie uitgekristalliseerd in een vijftal veronderstellingen.

1. Realistische contexten

In wiskundige modellen die optreden bij realistische toepassingen komen vaak 'lelijke' getallen of formules voor. Ter wille van de hanteerbaarheid wordt soms gesleuteld aan de werkelijkheid zodat er een geëffend vraagstuk ontstaat. Met de komst van de grafische zakrekenmachine verdwijnt de noodzaak om het realistisch gehalte van een probleemstelling aan te tasten. De machine neemt immers het tijdrovende technische werk van de leerling over, waardoor alle aandacht kan worden gericht op het proces van mathematiseren, de oplossingsstrategie en het trekken van redelijke conclusies.

Zo komen we tot de eerste veronderstelling:

> *Door het gebruik van de grafische rekenmachine verschuift de aandacht van het puur algoritmisch opereren naar het vertalen van realistische problemen in een wiskundig model en het interpreteren van de resultaten.*

In het lespakket 'Optimaliseren' (Drijvers & Kindt, 1992) komt bijvoorbeeld de wet van Snellius ter sprake (zie ook Kindt, 1993). De snelheden waarmee het licht zich voortplant in de twee media zijn erg groot. Door het gebruik van de grafische rekenmachine, waar een schaalverdeling eenvoudig is aan te passen, zou dit geen bezwaar meer mogen zijn.

2. Exploratie

De grafische rekenmachine biedt dankzij de directe feedback mogelijkheden tot explorerende activiteiten. Een probleem kan in een eerste, verkennende fase vaak al eenvoudig grafisch worden onderzocht. Via de grafische rekenmachine kan inzicht worden verkregen in de structuur van een formule. Inventariserende en classificerende activiteiten kunnen leiden tot ontdekkingen die via reflectie en generalisatie uitmonden in interessante wiskundige stellingen. Dit in tegenstelling tot de traditionele methodiek, waarin definities en stellingen aan het begin van de leerweg worden geponeerd in de verwachting dat het inzicht zal ontstaan via herhaald toepassen. De tweede veronderstelling wordt nu:

> *Het gebruik van de grafische rekenmachine stimuleert het stellen van nieuwe vragen en het generaliseren van problemen. Dat betekent voor*

de leerling een verruiming van het wiskundige blikveld en een verandering van houding ten aanzien van wiskunde: van een 'passief-uitvoerende' in een 'actief-onderzoekende'.

De exploratieve mogelijkheden van de grafische rekenmachine worden bijvoorbeeld aangesproken op het werkblad over het classificeren van derdegraads functies (Drijvers, 1993). De opdracht aan de leerlingen is erg open: probeer op grond van de verschillende grafieken een indeling te maken van alle mogelijke derdegraads functies. De grafische rekenmachine maakt de exploratie, die hierbij noodzakelijk is, mogelijk.

3. Integratie

Het gebruik van de grafische rekenmachine draagt bij aan het integreren van de twee klassieke kenniscomponenten van de wiskunde: algebra en meetkunde. Zo kan bijvoorbeeld het opereren met algebraïsche expressies via grafische (of meetkundige) voorstellingen van functies op het beeldscherm in een groot aantal variaties worden uitgevoerd. Algebrawetten en rekenregels kunnen zo grafisch worden ontdekt en gecontroleerd. Dit leidt tot een meer aanschouwelijke vorm van algebraonderwijs. Het citaat waarmee dit artikel begint is hiervan een voorbeeld. Het is geregistreerd tijdens een les rond het pakket 'Grafiekenalgebra' (Doorman & Drijvers, 1993).

Omgekeerd kunnen meetkundig getinte opdrachten algebraïsche activiteiten oproepen. Voorbeelden van zulke opdrachten zijn: 'teken een regelmatige vijf-puntsster' of 'maak een spiraalkromme'. Van de leerling wordt dan gevraagd om formules te ontwerpen (als input in de machine) om het gewenste meetkundige resultaat (output) te verkrijgen.

