Maarten Dolk

Aandacht voor 'big

Kinderen discussiëren over hun wiskundige ontdekkingen

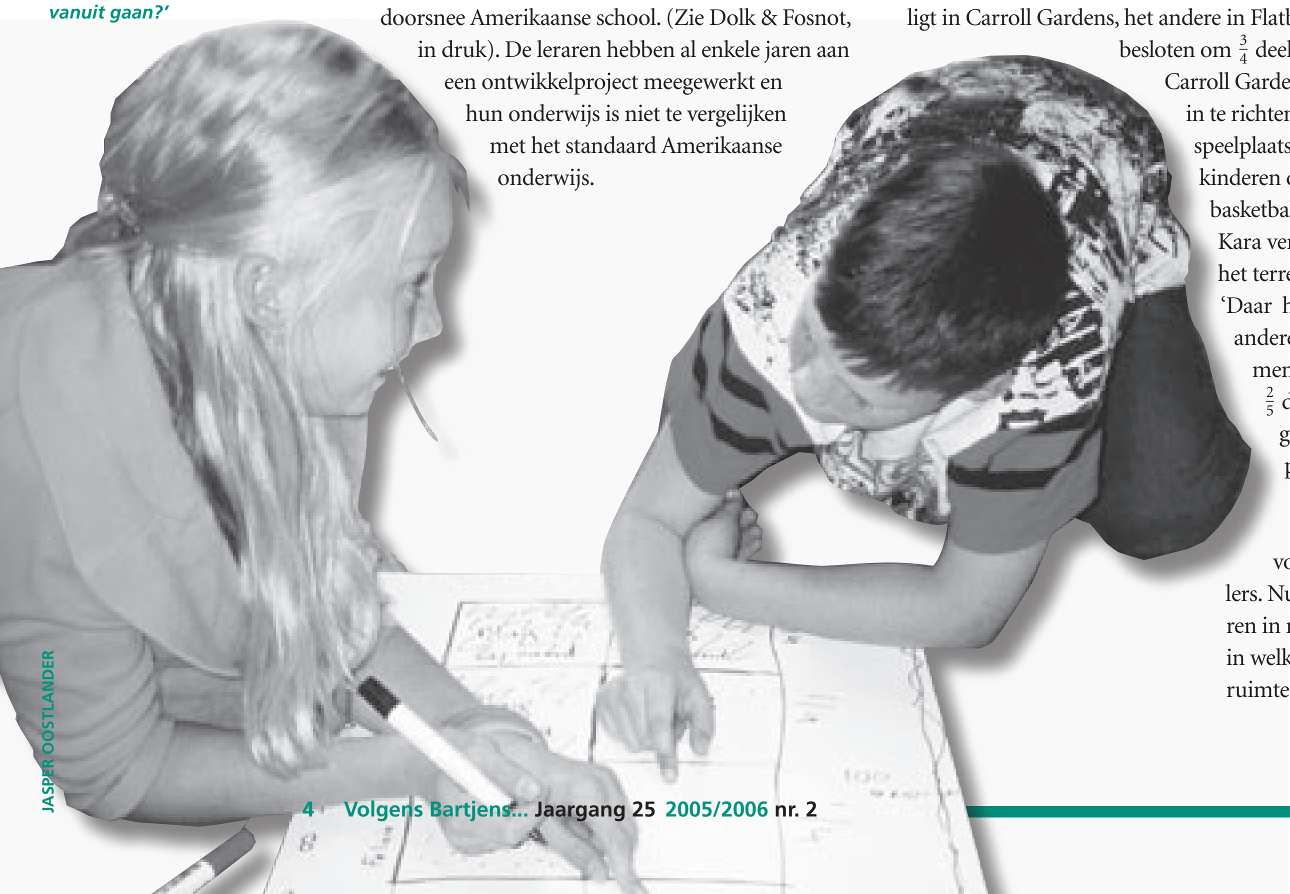
Het kan zinvol en leerzaam zijn om de rekenmethode af en toe terzijde te schuiven en een wat groter reken-wiskunde-probleem aan de orde te stellen. Dat kan kinderen uitdagen tot het construeren van eigen oplossingen en discussies daarover. In dit artikel beschrijft Maarten Dolk hoe een klas in New York met zo'n groter probleem aan de slag ging en welke inzet dat van de leerkracht vraagt.

