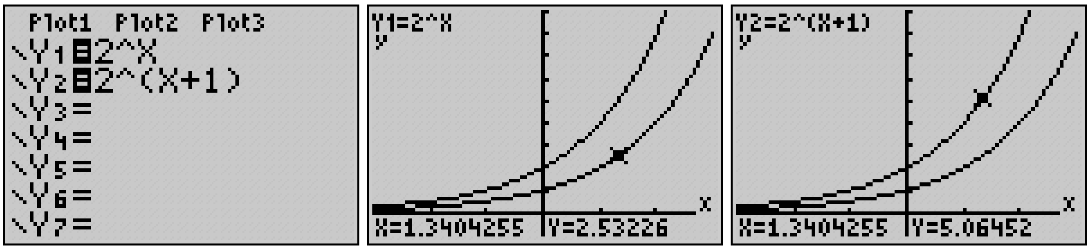
Van knoppen naar kennis

Naar een functionele inzet van ICT in het wiskundeonderwijs

Paul Drijvers en Bert Zwaneveld

Inhoud

1 Oriëntatie



Figuur 1 Horizontaal schuiven = Verticaal vermenigvuldigen?

De grafische rekenmachine (GR) is aan het begin van de 21ste eeuw wellicht het meest gebruikte ICT-gereedschap in de Tweede Fase van havo en vwo. Figuur 1 toont hoe een leerling de GR gebruikt in een opgave over het verband tussen horizontaal verschuiven en verticaal vermenigvuldigen van grafieken van exponentiële functies. De vraag is om de grafiek van $x \to 2^x$ te laten tekenen en die één naar links te verschuiven. Dat leidt tot de definities van de functies Y1 en Y2 in het linker scherm. Voor Y2 maakt de leerling eerst de voor de hand liggende vergissing om $x \to 2^{x-1}$ in te voeren, maar de feedback in de vorm van de grafiek laat meteen zien dat dit niet goed is. De vervolgvraag luidt: Met welke factor moet de grafiek van Y1 ten opzichte van de *x*-as worden vermenigvuldigd om die van Y2 te krijgen? Deze vraag zet de leerling ertoe aan om met Trace op de grafiek van Y1 te gaan staan (zie middelste scherm), de coördinaten af te lezen en vervolgens verticaal over te springen op de grafiek van Y2. De *y*-coördinaat is 2 keer zo groot geworden (rechter scherm). Dat blijkt ook voor enkele andere punten te gelden. De leerling denkt nu hardop:

… 1 naar links, dus de horizontale afstanden zijn steeds 1… nu verticaal vermenigvuldigen, die factor is ongeveer 2… dat wordt dus $2 \cdot 2^x$ *… dat is* 2^{x+1}*, mooi!*

Dit voorbeeld, afkomstig uit Doorman e.a. (1994), laat zien hoe ICT bij het leren van wiskunde gebruikt kan worden. Een voorbeeld als dit kan meteen ook aanleiding zijn tot een debat tussen enerzijds ‘optimisten’ die ICT als aanleiding beschouwen tot zinvolle wiskundige ontdekkingen, in dit geval over het verband tussen horizontaal verschuiven en verticaal vermenigvuldigen van exponentiële grafieken, en anderzijds ‘sceptici’ die vinden dat dit alles net zo goed of nog beter met pen en papier kan gebeuren.

Laten we deze discussie, los van het voorbeeld, voor de duidelijkheid wat uitvergroten. Aan de ene kant van het spectrum zien we de optimisten, die sinds enkele decennia ICT in het wiskundeonderwijs een grote toekomst voorspellen. De ontwikkeling van het wiskundig denken wordt dankzij ICT niet langer belemmerd door de uitvoering van saaie, tijdrovende en foutgevoelige procedures en algoritmen. Doordat deze basisvaardigheden aan de beschikbare technologie kunnen worden uitbesteed, kan het leren zich in toenemende mate richten op hogere doelen zoals begripsvorming, probleem oplossen en modelleren. Zeker nu de beschikbare ICT-middelen gebruiksvriendelijk, toegankelijk en betaalbaar zijn, maakt ICT dynamisch, interactief, realistisch wiskundeonderwijs mogelijk!

Aan de andere kant van het spectrum vinden we de sceptici, die stellen dat van dit alles nog niet veel terechtkomt. Praktische en organisatorische obstakels bemoeilijken de integratie van ICT in de lespraktijk. Hoe gebruik je ICT zinvol naast het schoolboek, hoe organiseer je dat in de les en welke rol krijgt het in de toetsing? Ze betwijfelen of je hogere doelen kunt nastreven als de basisvaardigheden worden verwaarloosd. Ontstaat inzicht niet door veel oefening met pen en papier? Grijpen leerlingen niet te snel naar een apparaat? Is het gebruik van ICT niet tijdrovend en loont het de investering wel?
We constateren een discrepantie tussen de hooggespannen verwachtingen ten aanzien van ICT-gebruik van de afgelopen decennia en de realiteit van beperkte daadwerkelijke integratie in de klas, die vergezeld gaat van kritische geluiden. ICT is niet het wondermiddel waarin sommigen lijken te geloven en de integratie in de onderwijspraktijk verloopt minder snel dan werd aangenomen. Toch suggereren voorbeelden zoals het bovenstaande dat het wiskundeonderwijs wel degelijk wat te winnen heeft bij de inzet van ICT. Waaruit bestaat die mogelijke winst en hoe is die in praktijk te realiseren? Daarover gaat dit katern.

2 Probleemstelling

Dit katern kent drie uitgangspunten. Het eerste is dat ICT-gebruik in toenemende mate een rol speelt in de wiskunde. Zowel in toepassingen van wiskunde als in wiskundig onderzoek worden wiskundige ICT-middelen op steeds grotere schaal gebruikt. Ter voorbereiding daarop is het gewenst om nieuwe technologie ook in het wiskundeonderwijs te betrekken.
Het tweede uitgangspunt is dat technologie een belangrijk element is in samenleving, beroepspraktijk en vervolgopleiding. De ontwikkeling van ICT-vaardigheden maakt dan ook deel uit van een adequate voorbereiding op een rol in de maatschappij en verdient daarmee een plaats in het onderwijs.
Een derde uitgangspunt is dat ICT-gebruik leerlingen kan motiveren en activeren. Veel leerlingen werken veel en graag met ICT en deze motivatie kan worden uitgebuit voor het doel van het leren van wiskunde.
ICT verdient dus een plaats in het wiskundeonderwijs en biedt mogelijkheden voor het leren. ICT-middelen kunnen leerlingen motiveren en beschikken over grote reken- en tekenkracht, die voor onderwijsdoelen kunnen worden ingezet. De discussie in de oriëntatie hierboven maakt echter duidelijk, dat de integratie van ICT in de wiskundeles vragen oproept. De vraag die in dit katern centraal staat luidt dan ook:

Wat kan ICT-gebruik toevoegen aan het wiskundeonderwijs en hoe kan de docent dit potentieel benutten?

Om deze vraag te beantwoorden, wordt het probleem allereerst verkend door typen ICT-toepassingen te inventariseren en didactische functies van ICT te beschrijven. In de sectie ‘Wat weten we al?’ passeren enkele theoriën en onderzoeksresulaten de revue, waaruit blijkt dat het gebruik van ICT, pen-en-papier en het ontwikkelen van mentale schema’s nauw met elkaar verweven zijn. In de sectie ‘Ontwerpen’ wordt deze kennis toegepast op de rol van ICT bij het variabelenbegrip. Het katern besluit met een samenvattende conclusie.

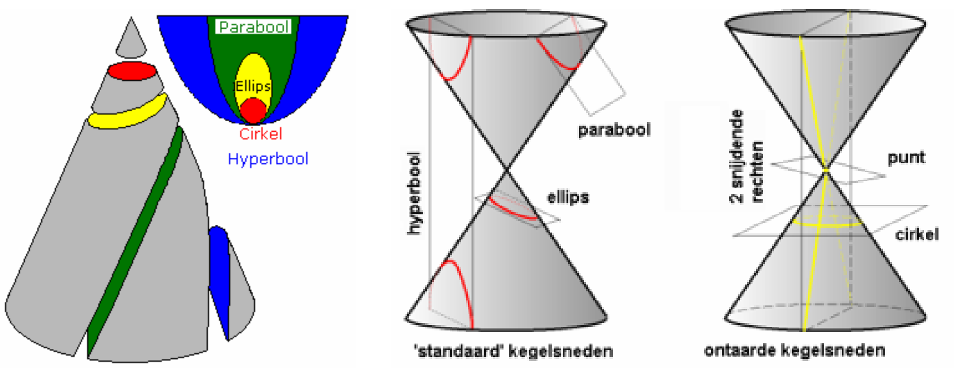
Een aantal eveneens belangrijke zaken kan in dit katern niet aan de orde komen. We besteden weinig aandacht aan algemene ICT-middelen. Ook de rol van ICT bij toetsing komt nauwelijks aan de orde.

3 Probleemverkenning

Zowel de ontwikkeling van ICT als de integratie ervan in het wiskundeonderwijs zijn sterk in beweging. Om de probleemstelling te positioneren brengen we hieronder in kaart wat voor ICT-middelen in het wiskundeonderwijs een rol spelen. Op basis van de functionaliteiten onderscheiden we twee typen: ICT-tools voor algemeen gebruik en tools met specifieke mogelijkheden voor het wiskunde-onderwijs. Vervolgens gaan we in op het tweede type door een aantal karakteristieken van software voor het wiskundeonderwijs te bespreken.
In de oriëntatie is vastgesteld dat de hoge verwachtingen ten aanzien van ICT-gebruik in de wiskundeles nog niet zijn waargemaakt en dat de rol van ICT onderwerp van discussie is. In de probleemstelling is dan ook de vraag gesteld wat ICT-gebruik kan toevoegen. Bij wijze van verkenning van deze probleemstelling wordt een drietal didactische functies van ICT in het wiskundeonderwijs onderscheiden: die van gereedschap, die van oefenomgeving, en die van leermiddel bij begripsontwikkeling.

3.1 Algemene en specifieke ICT-middelen

Verschillende *algemene ICT-tools* spelen in het onderwijs een rol. Het gaat om ICT-hulpmiddelen die bij het leren en onderwijzen van wiskunde van pas kunnen komen, maar die geen specifiek wiskundige mogelijkheden bieden. Er zijn bijvoorbeeld elektronische leeromgevingen (elo), die lesmateriaal toegankelijk maken en communicatiemogelijkheden bieden tussen leerlingen onderling en tussen leerling en docent. De docent kan de inhoud van de elo mede bepalen en heeft daarmee een nieuwe mogelijkheid om onderwijs te ontwerpen. In principe kan zelfs digitaal lesmateriaal worden gemaakt dat het boek vervangt. Ook worden leerlingvolgsystemen gebruikt, waarin leerlingen een portfolio kunnen opbouwen, dat door de docent kan worden geëvalueerd. Verder neemt de verspreiding van digitale schoolborden of smartboards in hoog tempo toe, waardoor traditioneel bordgebruik gecombineerd kan worden met de inzet van nieuwe media. Denk ook aan algemene informatiekanalen zoals Google en Wikipedia. Figuur 2 laat zien dat deze omgevingen ook op het terrein van de wiskunde waardevolle informatie kunnen bieden. Standaardsoftware als Powerpoint en Word wordt vanzelfsprekend gebruikt voor presentaties en verslaglegging. Voor communicatie zijn chatsites zoals MSN beschikbaar. Er zijn docenten die vaste MSN-spreekuren hebben. Als laatste noemen we de mogelijke educatieve toepassingen van games en mobiele technologie zoals telefoon en GPS.



Figuur 2 Afbeeldingen van kegelsneden op www.wikipedia.org

Wie deze algemene ICT-middelen wil inzetten in het wiskundeonderwijs, krijgt al snel te maken met specifieke wiskundige wensen. Zo zal men in Word of Powerpoint een formule-editor gebruiken, en zal bij het ontwerpen van digitaal lesmateriaal een tool van pas komen om bij functies grafieken te laten tekenen. Ook meetkundige constructies en statistische diagrammen staan op de wiskundige verlanglijst.
Dit brengt ons bij het tweede type ICT-middelen: *specifieke tools voor wiskundeonderwijs*.
Hoewel dit een bonte verzameling betreft, gaat het om ICT-gereedschap dat veelal één (of meer) van de volgende wiskundegerelateerde functionaliteiten biedt.

- Het maken van tabellen en grafieken bij functies en het verbinden van de verschillende representaties.
  Voorbeelden van tools met deze functionaliteit zijn Excel, VU-Grafiek en grafische rekenmachines.
- Het maken van meetkundige constructies en berekeningen.
  Tools met deze mogelijkheid zijn Cabri, TI Nspire, GeoGebra en Geocadabra.
- Het uitvoeren van algebraïsche bewerkingen en het manipuleren van algebraïsche expressies.
  Voorbeelden van tools zijn Maple, Mathematica, TI Nspire en symbolische rekenmachines
- De statistische verwerking van gegevens en het simuleren van kansexperimenten.
  Excel, SPSS, VU-Stat en grafische rekenmachines bieden deze mogelijkheden.
- Het modelleren en simuleren van dynamische systemen.
  Softwarepakketten voor dynamische simulatie zijn bijvoorbeeld Powersim en Coach.

