Vergelijkingen vergelijken

Ontwikkeling en onderhoud van een veelzijdig repertoire aan algebraïsche vaardigheden

... want die methode, die men met een vreemd woord algebra noemt,
schijnt die helderheid en dat gemak te bezitten,
die je moet aantreffen in de ware wiskunde.
(René Descartes, *Regulae ad directionem ingenii*, 1627)

Paul Drijvers en Peter Kop

Inhoud

1 Oriëntatie

VERSCHILLEN.

V_1. $(a+b+c+d)-(p+q+r)=(a-p)+(b-q)+(c-r)+d$.
Een verschil wordt gevonden, door aftrektal en aftrekker in delen te splitsen, elk deel van de aftrekker af te trekken van een der delen van het aftrektal en de komende verschillen en de overgebleven delen van het aftrektal samen te voegen.

Hoe dieper je de grond in gaat, des te hoger is de temperatuur.
Bij een diepte van d km kun je de temperatuur in °C berekenen met de formule **temperatuur = 10*d* + 20**.
a Neem de tabel over en vul hem in.

d	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	6
temperatuur in °C							

b Teken de grafiek. Ga op de horizontale as tot 6.
c Mevrouw Slim wil in haar tuin een diepe put zodat ze onderin water kan koken. Meneer Slim is tot vele dingen bereid. Toch wil hij zo'n put niet voor zijn vrouw graven.
Waarom, denk je?

Figuur 1 Algebra in schoolboeken uit 1955 en 1983

Hoewel algebra, zo blijkt uit het citaat aan het begin van dit hoofdstuk, al eeuwenoud is, is de manier waarop leerlingen er in schoolboeken mee geconfronteerd worden aan verandering onderhevig. De stelling bovenin fig. 1 komt uit 'Beknopte Algebra I' voor de eerste klas van de toenmalige HBS (Wijdenes, 1955). Ze is formeel gesteld en kent een streng taalgebruik en werd gevolgd door oefeningen in het toepassen. Het tweede deel van fig. 1 is een opgave uit Getal en Ruimte voor klas 1 van havo/vwo (Reichard e.a., 2003). Een – overigens niet-realistische – context vormt het uitgangspunt en formalisering speelt geen rol: onderdeel c komt neer op het (informeel?) oplossen van de vergelijking $10d + 20 = 100$.
Zijn deze veranderingen het gevolg van voortschrijdend vakdidactisch inzicht en presteren de leerlingen nu dan ook beter dan vroeger? Ja en nee. Enerzijds maken ervaringen uit de praktijk en uit didactisch onderzoek duidelijk dat algebra een complex onderwerp is om te leren en te onderwijzen, dat vraagt om een juiste balans tussen inzicht en vaardigheid. Om ervoor te zorgen dat de vaardigheden van leerlingen bestand zijn tegen variatie van de opgave en transfer naar andere situaties, is het van belang dat de algebraïsche bewerkingen voor leerlingen betekenis hebben. Met deze inzichten wordt tegenwoordig wellicht meer rekening gehouden dan vroeger.
Anderzijds blijkt dat leerlingen in de tweede fase van havo en vwo veel fouten maken met algebraïsche bewerkingen en komen er klachten uit het hoger onderwijs over de gebrekkige vaardigheden van de instromende studenten. De fouten die aan het licht komen, lijken vrij elementair te zijn: studenten maken fouten bij het toepassen van rekenregels, herkennen de toepasbaarheid ervan niet, zijn niet in staat een paar stappen vooruit te denken in het oplossingsproces of merken niet dat ze een verkeerde

weg inslaan. De moeite met elementair algebraïsch handelen verhoogt de cognitieve belasting voor de student en onttrekken de aandacht aan het onderwerp dat eigenlijk aan de orde is, of dat nu differentiaalrekening of mechanica is. Moet er niet gewoon veel worden geoefend, getraind op basisvaardigheden, zoals vroeger meer het geval was?
Een voorbeeld van zo'n veel voorkomende fout is de volgende:
$\sqrt{a^2 + b^2} = 5$ dus $a + b = 5$
Het idee achter deze verleidelijke vereenvoudiging lijkt het 'stuksgewijs wortelen' te zijn:
$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$
Anders geformuleerd: leerlingen denken dat het worteltrekken lineair is. De Bock (1998) spreekt in dit verband van een lineariteitsillusie. Helemaal absurd is de gedachte van de leerlingen niet, want met x in plaats van + klopt het wel:
$\sqrt{a^2 \times b^2} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2}$
Ook bij werken met breuken treden dergelijke simplificaties op. De lenzenformule wordt bijvoorbeeld ook wel eens vereenvoudigd:
Als $\frac{1}{f} = \frac{1}{v} + \frac{1}{b}$ dan $f = v + b$
Maar uit $\frac{f}{5} = \frac{v}{5} + \frac{b}{5}$ volgt $f = v + b$ is weer wel goed. En als laatste voorbeeld stond in de Wiskrant beschreven hoe een leerling van vwo-4 $\frac{(N-2)\times 180}{N}$ wilde vereenvoudigen tot -2×180 door N weg te strepen (Kindt, 2000). Die –2 in de teller gooit lelijk roet in het eten…
Leerlingen die dergelijke fouten maken, zijn niet lukraak symbolen aan het verplaatsten, maar missen kennelijk de algebraïsche ervaring die 'een rood lampje doet oplichten' bij het overgeneraliseren van eigenschappen, in dit geval bij het verwisselen van de volgorde van bewerkingen: dat kan soms wel en soms niet, en de kunst is te weten wanneer. Vergelijkbare alarmsignalen moeten in werking treden als men bijvoorbeeld bij een deling of vermenigvuldiging rekening moet houden met de mogelijkheid dat de deler of de factor gelijk is aan 0.
De vraag is hoe nieuw dergelijke observaties zijn. Vos (2007) constateert dat de resultaten van internationaal vergelijkend onderzoek naar de algebraïsche vaardigheden aantonen dat Nederlandse leerlingen op dit punt al jaren achterblijven. Doen we iets verkeerd in ons algebraonderwijs?
Als reactie op de matige en mogelijk afnemende algebraïsche basisvaardigheden van instromende studenten organiseert een aantal universiteiten sinds 2001 instaptoetsen en bijspijkercursussen. Fig. 2 toont enkele items van zo'n instaptoets met de behaalde scores en enkele interpretatieve opmerkingen, ontleend aan de Werkgroep 3TU (2006). Studenten die bij vraag 5 voor alternatief B kiezen, hebben vermoedelijk dezelfde problemen als leerlingen die in het voorbeeld hierboven $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$ vereenvoudigen tot $a + b = 5$. In beide gevallen wordt een bewerking (worteltrekken respectievelijk 'een-gedeeld-door') ten onrechte 'door de optelling heen getrokken'.