Veronderstelling nummer drie kan aldus worden geformuleerd:

Het gebruik van de grafische rekenmachine bevordert de integratie van meetkundig en algebraïsch georiënteerde activiteiten en stimuleert de leerling voortdurend om dwarsverbanden te leggen tussen verschillende onderdelen van de wiskunde.

4. Dynamiek

De grafische rekenmachine heeft een aantal dynamische aspecten. Allereerst is het mogelijk om snel en effectief de gevolgen van wijzigingen in de probleemstelling na te gaan. De invloed van een parameter in een formule kan eenvoudig met grafische middelen aanschouwelijk worden gemaakt.

Een ander dynamisch aspect is de mogelijkheid tot het zichtbaar doorlopen van een grafiek of kromme (met de cursor) waarbij de voortdurende verandering van de coördinaten op het scherm kan worden afgelezen. In het pakket 'Bewegingen in het vlak' (Doorman e.a., 1993) wordt bijvoorbeeld de snelheid van de beweging van het ventiel van een fietswiel zichtbaar.

Als derde punt noemen we hier de mogelijkheid van het in- en uitzoomen op een grafiek. Dat maakt een voortdurende blikwisseling mogelijk van 'globaal' naar 'lokaal' en vice versa.
Zo komen we tot de vierde veronderstelling:

De grafische rekenmachine is uitermate geschikt om veranderingsgedrag van grootheden in hun onderlinge relatie zichtbaar te maken en bevordert zo een dynamische zienswijze op analytische modellen.

Van den Brink en Doorman (1994) gaan op dit aspect nader in.

5. Flexibiliteit

Door de komst van de grafische rekenmachine zal het repertoire van technieken en vaardigheden die een leerling moet beheersen een duidelijke verandering ondergaan. Het met de hand schetsen van een grafiek op basis van een streng voorgeschreven functieonderzoek, een tot nu toe veel geoefende vaardigheid, zal nauwelijks nog van belang zijn. Daar staat tegenover dat vaardigheden als 'schattend rekenen', 'lezen van grafieken' en 'successief approximeren' aan belangrijkheid zullen winnen. Eén van de eerste problemen die de leerling bij het maken van een (of meer) grafiek(en) op het beeldscherm ontmoet, is de beperking van dat scherm. De leerling zal dan, op grond van de context of van het wiskundige model, zelf moeten bedenken wat het relevante domein (of bereik) van de in het probleem voorkomende variabelen is. Ruthven (1992) gebruikt voor dergelijke technieken de term 'Trial and improve'. Tenslotte wijzen we er op dat de grafische rekenmachine numerieke benaderingen als resultaat geeft, ook in situaties waar een exacte uitkomst gewenst is. Dat vraagt van de leerling een kritische attitude ten aanzien van de numerieke uitvoer van de machine.

Alles overziend kunnen we stellen dat onder invloed van de grafische rekenmachine een accentverschuiving zal plaatsvinden van 'starre technieken' naar een meer flexibel oplossingsgedrag, waarbij een kritische houding wordt ontwikkeld ten aanzien van numerieke uitkomsten.

De vijf bovenstaande punten sluiten goed aan bij de uitgangspunten van realistisch wiskundeonderwijs. Overigens zijn met name 'exploratie' en 'dynamiek' termen die bij het propageren van het gebruik van de grafische rekenmachine en computeralgebra-pakketten in het onderwijs regelmatig worden gebruikt. Ze liggen blijkbaar nogal voor de hand. De uitwerking ervan in de didactische praktijk is minder vanzelfsprekend en in een aantal publikaties zelfs teleurstellend.

3. Ontwikkelingsonderzoek

Het project heeft de methode van het zogenaamde ontwikkelingsonderzoek gevolgd. Bij ontwikkelingsonderzoek wordt een cyclisch proces van doordenken en beproeven doorlopen, een afwisseling van gedachtenexperiment en onderwijsexperiment. In het gedachtenexperiment maakt de ontwikkelaar zich een voorstelling van hoe het onderwijsleerproces zou kunnen verlopen. In het onderwijsexperiment wordt het gedachtenexperiment aan de werkelijkheid getoetst. Dit laat het curriculum dat beproefd wordt echter niet ongewijzigd. De ervaringen worden namelijk direct benut voor het bijstellen of ontwikkelen van nieuwe onderwijsactiviteiten. In feite komt het nieuwe curriculum tot stand in het experiment: ontwikkeling en beproeving gaan hand in hand.