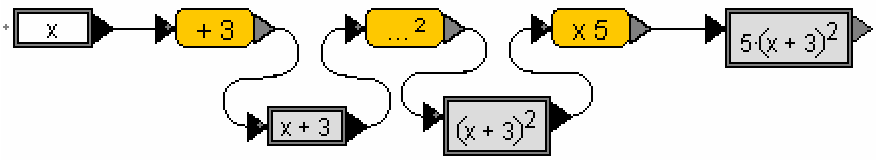
Daarnaast bestaat er een groot aantal kleine, interactieve omgevingen die specifieke didactisch doelen dienen, zoals Java applets (zie bijvoorbeeld www.wisweb.nl).
Het vervolg van dit katern betreft met name ICT-middelen met dergelijke wiskundige mogelijkheden, omdat deze vanzelfsprekend het meest relevant zijn voor wiskundeonderwijs; de algemene ICT-tools zullen verder niet aan de orde komen.

3.2 Karakteristieken van software voor wiskundeonderwijs

Binnen de verschillende ICT-toepassingen voor wiskundeonderwijs kunnen we karakteristieken onderscheiden. We noemen een zestal in het oog springende dimensies die van pas komen bij het positioneren en beoordelen van specifiek wiskundig ICT-gereedschap.

- Breed – smal
  Sommige ICT-tools zijn zeer algemeen toepasbaar, terwijl andere juist een beperkt toepassingsgebied hebben. Excel, Maple, VU-Grafiek, Geocadabra en de grafische rekenmachine bieden bijvoorbeeld een breed palet aan mogelijkheden, terwijl de meeste applets toegespitst zijn op een specifiek onderwijsdoel. Het voordeel van een brede omgeving is dat de leerling went aan één interface voor vele toepassingen en zich daarmee de omgeving ‘eigen’ maakt; de investering van het inwerken in de omgeving verdient zich op termijn terug. Een smalle omgeving heeft een kortere inwerktijd en biedt notaties en opties die precies aansluiten bij de specifieke leerdoelen van dat moment. In figuur 3 wordt de functie $x \to 5 \cdot (x+3)^2$ gerepresenteerd met een pijlenketting in het applet AlgebraPijlen en met een tabel die met Excel is gemaakt. De twee verschillende tools bieden verschillende representaties.

- Professioneel – educatief
  Softwarepakketten zoals SPSS of Excel zullen de leerlingen wellicht in het vervolgonderwijs of in de beroepspraktijk tegenkomen, omdat deze pakketten ook in de professionele wereld worden gebruikt. Dat geldt niet voor VU-stat of voor Cabri. Bij gebruik van een professioneel pakket worden leerlingen vertrouwd met een interface waarmee ze ook in de toekomst zullen werken en die wijdverspreid is. Het nadeel van de professionele tools is dat ze vaak een overdaad aan mogelijkheden bieden. De educatieve versies zijn in de meeste gevallen redelijke afspiegelingen van de 'grote broers' en bereiden dus ook op het toekomstige gebruik voor. Educatieve software wordt echter niet altijd goed onderhouden en biedt veelal minder professionele ondersteuning aan de gebruiker.



D2 fx =C2*5

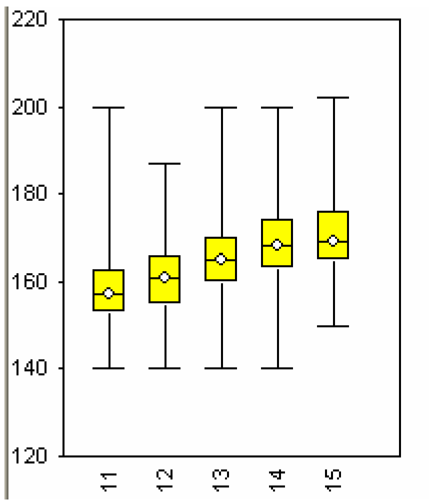
A	B	C	D
Invoer	Plus 3	Kwadraat	Maal 5
1	4	16	80
2	5	25	125
3	6	36	180
4	7	49	245
5	8	64	320
6	9	81	405
7	10	100	500
8	11	121	605
9	12	144	720
10	13	169	845
11	14	196	980
12	15	225	1125
13	16	256	1280
14	17	289	1445
15	18	324	1620
16	19	361	1805

Figuur 3 Representaties van $x \to 5 \cdot (x+3)^2$ in het applet AlgebraPijlen en in Excel

- Web-based – lokaal
  Sofware kan web-based zijn of lokale installatie op school vereisen. Het voordeel van web-based toepassingen is dat ze overal waar internet beschikbaar is toegankelijk zijn zonder verdere installatie. Leerlingen kunnen eenvoudig thuis verder werken, zeker als ook een vorm van centrale opslag van hun werk is gerealiseerd. De consequentie is natuurlijk wel dat de gebruiker afhankelijk is van de betrouwbaarheid van de (breedband) internetverbinding. Omdat dit laatste steeds minder een bezwaar is, is de verwachting dat de ontwikkelingen in de toekomst steeds meer op web-based applicaties gericht zullen zijn.
- Freeware – commercieel
  Hoewel veel software commercieel wordt uitgegeven, zijn er ook freeware of

shareware producten beschikbaar. Denk aan Winplot voor het tekenen van grafieken, aan Powersim Light voor dynamische modellen, aan GeoGebra voor meetkunde of aan Mupad Light en Maxima voor computeralgebra. Voor u een pakket aanschaft, kan het de moeite waard zijn de freeware alternatieven te onderzoeken.

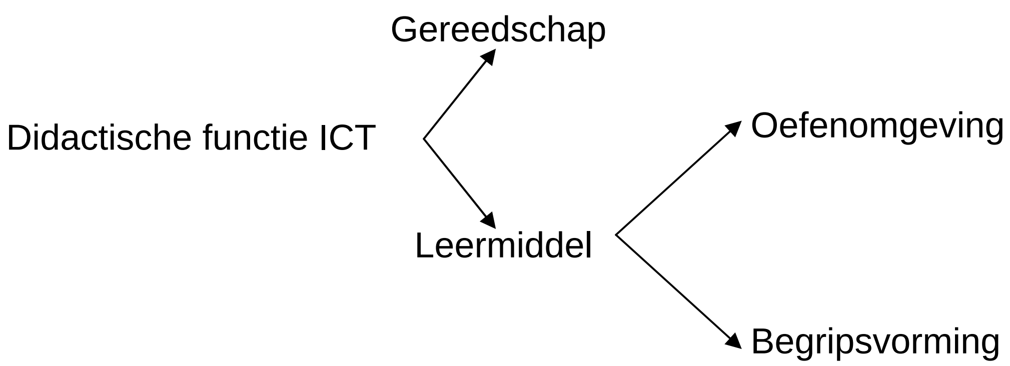
- Handheld – desktop
  Het formaat van het ICT-tool is een belangrijke factor. Het voordeel van handheld apparatuur zoals grafische en symbolische rekenmachines is dat de setting van het onderwijs er niet veel door verandert: de les vindt in het gewone lokaal plaats, het gebruik kan spontaan ontstaan op initiatief van zowel leerling als leraar en er hoeven geen voorzieningen voor te worden getroffen. De leerlingen zijn in veel gevallen eigenaar van dergelijke ‘personal technology’ en maken zich die dan ook werkelijk eigen. Daar staat tegenover dat PC’s een veel beter scherm hebben, waardoor het werk te volgen is door anderen en samenwerking mogelijk is. Daarnaast biedt de PC onder andere door de internettoegang een groter arsenaal aan toepassingen.
  De verwachting is dat de handheld machines en de PC’s in de toekomst nog verder naar elkaar toegroeien. Denk aan PDA’s en aan kleine laptops, en aan het feit dat uitwisseling tussen de diverse apparaten steeds eenvoudiger zal worden. Het programma Nspire is bijvoorbeeld zowel op PC als op handheld machines beschikbaar, en bestandsuitwisseling is eenvoudig.
- Methodegebonden – methodeonafhankelijk
  De gangbare wiskundemethodes brengen tegenwoordig ook software uit waarnaar in de boeken wordt verwezen en die (gedeeltelijk) boekvervangend is. Dergelijke methodegebonden software heeft het voordeel dat de integratie met het boek eenvoudig te realiseren is. Daar staat tegenover dat de functionaliteit in sommige gevallen beperkt is in vergelijking met methodeonafhankelijke software. Overigens zien we ook hier een middenweg ontstaan. Een programma als VU-Stat (zie figuur 4) wordt in verschillende wiskundemethodes gebruikt, evenals sommige applets van het Freudenthal Instituut; daarnaast zijn deze tools ook los van de methode te gebruiken.



Figuur 4 Boxplots van lengte van leerlingen uitgesplitst naar leeftijd, gemaakt met VU-Stat

3.3 ICT als gereedschap om werk aan uit te besteden

Welke didactische functies kan ICT in het wiskundeonderwijs spelen? Globaal gesproken kan ICT fungeren als gereedschap waaraan we werk uitbesteden en als leermiddel. Binnen de functie van leermiddel onderscheiden we het oefenen en de begripsontwikkeling. Zo komen we tot een driedeling: ICT als gereedschap om werk aan uit te besteden, als oefenomgeving, en als factor in de begripsontwikkeling.



Figuur 5 Een overzicht van didactische functies van ICT

In de eerste didactische functie, die van *gereedschap om werk aan uit te besteden*, wordt ICT gebruikt voor zaken die de leerling zelf zou kunnen uitvoeren, maar die (te) veel tijd in beslag zouden nemen. Men spreekt wel van ‘outsourcing’. Denk aan min of meer routineuze handelingen zoals het uitvoeren van numerieke of algebraïsche berekeningen of het tekenen van grafieken of diagrammen. ICT functioneert hierbij als nuttig en praktisch gereedschap, zoals de gewone rekenmachine doet bij elementaire berekeningen.

Deze functie van ICT is didactisch niet zo ingrijpend, omdat ze de gebruikelijke didactiek niet wezenlijk aantast. De vraag is dan wel wat de wiskundige betekenis van het werken met ICT voor de leerling is:

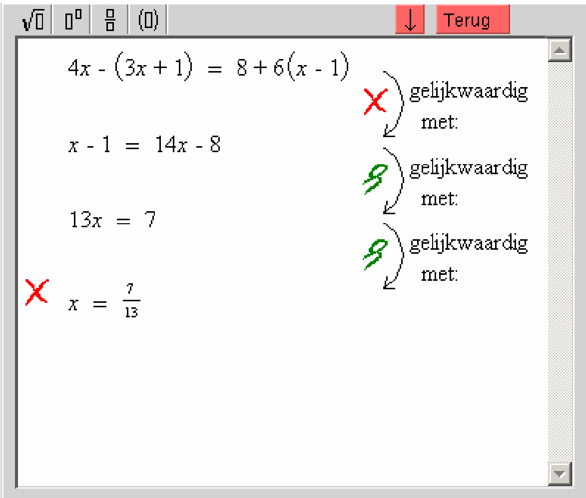
Perhaps the most straightforward research issue, in the sense of symbols coming alive to be processed externally, is to ask what kinds of roles external symbolic processing play in the generation of mathematical meaning. (Hoyles & Noss, 2008, p. 91)

Ook kan men zich afvragen of leerlingen soms niet te gemakkelijk werk dat ook uit het hoofd of met pen en papier gedaan zou kunnen worden uitbesteden aan ICT. Kennelijk is deze verleiding moeilijk te weerstaan. Het is vanzelfsprekend niet de bedoeling dat ‘het verstand uitgaat zodra de machine aangaat’. Leerlingen – en daarmee ook docenten – moeten nadenken over welk werk ze wanneer uitbesteden aan ICT en hoe met de resultaten daarvan kan worden omgegaan.

Een didactische optie is om leerlingen ICT ook als gereedschap te laten gebruiken voor werk dat ze niet of slechts met grote moeite met de hand kunnen uitvoeren. ICT functioneert dan als ‘steiger’ die het de leerling mogelijk maakt om ‘hoger te klimmen’ dan hij op eigen kracht zou kunnen. De ICT heeft dan het karakter van een ‘black box’. Zwaneveld pleit bijvoorbeeld voor het gebruik van Excel in plaats van formele algebra in het vmbo (Zwaneveld, 2005). Een andere vorm van ondersteuning waaraan leerlingen houvast kunnen ontlenen is het controleren van de eigen berekeningen met ICT-gereedschap.