Opgave 3 Vereenvoudig de volgende uitdrukking zover mogelijk:

$$\frac{(5ab^2)^2 \cdot \sqrt[3]{8b^{-6}}}{5b^2 \cdot \sqrt{a^4}}$$

antwoord	10
percentage	**31**

16 studenten wisten geen raad met $\sqrt[3]{8}$; 38 studenten dachten $\sqrt[3]{8b^{-6}} = 8b^{-2}$; 9 studenten gaven als antwoord: $5b^2\sqrt[3]{8b^{-6}}$; 1 student gaf als antwoord: $5\sqrt[3]{8}$.

Opgave 4 Vereenvoudig de volgende breuk zover mogelijk $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$

antwoord	$\frac{x-1}{x+1}$
percentage	**45**

Een te lage score.

Opgave 5 Als $\frac{1}{y} = x + \frac{1}{c}$, dan is y gelijk aan

A. $\frac{c}{cx+1}$ B. $\frac{1}{x}+c$ C. $\frac{c}{x+1}$ D. $\frac{c+1}{x+1}$

antwoord	A	B	C	D	anders
percentage	**38**	42	13	1	7

42 % van de studenten neemt term voor term het omgekeerde! Het goede nieuws is dat in de eerste toets slechts 18% van de studenten een formule wist om te werken.

Figuur 2 Bespreking van resultaten van enkele items uit instaptoetsen (Werkgroep 3TU, 2006)

2 Probleemstelling

Het uitgangspunt van dit katern is dat algebraïsch inzicht en algebraïsche vaardigheden nodig zijn voor leerlingen van havo en vwo. Algebra heeft een centrale plaats in de wiskunde en speelt daarin verschillende rollen:

1. Algebra als methode om problemen op te lossen. Het oplossen van bepaalde typen problemen kan worden gealgoritmiseerd en daarmee getrivialiseerd.
2. Algebra voor het representeren van verbanden en functies. Met algebra kunnen verbanden tussen verschillende variabelen worden vastgelegd. Functies worden gerepresenteerd met formules, tabellen, grafieken en andere voorstellingen.
3. Algebra voor het beschrijven van patronen en structuren. Met directe of recursieve formules kunnen patronen worden beschreven; op wiskundige structuren kunnen algebraïsche regels worden toegepast.
4. Algebra als taal om verschijnselen uit andere onderdelen van de wiskunde of daarbuiten mee te modelleren en in te beschrijven.

Algebra is dus onmisbaar in het wiskundige en exacte denken. Tall en Thomas verwoorden het zo:

There is a stage in the curriculum when the introduction of algebra may make simple things hard, but not teaching algebra will soon render it impossible to make hard things simple. Tall & Thomas, 1991, p. 128.

Wat echter het toepassen van algebra bemoeilijkt, is het optreden van fouten tijdens het uitvoeren van algebraïsche procedures. Niet zelden vormt dat een tijdrovende onderbreking van het werk. Het is dus van belang dat leerlingen betekenisvolle algebrakennis ontwikkelen waarvan een veelzijdig repertoire aan algebraïsche vaardigheden deel uitmaakt. Dit repertoire dient betrouwbaar te kunnen worden toegepast, zich te lenen voor transfer en bestand te zijn tegen variatie. De vraag die in dit katern centraal staat luidt dan ook als volgt:

Wat is een effectieve en efficiënte didactiek voor het leren en onderhouden van algebraïsche vaardigheden?

In het eerste deel van dit katern wordt het probleem aanvankelijk nader verkend door aan de hand van enkele voorbeelden didactische moeilijkheden en dilemma’s te identificeren die een rol spelen bij het leren en onderwijzen van algebra en algebraïsche vaardigheden in het algemeen. Vervolgens gaan we na wat we al weten over dit onderwerp. In de tweede helft van het katern wordt een en ander toegespitst op de specifieke vaardigheid van het oplossen van vergelijkingen. Daarbij komt de leerlijn voor het ontwikkelen van schema’s aan de orde, die loopt van de onderbouw naar de tweede fase van havo en vwo, en dan met name de N-profielen.
Als gevolg van deze keuzes kunnen we een aantal eveneens belangrijke zaken in dit katern niet aan de orde stellen. Een eerste beperking is dat op slechts één onderwerp uit het algebraprogramma, het oplossen van vergelijkingen, uitgebreid wordt ingegaan. Centrale concepten als het variabelebegrip, het functiebegrip en algebraïsche equivalentie blijven onbesproken. Een tweede beperking is dat de rol die ICT kan spelen bij het leren van algebra niet aan de orde komt. Hiervoor verwijzen we naar het katern dat geheel aan ICT-gebruik is gewijd. Een derde aspect dat onderbelicht blijft, is het mathematiseren of algebraïseren: hoe leren leerlingen om problemen te ‘vertalen’ in de taal van algebra, om de algebraïsche technieken in het oplossingsproces te kunnen inzetten? In het katern modelleren wordt aan dit laatste aspect aandacht besteed.