De resultaten van dit ontwikkelingsonderzoek bestaan uit experimenteel lesmateriaal, de observaties van lessen en de reflectie op die observaties. In de theoretische reflectie wordt gepoogd om de onderzoeksvragen te beantwoorden, uitgaande van de observaties en van de realistische onderwijsvisie.

Voor een uitgebreidere beschrijving van ontwikkelingsonderzoek - los van de grafische rekenmachine - verwijzen we naar Gravemeijer (1994). Een voorbeeld van ontwikkelingsonderzoek gericht op het realistisch wiskundeonderwijs is beschreven door Streefland (1992).

Zoals gezegd speelt het ontwikkelen van lesmateriaal een belangrijke rol in het ontwikkelingsonderzoek. Op grond van de eerdergenoemde hypothesen, en natuurlijk ook op grond van minder concrete intuïties, is een viertal onderwerpen geselecteerd voor de te ontwikkelen lespakketten. Hieronder lichten we deze keuze per onderwerp kort toe.

1. Differentiëren

Differentiaalrekening neemt een cruciale plaats in in het wiskundecurriculum. De grafische rekenmachine leent zich goed voor het approximeren van differentiaalquotiënten en voor het tekenen van benaderingen van hellinggrafieken. Dit lijkt mogelijkheden te bieden voor exploratieve activiteiten en voor ondersteuning van de begripsvorming.

2. Optimaliseren

In allerlei situaties en disciplines komen optimaliseringsproblemen voor. Het (vaak uit de realiteit afkomstige) probleem dient eerst in wiskundige termen vertaald te worden. Daarna, in de oplossingsfase, blijken vaak diverse oplossingsmethoden waardevol te zijn. Hier liggen mogelijkheden voor dwarsverbanden met meetkunde.

3. Grafiekenalgebra
In Grafiekenalgebra gaat het om de samenhang tussen operaties met grafieken en operaties met formules. Het vermogen van de grafische rekenmachine om snel de gevolgen van wijzigingen in de formule op de grafiek te onderzoeken is hierbij een belangrijk gegeven. Algebraïsche regels en eigenschappen worden zo in verband gebracht met grafische kenmerken en komen daardoor meer tot leven.

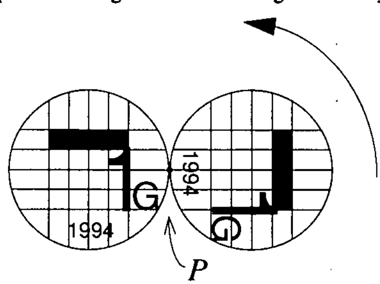
4. Bewegingen in het vlak
De dynamische mogelijkheden van de grafische rekenmachine kunnen bij uitstek ingezet worden bij het onderwerp 'Krommen in parametervoorstelling', waarbij de parameter vaak de tijd voorstelt. Net als bij 'Optimaliseren' spelen realistische problemen en dwarsverbanden met meetkunde een grote rol.

4. Voorbeeld: geld moet rollen...

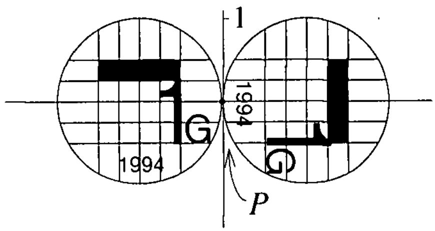
Hoe ziet lesmateriaal waarbij de grafische rekenmachine gebruikt wordt er nu uit? In ons project hebben we ervoor gekozen om de machine in het lesmateriaal niet al te centraal te stellen. Immers, het gaat om de wiskunde. De leerlingen moeten dan ook (tot teleurstelling van sommigen) regelmatig hun machine neerleggen en zich buigen over algebraïsche berekeningen of meetkundige redeneringen.