Als kinderen eerst in tweetallen en later met de hele klas werken aan een groot reken-wiskundeprobleem kunnen ze elkaar aan mooie ontdekkingen helpen. In dit artikel beschrijf ik een ervaring uit New York, waarbij ik het gebeuren in de klas afwissel met didactische en pedagogische kanttekeningen. Maar allereerst wil ik er met nadruk op wijzen, dat ik niet wil suggereren dat een leraar de reken-wiskundemethode maar uit het raam moet gooien en verder zelf maar allerlei vraagstukken moet ontwerpen. Het is mijns inziens onmogelijk om voor iedere les zelf een goed probleem te ontwerpen. Wel denk ik dat het goed is om dit ontwerpen van tijd tot tijd zelf of samen met enkele collega's eens te proberen. In methodes zijn vaak genoeg ideeën te vinden die aangepast kunnen worden tot een vraagstuk dat kinderen uitdaagt tot een uitvoerige en diepgaande aanpak.

Een essentiële vraag bij het rekenen met breuken en procenten luidt: 'Wat is het geheel waar we vanuit gaan?'

Speelterreinen

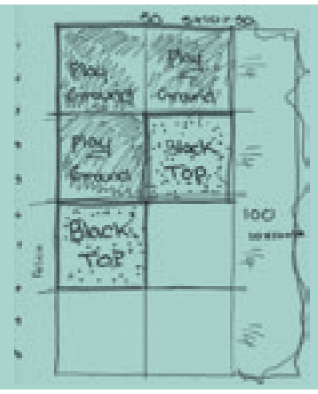
De school in New York waar de les zich afspeelt is geen doorsnee Amerikaanse school. (Zie Dolk & Fosnot, in druk). De leraren hebben al enkele jaren aan een ontwikkelproject meegewerkt en hun onderwijs is niet te vergelijken met het standaard Amerikaanse onderwijs.



JASPER OOSTLANDER

Op zekere dag benut leerkracht Kara Imm een gebeurtenis uit de buurt van de school als start van de les: 'Jullie weten dat ik vlakbij Prospect Park in Brooklyn woon', vertelt ze de leerlingen.
'Het is geweldig om vlakbij zo'n groot park te wonen, maar het probleem is dat Brooklyn heel uitgestrekt is, sommige kinderen wonen ver van het park af en hebben geen speelruimte in de buurt om te basketballen of te spelen.' De wijk heeft nog wel twee braakliggende kavels waarvan men nu twee parkjes wil gaan maken. Beide terreinen zijn 50 bij 100 meter; het ene

Afbeelding 1



$\frac{3}{4}$ deel van Carroll Gardens is speelterrein. $\frac{2}{5}$ deel daarvan is geasfalteerd. Dit is de oplossing van Devin en Felicia.

ligt in Carroll Gardens, het andere in Flatbush. 'Nu heeft men besloten om $\frac{3}{4}$ deel van het terrein in Carroll Gardens tot speelplaats in te richten, en $\frac{2}{5}$ deel van die speelplaats te asfalteren zodat kinderen daar op kunnen basketballen.'
Kara vertelt vervolgens over het terrein in Flatbush. 'Daar heeft men een andere beslissing genomen. Daar wordt $\frac{2}{5}$ deel van het terrein gebruikt als speelplaats en $\frac{3}{4}$ deel van die speelplaats wordt geasfalteerd voor de basketballers. Nu vragen de kinderen in mijn buurt zich af in welk park er meer ruimte is voor basketbal.'