3.4 ICT als oefenomgeving

Een tweede didactische functie van ICT is die van de *oefenomgeving*. ICT biedt voor oefening een aantal voordelen: het aantal oefenopgaven is door randomisatie van parameters vrijwel eindeloos, er kan diagnostische feedback worden gegeven die de docent ontlast. De computer is geduldig en consequent. De leerling bepaalt zelf hoeveel en wanneer wordt geoefend. Eventuele fouten daarbij zijn niet zichtbaar voor anderen, tenzij het leerlingenwerk wordt opgeslagen en kan worden ingezien door de docent.
Figuur 6 geeft een voorbeeld van een digitale oefenomgeving voor het oplossen van vergelijkingen. Het gaat om het applet 'Vergelijkingen oplossen', te vinden op www.wisweb.nl. Van dit applet zijn verschillende versies gemaakt, die in meer of mindere mate steun geven bij het oplossen van de vergelijkingen. In de eerste variant hoeft de leerling slechts de te zetten stappen aan te geven en wordt het algebraïsche rekenwerk door het applet gedaan. In de tweede variant moet de leerling de stappen ook zelf uitvoeren. De derde variant is een zelftoets, die de leerling door het applet kan laten nakijken. De vierde en laatste variant is de eindtoets, die evenmin door de docent gecorrigeerd hoeft te worden.



Figuur 6 Oefenapplet 'Vergelijkingen oplossen'

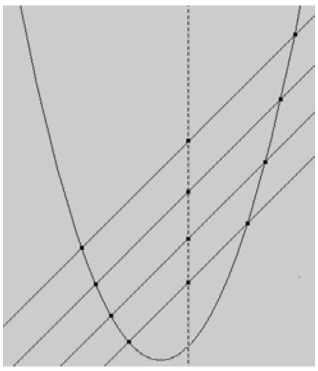
Het gebruik van ICT als oefenomgeving is didactisch ingrijpender dan wanneer ICT alleen als gereedschap functioneert, omdat oefeningen altijd didactische keuzes en prioriteiten in zich hebben: wat wordt geoefend, welk type feedback wordt daarbij gegeven, en welke vaardigheden worden hiermee bevorderd of blijven juist onderbelicht? Een voordeel is dat de feedback door de ICT wordt gegeven, waardoor de docent meer tijd heeft om dieper op moeilijkheden van leerlingen in te gaan.

3.5 ICT voor begripsontwikkeling

Een derde didactische functie is dat ICT wordt ingezet ten behoeve van de *wiskundige begripsontwikkeling*. Het doel is dan dat de activiteiten met de ICT een bepaald denkproces op gang brengen. Het kan bijvoorbeeld zijn dat de ICT helpt het concept te visualiseren, waardoor een rijker en veelzijdiger wiskundig begrip ontstaat. Een representatie in de ICT-omgeving kan een bepaald denkmodel bevorderen, zoals de weegschaal bij het oplossen van vergelijkingen of het rechthoeksmodel bij het uitwerken van haakjes. Een andere insteek is dat de ICT variatie mogelijk maakt, door bijvoorbeeld een invoergetal of parameter te veranderen met een schuifbalk of door een meetkundig object te verslepen. De dynamiek die zo ontstaat, maakt het onderscheid duidelijk tussen kenmerken die aan verandering onderhevig zijn en invariante eigenschappen. Hierdoor kan de leerling de situatie exploreren. Ook kan de ICT-omgeving fungeren als generator van voorbeelden, die de nieuwsgierigheid prikkelen en voor de leerling aanleiding zijn om te generaliseren of om verbanden tussen eigenschappen of begrippen te onderzoeken. Op deze manier wordt een onderzoekende houding bevorderd.

Samengevat komt deze didactische functie erop neer dat de reken- en tekenkracht van ICT wordt gebruikt om situaties te exploreren en verbanden te onderzoeken, zodat dit een wiskundig begrip of techniek toegankelijk en inzichtelijk maakt. Denk aan het numeriek benaderen van de afgeleide functie, aan het berekenen van onder- en bovensommen, aan het onderzoeken van grafieken van bepaalde typen functies, of het illustreren van de centrale limietstelling.

Een voorbeeld van dit laatste staat in figuur 7 (afkomstig uit Drijvers, Goddijn en Kindt, 2006). Een parabool wordt daarin gesneden met een lijn met vaste richting. Terwijl deze lijn naar boven wordt geschoven, wordt het spoor getekend van het midden van de twee snijpunten van lijn en parabool. Het scherm wekt de indruk dat dit middelpunt zich in verticale richting beweegt. De vraag is of dat werkelijk zo is, of dat het hier een foutieve indruk betreft, gevolg van vertekening of onnauwkeurigheid.



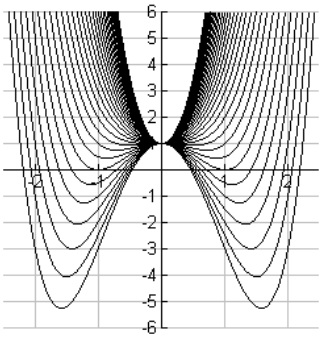
Figuur 7 Liggen de middens van de snijpunten op een rechte lijn?

Didactisch gezien is ICT-gebruik ten behoeve van de begripsontwikkeling wellicht de meest interessante functie, maar tevens de meest complexe. Dit type ICT-inzet vraagt om een zorgvuldige analyse van het verband tussen enerzijds het ICT-gebruik met de bijbehorende representaties en technieken en anderzijds het beoogde denken en de bijbehorende vaardigheden van de leerling. Dit verband is subtiel en complex: een mismatch tussen deze twee kan de opbrengst van het ICT-werk te niet doen. In het vervolg zal aan deze didactische functie de meeste aandacht worden besteed.

Opdracht
Onderzoek de situatie van figuur 6 met geschikte software en beantwoord de vraag met algebra.

3.6 Verwevenheid van functies

Bij de driedeling van didactische functies in gereedschap – oefening – begripsvorming passen enkele kanttekeningen. Op de eerste plaats overdekken de genoemde functies natuurlijk niet alle mogelijke manieren van didactische inzet van ICT. Zo is de functie van ICT bij toetsing niet genoemd, terwijl digitale toetsing sterk in de belangstelling staat. Door digitale toetsing kunnen toetsen worden samengesteld uit een verzameling toetsitems, zodat de afname flexibeler wordt, de toetsen van constante kwaliteit zijn en voor een deel automatisch kunnen worden gecorrigeerd. Een bekende toetsomgeving is Maple TA. Cito heeft een eigen digitaal toetssysteem en de Digitale Wiskunde Omgeving (zie www.fi.uu.nl/dwo) biedt eveneens mogelijkheden voor digitale toetsing (Bokhove, Heck & Koolstra, 2005). Daarnaast is er een discussie gaande over de rol die ICT-hulpmiddelen zoals de grafische rekenmachine spelen bij schriftelijke examens (ICT-werkgroep cTWO, 2008). Op de rol van ICT bij toetsing gaat dit katern verder niet in.
Ten tweede heeft een bepaalde ICT-toepassing niet altijd dezelfde didactische functie: een meetkundeprogramma kan gebruikt worden om bepaalde constructies te oefenen, maar kan ook functioneren als aanleiding om een bewijs op te zetten, zoals in figuur 6 het geval is.
Ten derde heeft een toepassing van ICT veelal meer dan één van de genoemde didactische functies. In figuur 7 is bijvoorbeeld een bundel grafieken getekend bij de verzameling functies $x \to x^4 + b \cdot x^2 + 1$. De didactische functionaliteit is die van het uitvoeren van werk dat de leerling al beheerst en met de hand zou kunnen uitvoeren. In de praktijk is het tekenen van zo’n bundel echter moeilijk te realiseren en tijdrovend. ICT maakt visualisatie en exploratie van de bundel mogelijk, die nieuwe inzichten en vragen oproept. Zo lijkt de kromme die door de toppen van de bundel gaat wel op een parabool, maar is dat ook werkelijk het geval? ICT nodigt hier dus uit tot nader onderzoek en fungeert daarmee in de begripsvorming.



Figuur 8 Een bundel grafieken: werk uitbesteden om vervolgvragen op te roepen

In het vervolg van dit katern ligt de nadruk op ICT als leermiddel voor de begripsontwikkeling. Voor we ons daarop concentreren, sluiten we het voorafgaande af door in tabel 1 de wiskundige en didactische functies met elkaar te combineren en te koppelen aan voorbeelden van ICT-toepassingen. Uit de tabel blijkt dat de meeste typen ICT verschillende didactische functies kunnen vervullen. Brede omgevingen zoals Excel en de grafische rekenmachine zijn in het algemeen beter geschikt als gereedschap om werk aan uit te besteden, terwijl smalle, specifieke tools zoals applets beter geschikt zijn als oefenomgeving of voor de begripsontwikkeling.

Tabel 1 Overzicht van de wiskundige en didactische functies van ICT

Wiskundige functionaliteit	**Voorbeelden**	**Vakinhoud**	**Niveau**	**Didactische functie**
Tabellen en grafieken van functies maken	VU-grafiek, Excel, Winplot, grafische rekenmachines	Verbanden, functies, algebra, analyse	Onderbouw, Tweede Fase	uitbesteding, oefening, begripsontwikkeling
Meetkundige constructies en berekeningen uitvoeren	Cabri, Sketchpad, GeoGebra, Nspire, Geocadabra	Synthetische en analytische Meetkunde	Onderbouw, Tweede Fase	uitbesteding, oefening, begripsontwikkeling
Algebraïsche operaties bewerkingen uitvoeren	Maple, TI Nspire, symbolische rekenmachines	Algebra, analyse	Tweede Fase	uitbesteding, begripsontwikkeling
Statistische gegevens grafisch en numeriek verwerken	VU-Stat, Excel, SPSS, grafische rekenmachines	Kansrekening en statistiek	Onderbouw, Tweede Fase	uitbesteding, oefening, begripsontwikkeling
Dynamische systemen modelleren en simuleren	Powersim, Coach	Analyse van dynamische systemen	Tweede Fase	uitbesteding, begripsontwikkeling
Didactische modellen en representaties weergeven	Applets van bijvoorbeeld www.wisweb.nl	Diverse onderwerpen	Onderbouw, Tweede Fase	oefening, begripsontwikkeling

Opdracht

a. Ga met pen en papier na of de kromme door de toppen van de bundel in figuur 8 inderdaad een parabool is.
b. Doe hetzelfde met een computeralgebra programma, of bedenk hoe je het zou kunnen doen als je software tot je beschikking had die al het algebraïsche werk voor je uitvoert.

4 Wat weten we al?

In de afgelopen decennia is veel onderzoek gedaan naar de inzet van ICT in de wiskundeles. Vanwege het feit dat het hier om een nieuw onderzoeksterrein gaat, en dat de ICT-toepassingen zelf aan voortdurende ontwikkeling onderhevig zijn, valt het niet mee om hieruit algemene conclusies te trekken. Toch zullen we proberen in deze paragraaf de hoofdlijnen van de onderzoeksresultaten weer te geven. Dat gebeurt aan de hand van drie ogenschijnlijke tegenstellingen die naar voren komen in de derde didactische functie van ICT, die van leermiddel voor de begripsvorming:

- ‘Learn to use’ of ‘use to learn’?
- ICT of pen-en-papier?
- Knoppentechniek of mentaal schema?

Vervolgens bespreken we de zogeheten instrumentele benadering van ICT-gebruik en vatten we een en ander samen.

4.1 ‘Learn to use’ of ‘use to learn’?