3 Probleemverkenning

Het is goed om ons te realiseren dat de moeilijkheden met algebraïsche vaardigheden niet nieuw zijn. De volgende twee voorbeelden uit de vakdidactische literatuur zijn inmiddels klassiek geworden.
Het eerste voorbeeld is beschreven door Wagner en anderen (1984). De opgave die aan leerlingen werd voorgelegd luidde:
Hoe groot is $\frac{2z+1}{2}$ als $5 \cdot (2z+1) = 10$?
De meeste leerlingen pakten deze opgave aan door eerst de haakjes in de gegeven vergelijking uit te werken, vervolgens de vergelijking naar z op te lossen, en het resultaat in de gevraagde uitdrukking te substitueren. Een kwestie van elementaire algebraïsche vaardigheden, al is een rekenfoutje hierbij verre van denkbeeldig. Een handiger aanpak zien maar weinig leerlingen. Een vergelijkbaar fenomeen is herkenbaar uit de hedendaagse klassenpraktijk: sommige leerlingen lossen een vergelijking als $(x-3)^2 = 0$ op door de haakjes uit te werken en de ontstane vergelijking op te lossen met de abc-formule zonder zich bewust te zijn van een directere methode.
Het tweede klassieke voorbeeld is ontleend aan Wenger (1987) en uitgebreid beschreven door Gravemeijer (1990). De opdracht waar het om gaat is:
Los $v \cdot \sqrt{u} = 1 + 2v \cdot \sqrt{1+u}$ op naar *v*.
De resultaten van zowel leerlingen als studenten uit het hoger onderwijs zijn bedroevend slecht: veelal verzanden oplossingspogingen in problemen bij het wegwerken van de wortels.
Hoe komt het dat leerlingen dergelijke opgaven zo moeilijk vinden? Daarvoor signaleren we een zestal mogelijke oorzaken, die niet los staan van elkaar. Ten eerste

kan het *procesdenken* het probleem zijn. Leerlingen kunnen de expressie in het linkerlid van een vergelijking als $5 \cdot (2z+1) = 10$ beschouwen als een recept of actieplan: ‘je neemt *z*, doet dat keer 2, telt er 1 bij op, en dat dan weer keer 5’. Zo’n kijk op expressies kan het vinden van een eenvoudiger oplossing in de weg staan, omdat het stuk tussen de haakjes dan niet zo snel als een geheel wordt beschouwd. Op deze zogeheten proces-object dualiteit komen we in de volgende paragraaf nog terug. Bij het rekenen speelt deze dualiteit ook, maar in mindere mate omdat de uitkomsten in het algemeen gewoon kunnen worden uitgerekend. Dat is bij algebra niet het geval, en in die zin is algebra ook wezenlijk anders dan rekenen.
Een tweede mogelijke oorzaak is dat *visuele kenmerken* van expressies sterk de aandacht trekken en uitnodigen tot actie. In het eerste voorbeeld vragen de haakjes om $2z + 1$ er als het ware om uitgewerkt te worden; in de tweede vergelijking ‘schreeuwt’ het wortelteken in $\sqrt{1+u}$ er als het ware om gekwadrateerd te worden. Zolang een leerling zich niet los kan maken van de ‘aantrekkingskracht’ van deze in het oog springende (‘visualy salient’) kenmerken van een expressie, kan hij onvoldoende afstand nemen om het geheel te overzien.
Een derde mogelijke oorzaak kan het *gebrek aan flexibiliteit* zijn. Als leerlingen wel veel geoefend hebben met een beperkt repertoire aan basisvaardigheden, maar niet in staat zijn om in een nieuwe situatie een passende aanpak te vinden, staan ze al snel met lege handen. Het is dus van belang aandacht te besteden aan het kiezen van oplossingsstrategieën: welke aanpak is kansrijk in een bepaalde situatie, en waarom? Op deze wijze ontwikkelen leerlingen wendbaarheid, waarop ze kunnen terugvallen op het moment dat de standaardalgoritmen niet van toepassing zijn. Dit vraagt om de ontwikkeling van symbol sense naast het beheersen van basisvaardigheden.
Een vierde mogelijke oorzaak is het *gebrek aan betekenis* van algebraïsche expressies. Leerlingen kunnen een expressie als $5 \cdot (2z+1)$ beschouwen als een formeel rijtje symbolen, zonder dat dit voor hen iets betekent. De betekenis van zo’n algebraïsche expressie kan ontleend worden aan de context die daarvoor de aanleiding vormt, maar het is de vraag of dat voldoende is. Het streven is ook dat algebraïsche expressies voor leerlingen betekenis krijgen binnen de wereld van de algebra, bijvoorbeeld door een bijpassend denkmodel voor ogen te hebben. In het geval van $5 \cdot (2z+1)$ kan men denken aan een rechthoek met zijden 5 en $2z + 1$. Bij $v \cdot \sqrt{u} = 1 + 2v \cdot \sqrt{1+u}$ komt het van pas om die delen van de vergelijking, waarvan de precieze inhoud niet van belang is ‘af te dekken met bordjes’:

$$v \cdot \bigcirc = 1 + 2v \cdot \boxed{}$$

Hierdoor kan de lineaire structuur van de vergelijking in *v* beter worden herkend.
Een vijfde mogelijke oorzaak is het *gebrek aan oefeningen* waarin de vaardigheden en inzichten worden vastgelegd en onderhouden. De ontwikkelde vaardigheden zijn te weinig van pas gekomen of toegepast, waardoor er geen routine is ontstaan. Bij gebrek aan routine moet een leerling als het ware de procedure telkens weer reconstrueren. Dat kost energie en tijd en kan bovendien fouten met zich meebrengen.
Een zesde mogelijke oorzaak, ten slotte, is gelegen in het gebrek aan *overzicht van het beschikbare repertoire aan technieken* en de toepasbaarheid ervan in de probleemsituatie. Leerlingen zijn onvoldoende in staat afstand te nemen van het probleem om te zien welke strategie in de gegeven situatie het beste kan worden toegepast. Algebraïsche expertise houdt immers ook in dat je snel het probleem kunt scannen op toepasbaarheid van algebraïsche technieken uit je repertoire, dat je vooraf