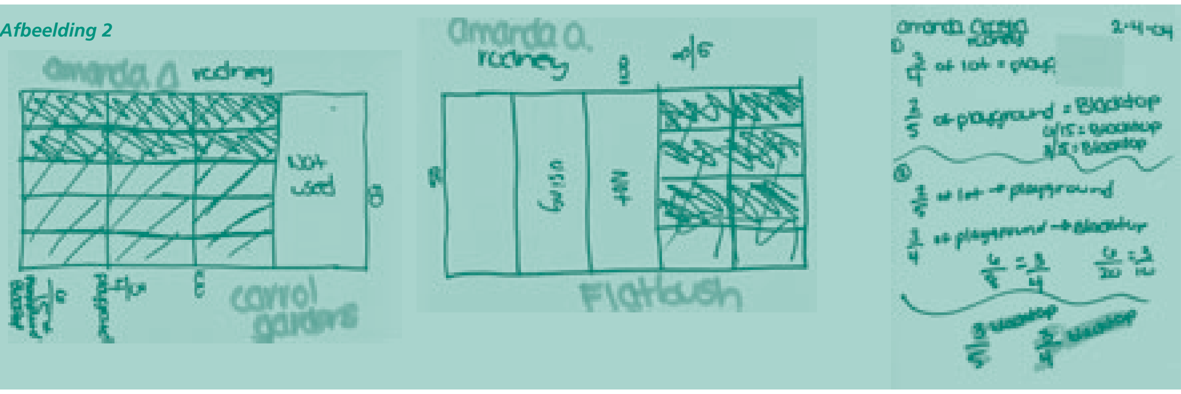
ideas' in de wiskunde

De leerlingen gaan in tweetallen aan de slag. Devin en Felicia hebben het terrein in 8 delen verdeeld. In drie delen hebben ze speelplaats (playground) geschreven. Ze houden dan nog vijf delen over. Dat lijkt ze makkelijk, want $\frac{2}{5}$ is dan goed te bepalen. In twee van die vijf delen hebben ze asfalt (blacktop) geschreven (zie afbeelding 1).
Kara luistert eerst naar de uitleg van Felicia en begint vervolgens met de beide kinderen over hun tekening te praten, 'Dus als ik het goed begrijp hebben jullie het terrein eerst in vier banen verdeeld. Je weet dat $\frac{3}{4}$ van het terrein speelplaats is. Kunnen jullie aanwijzen welk deel dat is? En daarvan wordt dan $\frac{2}{5}$ deel geasfalteerd.'

Verheldering van het probleem

Kara herformuleert het probleem, 'Ik wil er zeker van zijn dat we het probleem allemaal goed begrijpen. Over Carroll Gardens heb ik alleen maar verteld dat $\frac{3}{4}$ deel van het terrein speelveld wordt. Ik heb niets verteld over het andere deel van het terrein. We weten niet wat ze daarmee van plan zijn. We zijn vooral geïnteresseerd in het speelgebied en van het speelgebied wordt $\frac{2}{5}$ deel geasfalteerd. Dus het geasfalteerde veld is een deel van het speelgebied. De speelplaats bestaat dus uit twee stukken: het ene deel is geasfalteerd voor kinderen van onze leeftijd, het andere deel is niet geasfalteerd en is bedoeld voor de jongere kinderen.'

Afbeelding 2



Wat is meer: $\frac{2}{5}$ deel van $\frac{3}{4}$ of $\frac{3}{4}$ deel van $\frac{2}{5}$? Hier laten Amanda en Rodney hun ideeën zien.

Een groot idee

Devin en Felicia zijn niet de enige twee kinderen die in het begin worstelen met de vraag wat het geheel is. Het is niet zo moeilijk om vast te stellen wat $\frac{3}{4}$ deel van Carroll Gardens is, dat wordt de speelplaats. Maar daarvan moet $\frac{2}{5}$ deel geasfalteerd worden. Bij het asfalteren verandert dus het geheel. Dat $\frac{3}{4}$ van het gehele terrein speelgebied wordt, is voor iedereen duidelijk. Maar waar slaat die $\frac{2}{5}$ op? Sommige kinderen nemen weer het hele terrein, andere nemen het restant van het terrein dat nog niet gebruikt is.

Met het herformuleren van de context, is het probleem 'Wat is het geheel?' echter niet verdwenen. Luister maar mee naar Amanda en Rodney. Samen hebben ze voor beide terreinen een tekening gemaakt die het speelveld en het geasfalteerde deel laat zien. Nu zijn ze druk bezig om op te schrijven wat ze gedaan hebben (zie afbeelding 2). '$\frac{2}{5}$ deel van het hele terrein wordt speelveld' zegt Amanda, terwijl ze naar hun tekening van het terrein in Flatbush wijst. 'En van dit speelveld wordt $\frac{3}{4}$ deel geasfalteerd. We delen dit dus in vieren, dat laat het geasfalteerde deel zien. Hier zijn dus 8 delen en 6 zijn

