

Wiskunde leren met de computer: een onderzoeksopdracht onderzocht

Monique Pijls, Rijkje Dekker en Bernadette van Hout Wolters
Instituut voor de Lerarenopleiding,
Universiteit van Amster

Summary

Mathematical investigation tasks with the computer form a new part of the mathematical curriculum in upper general secondary education. Students work on these tasks in pairs and they are expected to investigate a certain mathematical subject by themselves. However, previous research made clear that these tasks do not work for all students. In the first part of our research we want to develop learning materials for students who have difficulties with this kind of tasks. The aim of working on these tasks is mathematical level raising. In this article we will describe our theoretical framework and we will report a first pilot study, which showed that the developed learning materials are accessible for students on different levels.

1. Inleiding

Met de invoering van de Tweede Fase in de bovenbouw van havo en vwo moeten algemene vaardigheden op het schoolexamen worden getoetst. Van leerlingen wordt verwacht dat zij leren hun eigen leerproces te sturen. Zij moeten kunnen samenwerken, een onderzoek kunnen uitvoeren en gebruik kunnen maken van informatietechnologie. In zogenaamde praktische opdrachten moeten leerlingen deze vaardigheden in praktijk brengen. Veel actueel onderwijskundig onderzoek richt zich op het onderwijzen en toetsen van deze vaardigheden. Hierbij vormen het uitvoeren van onderzoek door leerlingen, samenwerken en gebruik maken van informatietechnologie doelen op zich die in zekere zin los staan van het vak waarbij leerlingen ze in praktijk brengen. Wij willen nagaan of het uitvoeren van een onderzoeksopdracht bij wiskunde ook kan leiden tot beter begrip van het behandelde wiskundeonderwerp. Deze vraag staat centraal in het promotieonderzoek 'Onderzoekend wiskunde leren met de computer' dat deel uit maakt van het aandachtsgebied 'Wiskunde en ICT'. Het onderzoek bouwt voort op het Printproject 'Informatietechnologie in het Studiehuis' (Doorman, Kemme & Wijers, 1996), waarin is geëxperimenteerd met onderzoeksopdrachten met de computer voor wiskunde in 4 havo en 4 vwo. Het doel van dit project was om het computergebruik in de wiskundeles te stimuleren én te experimenteren met de nieuwe ontwikkelingen op het gebied van zelfstandig leren. Met zelfstandig leren werd bedoeld dat de leerling zijn leerproces organiseert. Dat wil zeggen, de leerling zelf

- neemt zelf het initiatief om iets te leren
- bedenkt een plan
- voert de nodige stappen uit van het plan die tot het gewenste eindresultaat leiden. (Kemme & Wijers, 1996)

De vwo- en havo wiskunde B- leerlingen voerden met de opdrachten ook echt zelfstandig onderzoek uit, havo wiskunde A leerlingen echter niet. Blijkbaar waren de onderzoeksopdrachten met de computer niet geschikt voor deze

groep leerlingen. In ons project zullen we allereerst speciaal voor leerlingen havo wiskunde A geschikte onderzoeksopdrachten ontwikkelen. Vervolgens willen we te weten komen of het uitvoeren van deze opdrachten ertoe kan leiden dat leerlingen een bepaald wiskundig onderwerp beter gaan begrijpen. Ofwel, dat zij hun informele kennis van een bepaald onderwerp omzetten in formele kennis. Dit proces duiden we aan met niveauverhoging (Elshout-Mohr & Dekker, 2000). We willen achterhalen onder welke condities het zelfstandig uitvoeren van onderzoek met deze opdrachten door leerlingen uit 4 havo wiskunde A leidt tot niveauverhoging. Daarbij kijken we naar het moment waarop de onderzoeksopdracht wordt uitgevoerd en naar het type hulp dat de docent biedt. Praktische opdrachten worden meestal gegeven aan leerlingen nádat een bepaald onderwerp is behandeld in de les. De functie is dan het toepassen van de verworven kennis. Hoewel het beschikken over voldoende voorkennis een voorwaarde is voor het welslagen van onderzoek door leerlingen (zie o.a. Tuovinen & Sweller, in druk) zijn we toch benieuwd of het uitvoeren van een praktische opdracht vóórdát de theorie wordt behandeld ook leerzaam kan zijn. De studie naar hulp van de docent bouwt voort op onderzoek van Dekker (1998) met leerlingen 5 VWO wiskunde B waaruit bleek dat leerlingen die zelfstandig werkten bij een docent die zich uitsluitend richtte op het leerproces, beter leerden dan leerlingen die zelfstandig werkten bij een docent die wiskundige hints gaf. Het is natuurlijk interessant om na te gaan of dit ook geldt voor leerlingen 4 havo wiskunde A. In het voorjaar van 1999 is een pilotstudie uitgevoerd waarin een onderzoeksopdracht over het onderwerp 'Tellen en Kansen' is getest met een aantal leerlingen. Het doel was om na te gaan of deze opdracht wel tot zelfstandig onderzoek leidde bij deze groep leerlingen. In dit artikel zullen we deze pilotstudie bespreken en antwoord geven op een aantal vragen over het ontwikkelde lesmateriaal. Allereerst lichten we toe wat we bedoelen met niveauverhoging, onderzoekend leren, samenwerkend leren en de rol van de computer. In paragraaf 5 wordt de onderzoeksopdracht uitgelegd. Vervolgens wordt de try-out beschreven en geanalyseerd en tot slot bespreken we consequenties voor verder onderzoek.