De vernieuwingscommissie wiskunde cTWO pleit in haar visiedocument ‘Rijk aan betekenis’ voor ICT-gebruik dat gericht is op het leren van wiskunde:

De rol van educatieve software moet zijn ‘use to learn’ en niet ‘learn to use’. Het gebruik van ICT staat ten dienste van het onderwijsproces, van het leren van wiskunde. Bij het gebruik van ICT als rekengereedschap is het zaak ervoor te zorgen dat dit de ontwikkeling en het onderhoud van de basisvaardigheden niet in de weg staat. (cTWO, 2007, p. 42)

Hoewel het leren gebruiken en toepassen van ICT in de huidige informatiemaatschappij een verdedigbaar onderwijsdoel is, wil dit citaat uitdrukken dat ICT eerder middel dan doel is in de wiskundeles. Op zichzelf is dit een voor de hand liggend uitgangspunt. Onderzoek, bijvoorbeeld dat van Bakker (2004), Doorman (2005) en Drijvers (2003), laat echter zien dat de integratie van ICT in het onderwijs veelal ook leidt tot een aanpassing van onderwijsdoelen en van didactische aanpak. Het element van ‘learn-to-use’ opent nieuwe wegen voor het ‘use-to-learn’ en op die manier gaan de twee hand in hand.
In de ontwikkeling van het denken over ICT in het wiskundeonderwijs zien we deze dimensie ook terug. Al in de tachtiger jaren onderscheidde Pea (1987) twee functies voor ICT in het onderwijs, die van versterker en die van organisator. In de rol van *versterker* (‘amplifier’) wordt ICT gebruikt om leerlingen bijvoorbeeld met een breder scala aan voorbeelden te confronteren, of om complexere of meer realistische probleemsituaties aan de orde te stellen. Leerlingen kunnen bijvoorbeeld snel een groot aantal grafieken laten tekenen, of de invloed van een parameter op zo’n grafiek proefondervindelijk onderzoeken. Hierdoor doen ze in hoog tempo meer ervaringen op die aanleiding zijn tot leren dan zonder ICT het geval zou zijn. In dezelfde lijn stellen Tall en Thomas (1991) dat ICT het mogelijk maakt dat leerlingen een groot aantal voorbeelden en non-voorbeelden genereren, die leiden tot de ontwikkeling van een cognitief schema op basis van deze ervaringen.
In principe hoeft ICT als versterker de didactische aanpak niet te veranderen. Toch zal het regelmatig voorkomen dat het ICT-gebruik ook de leerlijn beïnvloedt. Dit brengt ons op de tweede functie van ICT die Pea beschrijft, die van *organisator* van de leerlijn. In zulke gevallen gaat de rol van ICT dus verder dan die van versterker: ICT-gebruik leidt tot een andere organisatie van het onderwijs. De functie van organisator is ingrijpender dan die van versterker, omdat de gebruikelijke didactische aanpak erdoor ter discussie komt te staan.
Een eerste voorbeeld van ICT als organisator betreft het functieonderzoek. Kindt (1992ab) beschrijft hoe de beschikbaarheid van grafiekentools het traditionele functieonderzoek op zijn kop zet: niet langer is de grafiek het einddoel van de opgave, maar vormt ze juist het vertrekpunt om in het oog springende grafische kenmerken van de functie te onderzoeken en te begrijpen.
Een tweede voorbeeld van de organisator-functie van ICT vinden we bij Berry en anderen (1994). De aanpak bestaat eruit dat studenten eerst met een computeralgebra

pakket een aantal functies differentiëren, om via patroonherkenning pas daarna te onderzoeken wat differentiëren eigenlijk inhoudt (zie figuur 9 linker kolom). Eenzelfde idee, maar iets voorzichtiger aangepakt, staat in de rechter kolom van figuur 9. Daar wordt de kettingregel voor differentiëren onderzocht door in een computeralgebra pakket machten van lineaire functies uit te werken, te differentiëren en vervolgens te factoriseren (Drijvers, 1992).

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2\cdot x$$
$$\frac{d}{dx}x^3 = 3\cdot x^2$$
$$\frac{d}{dx}x^4 = 4\cdot x^3$$
$$\frac{d}{dx}x^5 = 5\cdot x^4$$
$$\frac{d}{dx}x^6 = 6\cdot x^5$$
$$\frac{d}{dx}x^7 = 7\cdot x^6$$

$(2\cdot x - 3)^4$

$\text{expand}(ans)$

$$= 16\cdot x^4 - 96\cdot x^3 + 216\cdot x^2 - 216\cdot x + 81$$

$\frac{d}{dx}ans$

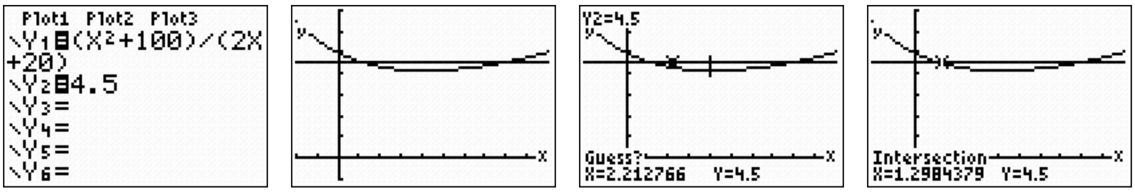
$$= 64\cdot x^3 - 288\cdot x^2 + 432\cdot x - 216$$

$\text{factor}(ans)$

$$= 8\cdot(2\cdot x - 3)^3$$

Figuur 9 ICT als organisator bij het differentiëren van machtsfuncties en samengestelde functies

In praktijk zijn de ICT-functies van versterker en organisator veelal niet goed te scheiden. Toch kan het bij de inzet van ICT voor de docent nuttig zijn zichzelf de vraag te stellen of het ICT-gebruik slechts de gebruikelijke aanpak versnelt of uitbreidt, dan wel die wezenlijk verandert. Het laatste geval vraagt in het algemeen meer didactisch denkwerk dan het eerste.



Figuur 10 De Intersect-techniek: een vergelijking grafisch oplossen met een grafische rekenmachine

In het Nederlandse wiskundeonderwijs heeft de grafische rekenmachine onder andere als versterker gefunctioneerd voor het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden. Bijlage 1 bevat een examenopgave wiskunde B1 vwo uit 2002, waarin leerlingen in de context van een kubus die met water wordt gevuld de ongelijkheid $\frac{h^2+100}{2h+20} < 4,5$ moeten oplossen. Als alleen pen en papier beschikbaar zouden zijn, zou deze vraag wellicht niet gesteld worden. Figuur 10 laat zien hoe dat met de

Intersect-techniek van de grafische rekenmachine kan worden aangepakt. Naast deze versterkende functie is ook sprake van een organisatie-functie: het tekenen van de grafiek van de hoogtefunctie is tevens een voorbereiding op de vraag naar de minimale hoogte verderop in de opgave en organiseert daarmee de opgave. In de Intersect-techniek zijn overigens het ‘use to learn’ en het ‘learn to use’ met elkaar verweven. Verderop komen we hierop terug.

Opdracht
Ga na welke wiskundige inzichten en vaardigheden van pas komen bij het uitvoeren van de Intersect-techniek op de grafische rekenmachine, en in hoeverre deze inzichten zich door deze techniek kunnen ontwikkelen.

4.2 ICT of pen-en-papier?

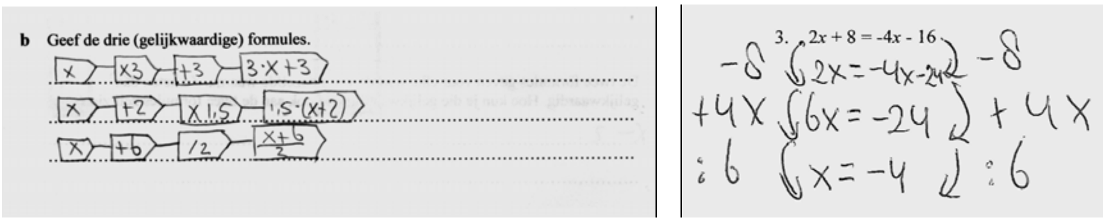
ICT kan dus als organisator fungeren en de gebruikelijke didactische aanpak in meer of mindere mate op zijn kop zetten. Zeker als hierbij het werken met pen-en-papier wordt betrokken, is dit onderwerp van discussie. Een van de eersten die zich over deze kwestie heeft uitgesproken is Buchberger. In 1990 formuleerde hij de *WhiteBox-BlackBox* aanpak, die erop neer komt dat leerlingen de relevante operaties in de fase van ontwikkeling van vaardigheid en begrip eerst met de hand moeten uitvoeren. ICT-gebruik is dan ongewenst, omdat de leerlingen nog niet begrijpen wat ze doen en geen controle hebben over wat er gebeurt. Pas als vaardigheid en inzicht zijn ontwikkeld, kan ICT worden gebruikt om werk uit te voeren dat de leerling in principe ook met pen-en-papier kan doen (in de probleemverkenning ‘outsourcing’ genoemd). De eerder beschreven aanpak van het differentiëren door Berry en collega’s (zie figuur 8 linker kolom) staat hier haaks op. Berry verdedigt de *BlackBox-WhiteBox* aanpak, waarin de leerlingen eerst worden geconfronteerd met de resultaten van ICT-werk, die vervolgens aanleiding zijn om te onderzoeken wat er eigenlijk gebeurt, hoe dat te begrijpen is en hoe je dat zelf met de hand zou kunnen uitvoeren.
Het lijkt dus alsof ICT-werk en het vertrouwde werk met pen en papier met elkaar op gespannen voet staan. Niet zelden wordt gesteld dat ICT-gebruik leidt tot een afname van vaardigheden met pen en papier. Wat leert onderzoek ons op dit punt?
Een eerste conclusie is dat er geen evidentie is voor de bewering dat het gebruik van ICT de vaardigheden met pen en papier ondermijnt. In Nederland is bijvoorbeeld kritiek geuit op het gebruik van de grafische rekenmachine, dat de vaardigheden met pen en papier zou ondermijnen. Vos (2007) stelt echter dat deze kritiek niet hardgemaakt kan worden, omdat de invoering van de grafische rekenmachine gepaard ging met andere onderwijsvernieuwingen. Hoewel er dus geen causaal verband is aangetoond tussen ICT-gebruik en afnemende pen-en-papier vaardigheden, ligt het wel voor de hand te veronderstellen dat pen-en-papier vaardigheden onderhouden moeten worden om operationeel te blijven. Wanneer ICT-gebruik ertoe leidt dat dit onderhoud niet meer plaatsvindt, ligt een afnemende vaardigheid in de lijn der verwachting.
Een tweede conclusie is dat ICT-gebruik kan bijdragen aan inzicht en vaardigheid zoals die ook met pen-en-papier van pas komen. We illustreren dit met drie voorbeelden. Het eerste voorbeeld, afkomstig uit een onderzoek van Heid (1988), baarde indertijd veel opzien. De onderzoekster gebruikte ICT om de opbouw van een analysecursus voor eerstejaars studenten in economie, architectuur en levenswetenschappen grondig te veranderen. ICT als organisator, dus. Ze besteedde veel aandacht aan begripsontwikkeling via visualisatie en exploratie van concepten met de beschikbare ICT. Pas in de laatste fase van de cursus, die een semester duurde,

werden de traditionele calculus-technieken met pen-en-papier onderwezen. Het opvallende resultaat was dat studenten van deze experimentele groep bij het centrale tentamen beter scoorden dan hun collega's uit de controlegroep, ook op onderdelen waarin pen-en-papier technieken werden gevraagd. Kennelijk maakte de voorbereidende exploratie en begripsontwikkeling het mogelijk om de basisvaardigheden snel en doeltreffend onder de knie te krijgen.

Factorization using paper and pencil	Result produced by FACTOR command	Calculation to reconcile the two, if necessary
$x^2-1=(x-1)(x+1)$	$(x-1)(x+1)$	
$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$	$(x-1)(x^2+x+1)$	
$x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$	$(x-1)(x+1)(x^2+1)$	$(x-1)(x^2(x+1)+1(x+1)$ $(x-1)(x^2+1)(x+1)$

Figuur 11 Pen-en-papier antwoorden en ICT-resultaten met elkaar in overeenstemming brengen

Het tweede voorbeeld van de bijdrage van ICT aan het ontwikkelen van inzicht en vaardigheid bij het werken met pen en papier betreft het ontbinden van tweetermen van de vorm x^n-1 (Kieran en Drijvers, 2006). De leerlingen (uit het Canadese equivalent van ons vwo-4) ontbinden een groot aantal van dergelijke tweetermen zowel met pen-en-papier als met een symbolische rekenmachine. Figuur 10 laat het werkblad zien van één van de leerlingen. In de linker kolom staat de ontbinding zoals de leerling die met pen en papier heeft gevonden. De middelste kolom geeft de ontbinding van de symbolische rekenmachine. In de rechter kolom is de vraag om deze antwoorden, als ze verschillen, met elkaar in overeenstemming te brengen. In de onderste regel van figuur 10 gebeurt dit door x^3+x^2+x+1 in stappen te ontbinden. Het werken met ICT is hier dus aanleiding tot handmatige algebra, waarbij tevens wordt nagedacht over het hoe-en-waarom van de beide methodes. Vervolgonderzoek van Kieran & Damboise (2007) bevestigt deze bevindingen.
Het derde voorbeeld van de invloed van ICT-gebruik op pen-en-papier werk betreft leerlingen van klas 2 van havo-vwo (Boon en Drijvers, 2005). Deze leerlingen gebruiken applets voor het werken met pijlenkettingen (zie figuur 3 bovenaan) en voor het stapsgewijs oplossen van vergelijkingen (zie figuur 5). Figuur 12 laat zien hoe de notaties en technieken die met de applets zijn ontwikkeld de leerlingen in beide gevallen steun bieden bij de uitvoering van het werk op papier.