Reflectie

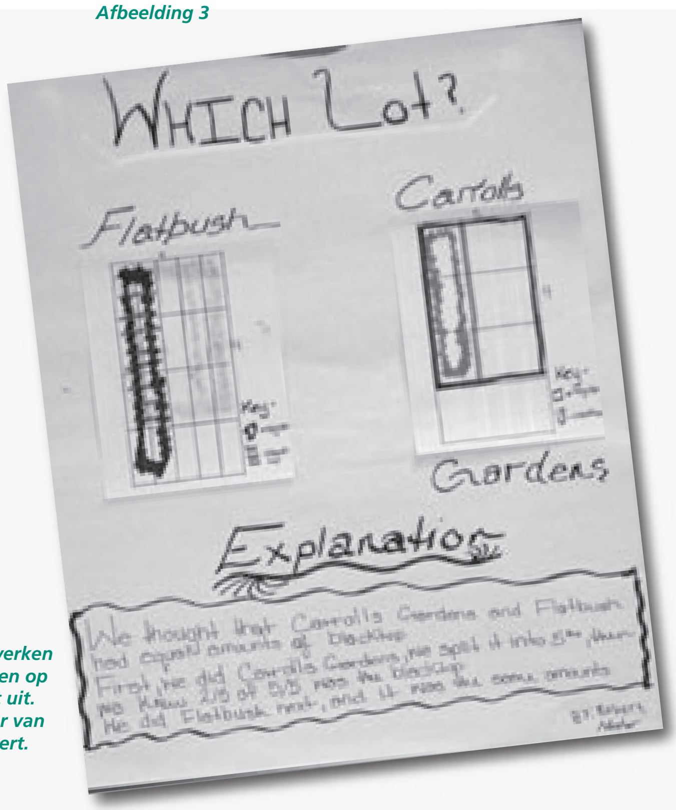
De vraag naar het geheel is essentieel bij het rekenen met breuken en procenten. Dat speelt dus niet alleen in dit specifieke vraagstuk. Het is een van de grote wiskundige ideeën waar kinderen tijdens hun reken-wiskundige ontwikkeling mee kunnen worstelen. Amerikanen spreken over een 'big idea' (zie Fosnot & Dolk, 2002).'Big ideas' zijn belangrijke fundamentele ideeën uit de wiskunde. Zodra kinderen zo'n groot idee doorgronden brengt dat een belangrijke verschuiving in hun denken teweeg. Het zijn in twee opzichten grote ideeën; enerzijds zijn ze belangrijk zijn voor de wiskunde en anderzijds betekent het doorgronden van zo'n idee een grote sprong voorwaarts in de ontwikkeling van de leerlingen. Het probleem waar de leerlingen in deze les mee worstelen is een goed voorbeeld van een 'big idea' op het gebied van breuken en procenten. Om breuken en procenten te begrijpen moet je weten wat het geheel is en moet je de relatie van de breuk tot het geheel goed doorzien. Het is dus verstandig dat Kara de leerlingen genoeg tijd geeft om met dit probleem te worstelen. Het is geen verloren tijd, maar het helpt om breuken beter te begrijpen.

geasfalteerd. $\frac{6}{8}$ van het speelveld is geasfalteerd.' Van Carroll Gardens berekenen ze op dezelfde manier welk deel van het speelveld geasfalteerd is.
Opnieuw worstelen Amanda en Rodney met de vraag naar het geheel, maar deze keer naar het geheel dat helpt om de geasfalteerde delen van beide terreinen te kunnen vergelijken.

Posters voor het klassengesprek

Als Kara denkt dat de meeste tweetallen een aanpak voor het probleem hebben ontwikkeld en hun oplossing kunnen presenteren, vraagt ze de leerlingen om een poster te maken waarop ze voor hun klasgenoten uitleggen wat ze hebben gedaan. De kinderen krijgen hiervoor een groot stuk papier (60 bij 100 cm).
Ze hebben dit vaker gedaan en weten wat de bedoeling is. In het klassengesprek dat volgt zal Kara enkele groepjes vragen om hun poster op te hangen en aan de groep te vertellen hoe ze het probleem hebben aangepakt. Het antwoord zelf is daarbij niet zo belangrijk. Tijdens dit gesprek houdt Kara in de gaten of iedereen kan volgen hoe het groepje in kwestie te werk is gegaan. Van tijd tot tijd vraagt ze klasgenoten in hun eigen woorden te vertellen wat er gezegd is. Ook laat ze kinderen op elkaars aanpak reageren door hen te vragen om verheldering, toelichting of commentaar. De leerlingen zijn eraan gewend dat er langdurig en diepgaand gesproken wordt over een aanpak. Ze weten dat begrijpen belangrijker is dan het geven van een goed antwoord. En dat ze dus goed moeten luisteren naar de verhalen van hun medeleerlingen. Ze zijn vrij om elkaar vragen te stellen en maken daar ook regelmatig gebruik van.