2. Niveauverhoging bij het leren van wiskunde

Bij wiskunde A krijgen leerlingen te maken met toepassingen van de wiskunde in vakken als economie, sociale wetenschappen en geneeskunde. Naast een aantal wiskundige begrippen leren leerlingen een kritische houding t.a.v. het gebruik van wiskunde in praktijksituaties. Leerlingen moeten gewend raken aan de wiskundige taal, eraan gewend raken om formules te gebruiken, vertrouwd raken met verschillende soorten grafische representaties, wiskundige modellen leren gebruiken en hun waarde leren inschatten (de Lange, 1987). Het gaat dus om praktijksituaties waarin leerlingen problemen oplossen door gebruik te maken van wiskundige begrippen. In de verschillende stadia van hun leerproces benaderen leerlingen een bepaald probleem op verschillende manieren. Vóórdát zij zich een bepaald begrip hebben eigen gemaakt benaderen ze het probleem op een perceptueel niveau. Ze zien het probleem "zoals het is" en herkennen er geen eigenschappen van een bepaald wiskundig begrip in. Nadat ze zich een bepaald begrip hebben eigen gemaakt, herkennen leerlingen in een realistisch probleem aspecten van een wiskundig begrip en kunnen zo het probleem oplossen gebruikmakend van wiskundige begrippen. De leerlingen benaderen het probleem dan op een ander niveau. Er is

niveauperhoging opgetreden van een perceptueel naar een conceptueel niveau. De term 'niveauperhoging' is onder andere gebaseerd op de theorie van Van Hiele (1986). Hij onderscheidt bij het leren van meetkunde verschillende denkniveaus. Het eerste niveau is het *visuele niveau*. Op dit niveau nemen de leerlingen structuren in de werkelijkheid waar. In de meetkunde is dit het niveau waarop leerlingen verschillende figuren kunnen onderscheiden en operaties op deze figuren kunnen toepassen. Op het tweede niveau, het *beschrijvende niveau*, praten leerlingen over eigenschappen van structuren. Ze zijn in staat om deze eigenschappen toe te passen. Als ze bijvoorbeeld weten dat in een ruit de diagonalen elkaar loodrecht snijden, dan kunnen zij in een andere situatie een ruit herkennen en deze eigenschap toepassen.

De overgang van het visuele naar het beschrijvende niveau is te vergelijken met de overgang van naïeve kennis naar wetenschappelijke kennis (zie Elshout-Mohr & Dekker, 2000). Niveauperhogen is een term voor een type leren dat onder de aandacht is gebracht door Bereiter onder de noemer 'moeilijk leren' (1990). Elshout-Mohr en Dekker (2000) hebben niveauperhoging ook in verband gebracht met cognitieve belasting en interactiviteit van de leerstof (Sweller & Chandler, 1994) en met het verwerken van onverwachte, niet met de eigen vooronderstelling strokende gegevens (Chinn & Brewer, 1993). Het gaat dus om situaties waarin lerenden nieuwe conceptuele schema's moeten opbouwen, omdat zij worden geconfronteerd met informatie of opdrachten die zij maar ten dele kunnen begrijpen of uitvoeren met behulp van de reeds beschikbare schema's. De vraag is natuurlijk hoe niveauperhoging op gang kan worden gebracht. Wij willen dit onderzoeken in een onderwijsleersituatie waarin leerlingen samen werken aan een onderzoeksopdracht met behulp van de computer. Hieronder zullen we de drie aspecten van deze onderwijsleersituatie apart bespreken: het onderzoeken, het samenwerken en de rol van de computer.

3. Onderzoekend wiskunde leren

Het uitvoeren van onderzoek door leerlingen bij wiskunde A kan verschillende functies hebben. Aan de ene kant kunnen leerlingen er nieuwe kennis mee opdoen, aan de andere kant kunnen ze er ook nieuw geleerde begrippen mee toepassen. Onderzoeksopdrachten zijn opdrachten waarbij leerlingen zelf een bepaald onderwerp of probleem onderzoeken, dat wil zeggen dat zij zelf proberen kennis te achterhalen. In de natuurwetenschappen gaat dat door hypothesen te formuleren, experimenten uit te voeren en vervolgens de hypothesen aan te nemen of te verwerpen. In de toegepaste wiskunde (wiskunde A) gaat het om het oplossen van problemen uit de realiteit waarmee leerlingen de gelegenheid krijgen om kennis uit dit domein te ontwikkelen.

Bij onderzoeksopdrachten moeten leerlingen zelf een probleem formuleren, vervolgens een plan op stellen om dit probleem te onderzoeken, het plan uitvoeren, de resultaten formuleren en uiteindelijk terug kijken op hun onderzoek. Probleemoplossen en onderzoek doen liggen bij wiskunde heel dicht bij elkaar. Dit heeft te maken met het feit dat er bij wiskunde geen fysische experimenten worden uitgevoerd. Klassiek is het werk 'How to solve it' van Polya (1945) waarin hij de volgende fasen bij het oplossen van een wiskundig probleem onderscheidt: het probleem begrijpen, een plan maken, het plan uitvoeren en terugblikken. Deze fasen lijken veel op de fasen van onderzoek doen.