Bij wijze van voorbeeld wordt hieronder een fragment uit het pakket 'Bewegingen in het vlak' beschreven. De ervaringen met dit materiaal in de klas geven een indruk van de manier waarop de leerlingen de mogelijkheden van de grafische rekenmachine benutten.

Twee guldens liggen tegen elkaar aan. De linker gulden ligt vast. P is het punt op de rand van de rechter gulden dat de linker raakt. De rechter gulden gaat nu om de linker rollen zonder te slippen. De vraag is welke baan P gaat beschrijven.



In de eerste opgaven vindt een concrete oriëntatie plaats. Deze leidt tot het kiezen van een geschikt assenstelsel en tot het opstellen van de bewegingsvergelijkingen.



Dan wordt de kromme getekend en ontstaat het beeld van de cardioïde. Vervolgens wordt de snelheid onderzocht waarmee het punt de cardioïde doorloopt. Door met de grafische rekenmachine de kromme te doorlopen blijkt duidelijk dat deze snelheid niet constant is. De snelheidsvector wordt door differentiëren berekend. Meetkundige beschouwingen completeren de opgaven over de snelheid van de beweging.
Dan komt de variatie.

1. Punt Q bevindt zich als de rechtse gulden gaat draaien halverwege het middelpunt van de draaiende gulden en de oorsprong.
   a. Hoe veranderen de bewegingsvergelijkingen ten opzichte van die van P?
   b. Teken de baan van Q.
   c. Is de gemiddelde snelheid van Q even groot als die van P? Geef een verklaring.

   Nu wordt het experiment lastiger om uit te voeren. We plakken namelijk op de draaiende gulden een rijksdaalder, die vanwege de grotere afmetingen ook boven een deel van de stilliggende gulden uitsteekt. Veronderstel dat de straal van de rijksdaalder anderhalf maal zo groot is als die van de gulden.
2. Het punt R bevindt zich in $(-\frac{1}{2}, 0)$ op het moment dat het draaien begint.
   a. Hoe verander je de bewegingsvergelijkingen van de baan van P om de baan van R te krijgen?
   b. In welk opzicht ziet de baan van R er anders uit dan die van P?

In bovenstaande opgaven is de afstand van het draaiende punt tot het midden van de gulden gewijzigd. In de volgende opgave wordt dit gegeneraliseerd, en moeten leerlingen verschillende gevallen onderzoeken. Ze worden vrij gelaten in de classificatie van de grafieken die ze vinden. Het eigen onderzoek staat hier centraal.

3. Veronderstel dat een punt P zich op een afstand a van het middelpunt van de draaiende gulden bevindt. De straal van de gulden stellen we nog steeds op 1.
   Onderzoek hoe de vorm van de baan die P beschrijft afhangt van de waarde van a. Let hierbij ook op extreme gevallen. Vat de resultaten kort samen.

5. Observaties in de klas

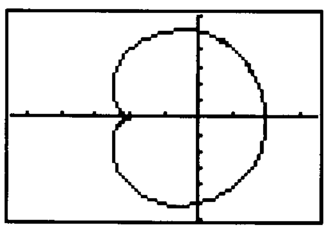
Hoe functioneerde deze paragraaf in de klas? Het experiment vond plaats in een wiskunde B groep van V6. Deze leerlingen hadden in het vorige schooljaar al uitgebreid met de grafische rekenmachine kennisgemaakt. We waren enigzins bezorgd: in hoeverre zouden de leerlingen de vaardigheid om de machine te bedienen nog paraat hebben? En hoe zouden de 'ingestroomde' leerlingen, die elke ervaring met de grafische rekenmachine missen, zich hierbij houden?

Hoewel sommige leerlingen wat lacherig reageerden, gingen ze toch experimenteren met twee guldens. Later bleek dat functioneel te zijn. Met name toen het vermoeden ontstond dat P twee keer zo snel om het middelpunt van de draaiende gulden draait als dat middelpunt zelf om de vaste gulden draait, grepen veel leerlingen terug op de 'harde' guldens om dat te verifiëren.