al kunt voorspellen of die techniek je verder brengt, en dat je na de uitvoering van een stap kunt monitoren of die inderdaad wat heeft opgeleverd. Een expert heeft mentale schema's ontwikkeld die deze benadering mogelijk maken, maar de leerling in het algemeen nog niet.
De problemen die hierboven zijn gesignaleerd, en die overigens ook met elkaar samenhangen, staan model voor de moeilijkheden die bij het leren en onderwijzen van algebra een rol spelen. Vanuit het perspectief van de docent geven ze de didactische spanningen en dilemma's weer van het algebraonderwijs. Moeten leerlingen veel oefenen op standaardproblemen of juist getraind worden in inzichtelijke wendbaarheid? Kale oefeningen of ingeklede toepassingen? Blijven de achterliggende concepten en strategieën impliciet, of zijn die expliciet doel van het onderwijs? Betrouwbare basisroutines en algoritmen in een beperkt aantal situaties of probleemoplossende vaardigheden en heuristieken in een veelheid van situaties? In de volgende paragraaf wordt geschetst wat vakdidactisch onderzoek naar het leren van algebra heeft opgeleverd op de aangestipte punten.

4 Wat weten we al?

Wat leert vakdidactisch onderzoek ons op ten aanzien van de gesignaleerde problematiek? Dat is niet eenvoudig kort samen te vatten. Hieronder gaan we achtereenvolgens in op de aspecten die naar ons idee in de voorbeelden het meest in het oog springen: de dualiteit proces-object, op het vermogen met visuele kenmerken van expressies om te gaan, op de dimensie basisvaardigheden-symbol sense, op de betekenis van algebraïsche expressies, op het oefenen van vaardigheden en op de ontwikkeling van cognitieve schema's.

4.1 De dualiteit proces-object

Een eerste gesignaleerde moeilijkheid bij het leren van algebra is gelegen in het objectkarakter van algebraïsche expressies en formules. Aanvankelijk heeft een expressie of een formule voor leerlingen veelal het karakter van een *procesbeschrijving*, een rekenvoorschrift, recept of stappenplan. Denk aan een situatie van vaste en variabele kosten bij de loodgieter die voor komt rijden: *Reparatietijd* x 45 + 30 = *Kosten* geeft vanuit de procesoptiek aan hoe je uit de reparatietijd de kosten kunt berekenen. Als de reparatietijd 1,5 uur is, 'pak dan die 1,5, doe die keer 45, tel er 30 bij op, en die uitkomst is het bedrag'. De tekens +, x en = hebben in de ogen van de leerling een actiekarakter en sporen aan tot het uitvoeren van berekeningen. De variabele *Kosten* staat niet voor niets achteraan in de formule. Zo zijn leerlingen dat vanuit het rekenonderwijs ook gewend.
Met dit beeld van formules en expressies kom je in de algebra echter niet ver. Vaak valt er niets uit te rekenen. Een formule als $(a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$ heeft geen proceskarakter; er wordt aangegeven dat de uitdrukkingen links en rechts van het gelijkheidsteken gelijkwaardig zijn. Het gelijkheidsteken staat niet voor 'en dat geeft dan als uitkomst...' maar voor 'is equivalent met'[1]. In de formule $f(x) = (x-3)^2$ kan zowel het proces- als het objectkarakter benadrukt worden. In de proceskijk wordt $f(x)$ gezien als een voorschrift om bij een gegeven *x*-waarde een uitkomst uit te rekenen. Als object behoort de functie *f* tot de familie van kwadratische functies, waarbij gekeken kan worden naar specifieke eigenschappen van dit ene 'familielid'.

[1] In oudere algebramethoden wordt wel een speciale notatie voor equivalentie gebruikt

Het is dus van belang een expressie niet alleen als procesbeschrijving maar ook als *algebraïsch object* te beschouwen. Dit is bijvoorbeeld ook voorwaarde om de balansmethode van het oplossen van vergelijkingen werkelijk te begrijpen, want daarvoor moet je linker- en rechterlid als 'gewichten' beschouwen en niet als processen. In het geval van de kostenformule hierboven kan het objectaspect bijvoorbeeld worden opgeroepen door verschillende loodgieterbedrijven te vergelijken of door de klassen van kostenfuncties in beschouwing te nemen. Ook kan op het te vormen object een proces van hogere orde los worden gelaten. Denk aan het differentiëren van de kostenfuncties om de stijging te onderzoeken. De aldus ontwikkelde algebraïsche objecten fungeren als het ware als 'bouwstenen' voor verder algebraïsch rekenen en redeneren.
Het denken in algebraïsche objecten kent een hogere drempel dan de proceskant. Leerlingen vinden het bijvoorbeeld lastig om de expressie $x = 2a$ als oplossing van de vergelijking $4x^2 - 8a \cdot x = 0$ in x te accepteren, omdat 'je dan nog niet weet hoeveel x is'. Het is dus zaak ervoor te zorgen dat de objectkant in het onderwijs voldoende wordt belicht. Leerlingen moeten een algebraïsche expressie als proces én als object kunnen beschouwen en te kunnen inschatten welke blik op welk moment geschikt is. Flexibiliteit ten aanzien van procesdenken en objectdenken is belangrijk en verdient in het algebraonderwijs dan ook aandacht.
In de vakliteratuur wordt deze proces-object dualiteit op verschillende manieren benoemd. Tall en Thomas (1991) spreken van procept, een samentrekking van object en concept. Sfard (1991) noemt de overgang van proces naar object reïficatie of 'verdinglijking': de algebraïsche expressie moet een object, een 'ding' worden.