Afbeelding 3



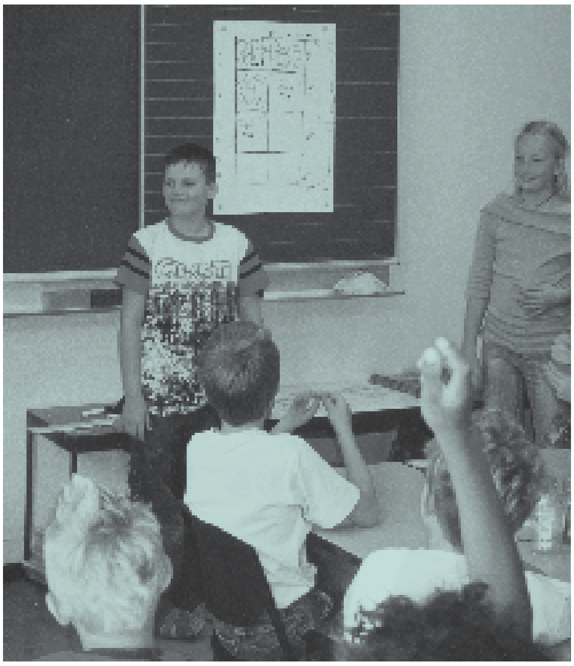
De kinderen werken hun oplossingen op posterformaat uit. Dit is de poster van Nestor en Robert.

Het klassengesprek

Kara vraagt Nestor en Robert om als eerste te vertellen wat ze hebben gedaan. De beide jongens hangen samen hun poster op (zie afbeelding 3) en Nestor begint met hun verhaal. 'We verdeelden Carroll Gardens eerst in 5 bij 4 stukken. We tekenden een lijn om aan te geven wat het speelveld zou zijn. En daarna deden we het geasfalteerde deel. Vervolgens deden we hetzelfde bij Flatbush.' 'Nestor, wacht heel even', zegt Kara. Ze wil zeker weten dat alle leerlingen het verhaal van Nestor en Robert kunnen volgen. Iedereen moet begrijpen hoe de jongens het hebben aangepakt. 'Jullie hebben een tekening van Carroll Gardens gemaakt en die hebben jullie in 5 bij 4 stukken verdeeld. Begrijpt iedereen waarom zij 5 bij 4 stukken hebben gemaakt? Steek je hand op als je denkt dat je begrijpt waarom zij het terrein in 5 bij 4 hebben verdeeld.' Kara kijkt de groep vragend aan.

Reflectie

Natuurlijk had Kara zelf ook kunnen verwoorden waarom Nestor en Robert Carroll Gardens eerst in vier stukken en daarna in 5 stukken verdeelden, maar door de vraag aan de groep voor te leggen maakt ze de kinderen verantwoordelijk voor het praten over en het begrijpen van het werk van anderen. Je zou kunnen zeggen dat Kara op dit moment met haar leerlingen over de sociale gewoonten in de klas onderhandelt. Met haar vraag laat ze merken dat zij verwacht dat iedereen begrijpt wat er gezegd wordt of in ieder geval z'n uiterste best doet om het te begrijpen.



JASPER OOSTLANDER

Tijdens het bespreken van de posters wordt de groep intensief betrokken.

Rodney reageert onmiddellijk, 'omdat ze de vijf van de $\frac{2}{5}$ en de vier van de $\frac{3}{4}$ kregen.' 'Is dat wat jullie dachten?' vraagt Kara aan Nestor en Robert, 'vertel eens meer over waar die 5 bij 4 vandaan komt.' De jongens vertellen over de $\frac{3}{4}$ deel van het terrein dat speelgebied wordt en over het $\frac{2}{5}$ deel van het speelgebied dat geasfalteerd wordt. Vervolgens vertellen ze hoe het terrein bij Flatbush verdeeld wordt. Nestor concludeert tot slot: 'We deden eerst Carroll Gardens en toen Flatbush en toen zagen we dat ze dezelfde hoeveelheid asfalt hebben.' Kara speelt dit weer terug naar de gehele groep. 'Kunnen jullie volgen hoe zij gedacht hebben?' vraagt ze. 'Zijn jullie overtuigd? Wat laat nu precies zien dat beide geasfalteerde delen gelijk zijn? Praat met je buurman of buurvrouw en bespreek wat in dit model helpt om te zien dat beide geasfalteerde delen gelijk zijn.'

Reflectie

Kara weet dat het gezamenlijk doorpraten over de aanpak van Nestor en Robert kan helpen om deze beter door te krijgen. Door de leerlingen kort in tweetallen te laten overleggen kunnen alle leerlingen verwoorden hoe ze die aanpak zien en wat ze ervan begrijpen.