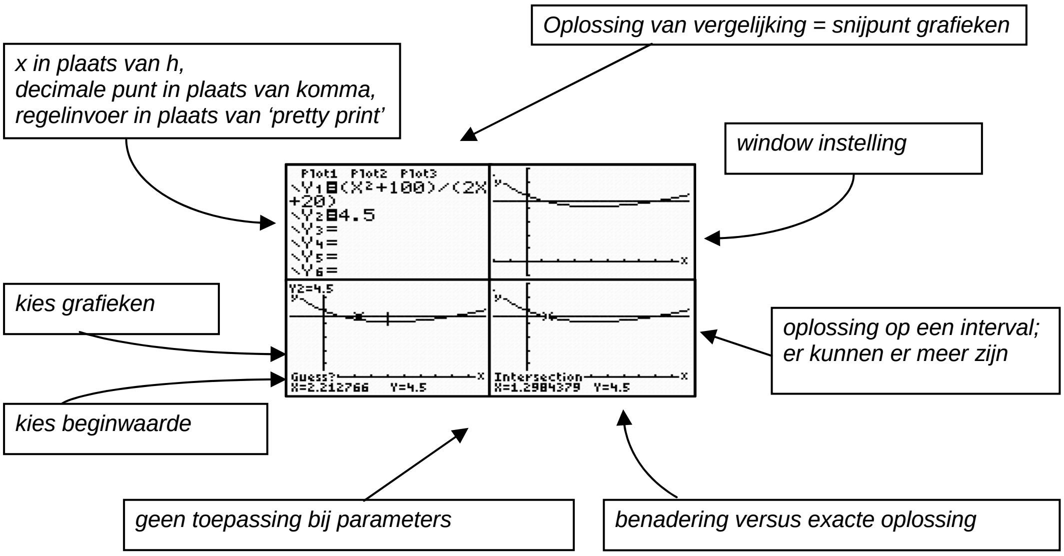
Figuur 12 Twee voorbeelden van applet-notaties die het werken met pen-en-papier ondersteunen

4.3 Knoppentechniek of mentaal schema?

In katern 0 is leren beschreven als een continu proces van aanvulling en transformatie van aanwezige cognitieve, mentale schema's dan wel de opbouw van nieuwe schema's. Hoe verhoudt zich dit tot het toepassen van technieken met een ICT-tool? Laten we deze vraag eerst beantwoorden voor het geval van de Intersect-techniek op de grafische rekenmachine, afgebeeld in figuur 10.
Op het eerste gezicht lijkt de uitvoering van deze techniek wellicht een eenvoudige serie van toetsaanslagen en voor de geroutineerde gebruiker is dit vermoedelijk ook zo. De beginnende gebruiker wordt echter met allerlei aspecten geconfronteerd, die deels machinespecifiek zijn, maar ook deels een wiskundig karakter hebben. Bijvoorbeeld:

- Het oplossen van een vergelijking wordt voorgesteld als het vinden van snijpunten van twee grafieken. Dit beeld is krachtig bij het geven van betekenis aan het oplossen van vergelijkingen. In een later stadium kan overigens blijken dat dit alleen werkt bij vergelijkingen in één onbekende, dus zonder parameters. Dan komt het moment om je bewust te zijn van de beperkingen van het beeld dat de techniek opdringt.
- Bij het invoeren van de twee formules in het functiebestand kan de grafische rekenmachine alleen overweg met x als onbekende, niet met de h die in de context *hoogte* betekent. Ook moet de decimale punt worden gebruikt. Vanwege de regelinvoer moet de deling met haakjes worden in getypt. De formule verschijnt niet in eendimensionale gedaante in plaats van de wiskundige 'pretty print' layout met teller en noemer. Kortom, de invoer vereist enkele vertaalslagen en vraagt van de leerling flexibiliteit in het wiskundige taalgebruik.
- Het kijkvenster moet zo worden ingesteld dat het snijpunt in beeld komt. Dat vraagt van de leerling enig schattend vermogen en gevoel voor orde van grootte van invoer en uitvoer. Dit blijkt leerlingen nog al eens voor problemen te stellen. Bovendien kunnen er ook meerdere snijpunten zijn, en de vraag is dan welke daarvan relevant zijn in de probleemsituatie.
- Afhankelijk van het type machine moet bij de techniek een startwaarde worden ingegeven. Deze keuze is van invloed op de gevonden oplossing, waarbij we ons ook moeten realiseren dat er ook buiten het kijkvenster oplossingen kunnen zijn, die we zo over het hoofd zien.
- De techniek eindigt met een numerieke benadering van de oplossing. Als exacte oplossingen vereist zijn, kan deze techniek ons wel op een idee brengen, maar zal dat toch met algebra gecontroleerd moeten worden. Inzicht in het verschil tussen benaderingen en exacte oplossingen is gewenst.

Deze aspecten, die in figuur 13 worden samengevat, maken duidelijk dat bij het leren van een dergelijke techniek een aantal inzichten aan de orde komt, die bij het toepassen op de achtergrond een rol spelen. Het leren van de techniek zal daarmee ook het mentale schema beïnvloeden. En zo komen we weer op het terrein van het leren van wiskunde.



Figuur 13 Begripsmatige aspecten van de Intersect-techniek

Als tweede voorbeeld van de verwevenheid van een ICT-techniek en het bijbehorende mentale schema bekijken we het oplossen van vergelijkingen die een parameter bevatten (Drijvers, 2007). Leerlingen van vwo-4 gebruiken hier een computeralgebra rekenmachine van het type TI 89. Het oplossen van zo'n vergelijking met dit apparaat lijkt een trivialiteit: je voert het solve-commando in en de rest gaat vanzelf. Niets blijkt echter minder waar. De eerste opgave betreft een functie *f* met $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ en luidt: "Bepaal in het algemeen de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van *f* met de *x*-as." De volgende observatie laat zien dat dit twee leerlingen voor problemen stelt.

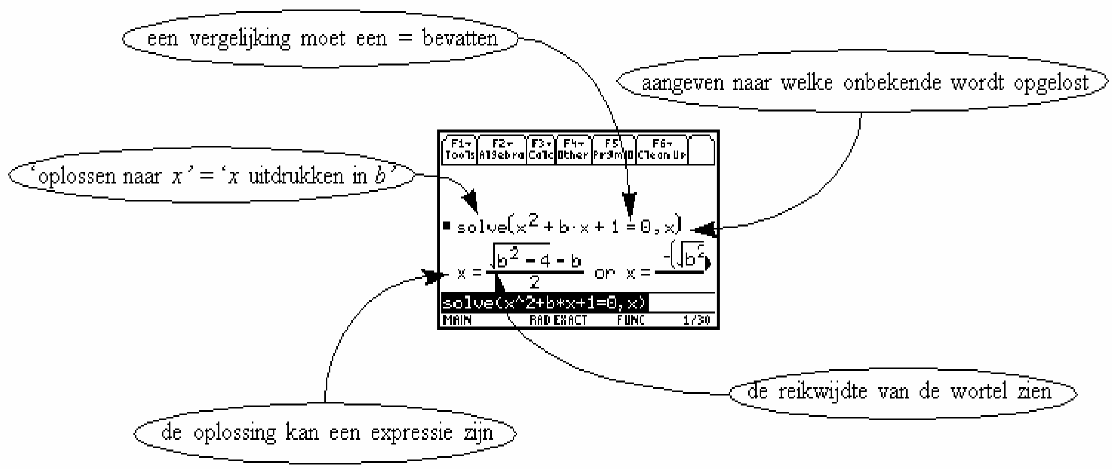
Maria: *Dit is een hartstikke moeilijke vraag. Bepaal de algemene coördinaten, hoe kun je nou coördinaten bepalen van iets als het geen getallen heeft?[…] Dat is toch onmogelijk? […] Maar hoe kun je nou algemeen weten waar die snijdt? Dat is toch verschillend per…*
Ada: *Snijpunten met de x-as is gewoon 0 invullen, dat willen ze toch?*
Maria: *Maar je kan toch niks invullen in een formule met a's en b's en c's?*

Hoewel Maria technisch gesproken in staat is om de geparametriseerde vergelijking in te typen en die met *Solve* naar *x* op te lossen, staat een beperkt beeld van het oplossen van vergelijkingen dit in de weg. De eerste zin van het protocol geeft aan dat zij oplossingen ziet als numerieke resultaten, iets wat 'verschillend is per' waarde van *a*, *b* en *c* in plaats van één algebraïsche uitdrukking in *a*, *b* en *c*. Om deze vergelijking met de symbolische rekenmachine op te lossen, moet Maria haar schema uitbreiden

door niet alleen numerieke antwoorden maar ook algebraïsche expressies als oplossingen te zien. Dit houdt verband met de proces-object dualiteit, die in het katern ‘Vergelijkingen vergelijken’ wordt besproken: voor Maria is een algebraïsche expressie een weergave van een rekenproces, en geen object dat oplossing van een vergelijking is.
Bij Ada speelt de verwarring tussen snijpunten met de *x*-as en de *y*-as een rol. De opgave maakt duidelijk dat het schema voor het oplossen van vergelijkingen met parameters onvolledig is en dat kennis ontbreekt.
Het verhaal gaat verder. In een van de vervolgopdrachten is de vraag om de nulpunten van de functie *f* met $f(x) = x^2 + b \cdot x + 1$ uit te drukken in de parameter *b*. Daarbij de volgende waarneming.

Maria voert in Solve($x^2 + b \cdot x + 1 = 0$ *, b) en lost dus op naar b in plaats van naar x.*
Maria: Dus je doet zeg maar 0= en dan komma b, want je moet hem naar b oplossen.
Observ: Nou nee.
Maria: Je moest toch uitdrukken in b?
Obs: Ja maar je wilt de nulpunten weten, je wilt de x weten, maar omdat je b nog niet weet krijg je dan iets met de b erin.
Maria: Ik denk namelijk al, ik dacht dat je b eruit moest halen.

Maria heeft geen moeite met de bediening van het ICT-gereedschap, maar het idee om één variabele uit te drukken in een andere is haar niet duidelijk. Ze verwisselt de rol van de onbekende met die van de parameter. In tweede instantie, gestuurd door het bovenstaande gesprekje waarin de observator zich laat verleiden tot uitleg van de essentie, lost Maria de vergelijking wel naar *x* op. Kennelijk is haar schema met betrekking tot ‘snijpunten van de grafiek van een willekeurige tweedegraads functie met de *x*-as’ nu uitgebreid, maar zitten niet alle onderdelen er op een correcte manier in.



Figuur 14 Begripsmatige aspecten van de Solve-techniek

Figuur 14 geeft weer enkele begripsmatige aspecten van het cognitieve schema weer, die voorwaarde zijn voor het toepassen van de Solve-techniek, maar die ook door de

techniek kunnen worden opgeroepen. In het laatste geval is het werken met ICT dus een manier om de schemaontwikkeling te bevorderen!
De voorbeelden van de Intersect-techniek op de grafische rekenmachine en de Solve-techniek met computeralgebra maken duidelijk dat er een wisselwerking is tussen het denken van de leerling enerzijds en het beschikbare gereedschap met een repertoire aan mogelijke technieken anderzijds. De mogelijkheden en de beperkingen van het gereedschap sturen het gebruik en daarmee de ontwikkeling van het denken, en andersom bepalen de beelden, strategieën en concepten in het hoofd van de leerling de manier waarop de ICT wordt gebruikt (of niet wordt gebruikt).

4.3 De instrumentele benadering van ICT-gebruik

De verwevenheid van machinetechniek en cognitief schema staat centraal in de zogeheten *instrumentele benadering* van ICT-gebruik bij het leren van wiskunde[1]. Essentieel hierin is de samenhang tussen mogelijkheden en beperkingen van het ICT-gereedschap enerzijds, en het daardoor bevorderde of ontmoedigde wiskundig denken anderzijds (Drijvers, 2007).
Vertrekpunt van de instrumentele benadering is de parallel tussen ICT en ander gereedschap voor het uitvoeren van taken, zoals de zeis bij het maaien van het gras, de pen bij het noteren van taal, of de tekstverwerker bij het schrijven van dit katern. In feite zijn al dergelijke hulpmiddelen te beschouwen als gereedschap dat een verlengstuk vormt van het lichaam (Vygotsky, 1997). Kenmerk van elk gereedschap is dat het bedoeld is om de effectiviteit of het bereik van het handelen te vergroten. Het gereedschap is echter niet neutraal: het gebruik van de tekstverwerker maakt bijvoorbeeld het herstructureren van een tekst eenvoudiger, maar roept daarmee wellicht ook op dat men wat eerder een eerste schets intypt dan men zou doen met pen en papier. In het algemeen zal gereedschap bepaalde typen gedrag versterken en andere ontmoedigen, omdat het zich daarvoor niet goed leent.
Bij cognitief gereedschap voor wiskunde, zoals rekenmachines of computers, zien we eveneens een interactie tussen het gereedschap en het type gebruik, samen met de bijgehorende manier van denken. Deze interactie betekent dat bij het werken met ICT een parallelle ontwikkeling plaatsvindt van technieken om het gereedschap te gebruiken en van cognitieve schema's. Deze combinatie van gereedschap en schema vormt samen het zogeheten *instrument*.

c. Bij de Intersect-techniek met de grafische rekenmachine zagen we bijvoorbeeld dat leerlingen een oplossing van een vergelijking gaan zien als een snijpunt van twee grafieken. Het toepassen van de Solve-procedure in een computeralgebraomgeving roept dit beeld niet op, maar vraagt om de uitbreiding van het concept van de oplossing van een vergelijking.