4.2 Visuele kenmerken van expressies

Leerlingen laten zich vaak leiden door visuele kenmerken van algebraïsche expressies en regels. In $(a.b)^2 = a^2.b^2$ bijvoorbeeld springen de haakjes en het kwadraat in het oog, waardoor het voor de hand ligt deze regel te generaliseren naar $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. Een dergelijke overgeneralisatie is verleidelijker naarmate de visuele gelijkenis groter is. Zo wordt een regel als $x^2 - y^2 = (x-y).(x+y)$ nauwelijks gegeneraliseerd naar $x^2 + y^2 = (x+y).(x+y)$, omdat de visuele gelijkenis tussen deze twee gelijkheden niet zo groot is. Kirshner (2004) spreekt in dit verband van visueel saillante regels of gelijkheden. Hieronder enkele voorbeelden.

Visueel saillante regels	Visueel niet saillante regels
$2(x-y) = 2x-2y$	$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$
$(xy)^2 = x^2y^2$	$(x-y)+(w-z) = (x+w)-(y+z)$
$(x^y)^z = x^{yz}$	$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$
$\frac{w}{x}.\frac{y}{z} = \frac{wy}{xz}$	$x.y^{-1} = \frac{x}{y}$

Figuur 3 Enkele voorbeelden van visueel (niet-)saillante regels

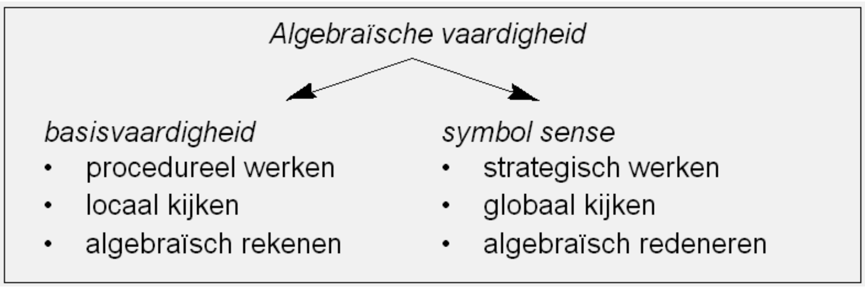
Ondanks het feit dat visueel niet saillante regels meer aandacht krijgen in het onderwijs, blijken leerlingen daarop toch slechter te scoren. Blijkbaar worden visueel saillante regels door leerlingen eenvoudiger goed toegepast. Oppervlakkige

strategieën zoals dicht bij elkaar staande getallen of variabelen samennemen loont bij deze regels. Zo kan een leerling bij $(xy)^2 = x^2 y^2$ zonder gevolgen denken aan het wegwerken van haakjes zoals dat bij $(x + y) \cdot 2 = x \cdot 2 + y \cdot 2$ gebeurt.
Zoals gezegd wordt er veel aandacht besteedt aan de moeilijke, visueel niet saillante regels. Erg veel resultaat lijkt dat niet te hebben. Pogingen van Kishner om regels zonder de visuele kenmerken te presenteren via een soort structuurschema, leidden ertoe dat de visueel niet saillante regels beter gehanteerd werden door leerlingen maar de visueel saillante regels minder. Anders dan in schoolboeken van vroeger zoals die van Bos en Lepoeter (1959) zien we in de huidige boeken veel aandacht voor visueel niet saillante regels terwijl de visueel saillante regels soms impliciet blijven.

4.3 Basisvaardigheid en symbol sense

Schoolalgebra omvat het uitvoeren van standaardprocedures, waarvan de belangrijkste het oplossen van eenvoudige vergelijkingen en het vereenvoudigen van uitdrukkingen zijn. Dat is *algebraïsche basisvaardigheid*, zeg maar algebraïsch rekenen (Kemme, 2002), het *weten dat* van de algebra. Het is duidelijk dat leerlingen een aantal basisbewerkingen geroutineerd en foutloos moeten kunnen uitvoeren.
Het gaat bij algebra echter om meer dan basisvaardigheden alleen. Denk bijvoorbeeld aan het kiezen van een strategie, het zien hoe basisvaardigheden kunnen worden toegepast en het redeneren met algebraïsche verbanden. Kemme spreekt in dit verband van algebraïsch redeneren. In de indeling van Van Streun (2001, zie ook katern 0 van dit handboek) valt dit onder het *weten hoe* en *weten waarom*. In zulke redeneringen spelen bijvoorbeeld symmetrieoverwegingen en randgevallen een rol, of het identificeren van ‘winnende factoren’ in een algebraïsch krachtenspel.
In de vakliteratuur wordt voor dit alles het begrip *symbol sense* gebruikt. Symbol sense is de algebraïsche expertise of ‘algebraïsche geletterdheid’ die, veelal op de achtergrond zonder dat we ons daarvan bewust zijn, de uitvoering van de basisroutines stuurt en het inzicht in onderliggende concepten omvat. Arcavi (1994, 2005) geeft een aantal voorbeelden van symbol sense. Het speelt een rol bij het plannen, coördineren en interpreteren van basisbewerkingen. Drijvers (2006abc) denkt bij symbol sense aan de volgende drie met elkaar samenhangende vaardigheden:

- *Strategische vaardigheden* en heuristieken om tot een probleemaanpak te komen, het vermogen om daarop overzicht te houden, om daarbinnen handige keuzes te maken of, als een strategie vastloopt, om een andere invalshoek te zoeken.
- Het vermogen om *globaal naar expressies en formules te kijken*, om de structuur van expressies en subexpressies te herkennen, om de betekenis van symbolen in de context te zien en om expressies op een andere manier weer te geven. Hierbij speelt de proces-object dualiteit een rol.
- Het vermogen tot *algebraïsch redeneren*. Denk hierbij aan veelal kwalitatieve beschouwingen over termen en factoren in expressies, aan symmetrieoverwegingen of redeneringen met randgevallen.