Na een minuut vraagt Kara aan Chris om uit te leggen waar hij met zijn buurman, Robert, over sprak. 'Wij zagen dat … Robert en ik zagen dat zij in de legenda (key) opschreven wat geasfalteerd is. Ik zag ook dat ze het gehele terrein in 20 delen hadden verdeeld en beide geasfalteerde delen zijn 6 van de 20 stukken.' Felicia gaat hier op door: 'Dale en ik dachten ook zo. Alleen zagen wij dat er geen overgebleven deel is.' 'Wat bedoel je met overgebleven deel?' vraagt Kara. 'Nou', vervolgt Dale, 'in Carroll Gardens is er onderaan een leeg deel. En in Flatbush ontbreekt dat. Ze hebben het gedraaid en hebben het tegenovergestelde gedaan. Ze hebben het geasfalteerde deel gedraaid.' Opnieuw kaatst Kara deze uitspraak terug naar de groep.

Reflectie

Kara heeft dit probleem onder meer gekozen omdat het kinderen mogelijk in staat zal stellen de commutatieve eigenschap van vermenigvuldigen te bespreken en te ontdekken. Zij weet dat beide geasfalteerde delen hetzelfde zijn omdat het niet uitmaakt of je eerst $\frac{3}{4}$ deel en vervolgens $\frac{2}{5}$ daarvan of eerst $\frac{2}{5}$ deel en vervolgens $\frac{3}{4}$ deel daarvan neemt. $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$. Natuurlijk had Kara dat aan de kinderen kunnen vertellen, maar ze weet dat zo'n verhaal de leerlingen niet helpt om dit te begrijpen. Zou de uitspraak van Dale aanleiding zijn voor de leerlingen om hierover te praten?

'Hoeveel van jullie begrijpen wat Dale bedoelt met 'we draaiden het geasfalteerde deel'?' Het klassengesprek is nog niet afgelopen. Nadat de leerlingen samen ontdekken wat Dale precies bedoelt, nodigt Kara nog drie andere groepen leerlingen uit om over hun poster te praten.

De intenties van de lerares

Kara heeft de context van het speelterrein gekozen om de leerlingen te laten nadenken over een aantal wiskundige aspecten van breuken. Hierboven hebben we al gezien dat

JASPER OOSTLANDER

Als de kinderen aan het werk zijn komt de leerkracht langs en daagt hen uit nog dieper op het vraagstuk in te gaan.

deze context mogelijk een aanleiding is om de commutatieve eigenschap van het vermenigvuldigen van breuken te bespreken. Daarnaast kan het probleem aanleiding zijn om na te denken over breuken in relatie tot veranderende gehelen en over de betekenis van het woord 'van' als vermenigvuldiging van breuken. Ze had vooraf bedacht dat een rechthoeksmodel de leerlingen zou kunnen helpen om een beter begrip te ontwikkelen en ze had de context ook zo gekozen dat de leerlingen zonder nadenken zo'n rechthoeksmodel zouden gebruiken voor de situatie van het speelterrein. Haar intenties hebben zeker meegespeeld bij haar keuze van de leerlingen die ze uitnodigt om hun oplossing aan de groep uit te leggen. Ze heeft tijdens het werken aan de posters goed rondgekeken en kiest nu de posters die in haar klas de tongen los zullen maken, bijvoorbeeld over de commutatieve eigenschap. Tijdens het klassengesprek maakt Kara van haar klas een echte leergemeenschap. Dat vraagt haar continue aandacht. Ze let voortdurend op of alle leerlingen echt begrijpen wat er aan de hand is en wat andere leerlingen vertellen. Kara is niet tevreden als een leerling zegt dat zij of hij het begrijpt. Ze vraagt kinderen om uitspraken in eigen woorden te herhalen, en om in tweetallen te bespreken hoe iets precies zit. Zo wordt de kans groter dat een 'big idea' werkelijk binnen ieders bereik komt.

De auteur is werkzaam bij het Freudenthal Instituut en lector 'Geïnspireerd Leren' bij de Hogeschool Drenthe, Hogeschool Helicon en Hogeschool Zuyd.

Literatuur

Dolk, M. & Fosnot, C. (in druk). ***The Playground, Grade 6-8: A Context for Fractions (CD-ROM)****. Portsmouth NH: Heinemann.*

Fosnot, C. T. & Dolk, M. (2002). ***Young Mathematicians at Work: Constructing Fractions, Decimals, and Percent.*** *Portsmouth NH: Heinemann.*