Het doel van het ICT-gebruik in de wiskundeles is dan dat de leerling de beoogde cognitieve schema's ontwikkelt in samenhang met de technieken om het gereedschap te gebruiken. Men spreekt dan over *instrumentatieschema's*. Zo'n instrumentatieschema zit in het hoofd van de leerling en is niet rechtstreeks waar te nemen, en zal van persoon tot persoon verschillen. De figuren 12 en 13 zijn niettemin pogingen om de beoogde schema's voor de genoemde voorbeelden in kaart te brengen. De ontwikkeling van instrumentatieschema's wordt *instrumentele genese* genoemd. De kunst van het inzetten van ICT voor het leren van wiskunde is dus om

[1] Deze benadering staat bijvoorbeeld centraal in het werk van de theoriegroep van de 17de ICMI Study 'Digital technologies and mathematics teaching and learning: Rethinking the terrain', zie http://icmistudy17.didirem.math.jussieu.fr/

dit ontwikkelingsproces in gang te zetten, zodat vruchtbare schema's ontstaan waarin technieken voor gebruik van het ICT-gereedschap en wiskundige inzichten samengaan.

Opdracht
In figuur 13 over de Intersect-techniek komt rechtsboven het instellen van het kijkvenster aan de orde.

a. Bedenk welke wiskundig-inhoudelijke elementen een rol spelen bij het instellen van het kijkvenster met de Window-optie van de grafische rekenmachine.
b. Maak hierbij een plaatje in de stijl van figuren 12 en 13.

4.5 Samengevat

De conclusies van deze paragraaf kunnen we als volgt samenvatten.

- 'Learn to use' en 'use to learn' zijn veelal niet zo duidelijk te scheiden als wordt gesuggereerd. Niet zelden roepen praktische mogelijkheden en technische kenmerken of beperkingen van het ICT-gereedschap wiskundig interessante kwesties op.
- ICT en pen-en-papier hoeven geen concurrerende media te zijn. Technieken en inzichten die tijdens het werken met ICT ontstaan, kunnen een positief effect hebben op het werken met pen-en-papier. Er is geen onderbouwing van de stelling dat ICT-gebruik ten koste gaat van vaardigheden met pen-en-papier; wel moeten pen-en-papier vaardigheden onderhouden worden en functioneren in het onderwijs, willen ze operationeel blijven.
- Het gebruik van ICT-gereedschap is een leerproces dat de gelijktijdige en samenhangende ontwikkeling van technieken en cognitieve schema's omvat. Mits ICT op een goede manier wordt ingezet, zal het denken niet stoppen als de machine aan gaat, maar kan het ICT-gebruik het denken juist bevorderen. De instrumentatieschema's die zo ontstaan zijn vruchtbaar voor het leren.

Centraal in deze paragraaf staan dus samenhang en wisselwerking, tussen 'learn to use' en 'use to learn', tussen ICT en pen en papier, en tussen machinetechniek en cognitief schema. De kunst voor onderwijsontwerper en docent bij de inpassing van ICT is dus om na te gaan op welke manier het ICT-gebruik het denken van de leerlingen in de beoogde richting kan bevorderen. Dat is een subtiele didactische vraag, waarop het antwoord van geval tot geval zal verschillen, en zal afhangen van het leerdoel, de doelgroep en het type ICT dat wordt gebruikt. De volgende paragraaf over het ontwerpen van onderwijs gaat hierop nader in.

5 Ontwerpen

In het voorafgaande zijn drie didactische functies van ICT in de wiskundeles onderscheiden: ICT als gereedschap, ICT voor oefening en ICT voor de begripsvorming. Vervolgens is gesteld dat de functie van ICT bij de begripsvorming berust op de verwevenheid van techniek en inzicht: de technieken van ICT-gebruik hangen samen met de mentale schema's van de leerling en kunnen bijdragen aan de vorming en uitbreiding van deze schema's. De kunst is echter om dit potentieel in de onderwijspraktijk te benutten. De vraag van deze paragraaf is dan ook:

Hoe ontwerp je ICT-rijk onderwijs dat de ontwikkeling van mentale schema's bevordert en hoe realiseer je dergelijk onderwijs in de praktijk?

Bij wijze van voorbeeld richten we ons bij het beantwoorden van deze vraag op een belangrijk concept uit de algebra, het variabelenbegrip, waarbij we ons baseren op Drijvers en Van Reeuwijk (2006). Vervolgens formuleren we enkele algemene handvatten voor het ontwerpen en uitvoeren van ICT-rijke lessen.

5.1 Het variabelenbegrip

Het variabelenbegrip uit de algebra heeft haar wortels in het rekenen, zoals leerlingen dat in het basisonderwijs leren. De toekomstige havo-vwo leerling maakt in het basisonderwijs wellicht kennis met structurele eigenschappen van getallen. Hij ziet bijvoorbeeld hoe je 16 x 17 snel kunt uitrekenen als je weet dat 17 x 17 gelijk is aan 289. Ook komt hij via de zogeheten vleksommen, waarin een inktvlek één van de getallen in een som bedekt, in aanraking met informeel gestelde vergelijkingen. Eenmaal aangekomen in de onderbouw van het voortgezet onderwijs gaat het erom om los te komen van concrete getallen en de stap te zetten naar variabelen – meestal eerst in de vorm van woordvariabelen, later afgekort tot letters.

Het variabelenbegrip kent verschillende facetten. Aanvankelijk verwijst een variabele naar een getal en is het een plaatshouder daarvoor. Vervolgens wordt de stap naar functies gezet, die als invoer-uitvoer-machine worden gezien en soms vrijwel geïdentificeerd worden met hun grafiek of tabel. Als de invoer verandert, krijgen de variabelen een dynamisch karakter en stellen ze veranderlijk getallen voor, die werkelijk variabel zijn. Wanneer dan ook algebraïsche eigenschappen worden onderzocht, is de vraag of deze voor alle getallen gelden. Op dat moment heeft de variabele de rol van gegeneraliseerd getal. Als de vraag echter is voor welke waarden van de variabele een bepaalde bewering waar is, is de variabele een onbekende. Later in het onderwijs komen klassen van functies aan de orde en krijgt de variabele het karakter van een parameter.
We onderscheiden dus de volgende vijf ‘gezichten’ van het variabelenbegrip:

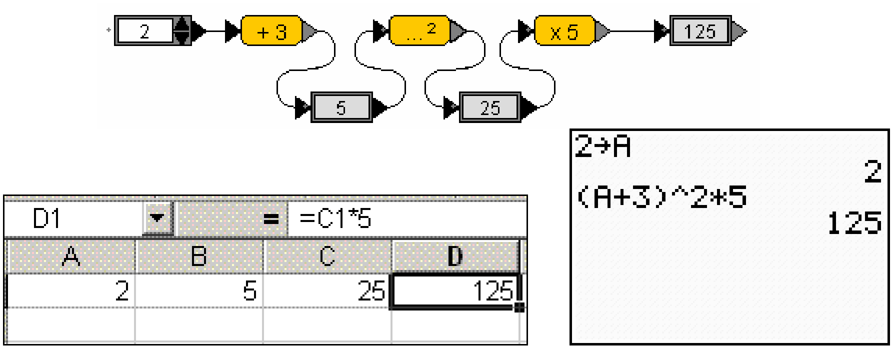
- plaatshouder voor een getal
- veranderlijk getal
- gegeneraliseerd getal
- onbekend getal
- parameter

Hieronder lopen we deze vijf aspecten van het variabelenbegrip langs en koppelen we ze aan mogelijk ICT-gebruik.

Opdracht
Zoek in schoolboeken bij elk van deze vijf facetten van het variabelenbegrip voorbeelden van opgaven die op het betreffende facet een beroep doen.

5.2 De variabele als plaatshouder voor een getal

De meest basale rol van de variabele is die van de *plaatshouder voor een getal*, de ‘lege plaats’ waarin een getal kan worden ingevuld. De variabele is voor te stellen als het etiket van het doosje of laatje waar je het betreffende getal instopt en later weer uit kunt halen. Verschillende ICT-toepassingen ondersteunen dit plaatshouderbeeld. Figuur 15 geeft aan hoe de variabele als plaatshouder gestalte krijgt in het applet AlgebraPijlen, het spreadsheetprogramma Excel en de grafische rekenmachine TI-84.



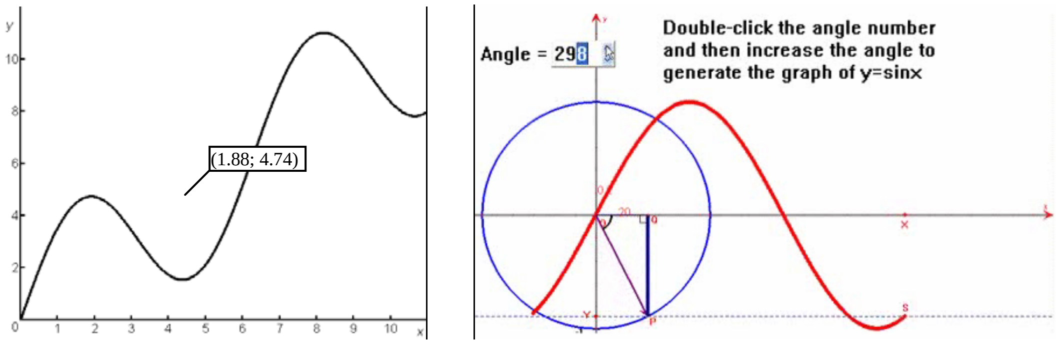
Figuur 15 De variabele als plaatshouder in AlgebraPijlen, Excel en de TI 84

In AlgebraPijlen heeft de variabele als plaatshouder de vorm van een invoervakje, waarin de leerling een getal, in het voorbeeld 2, invult. Op dit invoergetal wordt vervolgens een serie bewerkingen uitgevoerd. In Excel gebeurt iets vergelijkbaars. In een cel, in het voorbeeld cel A1, komt de startwaarde. De inhoud van de volgende cellen wordt berekend met een formule waarin naar een vorige cel wordt verwezen. Een variabele is als het ware de inhoud van een cel. In het rekenscherm van de grafische rekenmachine is een variabele een geheugenplaats die door een toekenning wordt gevuld. De letter is de naam van de geheugenplaats.
Als leerlingen hebben kennisgemaakt met dit plaatshouder idee binnen ICT-toepassingen kan erop worden voortgebouwd door op het bord of op papier variabelen als doosjes of laatjes weer te geven: $\bigcirc \rightarrow (\bigcirc + 3)^2 \cdot 5$

Opdracht
Hoe zou je leerlingen van de brugklas de stap kunnen laten zetten van de variabele als plaatshouder naar de variabele als veranderlijk getal of als plaats voor *alle* getallen in plaats van *een* getal? Hoe kan de ICT uit figuur 15 deze ontwikkeling bevorderen?

5.3 De variabele als veranderlijk getal

Bij het werken met afhankelijkheidsrelaties en functies komt veelal de vraag naar voren hoe de afhankelijke variabele verandert als de onafhankelijke het domein doorloopt. In zo'n geval variëren de variabelen en krijgen ze dus het karakter van veranderlijke getallen. Bij een *veranderlijk getal* stellen we ons voor hoe de variabele systematisch een getalsverzameling doorloopt. Verschillende ICT-toepassingen ondersteunen dit beeld van de dynamische veranderlijke. Figuur 16 laat zien hoe je in VU-Grafiek door te slepen met de muis over de grafiek kunt lopen, en hoe in een animatie de grafiek van de sinusfunctie uit de cirkelbeweging ontstaat (zie http://www.chartwellyorke.com/mentalgeometry/unitcircle.html).



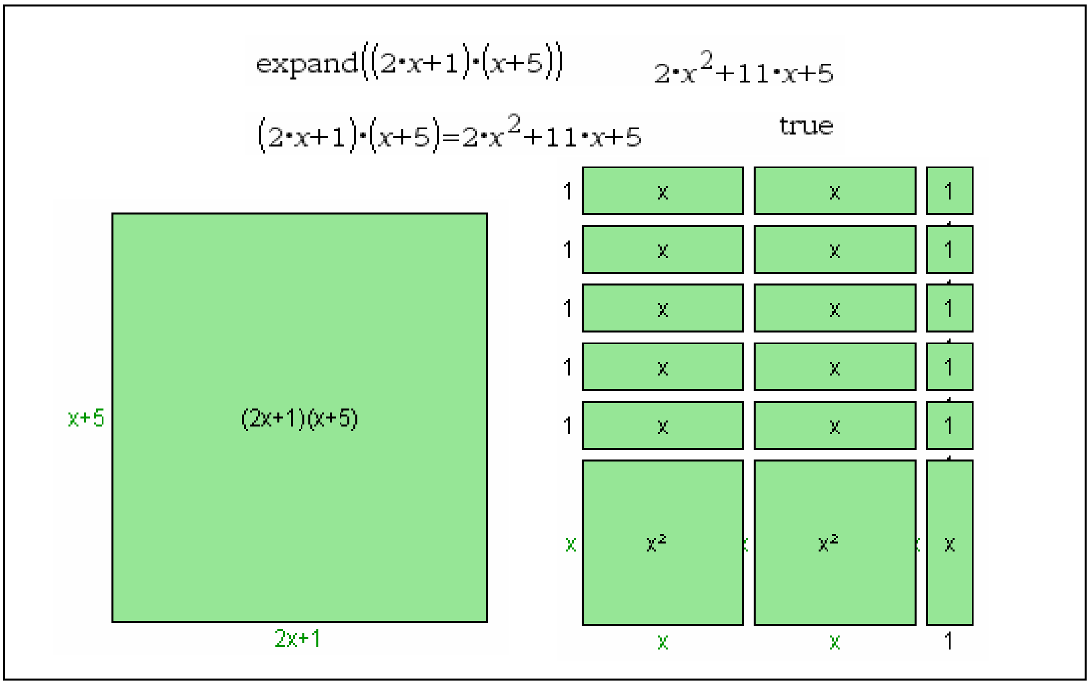
Figuur 16 De variabele veranderlijke in VU-Grafiek en in een meetkundige animatie

In het algemeen zijn er verschillende manieren waarop ICT een bijdrage kan leveren aan de ontwikkeling van een dynamisch variabelebeeld. In het in figuur 14 afgebeelde applet AlgebraPijlen kan de invoerwaarde met een scrollknopje veranderd worden. In Excel kan men door de regels van de tabel lopen. Op de grafische rekenmachine kan men net als in VU-Grafiek het spoor van een grafiek volgen. In Cabri en andere meetkundeprogramma's zijn schuifbalken beschikbaar waarmee de waarde van een variabele 'vloeiend' kan worden veranderd.