Niet in alle literatuur over onderzoeksopdrachten wordt vermeld dat leerlingen zélf een probleem moeten formuleren dat zij vervolgens gaan onderzoeken. Bij *discovery learning*, gebaseerd op de ideeën van Bruner wordt er vooral de nadruk op gelegd dat leerlingen de gelegenheid krijgen om zelf uit te zoeken hoe iets in elkaar zit (zie Borich & Tombari, 1997). De docent geeft het probleem of leerdoel aan. Volgens Bruner wordt kennis op een hiërarchische manier in de hersenen opgeslagen. Boven aan de hiërarchie staan de meer algemene, allesomvattende ideeën en onderaan staan de meer concrete, feitelijke ideeën. Er komt bij leerlingen zoveel informatie binnen dat het brein een manier moet vinden om deze te vereenvoudigen en betekenis te geven. Categoriseren, het simplificeren van ideeën en organiseren, het op een rijtje zetten van de ideeën, zijn heel belangrijk hierbij. Het brein organiseert de informatie die binnenkomt, om deze op te kunnen slaan in het lange termijn geheugen. Dit opslaan van informatie gebeurt op grond van generalisaties die worden gemaakt. Bij *discovery learning* is het de bedoeling dat leerlingen deze generalisaties zelf ontdekken in plaats van dat de docent ze aan de leerlingen voorlegt. Het idee is dat door deze methode leerlingen opgedane kennis beter onthouden, tot beter begrip van een onderwerp komen en beter in staat zijn om hun kennis toe te passen.

De overgang van concrete, feitelijke kennis naar meer algemene ideeën is gerelateerd aan het begrip niveauverhoging bij het leren van wiskunde. We herkennen de overgang van kennis over specifieke gevallen naar algemene kennis die in meerdere gevallen toepasbaar is. Volgens Freudenthal (1973) is het voor niveauverhoging van belang om leerlingen de gelegenheid te geven om veel te exploreren op het visuele niveau, het niveau van de concrete, feitelijke kennis. Leerlingen zullen dan door te reflecteren op dat wat zij gedaan hebben zelf abstracties (modellen, formules, etc.) ontwikkelen. Dit komt overeen met het idee van Bruner dat leerlingen zelf generalisaties moeten ontdekken. Freudenthal (1973) spreekt in dit verband over *reinvention*. De docent probeert door het geven van bepaalde opdrachten of door het stellen van bepaalde vragen het proces van *reinvention* bij leerlingen op gang te brengen (*guided reinvention*). Leerlingen hoeven dan dus niet zelf het probleem te formuleren. Bij het ontwerpen van opdrachten die gericht zijn op *guided reinvention* kan de historische ontwikkeling van een bepaald onderwerp als inspiratiebron dienen. Dit is echter niet noodzakelijk. Het doel is niet dat leerlingen de historische ontwikkeling opnieuw doormaken, maar dat zij de gelegenheid krijgen om een zelfde soort proces te ervaren als het proces van uitvinden. Opdrachten voor *guided reinvention* kunnen ook geïnspireerd zijn door eigen oplossingsmethoden van leerlingen.

Onderzoeksopdrachten (in de Tweede Fase ook wel *praktische opdrachten* genoemd) bij wiskunde worden vaak gepresenteerd aan het eind van het hoofdstuk, om de verworven kennis toe te passen. Volgens het idee van *discovery learning* zoals dat hier gepresenteerd is, zou het leerzaam zijn om leerlingen een onderzoeksopdracht te laten uitvoeren vóór dat zij over een bepaald onderwerp hebben geleerd. In ons onderzoek willen we nagaan of het uitvoeren van een onderzoeksopdracht aan het begin van het hoofdstuk leidt tot meer begrip van het onderwerp dan het uitvoeren van een onderzoeksopdracht aan het eind van het hoofdstuk. We gaan ervan uit dat leerlingen aan het begin van het hoofdstuk een bepaald onderwerp perceptueel benaderen en dat zij dat aan het eind van het hoofdstuk op conceptueel niveau doen.

4. Samenwerkend wiskunde leren

Samenwerken bij het leren van wiskunde staat al lange tijd in de belangstelling. Juist omdat veel leerlingen het vak lastig vinden en omdat het vaak mogelijk is om op verschillende manieren tot het antwoord te komen. Dekker en Elshout-Mohr (1998) ontwikkelden een procesmodel voor het (samen) werken aan een wiskundeopdracht. Hierin onderscheiden zij vier kernactiviteiten die tot niveauverhoging kunnen leiden. De kernactiviteiten zijn:

- *tonen* van het eigen werk,
- *geven van uitleg* over het eigen werk,
- *verantwoorden* van het eigen werk
- *reconstrueren* van het eigen werk

Deze kernactiviteiten kunnen worden uitgelokt door regulerende activiteiten als vragen het werk te tonen, vragen om uitleg en bekritisieren van het werk van de ander. Het geven van uitleg heeft een positieve invloed op het eigen leren (o.a. Chi et al., 1994; Webb, 1991). Het vragen van hulp of uitleg door medeleerlingen brengt deze kernactiviteit op gang. Het bekritisieren van elkaars werk leidt tot verantwoorden van eigen werk (zie Balacheff, 1991).

Dekker (1995) noemt de volgende criteria voor opdrachten die interactie tussen leerlingen oproepen:

1. De opdracht is 'realistisch'. Daarmee wordt in dit verband bedoeld dat de opdracht toegankelijk en zinvol moet zijn voor alle deelnemers en niet alleen voor deelnemers met relevante vakkennis. Leken op het betreffende vakgebied moeten evenzeer toegang tot de opdracht hebben als experts, ook al valt te verwachten dat hun aanvankelijke probleemconceptie op een aantal relevante aspecten anders zal zijn.
2. De opdracht is gericht op niveauverhoging. Dit wil zeggen dat de opdracht zo is geconstrueerd en geformuleerd dat deze bevordert dat leerlingen aspecten ontdekken waarin de voorwetenschappelijke kennis tekort schiet en aanvulling of verandering behoeft.
3. Het probleem is complex. Daarmee wordt in dit verband bedoeld dat er verschillende vaardigheden nodig zijn en dat het onwaarschijnlijk is dat een van de deelnemers er, zonder tussentijds overleg met de anderen, een kant en klare oplossing voor kan aandragen.
4. Het probleem vraagt om constructie. Dit wil zeggen dat deelnemers hun denkwijzen, veronderstellingen en de wijzigingen daarin zichtbaar maken in waarneembare producten en observeerbare handelingen.