Op het moment dat deze paragraaf aan bod kwam, waren cirkelbewegingen met verschillende hoeksnelheden en stralen uitgebreid aan bod geweest. Mede daardoor was het opstellen van de bewegingsvergelijkingen geen groot probleem. Bovendien signaleerde de grafische rekenmachine de eventuele fouten onmiddellijk door in dat geval een 'onmogelijke' kromme te tekenen. Dat leidde in het algemeen tot verbeteringen van de bewegingsvergelijkingen. Met name waren er verschillende leerlingen die invoerden:

$$x(t) = 2 \cos t - 1 + \cos (2t)$$
$$y(t) = 2 \sin t + \sin (2t).$$

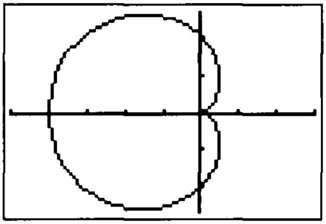
De volgende tekening maakte onmiddellijk duidelijk wat er mis was.



Door dit te verbeteren kwamen de leerlingen tot:

$$x(t) = 2 \cos t - 1 + \cos (2t + \pi)$$
$$y(t) = 2 \sin t + \sin (2t + \pi).$$

Deze vergelijkingen gaven op het scherm van de grafische rekenmachine de volgende kromme:



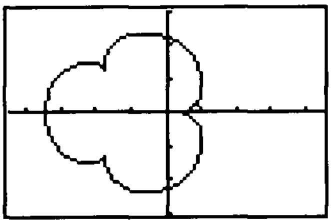
Later kwam het variëren van de afstand van *P* tot het middelpunt van de draaiende gulden aan de orde. Het volgende fragment uit een observatieverslag geeft een indruk.

Bij opgave 1 heeft Femke een probleem. Ze heeft ingevoerd:

$x(t) = 2\cos t - 1 + \frac{1}{2}\cos(4t + \pi)$

$y(t) = 2\sin t + \frac{1}{2}\sin(4t + \pi)$

'want hij draait twee keer zo hard als-ie twee keer zo klein is'. Er ontstaat een wolkachtige kromme.



Ze heeft in zekere zin gelijk, want ze stelt zich een kleinere munt voor, bijvoorbeeld een dubbeltje dat over een gulden rolt. Ze loopt vooruit op de spirograafkrommen. In dit geval blijft de draaiende munt echter een gulden, maar ligt het punt waarvan de baan wordt gevolgd niet meer op de rand.

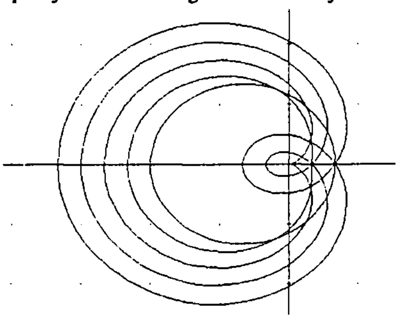
Bij opgave 2 vraagt de observator: 'En als je die $1\frac{1}{2}$ nou nog groter maakt?' Femke antwoordt: 'Dan wordt het lusje groter, en de buitenkant ook.'

Opgave 3 is nu geen probleem meer. Sommige leerlingen voeren de parametervoorstelling ook echt met een variabele in:

$x(t) = 2\cos t - 1 + a\cos(2t + \pi)$

$y(t) = 2\sin t + a\sin(2t + \pi)$.

Er ontstaan mooie plaatjes van deze zogenaamde Slaklijnen van Pascal:



De laatste vijf minuten van de les worden de resultaten van opgave 3 klassikaal op een rijtje gezet. Op het bord verschijnt een tabelletje.

a	vorm
0	cirkel
1	cardioïde
0<a<1	deuk
a>1	lus

Bij de 'deuk' zegt een leerling: 'Als *a* klein is, is het deukje ook klein, en als *a* groter wordt groeit het deukje ook.
Bij de lus vraagt de docent: 'Maakt het uit hoeveel *a* groter is dan 1?'
Leerling: 'Als *a* dicht bij 1 ligt, dan is-ie klein, bij grote *a* groot.'
Docent: 'Haalt die kleine de grote dan nog in?'
Leerling: 'Nee, ze gaan overlappen, ze komen dichter bij elkaar.'