Figuur 4 Twee kanten van algebraïsche vaardigheid

Figuur 4 geeft de dimensie basisvaardigheid – symbol sense schematisch weer. Overigens kan het één niet zonder het ander: algebraïsch redeneren is pas goed mogelijk als je de bewerkingen enigszins in de vingers hebt en bij het algebraïsch rekenen is vaak ook enig redeneren nodig, zeker als de ‘automatische piloot’ hapert of de situatie afwijkt van de gebruikelijke. Zo merkt Van Streun op dat de tegenstelling tussen vaardigheid en inzicht niet bestaat:

Begrijpen maakt het leren van vaardigheden gemakkelijker, minder gevoelig voor fouten en het beklijft beter. Aan de andere kant is een zeker niveau van vaardigheden noodzakelijk om nieuwe wiskundige begrippen en methoden met begrip te leren en ontwikkelen. (Van Streun, 2006, p. 275)

Een van de lastige aspecten aan algebra is de combinatie van basisvaardigheden en symbol sense. Leerlingen kunnen zo gegrepen worden door de uitvoering van een basisprocedure, dat ze niet meer zien waartoe deze moet leiden of hoe deze handiger kan worden aangepakt. Het is dus zaak om aan het spectrum basisvaardigheid – symbol sense over de volle breedte aandacht te besteden. Het idee dat alle problemen met algebra kunnen worden opgelost door aan de ontwikkeling van basisvaardigheden te werken, kan daarmee als naïef worden afgedaan. Het ontbreken van symbol sense vaardigheden veroorzaakt mede de algebraïsche hulpeloosheid van de leerlingen; de ontwikkeling daarvan moet dus in het algebraonderwijs expliciet aan de orde komen.

4.4 De betekenis van algebraïsche expressies

In het Nederlandse algebraonderwijs vormen concrete, betekenisvolle situaties veelal de aanleiding voor algebra. Denk bijvoorbeeld aan het eerder gegeven voorbeeld van de kosten van een reparatie. Vragen rond een dergelijke context kunnen worden aangepakt met algebra, waarbij de betekenis van de expressies sterk gekoppeld is aan de context. Daar moet het echter niet bij blijven. De kracht van algebra is juist gelegen in het feit dat ze een wereld op zichzelf vormt, waarin operaties worden uitgevoerd zonder dat men steeds hoeft terug te vallen op een betekenis van buiten deze wereld:

In fact, from one point of view, this is one of the strengths of symbols – they enable us to detach from, and even “forget”, their referents in order to produce results efficiently. (Arcavi, 1994, p. 26)

Nadat een concreet probleem wordt vertaald in een wiskundig probleem, wat wel horizontaal mathematiseren wordt genoemd, ontstaat de behoefte aan abstractie: het

loslaten van de concrete context en opbouwen van een overstijgende wereld van algebraïsche objecten en operaties. Dat is moeilijk: het loslaten van een vertrouwd referentiekader en het opbouwen van een nieuw. Van Hiele (1973) spreekt in dit verband van de overgang van het grondniveau naar het eerste niveau, waarop een betekenisvol relatienetwerk van wiskundige objecten ontstaat. Als abstractie inderdaad plaatsvindt, dan wordt die abstracte wereld van de algebra steeds concreter, of liever gezegd betekenisvoller, voor de leerling. Door een proces van verticaal mathematiseren wordt de oorspronkelijk abstracte algebrawereld voor de leerlingen een betekenisvolle 'realiteit', die daarnaast ook functioneert bij het oplossen van concrete problemen. Bij het opbouwen van deze algebraïsche betekenis zijn denkmodellen, zoals het rechthoeksmodel voor producten van lineaire expressies en het balansmodel of het beeld van snijdende grafieken voor het oplossen van vergelijkingen, belangrijke hulpmiddelen. Zo geeft bijvoorbeeld het beeld van een parabool met minimum 5 en een horizontale lijn hoogte 3 onmiddellijk het inzicht dat de vergelijking $(x-2)^2+5=3$ geen oplossingen kan hebben.
Het opbouwen van een betekenisvolle algebrawereld is een belangrijk onderdeel van het leerproces. Voor de docent is de taak om door een uitgebalanceerd samenspel van horizontaal en verticaal mathematiseren dit proces op gang te brengen (Gravemeijer, 2005). Daarbij zijn goede vragen en opgaven van belang, waarin de nadruk gelegd wordt op algebraïsche kenmerken en relaties.

4.5 Het oefenen van vaardigheden

Het ontwikkelen, uitbouwen, onderhouden en oefenen van vaardigheden vraagt expliciete aandacht en tijd. Aan oefenen, zeker als het gaat om basisvaardigheden, kleeft echter ook het risico dat de betekenis van de algebraïsche activiteit ondersneeuwt onder het automatisme. Freudenthal formuleerde dit als volgt:

Advocates of insightful learning are often accused of being soft on training. Rather than against training, my objection to drill is that it endangers retention of insight. There is, however a way of training - including memorisation - where every little step adds something to the treasure of insight: training integrated with insightful learning. (Freudenthal, 1991)

Om de spanning tussen automatisch, routineus handelen enerzijds en inzichtelijk, betekenisvol handelen anderzijds het hoofd te bieden, pleiten we voor gevarieerde en geïntegreerde oefening, waarin inzicht en automatisme hand-in-hand gaan en waarin basisvaardigheden en symbol sense simultaan worden aangesproken. Dergelijke oefeningen kunnen bestaan uit rijtjes goed gekozen opgaven, maar daarnaast kunnen ook andere vormen aan bod komen, zoals het productief oefenen, waarbij de nadruk meer ligt op produceren dan op reproduceren (Kindt, 2003). Ook kan worden geoefend door veel voorkomende fouten expliciet aan de orde te stellen, of door leerlingen uit te dagen een overtuigend ogende foutieve algebraïsche aanpak te bedenken. Ook bij de behandeling van nieuwe onderwerpen en toepassingen, zoals analytische meetkunde of regels voor differentiëren, kunnen algebraïsche vaardigheden worden geoefend en onderhouden. De opgave in figuur 5 is een voorbeeld van een algebraïsche exercitie, die tevens inzicht in de samenhang tussen de regels voor differentiëren biedt.