Opdracht
In sommige ICT-omgevingen zoals de grafische rekenmachine, het applet AlgebraPijlen en Excel verandert de waarde van een variabele stapsgewijs met een vaste stapgrootte. In andere ICT-pakketten zoals Cabri of VU-Grafiek lijkt dit vloeiend en continu te verlopen. Beschrijf hoe je met dit verschil in de klas omgaat. Is dit een kwestie om te vermijden of juist om expliciet aan de orde te stellen?

5.4 De variabele als gegeneraliseerd getal

Bij het onderzoeken van algebraïsche patronen en structuren gaat het om het ontdekken van eigenschappen die voor *alle* waarden van de variabele geldig zijn. De variabele staat dan niet voor één element uit de domeinverzameling, maar staat model voor alle elementen, voor de hele verzameling. Er wordt over de domeinverzameling gegeneraliseerd en de variabele heeft het karakter van een gegeneraliseerd getal. Computeralgebra software beschouwt variabelen veelal als gegeneraliseerde getallen. Figuur 17 laat zien hoe het pakket TI Nspire de haakjes uitwerkt in $(2x+1)\cdot(x+5)$. Het pakket vindt dan ook dat deze uitdrukking en het resultaat na uitwerking altijd aan elkaar gelijk zijn: 'true'. Het applet Geometrische Algebra 2D kan inzicht geven in de onderliggende algebraïsche mechanismen. In de plaatjes onderin figuur 17 is onmiddellijk duidelijk dat het hier niet gaat om een bepaalde waarde van *x*, maar dat de bewerkingen voor alle waarden van *x* geldig zijn. De variabele staat niet voor één getal, maar voor alle.



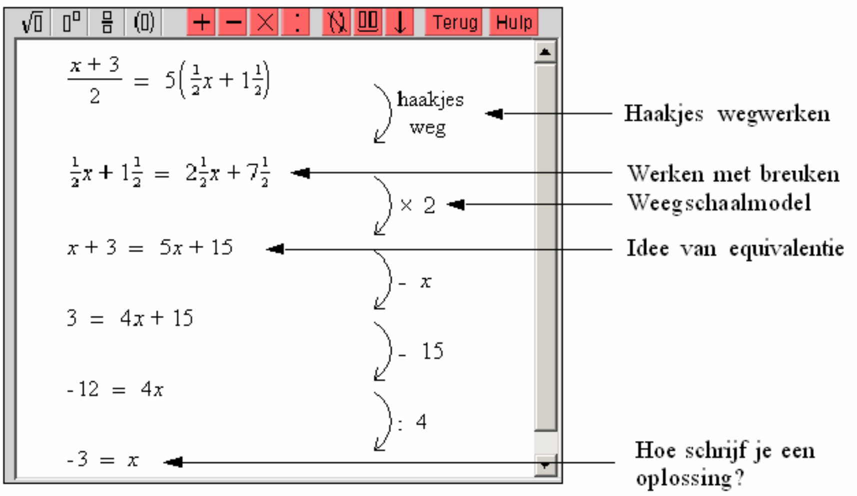
Figuur 17 De variabele als gegeneraliseerd getal in Nspire en in het applet 'Geometrische Algebra 2D'

Ook het applet 'Stroken met etiketten' kan het werken met gegeneraliseerde getallen inleiden. Dit applet, beschikbaar op www.wisweb.nl, maakt het mogelijk om bewerkingen uit te voeren op de hele verzameling van natuurlijke getallen. Door daarop 'etiketten te plakken' krijgen variabelen en formules het karakter van generalisaties over getallen en numerieke relaties. De *N* boven de strook met natuurlijke getallen staat niet langer voor één getal, maar voor het geheel van alle natuurlijke getallen. Op die manier bevordert het werken met het applet een kijk op de variabele als gegeneraliseerd getal.
Op het moment dat met tabellen of lijsten getallen wordt gewerkt die met een naam, label of formule worden aangeduid, krijgt de variabele het karakter van een gegeneraliseerd getal. Excel en grafische rekenmachine bieden hiervoor ook goede mogelijkheden. Ook het verplaatsen of bewerken van hele kolommen of lijsten in tabelvorm draagt bij aan dit beeld. Het voordeel van een spreadsheet is dat er een direct verband wordt gelegd tussen de algebraïsche uitdrukking, de bijbehorende kolommen en de 'veranderlijke' waarde(n) van de voorkomende variabele(n). Overigens heeft een cel in Excel eigenlijk verschillende inhouden: de getalswaarde, die in de cel zelf is af te lezen, en de onderliggende formule die boven in beeld zichtbaar is. Dit dubbele karakter kan verwarrend zijn voor leerlingen (Haspekian, 2005).

Opdracht
Ga naar www.wisweb.nl en verken de applets Geometrische algebra 2D. Ontwerp een korte leerlijn door de verschillende applets en opgaven die het idee van de variabele als gegeneraliseerd getal aan leerlingen duidelijk maakt.

5.5 De variabele als onbekend getal

Bij vergelijkingen is de kern van de zaak om die getalswaarde(n) voor de variabelen te bepalen die de vergelijking ‘waarmaken’. Dat kan op allerlei manieren: intuïtief, met de grafiek of tabel, terugrekenend, systematisch met behulp van algebraïsche technieken voor specifieke algebraïsche uitdrukkingen. De vergelijking fungeert als criterium om bepaalde waarden uit de domeinverzameling te selecteren. De variabele vertegenwoordigt dan de vooralsnog onbekende getallen die oplossing zijn. De variabelen variëren hier niet, maar stellen één of meer getallen voor, die wij helaas nog niet kennen.
Eerder in dit katern (zie figuren 5, 9 en 12) is aandacht besteed aan ICT-middelen zoals de grafische rekenmachine, computeralgebra pakketten en oefenapplets, die het oplossen van vergelijkingen ondersteunen. Voor uitgebreidere informatie over het schematisch oplossen van vergelijkingen verwijzen we naar het katern ‘Vergelijkingen vergelijken’.



Figuur 18 De variabele als onbekende in het oefenapplet ‘Vergelijkingen oplossen’

Opdracht
In figuur 18 staat bij een schermafdruk van het applet ‘Vergelijkingen oplossen’ een aantal elementen uit het beoogde mentale schema van leerlingen aangeduid, die door het werken met het applet worden opgeroepen. Geef van elk van deze elementen aan wat ermee bedoeld zou kunnen worden en of je inderdaad denkt dat dit in het werken met het applet naar voren komt. Geef eventueel ook andere punten waarop de applet-techniek en de begripsvorming al dan niet met elkaar sporen.

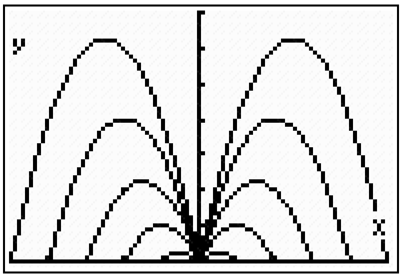
Opdracht
Oplossingen van ongelijkheden kunnen veelal worden afgelezen uit grafieken, die getekend zijn met ICT-gereedschap zoals de grafische rekenmachine, VU-grafiek of Excel. Bepaal je standpunt over de volgende stellingen:

- Het traditionele tekenonderzoek is daarmee overbodig geworden.
- Leerlingen moeten hun grafische waarnemingen onderbouwen met numerieke substitutie.
- De grenzen van de mogelijkheden van de GR moet in de klas aan de orde komen.

5.6 De variabele als parameter

In sommige formules, expressies en vergelijkingen komen meerdere variabelen voor. Denk bijvoorbeeld aan de vergelijking $x^2 + b \cdot x + 1 = 0$ die voorkomt in figuur 14 en het daaraan voorafgaande fragment. De variabelen *x* en *b* spelen daarin een verschillende rol. De variabele *x* is de onafhankelijke variabele, die het domein doorloopt. De variabele *b* blijft in eerste instantie constant en is als het ware een 'slapende' variabele. Als *b* ontwaakt, speelt de verandering op een hoger niveau, omdat elke waarde voor *b* een nieuwe vergelijking genereert. In zo'n geval is *b* een parameter, een 'veranderlijke constante'. Een tweede voorbeeld vinden we in figuur 8, waar variatie van *b* in $x \to x^4 + b \cdot x^2 + 1$ tot een bundel grafieken leidt. Wellicht de bekendste toepassing van parameters is de algemene oplossing van de kwadratische vergelijking $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$.
ICT kan op verschillende manieren de ontwikkeling van het parameterbegrip ondersteunen. Bundels grafieken kunnen worden getekend met VU-Grafiek, grafische rekenmachine of Excel. De waarde van de parameter kan worden gevarieerd met een schuifbalk. Op die manier kan de invloed van bijvoorbeeld de parameters in $x \to a \cdot x + b$ of $x \to a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ worden onderzocht. Met computeralgebra software kunnen oplossingen ook worden uitgedrukt in termen van de parameter (zie figuur 14).

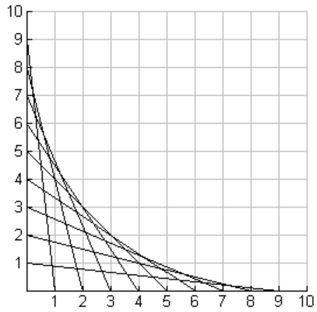
Opdracht



a. Maak de bovenstaande 'fontein' na op het scherm van de grafische rekenmachine.
b. Teken een kromme die door alle hoogste punten van de 'waterstralen' gaat.
c. Bedenk of een dergelijke opdracht geschikt is voor leerlingen. Zo ja, voor welke leerlingen, met welk doel en op welke manier? Zo nee, waarom niet?

Opdracht

a. Teken de onderstaande bundel grafieken met daarvoor geschikt ICT-gereedschap.
b. Welke kromme wordt door deze lijnstukken omhuld?
c. Welke rollen van variabelen kun je in het oplossingsproces onderscheiden?



5.7 Handvatten voor het ontwerpen en uitvoeren van ICT-rijke wiskundelessen

Hieronder concretiseren we de theorieën uit de paragraaf 'Wat weten we al?' en de voorbeelden hierboven tot een aantal puntsgewijze handvatten voor het ontwerpen en uitvoeren van ICT-rijke wiskundelessen.

Het ontwerpen van ICT-rijke wiskundelessen

Bij het ontwerpen van ICT-rijke wiskundelessen is het goed jezelf de volgende vragen te stellen.

1. Welke didactische functie speelt ICT in de les? Functioneert ICT als gereedschap, als oefenomgeving, als leermiddel voor de begripsontwikkeling?
2. Welke wiskundige functionaliteit is het belangrijkst en welk type ICT is daarvoor het meest geschikt? Zie de eerste kolom van de tabel van p. 10 voor een opsomming van wiskundige functionaliteiten.
3. Welke beoogde mentale schema's of vaardigheden ontwikkelen de leerlingen en op welke manier corresponderen de technieken met ICT daarmee? Maak een plaatje zoals in de figuren 12 en 13.
4. Wat wil je dat leerlingen aan het einde kunnen? Welke technieken met ICT, welke met pen-en-papier, welke inzichten? Exacte of benaderende oplossingen, vermoedens of bewijzen? Wordt een en ander beoordeeld en zo ja, hoe? Hoe maak je deze verwachtingen (ook wel het 'didactisch contract' genoemd) duidelijk aan de leerlingen?
5. Hoe zorg je ervoor dat leerlingen na afloop van het ICT-gebruik een resultaat overhouden? Wat moeten ze opschrijven, nakijken of onthouden?
6. Wat voor huiswerk kan er opgegeven worden? Thuis verder werken met de ICT, of juist met pen-en-papier? Een samenvatting maken, of een reflectieopdracht?
7. Hoe kan de kracht van ICT verwondering oproepen of een onderzoekende houding bevorderen? Kunnen de beperkingen van ICT ook aanleiding zijn tot denkwerk?
8. Is het zinvol om niet de volle functionaliteit van de ICT te gebruiken? Denk bijvoorbeeld aan het stap-voor-stap construeren van een bissectrice in Cabri zonder de betreffende optie zelf te gebruiken.
9. Zijn er meerdere manieren mogelijk om het probleem met ICT aan te pakken, en zo ja, kunnen die elkaar versterken?
10. Hoe sluit het gebruik van ICT aan bij de behandeling in het boek? Of staat dat er helemaal los van?