Dat was een bevredigend einde van de paragraaf over de cardioïde. In het algemeen kwam het onderwerp 'Krommen' dank zij de grafische rekenmachine goed uit de verf. De leerlingen zagen de krommen op een dynamische wijze ontstaan. De baan vormde het vertrekpunt voor verdere beschouwing, en was niet het statische eindproduct van een vast ritueel van onderzoek naar snijpunten met de assen, horizontale en vertikale raaklijnen etcetera.

6. Reflectie en conclusies

Laten we terugblikken op het gepresenteerde voorbeeld en op de bijbehorende observaties in de klas. De vijf hypothesen uit paragraaf 2 vormen daarbij de leidraad. Bij elk van de hypothesen worden ook de bevindingen van het project in het algemeen kort samengevat.

1. Realistische contexten

De concrete probleemstelling met de twee guldens functioneerde goed. De leerlingen konden zich het probleem goed voorstellen. Ook de variaties op het oorspronkelijke probleem bleken voor de leerlingen vrij natuurlijk over te komen. Overigens draagt de grafische rekenmachine daaraan weinig bij. Door de straal van de guldens als lengte-eenheid te kiezen, worden 'lelijke' coëfficiënten vermeden. De kracht van de grafische rekenmachine bij 'onooglijke' getallen wordt hier dus niet gemobiliseerd.

Het algemene beeld op dit punt is vrij positief. Realistische gegevens leiden vaak tot ingewikkelde formules met onaantrekkelijke coëfficiënten. De grafische rekenmachine kan de moeilijkheden met het reken- en tekenwerk dan ondervangen. Hierdoor komen levensechte toepassingen meer binnen het bereik van de leerlingen. Met name bij wiskunde A is dat wenselijk. Een bijkomend voordeel is het feit dat de aandacht gericht kan worden op 'hogere' vaardigheden zoals de constructie van het wiskundig model en de strategie bij de oplossing van het probleem.

Een punt dat bij het gebruik van realistische contexten in combinatie met de grafische rekenmachine herhaaldelijk naar voren komt, is het verschil tussen de diverse talen die daarbij in het geding zijn: de natuurlijke taal, de wiskundetaal en de taal van de machine. Het blijkt dat leerlingen, zeker in het begin, hierdoor wel eens in de war raken. Ze moeten als het ware op drie fronten tegelijk functioneren. Het soepel leren omgaan hiermee zal de nodige didactische aandacht vragen.

2. Exploratie

De grafische rekenmachine ondersteunt in het voorbeeld van de cardioïde inderdaad de exploratieve activiteiten. Met name wanneer de afstand van *P* tot het middelpunt van de gulden wordt gevarieerd, vervult de machine een cruciale functie. De leerlingen komen tot een indeling die zij in hun beleving zelf ontwikkeld hebben.

In het algemeen zijn de ervaringen van het project op dit punt bemoedigend. Veel leerlingen blijken door de mogelijkheden van de grafische rekenmachine gestimuleerd te worden tot leerzame explorerende activiteiten. Het wiskundige niveau van de resultaten is echter nogal wisselend. Soms leidt de exploratie tot mooie ontdekkingen en inzichten, maar af en toe is de opbrengst teleurstellend. Dat heeft enerzijds te maken met het feit dat het trekken van conclusies naar aanleiding van verkennende activiteiten hoge eisen stelt aan leerlingen. Anderzijds is het ook zo dat leerlingen bij wiskunde B nog niet vaak met open probleemstellingen zijn geconfronteerd, en dat een onderzoekende houding ook aangeleerd moet worden.

Niettemin lijkt de mogelijkheid tot explorerende activiteiten één van de belangrijkste troeven van de grafische rekenmachine.