In ons onderzoek hanteren we deze criteria bij het ontwerpen van onze onderzoeksopdrachten.

5. Wiskunde leren met de computer

De laatste jaren is het gebruik van de computer in de wiskundeles toegenomen. Dit heeft pas zin, als leerlingen met de computer iets kunnen doen dat zij zonder computer niet of heel moeilijk zouden kunnen uitvoeren. We noemen dit *functioneel* gebruik van de computer. Voorbeelden hiervan zijn:

- Het laten uitvoeren van routinehandelingen die zonder computer veel tijd zouden kosten (berekeningen, tekenen van grafieken) (Ruthven, 1996). De computer kan bepaalde berekeningen sneller uitvoeren dan de mens. Hierdoor wordt het mogelijk om meer berekeningen te maken, problemen en oplossingsmethoden met elkaar te vergelijken. Dit kan leiden tot niveauverhoging.

- Het toetsen van hypothesen over een bepaald fenomeen (door het gebruik van simulaties) (zie Doerr, 1997).

In het project 'Informatietechnologie in het Studiehuis Wiskunde' is van 1995 tot en met 1997 geëxperimenteerd met onderzoeksopdrachten waarbij op een functionele manier gebruik werd gemaakt van de computer (Kempe & Wijers, 1996). Uit dit project bleek dat onderzoeksopdrachten met de computer vooral effectief waren met betrekking tot het leren van wiskunde bij vwo en bij havo wiskunde B. Leerlingen van havo wiskunde A voerden de opdracht vaak maar gedeeltelijk uit, laat staan dat ze er wiskunde van leerden. Ook in het vervolgproject Prent, waarin vijf scholen verder experimenteren met praktische opdrachten met (en zonder) de computer, blijkt dat onderzoeksopdrachten met de computer over het algemeen minder goed 'aanslaan' (dat wil zeggen dat de leerlingen echt zelfstandig een onderzoek uitvoeren) bij havo wiskunde A dan bij de andere groepen. Door docenten wordt als mogelijke oorzaak genoemd de openheid van de opdrachten. Volgens hen vragen leerlingen voortdurend 'wat ze nu eigenlijk moeten doen'. Het is overigens de vraag of de openheid werkelijk de belangrijkste factor is. Er is namelijk ook een voorbeeld van een open opdracht die bij deze leerlingen wél goed werkte. Interessant is in dit geval wat Sweller en Chandler (1994) zeggen over cognitieve belasting bij het werken aan complexe opdrachten met behulp van verschillende materialen (bijvoorbeeld computer en schoolboek tegelijk). Volgens hen kan in zo'n situatie de cognitieve belasting voor leerlingen te groot worden. Dit geldt vooral als de opdracht zelf voor leerlingen al moeilijk is. De cognitieve belasting die wordt veroorzaakt door het gebruik van verschillende materialen is volgens Sweller en Chandler niet altijd nodig voor het leerproces, maar kan zelfs overbodig zijn. In een aantal experimenten laten zij zien dat de cognitieve belasting die ontstaat doordat leerlingen 'heen-en-weer' moeten gaan tussen hun boek met instructies en het beeldscherm verminderd kan worden door in het boek met instructies over het gebruik van de computer een aantal afbeeldingen van de computer met tekst erbij op te nemen, zodat de leerlingen op dat moment alleen het boek hoeven te raadplegen. Dit is iets om bij het ontwerpen rekening mee te houden.

6. De onderzoeksopdracht 'Plinko'

Zoals eerder gezegd is het doel van ons onderzoek om te achterhalen hoe het zelfstandig uitvoeren van onderzoeksopdrachten met behulp van de computer door havo 4 leerlingen ertoe kan leiden dat zij een bepaald wiskundig onderwerp beter gaan begrijpen. Hiervoor moet natuurlijk allereerst goed materiaal worden ontwikkeld. Uit een eerder project bleek immers dat juist voor leerlingen uit 4 havo wiskunde A een aantal onderzoeksopdrachten met de computer niet goed functioneerde. De leerlingen werden er niet door uitgedaagd. Om opdrachten te selecteren waarmee deze leerlingen wel zelfstandig onderzoek zouden uitvoeren werden de volgende criteria aangelegd: de opdracht spreekt leerlingen aan, het doel van de opdracht is duidelijk, de opdracht is geschikt voor samenwerken en leerlingen moeten bij het werken aan de opdracht functioneel gebruik maken van de computer.

De keuze viel in eerste instantie op een opdracht over het gokspel Plinko. Het spelbord van Plinko lijkt op een bord van Galton, maar dan met meer hokjes bovenaan van waaruit een balletje kan vallen. Vanuit de bovenste hokjes kan men een balletje laten vallen dat vervolgens via de andere hokjes

in een van de bakjes beneden komt. Wij lieten leerlingen het spel op de computer spelen. Op Internet is het verschillende malen te vinden. De opdracht is om na te gaan of er een winnende strategie is voor dit spel. Hiervoor is kansberekening nodig. Om de opdracht te sturen is het puntenaantal '40' vervangen door '1000'. In deze vorm is het duidelijk de bedoeling om in het vak met duizend punten te komen. Met deze aanpassing wilden we uitlokken dat leerlingen mogelijke routes van een bovengelegen hokje naar benedengelegen hokjes gingen zoeken.