De productregel voor differentiëren kan als volgt uit de kettingregel worden afgeleid (Drijvers, 2006a). We korten $f(x)$ en $g(x)$ af tot f respectievelijk g en werken het kwadraat van de som van f en g uit:

$$(f+g)^2 = f^2 + 2\cdot f\cdot g + g^2$$

Links en rechts differentiëren met de kettingregel geeft:

$$2(f+g)\cdot(f'+g') = 2f\cdot f' + 2(f\cdot g)' + 2g\cdot g'$$

Na deling door 2 en uitwerken van haakjes blijft er over:

$$f'\cdot g + f\cdot g' = (f\cdot g)'$$

Figuur 5 Afleiding van de productregel uit de kettingregel

Samengevat is het oefenen en onderhouden van algebraïsche vaardigheden van groot belang. We pleiten in het algemeen voor inzichtelijke oefeningen, waarin ook de onderliggende inzichten en symbol sense vaardigheden worden onderhouden.

4.6 De ontwikkeling van schema's

In de vorige paragraaf is aangegeven dat het van belang is een probleemsituatie te scannen op toepasbaarheid van technieken uit het beschikbare repertoire van algebraïsche procedures. Deze vorm van algebraïsche expertise maakt het mogelijk om probleemsituaties sneller te herkennen en beter te doorzien, en om de voortgang tijdens het oplossingsproces beter te monitoren. Een 'algebra-expert' is dan ook in staat om te voorspellen wat het effect van een bepaalde oplostechniek zal zijn, en om te beoordelen of het de moeite waard zou kunnen zijn om die uit te voeren. Een dergelijke verzameling van samenhangende begrippen, procedures en strategieën wordt door Skemp (1971) een mentaal schema genoemd. Zo'n mentaal, cognitief schema is een weerslag van een stukje algebraïsche expertise, en het leren van leerlingen behelst dus in feite de ontwikkeling van dergelijke schema's.
Een *schema* is dus een verzameling met elkaar verweven hiërarchische relaties, zeg maar een cognitief netwerk van wiskundige objecten en technieken (zie ook Katern 0). Goede leerlingen ontwikkelen in het huidige onderwijs zelf nieuwe schema's die hen helpen informatie te structureren en die lijken op schema's van experts. Bij een grote groep leerlingen ontstaan dergelijke 'expertschema's' echter onvoldoende of fragmentarisch, tenzij daaraan aandacht wordt besteed. Een van de doelen van het algebraonderwijs zal dus de ontwikkeling van dergelijke schema's zijn. Deze ontwikkeling, waarin logisch redeneren en ordenen een rol speelt, verdient expliciete aandacht in het onderwijs (Landa, 1976, 1983).
In het bovenstaande is een zestal aspecten aan de orde gekomen die bij het leren van algebra een belangrijke rol spelen: de dualiteit proces-object, het vermogen met visuele kenmerken van expressies om te gaan, de dimensie basisvaardigheden-symbol sense, de betekenis van algebraïsche expressies, het oefenen van vaardigheden en de ontwikkeling van schema's. Deze aspecten staan niet op zichzelf, maar kunnen elkaar versterken. Een goed inzicht in de betekenis van een algebraïsche uitdrukking helpt bijvoorbeeld bij het omgaan met de visuele kenmerken, en een goed schema voor het vereenvoudigen van expressies bevat zeker ook symbol sense kenmerken. De zes aspecten verschillen echter in reikwijdte. Waar de dualiteit proces-object, de betekenis van algebraïsche expressies en de beheersing van vaardigheden aspecten zijn met een plaatselijk karakter, zijn met name de aspecten van symbol sense en schemaontwikkeling eerder globaal: symbol sense omvat bijvoorbeeld het omgaan

met visuele kenmerken van expressies, en in een schema zijn veelal basisvaardigheden en symbol sense vaardigheden met elkaar verweven.
In het vervolg van dit katern worden de geschetste bevindingen uit vakdidactisch onderzoek naar het leren van algebra toegespitst op één specifiek onderwerp, namelijk het oplossen van vergelijkingen. De vraag is hoe we onderwijs over dit onderwerp kunnen ontwerpen dat rekening houdt met de hiervoor genoemde aspecten. Daarbij staat het idee van schemaontwikkeling centraal.

5 Ontwerpen van onderwijs over vergelijkingen

Het oplossen van vergelijkingen is een onderwerp dat in het voortgezet onderwijs op verschillende plaatsen terugkomt. Verschillende oplostechnieken passeren de revue, van informeel tot formeel, en het repertoire aan vergelijkingen dat leerlingen moeten kunnen oplossen breidt zich uit van eenvoudige lineaire vergelijkingen tot goniometrische en exponentiële vergelijkingen. Aanvankelijk is het oplossen van vergelijkingen een zelfstandig onderwerp, terwijl het later aan de orde komt in context, bijvoorbeeld bij het zoeken van een extreme waarde van een functie. Bij het oplossen van vergelijkingen komen bovendien ook vereenvoudigingstechnieken van pas. Al met al dus een belangrijk en complex onderwerp in de schoolalgebra. Een eerste stap in het denken over onderwijs in het oplossen van vergelijkingen is het concretiseren van de hierboven beschreven zes aspecten van algebraonderwijs.

5.1 Toespitsing van de zes aspecten op het oplossen van vergelijkingen

Wat betekenen de bespiegelingen van de vorige paragraaf voor het ontwerpen van onderwijs over vergelijkingen? We lopen de zes genoemde aspecten langs.