3. Integratie

Het leggen van dwarsverbanden tussen algebra en meetkunde is in de lessen over de cardioïde redelijk uit de verf gekomen. Bij het onderzoeken van de snelheid waarmee het punt beweegt, werd de grafische oriëntatie naast de algebraïsche geplaatst. De meetkundige manier, waarbij snelheidsvectoren opgeteld worden, werd door de leerlingen wel moeilijk gevonden. De tabel, die aan het einde van de observatie beschreven is, vormt een aardige classificatie van de voorbeelden die met behulp van de grafische rekenmachine gegenereerd zijn.

In het algemeen komt deze integratie niet zonder slag of stoot tot stand. Het werken in verschillende gebieden en met verschillende invalshoeken kan moeilijkheden opleveren, maar ook nieuwe inzichten en uitbreiding van begrippen. Leerlingen zijn aanvankelijk geneigd om de diverse gebieden als gescheiden te beschouwen. Ze kiezen voor één benadering. De grafische rekenmachine geeft daarentegen de gelegenheid meer op de verstrengeling gericht te worden en leerlingen blijken dat in het algemeen uiteindelijk goed op te nemen en te waarderen.

4. Dynamiek

Het onderwerp 'Krommen in parametervoorstelling' leent zich natuurlijk bij uitstek voor een dynamische benadering. De grafische rekenmachine is daarbij een uitermate geschikt hulpmiddel. De leerlingen in de experimentele les 'zagen' het punt in het vlak bewegen en de snelheid van de beweging werd zichtbaar. Zo kwamen de parametervoorstellingen die de bewegingen in het vlak beschrijven echt tot leven.

Een tweede dynamisch aspect dat uit de beschreven observatie naar voren is gekomen, is directe feedback die de machine geeft op de pogingen van de leerling. Deze terugkoppeling stelde de leerling in staat om te leren van de eventuele fouten en om onmiddellijk verbeteringen aan te brengen.

In het algemeen bevestigen de ervaringen van het project het idee dat de grafische rekenmachine de leerling het voordeel geeft van een globale grafische representatie, een eerste beeldvorming van het probleem. De machine neemt de rem bij leerlingen weg om 'eventjes snel' een schetsje te maken. Een dynamisch aspect hierbij is dat de gebruiker ziet hoe een grafiek (of een kromme of een bundel van grafieken) ontstaat. Als het plaatje klaar is, biedt TRACE alsnog de mogelijkheid om de grafiek punt voor punt te volgen en de veranderende coördinaten op het scherm af te lezen. De directe feedback van de grafische rekenmachine bevordert reflectie door de leerlingen. Deze afwisseling van experiment en reflectie is in de realistische opvattingen belangrijk bij de begripsvorming.

5. Flexibiliteit

De vaardigheden waarover de leerling bij het doorwerken van de opgavenserie over de cardioïde dient te beschikken, zijn anders dan die vereist worden in de gangbare schoolmethoden. Het tekenen van de kromme is bijvoorbeeld iets dat de leerling niet meer met de hand hoefde te doen. Daar staat tegenover dat het bijvoorbeeld wel belangrijk is dat de leerling uit de benadering die de grafische rekenmachine gaf van de maximale x-waarde een vermoeden van de exacte waarde kon destilleren. Verder is verondersteld dat de leerling de gevolgen van de wijzigingen in de bewegingsvergelijkingen in verband kon brengen met de veranderingen in de kromme.

In het algemeen is de verwachting bevestigd dat de komst van de grafische rekenmachine een accentverschuiving zal veroorzaken van 'starre technieken' naar een meer flexibel oplossingsgedrag. Daarbij dient een kritische houding te worden ontwikkeld ten aanzien van numerieke uitkomsten. Het belang van het beheersen van routinematige handelingen zal afnemen, terwijl het werken met de machine een flexibele houding vereist. Het zal de leerling als het ware 'wiskundig wendbaarder' maken.