Het onderwerp waar onze opdracht betrekking op heeft is 'Routes en kansen' uit het domein 'Tellen en Kansen'. Dit omvat het tellen van routes in een rooster en het berekenen van kansen met twee alternatieven (binomiale kansen) met behulp van een rooster. De voorkennis die we veronderstellen bij leerlingen die dit onderwerp nog niet doorgewerkt hebben is dat zij kunnen rekenen met breuken, procenten en machten en dat zij een idee hebben van het begrip 'kans'. De concepten die zij zich eigen moeten maken zijn het tellen in een rooster en het berekenen van binomiale kansen.

Er is met name voor deze opdracht gekozen omdat deze op verschillend niveau benaderd kan worden. Op perceptueel niveau kunnen leerlingen het spel meteen spelen en zo een intuïtief idee krijgen van de beste strategie. Tijdens het spelen zien zij de route die een balletje aflegt naar beneden. Deze visuele informatie geeft hen de mogelijkheid om verschillende strategieën met elkaar te vergelijken. Ook is het mogelijk om de beste strategie te berekenen. Zo kunnen leerlingen op conceptueel niveau het antwoord bepalen.

7. De onderzoeksoopdracht onderzocht

Met de onderzoeksoopdracht 'Plinko' is in april 1999 een try-out gehouden om antwoord te krijgen op de volgende vragen:

- Spreekt de opdracht leerlingen aan? Gaan zij ermee aan de slag?
- Is het doel van de opdracht voor leerlingen duidelijk? Voeren zij onderzoek uit?
- Werken leerlingen samen bij het werken aan de opdracht?
- Maken leerlingen functioneel gebruik van de computer?
- Biedt de opdracht mogelijkheden voor exploratie op het perceptuele niveau?
- Biedt de opdracht mogelijkheden voor antwoorden op het conceptuele niveau?

In deze try-out nam de onderzoeker zelf de rol van docent op zich en gaf daarbij minimale hulp.

De proefpersonen waren vier leerlingen uit 4 havo, profiel E & M (wiskunde A) van het Montessori Lyceum te Amsterdam. Zij waren door hun docent gevraagd en werkten vrijwillig mee aan dit experiment. In de eerste les was de opdracht de volgende:

Plinko 1

Op de computer zie je het spel Plinko. Dit is een gokspel dat in de Verenigde Staten heel populair is. Je klikt op één van de vijf bovenste hokjes en dan 'valt' er een 'balletje' naar beneden. Vanuit ieder vak heeft het balletje gelijke kans om naar links of naar rechts te vallen. Beneden komt het balletje weer in een vak waar een aantal punten op staat. Dit aantal punten heb je behaald. Je mag vijf keer achter elkaar een balletje laten vallen.

De tweede opdracht luidde:

Plinko 2

De eigenaar van een gokhal wil het spel Plinko wat spannender maken.

- Het principe dat je een balletje laat vallen dat via een aantal vakken naar beneden in een vak met punten valt, blijft behouden.
- Ook dat de vakken als het ware een 'rooster' vormen (uit ieder vak kan het balletje naar links of naar rechts en in ieder vak komen van boven twee wegen samen).

Het verschil is dat de vorm van het rooster anders mag zijn en dat je kunt variëren met de vakken aan de bovenkant en aan de onderkant.

Ontwerp een vernieuwde, spannendere versie van Plinko.

Leg duidelijk uit hoe deze versie werkt. Beschrijf de beste strategie en ook de slechtste.

Zal de eigenaar winst maken met jullie spel?

Er werd gewerkt in twee tweetallen, Anouk en Michel en Joost en Brigitte. Eerder in het schooljaar hadden zij een hoofdstuk over kansrekening gehad. De opdracht kwam dus voor hen ná het hoofdstuk. Zij werkten twee lessen (45 minuten) aan twee opdrachten rondom het spel Plinko. Er waren opvallende overeenkomsten en verschillen tussen de tweetallen in hun aanpak van de opdracht. De overeenkomsten waren de volgende:

- Voor de leerlingen was de opdracht betekenisvol: uit opmerkingen bleek dat ze vaker computerspelletjes spelen, ze gingen vlot met de opdracht aan de slag en het doel was meteen duidelijk.
- De leerlingen speelden het spel een aantal keer en noemden de puntenaantallen die ze haalden: de opdracht nodigde uit tot experimenteren.
- Ze vermoedden al snel dat de linker hokjes meer kans op de 1000 gaven dan de rechter hokjes.
- Ze probeerden een boomdiagram te maken van de kans om in verschillende hokjes onderaan te komen vanuit een bepaald hokje bovenaan, en slaagden hier niet in; overigens is dit ook niet een handige manier om tot een oplossing te komen, maar het is wel opvallend dat beide tweetallen dit toch probeerden. Blijkbaar werd dit opgeroepen door het feit dat het over kansrekening gaat.
- Beide tweetallen wisten een winnende strategie te bepalen. Weliswaar was de strategie van Joost en Brigitte beter uitgewerkt dan de strategie van Anouk en Michel.