Het uitvoeren van ICT-rijke wiskundelessen

Bij het uitvoeren van ICT-rijke wiskundelessen is het goed de volgende aandachtspunten in het hoofd te houden.

1. Maak je verwachtingen - het didactisch contract - bij aanvang duidelijk en geef aan wat leerlingen aan het einde van de les(sen) met ICT of met pen-en-papier kunnen.
2. Neem tijd voor klassikale introductie, discussie en nabespreking. Laat leerlingen hun aanpak klassikaal uitleggen en toelichten. Dat is belangrijk voor de gezamenlijke ontwikkeling van de verschillende technieken.
3. Besteed aandacht aan de ‘instrumentele genese’ door de leerlingen ook technieken te demonstreren die ze mogelijk zelf niet ontdekt hebben. Het is niet zo dat een docent per definitie terugtreedt als ICT in het spel is! Zorg voor de opbouw van een standaardrepertoire aan basistechnieken, zeker als het ICT-gereedschap in de toekomst nog vaker wordt gebruikt.
4. Probeer beperkingen van het ICT-gereedschap niet te vermijden, maar maak ze expliciet onderwerp van gesprek. Welke wiskundige problemen liggen eronder?
5. Leg zo veel mogelijk verbanden tussen het werk in de ICT-omgeving en het werken met het boek of met pen-en-papier. Zorg dat notaties en technieken overeenstemmen, of wijs op de verschillen. Benadruk de verwevenheid tussen ICT en pen-en-papier en zorg dat transfer tussen beide media plaatsvindt. Gebruik bijvoorbeeld digitaal schoolbord of beamer en ‘gewoon’ schoolbord naast elkaar.
6. Honoreer de inbreng van leerlingen, door hen bijvoorbeeld oplossingen of technieken te laten demonstreren en uitleggen.
7. Laat een leerling naar voren komen en de knoppen bedienen terwijl je zelf de uitleg geeft. Zo merk je of de leerling de technieken beheerst.
8. Laat leerlingen samenwerken om te voorkomen dat de technieken die worden ontwikkeld onhandig zijn of te veel afwijken van de standaardmethoden. Bij gebruik van de PC is werken in tweetallen geschikte werkvorm.

Opdracht

Vul de bovenstaande lijstjes aan en bespreek je aanvullingen zo mogelijk met enkele medestudenten.

Opdracht

Ga naar http://www.chartwellyorke.com/mentalgeometry/unitcircle.html en ontwerp een introductieles over goniometrische functies voor klas 4. Loop bij het ontwerp de bovengenoemde punten langs.

Opdracht

Ga naar www.wisweb.nl en werk even met het applet AlgebraPijlen, afgebeeld in de figuren 3 en 14. Maak een tekening in de stijl van figuren 12 en 13 waarin je aangeeft welke begripsvormende aspecten bij het werken met het applet naar voren komen. Bedenk of en zo ja hoe het applet een rol kan spelen in een leerlijn rond het functiebegrip. Zie eventueel het voorbeeldlesmateriaal op www.fi.uu.nl/tooluse.

Opdracht

Ontwerp een werkblad bij Excel of bij het applet ‘Stroken met etiketten’ waarin de variabele als gegeneraliseerd getal naar voren komt. Neem ook enkele reflectievragen op in je werkblad.

6 Conclusie

De vraag die in dit katern centraal staat luidde:

Wat kan ICT-gebruik toevoegen aan het wiskundeonderwijs en hoe kan de docent dit potentieel benutten?

De conclusies ten aanzien van het *wat* zijn dat ICT een aantal relevante wiskundige functionaliteiten biedt, die kunnen worden ingezet als gereedschap, voor oefening en voor begripsvorming. Bij dat laatste kunnen belangrijke troeven zoals visualisatie, exploratie en dynamiek worden uitgespeeld. Onderzoeksresultaten met betrekking tot het gebruik van ICT in de wiskundeles suggereren dat het 'use to learn' en het 'learn to use' in praktijk moeilijk te scheiden zijn, omdat de ontwikkeling van de technieken voor het gebruik van ICT bij wiskunde veelal gelijk op gaat met die van de mentale schema's die leerlingen daarbij nodig hebben. Mits aan de transfer voldoende aandacht wordt besteed, zullen ook pen-en-papier vaardigheden hierdoor toenemen. De belangrijkste conclusie ten aanzien van het *hoe* is dat de inzet van ICT een goede didactische doordenking vooraf vraagt en een zorgvuldige begeleiding in de les. De docent moet zich de doelen en kansen van het ICT-gebruik goed bewust zijn, want elk ICT-middel heeft eigen mogelijkheden en beperkingen:

Tools matter: they stand between the user and the phenomenon to be modelled, and shape activity structures. (Hoyles & Noss, 2003, p. 341)

Via individuele en klassikale interacties kan de docent de rol van ICT in het leren orkestreren. Afwisseling van werkvormen en van ICT met bord of pen-en-papier wordt aangeraden. Notaties en technieken kunnen worden vergeleken. De kracht en de zwakte van ICT kan onderwerp van reflectie zijn. Op dergelijke didactisch verantwoorde manier kan de inpassing van ICT een motiverende en eigentijdse bijdragen leveren aan het leren van de leerlingen.

Literatuur

Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools.* Utrecht: CD Beta Press.

Berry J., Graham, E., & Watkins, A. (1994). Integrating the Derive program into the teaching of mathematics. *The International Derive Journal, 1*(1), 83-96.

Bokhove, C., Heck, A., & Koolstra, G. (2005). Intelligente feedback bij digitale toetsen en oefeningen. *Euclides, 81*, 70 – 73.

Boon, P. & Drijvers, P. (2005). *Algebra en applets, leren en onderwijzen*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Buchberger, B. (1990). Should students learn integration rules? *Sigsam Bulletin, 24*(1), 10-17.

cTWO (2007). *Rijk aan betekenis, visie op vernieuwd wiskundeonderwijs.* Utrecht: cTWO.

Doorman, L.M. (2005). *Modelling motion: from trace graphs to instantaneous change.* Utrecht: CD-Beta Press. Ook beschikbaar via http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2005-0311-094207/index.htm

Doorman, L.M., Drijvers, P. & Kindt, M. (1994). *De grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Drijvers, P. (1992). De kettingregel met Derive: een lesverslag. *Euclides, 67*(8), 242 - 247.

Drijvers, P.H.M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment, design research on the understanding of the concept of parameter*. Utrecht: CD-β Press. Ook beschikbaar via www.fi.uu.nl/~pauld/dissertation.

Drijvers, P. (2007). Instrument, orkest en dirigent: een theoretisch kader voor ICT-gebruik in het wiskundeonderwijs. *Pedagogische Studiën*, *84*(5), 358-374.

Drijvers, P. & Doorman, M. (1996). The graphics calculator in mathematics education. *Journal of Mathematical Behaviour, 14*(4), 425 - 440.

Drijvers, P., Goddijn, A., & Kindt, M. (2006). Oriëntatie op schoolalgebra. In Drijvers, P. (Red.), *Wat a is dat kun je niet weten*, pp. 7-24. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Drijvers, P. & Gravemeijer, K.P.E. (2004). Artefact en instrument: Computeralgebra en algebraïsche schema's. *Tijdschrift voor Didactiek der Bètawetenschappen, 21*(1), 47-68.

Drijvers, P., Kieran, C. & Mariotti, M.A. (in press). Integrating technology into mathematics education: theoretical perspectives. Icmi17 study.

Drijvers, P. & Van Reeuwijk, M. (2006). Algebra en ICT. In Drijvers, P. (Red.), *Wat a is, dat kun je niet weten. Een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school,* 137-160. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Haspekian, M. (2005). An “instrumental approach” to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 10*(2), 109–141.

Heid, M.K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education, 19,* 3-25.

Hoyles, C. & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In: Bishop, A.J., Clements, M.A., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Leung, F.K.S. (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 323-349). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hoyles, C. & Noss, R. (2008). Next steps in implementing Kaput’s research programme. *Educational Studies in Mathematics, 68,* 85-97.

ICT-werkgroep cTWO, 2008. *Use to learn, Naar een zinvolle integratie van ICT in het wiskundeonderwijs.* Utrecht: cTWO.

Kieran, C., & Damboise, C. (2007). How Can We Describe the Relation between the Factored Form and the Expanded Form of These Trinomials? - We Don't even Know If Our Paper-and-Pencil Factorizations are Right: The Case for Computer Algebra Systems (CAS) with Weaker Algebra Students. *PME CONFERENCE 31, Vol 3*, 105-112.

Kieran, C. & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 11*(2), 205-263. http://www.springerlink.com/content/u7t3580294652u37/.

Kindt, M. (1992a). Functieonderzoek begint met de grafiek I. *Euclides, 67*(7), 200-204.

Kindt, M. (1992b). Functieonderzoek begint met de grafiek II. *Euclides, 67*(8), 227-230.

Noss, R., and Hoyles, C., 1996, *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers,* Kluwer Academic, Dordrecht.

Pea, R., 1987, Cognitive technologies for mathematics education, in: *Cognitive science and mathematics education,* A. H. Schoenfeld, ed., Lawrence Erlbaum, Hillsdale, pp. 89-122.

Tall, D. & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 125-147.

Vos, P. (2007). Feiten en meningen. *Euclides, 82*(7), 250.

Vygotsky, L. S. (1997). The instrumental method in psychology. In R. W. Rieber & J. Wollock (Eds.), *Problems of the theory and history of psychology, Vol. 3, Collected works of L.S. Vygotsky* (pp. 85-89). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Wiskrant-artikel prootool

Zwaneveld, B. (2005). Formules in het vmbo. *Euclides, 80*(6), 345.

Bijlage

Examenopgave over het verschuivend zwaartepunt

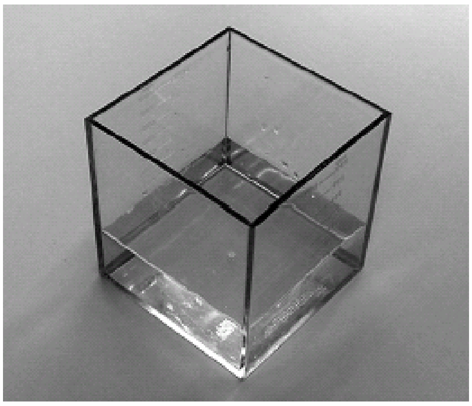
Opgave uit het centraal examen wiskunde B1, eerste tijdvak, 2002

Verschuivend zwaartepunt

Een kubusvormige bak met deksel heeft binnenmaten 10 bij 10 bij 10 cm en weegt 1 kilogram.
Het zwaartepunt B van de bak ligt in het centrum van de bak, dus 5 cm boven het midden van de bodem.

De bak wordt met water gevuld tot een hoogte van h cm.
Het zwaartepunt W van het water (de bak niet meegerekend) ligt in het centrum van het water, dus $\frac{1}{2}h$ cm boven het midden van de bodem.
Zie de foto en figuur 1 waarin op schaal een vooraanzicht van de bak is getekend.

foto

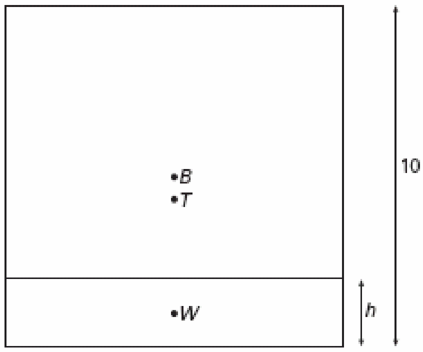


Het zwaartepunt van het geheel (bak en water samen) noemen we T.
Het punt T ligt op het lijnstuk BW.
Er geldt:

$$d_T = \frac{h}{h+10} \cdot d_W + \frac{10}{h+10} \cdot d_B$$

Hierbij zijn d_T, d_W en d_B de afstand in cm van achtereenvolgens T, W en B tot de bodem.

figuur 1



3p 1 ☐ Bereken d_T voor $h = 3$. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

4p 2 ☐ Toon aan dat voor de afstand van T tot de bodem, uitgedrukt in h, geldt: $d_T = \dfrac{h^2+100}{2h+20}$.

Als de bak leeg is, valt T samen met B. Tijdens het vullen van de bak verschuift de plaats van T eerst omlaag en later weer omhoog. Als de bak vol is, valt T weer samen met B.

4p 3 ☐ Bereken voor welke waarden van h geldt: $d_T < 4{,}5$. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

6p 4 ☐ Bereken exact voor welke waarde van h de afstand van T tot de bodem minimaal is.