7. En verder....

Natuurlijk is het niet zo dat het onderzoek uitsluitend vermoedens heeft bevestigd en dat daarmee het onderzoek 'af' is. Hoewel de ervaringen in het algemeen inderdaad vrij positief waren, is met name de invloed van de grafische rekenmachine op de inhoud van het onderwijs nog onvoldoende onderzocht. Dat heeft te maken met de randvoorwaarden van het project. De leerlingen die aan het experiment deelnamen, hadden geen toestemming om de rekenmachine ook bij het eindexamen te gebruiken. Als gevolg hiervan kon niet te veel van het reguliere programma en de daarbij gebruikelijke aanpak worden afgeweken. Een neveneffect was natuurlijk dat het gebruik van de machine in de ogen van de leerlingen een wat vrijblijvend karakter had.

In het vervolgproject, dat inmiddels van start is gegaan, zal dit veranderen. Vanuit het besef dat de grafische rekenmachine pas een volwaardige plaats in het wiskundeonderwijs zal krijgen als de machine ook bij de toetsing een rol speelt, is een examenexperiment opgezet. De twee proefscholen die hierbij betrokken zijn, krijgen voor wiskunde een afwijkende examenregeling, die het gebruik van de grafische rekenmachine toestaat. Vanzelfsprekend zullen de examens verschillen van de reguliere. Voor VWO wiskunde A en wiskunde B zullen de eerste experimentele examens in 1996 worden afgenomen. Voor het HAVO zal dit naar verwachting in 1997 het geval zijn.

De verdere invoering van de grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs zal mede afhankelijk zijn van de ontwikkelingen rond de bovenbouwprofielen. Naar onze mening ligt het voor de hand dat de beschikbaarheid van de grafische rekenmachine van invloed zal zijn op de inhoudelijk invulling van de te ontwikkelen modulen. Het routineuze functieonderzoek zal bijvoorbeeld belang verliezen. De Studiecommissie Wiskunde B VWO (De Lange e.a., 1994) lijkt deze visie te ondersteunen. Naar wij verwachten kan het examenexperiment met de grafische rekenmachine een bijdrage leveren aan een actuele invulling van het vak wiskunde in de bovenbouw van HAVO en VWO. Dat een landelijke invoering van de grafische rekenmachine gewenst is, lijkt ons, mede gezien de ontwikkelingen in andere landen, een duidelijke zaak.

8. Literatuur

Brink, J. van den & M. Doorman (1994). Typisch graphic calculator. *Nieuwe Wiskrant 14*, 2, 4-9.

Demana, F. e.a. (1992). *Precalculus Mathematics, a graphing approach.* New York: Addison-Wesley.

Doorman, L.M., P. Drijvers & M. Kindt (1994). *De grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs.* Utrecht: Freudenthal Instituut

Doorman, L.M. & P. Drijvers (1993). *Grafiekenalgebra.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Doorman, L.M. & P. Drijvers (1993). *Differentiëren.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Doorman, L.M., P. Drijvers & M. Kindt (1994). *Bewegingen in het vlak.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Drijvers, P. (1993). Grafieken classificeren met een grafische rekenmachine. *Nieuwe Wiskrant 12*, 3, 33-37.

Drijvers, P. & M. Kindt (1992). *Optimaliseren met een grafische rekenmachine.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Goldenberg, E.P. (1988). Mathematics, metaphors, and human factors: mathematical, technical, and pedagogical challenges in the educational use of graphical representation of functions. *Journal of Mathematical Behavior, 7*, 135-173.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education.* Utrecht: CD ß-Press.

Kindt, M. (1993). James Bond, de wet van Snellius en wiskunde B. *Nieuwe Wiskrant 13*, 1, 45-50.

Lange, J. de, e.a. (1994). *Wiskunde B VWO, rapport studiecommissie.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Leinhardt, G. e.a. (1990). Graphs and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60*, 1, 1-64.

Monaghan, J. (1993). New Technology and Understanding in Mathematics Education. In: Bero, P. (Ed.). *BISME 3 Conference.* Bratislava.

Ruthven, K. (1992). *Graphic calculators in advanced mathematics.* Coventry: NCET.

Streefland, L. (1992). Sinusfunctie in ontwikkelingsonderzoek: een gedachtenexperiment. *Tijdschrift voor didactiek der β-wetenschappen 10*, 1, 54-82

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions.* Dordrecht: Reidel.