Er waren ook opvallende verschillen tussen de tweetallen:

Anouk en Michel

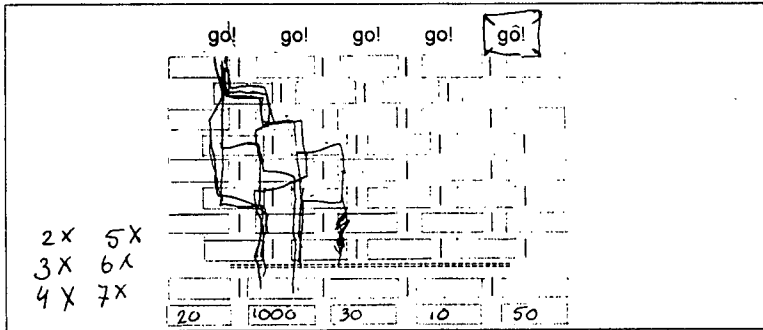
Anouk en Michel vergeleken twee strategieën met elkaar door het spel een aantal keren te spelen en de puntenaantallen op te schrijven. De ene strategie bestond uit het afwisselend klikken op één van de twee linker hokjes. Dit leverde na tien keer spelen gemiddeld 2448 punten. De andere strategie be-

stond uit het afwisselend klikken op een van de drie rechter hokjes. Deze strategie leverde gemiddeld 694 punten.

Ze vergeleken het aantal mogelijkheden om in 1000 te komen van de linker en de rechter hokjes met elkaar. Anouk probeerde het aantal mogelijke routes vanuit het meest linker hokje te tekenen. Ze tekende verschillende routes over elkaar heen met dezelfde pen, dus dit werd onoverzichtelijk (zie figuur A).

Figuur A: Het antwoord van Anouk

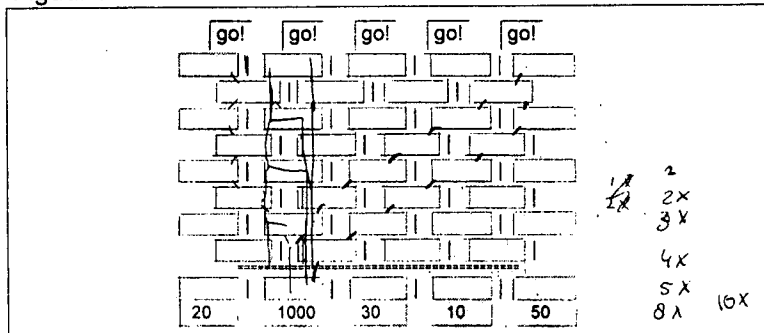
Figuur A



Michel beweerde dat er vanuit het meest rechtse hokje maar twee routes zijn die naar de 1000 komen. (figuur B). Ze schreven op: 'Tussen de linkse go en de rechtse go heeft de linkse go meer mogelijkheden om bij 1000 te komen want de rechtse heeft 2 mogelijkheden en de linkse heeft er meer dan 6. De 2° go heeft meer mogelijkheden maar meer mogelijkheden om naar rechts te gaan dat heeft de linkse go niet.'

Figuur B: Het antwoord van Michel

Figuur B



Joost en Brigitte

Joost en Brigitte bepaalden met berekeningen voor de drie linker hokjes wat de kans is om in de 1000 te komen. Ze schreven op: 'De linker 'go' vakjes hebben het meeste kans om bij 1000 te komen, dus de hoogste score te be-

halen. De 2 rechtse 'go' vakjes hebben het minste kans. Doordat je minder kans hebt om elke keer naar links te gaan, dan dat je naar links of rechts gaat. En bij het meest linkse vakje moet je op het begin wel naar rechts, dus heb je ook weer meer kans om bij de 1000 te komen. Het middelste vakje heeft wel een kans, maar niet zo groot als de eerste twee. We hebben uitgerekend hoeveel kans de eerste drie 'go' vakjes [van links, MP] hebben om bij 1000 te komen:

1° go vakje \Rightarrow 56/128 kans

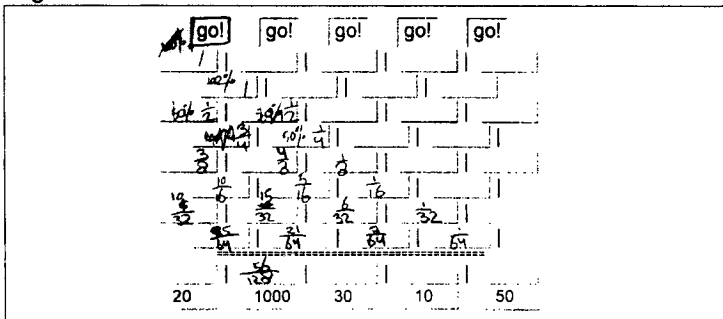
2° go vakje \Rightarrow 49/128 kans

3° go vakje \Rightarrow 32/128 kans'.

In figuur C staat één van de drie berekeningen van Joost en Brigitte.

Figuur C: Een antwoord van Joost en Brigitte

Figuur C



De tweede taak werd zonder computer uitgevoerd. De leerlingen werkten in dezelfde tweetallen als bij de eerste taak. De voornaamste conclusies van de tweede les waren:

- De taak was betekenisvol voor beide tweetallen. De leerlingen waren vertrouwd met het idee dat er verschillende versies van één spel zijn.
- De leerlingen werkten, hoewel ze in tweetallen zaten, ieder aan een eigen ontwerp, dus niet samen aan één ontwerp. Toen hun ontwerp klaar was, toonden ze het aan elkaar en legden elkaar het spel uit. De taak werd uitgevoerd zonder computer, maar hij refereerde wel aan een spel op de computer. Joost zei tijdens het werken dat hij zijn spel graag zou uittesten op de computer.
- Beide koppels voerden 'special effects' in het spel in. Anouk en Michel maakten een loser (een hokje waar je al je punten verliest), een bonus (een hokje waar je een andere bal krijgt) en een boem (de bal gaat terug naar zijn beginpositie en neemt dan een andere route). Joost en Brigitte maakten 'black boxes' (waar de bal niet in kan vallen) die een verschillende plaats innemen bij ieder spel, en zij geven extra punten in de beginpositie (hoe meer je het balletje naar rechts laat vallen, hoe meer punten je krijgt). Deze effecten hebben ze waarschijnlijk ingevoerd om het spel spannender te maken. Het gevolg was wel dat ze de oorspronkelijke roosterstructuur loslieten en zo geen ervaring kregen met het onderwerp 'tellen in een rooster'.

- Er waren verschillen tussen de tweetallen in hoe ze hun spel uitlegden: Anouk en Michel beredeneerden hoe hun spel werkte, Joost en Brigitte maakten een berekening.

8. Analyse van de resultaten

Aan de hand van de vragen die wij eerder geformuleerd hebben, analyseren we de resultaten.

- *Sprak de opdracht leerlingen aan? Gingen zij ermee aan de slag?*

De opdracht sprak aan bij de leerlingen, zij gingen er onmiddellijk mee aan de slag. Het was voor hen een betekenisvolle opdracht die aansloot bij hun beleveniswereld.

- *Was het doel van de opdracht voor leerlingen duidelijk? Voerden zij onderzoek uit?*

Bij de eerste opdracht was het doel van de opdracht, het bepalen van een winnende strategie, voor de leerlingen duidelijk. De leerlingen voerden wiskundig onderzoek uit. Ze verkenden het probleem door het spel verschillende malen te spelen. Vervolgens formuleerden ze vermoedens (hypothesen) die ze probeerden te bewijzen door berekeningen. De manieren van bewijzen liepen nog uiteen, maar het was leerlingen wel duidelijk dat het hier om ging. Bij de tweede taak was het wel duidelijk dat er een nieuwe versie van het spel moest worden gemaakt, maar de beperkingen van het nieuwe spel waren niet duidelijk.

- *Werkten leerlingen samen bij het werken aan de opdracht?*

De leerlingen werkten intensief samen bij het werken aan de opdracht. We zagen dat de criteria van Dekker (1994) voor opdrachten die interactie oproepen gerealiseerd waren en effect hadden: de opdracht was reëel en *betekenisvol* voor leerlingen, het was een *complexe* opdracht die een beroep deed op verschillende vaardigheden (spelen van het spel, bijhouden van de punten, analyseren van de strategie, redeneren over mogelijkheden), de opdracht vroeg leerlingen iets te *construeren* (een strategie van het spel), de opdracht mikt op *niveauperhoging* (doorzien van het spel). Bij de tweede taak werkten de leerlingen, hoewel ze in tweetallen zaten, ieder aan een eigen ontwerp. De samenwerking bestond eruit dat ze elkaars spellen vergeleken.

- *Maakten leerlingen functioneel gebruik van de computer?*

Beide tweetallen gebruikten de computer voor exploraties. Dit is functioneel gebruik van de computer: de computer simuleert het spel Plinko en berekent de puntenaantallen. Bovendien bleek er een sterk motiverende werking van de computer uit te gaan. De leerlingen vonden het spannend om een spel op het Internet te spelen.

Dat de leerlingen bij de tweede taak geen computer konden gebruiken werd door een aantal als een gemis ervaren. Wanneer zij het spel dat ze ontworpen hadden ook op de computer hadden kunnen spelen, hadden zij nog eens kritisch naar hun ontwerp kunnen kijken en zo misschien meer van de taak kunnen leren.

- *Bood de opdracht mogelijkheden voor exploratie op het perceptuele niveau?*

Aan het begin van de eerste opdracht speelden de beide tweetallen het spel een paar keer. Ze verkenden dan het probleem op het perceptuele niveau door verschillende strategieën uit te proberen. Vervolgens vergeleken ze de strategieën met elkaar. Dit was het begin van niveauperhoging. Op grond van

de verschillen tussen de uitkomsten formuleerden ze vermoedens ('de linker hokjes leveren meer punten op dan de rechter'). Anouk en Michel gaven een oplossing op het perceptuele niveau. Ze hebben vanuit verschillende hokjes *een aantal* mogelijke routes naar de 1000 getekend, en deze aantallen met elkaar vergeleken. Ze hebben *niet alle* mogelijke routes getekend. Als zij op een systematische manier alle mogelijke routes vanuit alle boven geplaatste hokjes naar de verschillende beneden geplaatste hokjes hadden getekend, dan hadden zij een oplossing op het conceptuele niveau gehad.

Bij de tweede opdracht hadden we verwacht dat leerlingen zouden experimenteren met verschillende vormen roosters. Doordat zij andere effecten aan het spel toevoegden bleef de vorm van het spelbord 'buiten zicht'. De opdracht was dus eigenlijk te open om de gewenste exploraties op te roepen.

- *Bood de opdracht mogelijkheden voor antwoorden op het conceptuele niveau?*

Bij de eerste opdracht gaven Brigitte en Joost een oplossing op het conceptuele niveau. Ze berekenden vanuit alle hokjes boven de kans om in de verschillende hokjes beneden te komen. Hiermee beschreven ze *alle* mogelijkheden die kunnen optreden bij het spelen van het spel. Bij de tweede taak gaven de leerlingen geen antwoorden op het conceptuele niveau. We hadden verwacht dat ze door het maken van andere vormen van het spelbord en door het vergelijken van de verschillende vormen van het spelbord het concept 'tellen in een rooster' zouden ontwikkelen. Doordat de leerlingen allerlei 'special effects' introduceerden, kwam het concept 'tellen in een rooster' niet aan de orde. De tweede opdracht bood in deze vorm dus geen mogelijkheden voor antwoorden op het conceptuele niveau. Misschien kan de opdracht verbeterd worden door de leerlingen op de computer een nieuw spel te laten maken, waarmee de mogelijkheden voor een nieuw ontwerp beperkt worden.

9. Consequenties voor verder onderzoek

We hebben een onderzoeksopdracht met de computer ontworpen waar leerlingen havo wiskunde A samen aan kunnen werken. Uit de try-out bleek dat leerlingen de opdracht goed uitvoerden en er is dus alle reden om de opdracht verder uit te werken. Wat leerlingen van deze opdracht aan wiskunde hebben geleerd, is nu niet gemeten. Wij weten ook niet welk tweetal nu het meest geleerd heeft van het uitvoeren van de opdracht: het tweetal dat een antwoord op het perceptuele niveau heeft gegeven, of het tweetal dat een antwoord op het conceptuele niveau heeft gegeven. In ons volgend onderzoek zullen we dit leereffect ook meten. Interessant is de vraag of de opdracht leerzamer is als leerlingen deze vóór het hoofdstuk uitvoeren dan als zij hem na het hoofdstuk uitvoeren.

Een andere mogelijke uitbreiding van het onderzoek is na te gaan wat het leereffect is als leerlingen onderzoek uitvoeren *terwijl* zij het hoofdstuk doorwerken. Mogelijk worden in deze conditie de voordelen van het werken aan onderzoek vóór het hoofdstuk en onderzoek na het hoofdstuk gecombineerd. Bovendien zou het interessant zijn om na te gaan of de opdracht zó zou kunnen worden uitgebreid dat leerlingen die een antwoord geven op het perceptuele niveau extra worden uitgedaagd tot niveauperhoging.

Tot slot: de rol van de docent. Bij het werken aan dit type opdrachten is de hulp die de docent biedt vaak minimaal. Het feit dat de docent weinig hulp biedt, kan wel betekenen dat het heel nauw kan luisteren wát de docent pre-

cies zegt of doet. In ons volgend onderzoek zullen we onderzoeken welk type hulp van de docent het meest effectief is bij het werken aan dit type opdrachten. We zullen ons uiteraard niet beperken tot het meten van de leerresultaten, maar ook nagaan hoe de leereffecten tot stand kwamen. Hiervoor zullen de leerprocessen tijdens het werken aan de opdrachten worden vastgelegd.

Literatuur

- Balacheff, N. (1991). Treatment of Refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. In E. von Glaserfeld (ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 89-110). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Bereiter, C. (1990). Toward a solution of the learning paradox. *Review of Educational Research*, 55 (2), 201-226.
- Borich, G.D. & Tombari, M.L. (1997). *Educational Psychology, A contemporary approach*. New York: Longman.
- Chi, M.T.H., DeLeeuw, N., Chiu, M. & LaVancher C. (1994). Eliciting self-explanations improves understanding. *Cognitive Science*, 18, 439-477.
- Chinn, C.A. & Brewer, W.F. (1993). The role of anomalous data in knowledge acquisition: A theoretical framework and implications for science instruction. *Review of Educational Research*, 63, 1-49.
- Dekker, R. (1995). Hoeveel interactie haal je uit een methode? *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 13(4), 34-36.
- Dekker, R. & Elshout-Mohr, M. (1998a). Niet het product, maar het proces. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 17(2), 33-38.
- Dekker, R. & Elshout-Mohr, M. (1998b). A process model for interaction and mathematical level raising. *Educational Studies in Mathematics*, 36, 303-314.
- Doerr, H.M. (1997). Experiment, simulation and analysis: An integrated instructional approach to the concept of force. *International Journal of Science Education*, 19, 265-282.
- Doorman, M., Kemme, S. L., & Wijers, M. (1998). *Oefenboek praktische opdrachten: Informatietechnologie in het studiehuis wiskunde*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Elshout-Mohr, M. & Dekker, R. (2000). Opdrachten om samen van te leren. In J. van der Linden & E. Roelofs (Eds.) *Leren in dialoog* (pp. 35 – 63). Groningen: Wolters Noordhoff.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.
- Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight*. Orlando: Academic Press.
- Kemme, S. L., & Wijers, M. (1996). Als jonge honden op een bak met lever. *Nieuwe Wiskrant*, 15 (3), 22-27.
- Lange, J. de (1987). *Mathematics, insight and meaning*. Utrecht: Rijksuniversiteit Utrecht, Vakgroep OWOC.
- Plinko! The game* <http://www.ejams.com/trivia/plinko.htm>
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
- Ruthven, K. (1996). Calculators in the mathematics curriculum: The scope of personal computational technology. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 435-468). Dordrecht: Kluwer.
- Sweller, J. & Chandler, P. (1994). Why some material is difficult to learn. *Cognition and Instruction* 12(3), 185-233.

Tall, D. (1997). Informatietechnologie en wiskundeonderwijs. *Nieuwe Wiskrant* 16(4), 4-11.

Tuovinen, J.E., & Sweller, J. (in druk). A comparison of cognitive load associated with discovery learning and worked examples. *Journal of Educational Psychology*.

Webb, N. M. (1991). Task-related verbal interaction and mathematics learning in small groups. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 366-389.