De dualiteit proces – object
De dualiteit proces – object doet ons realiseren dat het van belang is dat leerlingen een vergelijking als proces én als object kunnen zien. Het zoeken van de oplossing door gericht proberen (“trial-and-improve”, inklemmen) en het invullen van een vermoedelijke oplossing ter controle achteraf veronderstelt een proces-kijk.
De object-kijk komt naar voren in de balansmethode of weegschaalmethode, waarin op het linker- en rechterlid van de vergelijking eenzelfde bewerking wordt uitgevoerd. Het linker- en rechterlid zijn dan algebraïsche objecten die ‘onderworpen worden’ aan een operatie. Ook speelt de object-kijk een rol wanneer verschillende typen vergelijkingen worden onderscheiden. Dit leidt tot het besef van ‘families’ van vergelijkingen, waarvan een specifieke vergelijking lid is.

Visuele kenmerken van expressies
Om een verstandige keuze te maken uit het repertoire van beschikbare oplossingstechnieken, is het nodig om een vergelijking te kunnen scannen op opvallende visuele kenmerken, die mogelijk een aanwijzing voor een eerste stap geven. De gevoeligheid voor die visueel saillante kenmerken moet daarentegen weer niet zo groot zijn, dat de verleiding om bijvoorbeeld een wortel weg te werken onweerstaanbaar wordt, zoals in het voorbeeld van Wenger het geval was. Het kan geen kwaad leerlingen te confronteren met vergelijkingen met ‘verleidelijke’ visuele cues, waarbij echter eerst goed gekeken en nagedacht moet worden voordat men zich op het algebraïsche rekenwerk stort.

Basisvaardigheid en symbol sense
Bij het oplossen van vergelijkingen bestaan de basisvaardigheden uit bewerkingen als ‘links en rechts hetzelfde doen’ en algebraïsche operaties als haakjes uitvermenigvuldigen, kwadrateren, worteltrekken, ontbinden in factoren, … Het is van belang dat leerlingen zich bewust zijn van mogelijkheden en onmogelijkheden van dergelijke manipulaties. Explicitering van rekenregels, inclusief hun beperkingen, lijkt daarbij noodzakelijk.
Symbol sense vaardigheden zijn noodzakelijk om basisvaardigheden te initiëren, te ondersteunen, te sturen en te monitoren, en om verstandige strategische keuzes te maken. Het is dan ook verstandig met leerlingen stil te staan bij een vergelijking zonder enige actie te ondernemen, maar hen te laten formuleren wat het verwachte effect van een actie zal zijn en waarom dat al dan niet wenselijk is.

De betekenis van algebraïsche expressies
Om een vergelijking betekenis te geven voor de leerling is het van belang om met concrete problemen te starten. Denk aan situaties met omslagpunten, in contexten waarin twee opties worden vergeleken. De eerste oplossingsstrategieën kunnen informeel en contextgebonden zijn. Ook het aanreiken van denkmodellen kan betekenisbevorderend werken. Denk bijvoorbeeld aan het rechthoeksmodel bij het uitwerken van haakjes; aan het beeld van de weegschaal of aan het beeld van twee snijdende grafieken bij het oplossen van een vergelijking. Geleidelijk aan zullen metavragen, die gericht zijn op de typen vergelijkingen zelf, de oplosstrategieën en het redeneren daarmee, aanleiding zijn tot de vorming van een ‘algebrawereld’ die meer los staat van concrete situaties en waarin betekenisvolle relaties bestaan. Een vraag als ‘van welk type is deze vergelijking en op welke manieren zou je die kunnen aanpakken’ appelleert hieraan.

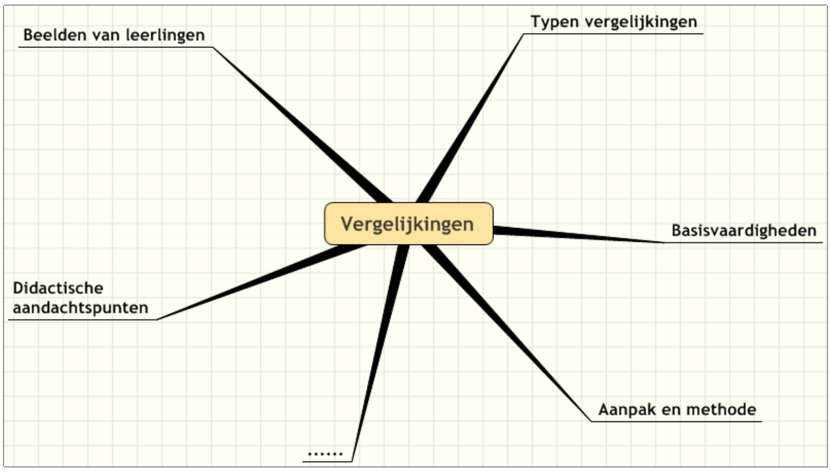
Het oefenen van vaardigheden
In oefeningen moeten zowel de basisvaardigheden (*weten dat*) als de symbol sense (*weten hoe*, *weten waarom* en *weten over weten*) aan bod komen. Verschillende typen oefeningen zijn dan ook gewenst: rijtjessommen en oefeningen die leerlingen niet op de automatische piloot kunnen maken, toepassingsgerichte en kale oefeningen, oefeningen die zich richten op de uitvoering van basistechnieken en oefeningen die juist de coördinatie van verschillende basistechnieken betreffen, oefeningen die een beroep doen op bestaande kennis en oefeningen die uitdagen tot de uitbreiding daarvan. Door een geschikte mix van oefeningen aan te bieden, gaat de ontwikkeling van routine hand in hand met het opbouwen van nieuwe kennis.

De ontwikkeling van schema’s
Naast de aandacht voor de verschillende methoden bij het oplossen van vergelijkingen kan het groeperen van de verschillende oplossingsmethoden de schemaontwikkeling bevorderen: welke typen vergelijkingen, welke oplossingsmethoden lijken op elkaar? Ook is het van belang dat leerlingen op termijn leren efficiënte oplossingsmethoden te kiezen.
Door de expliciete aandacht voor structurering van de ‘probleemruimte’ kunnen leerlingen cognitieve schema’s ontwikkelen waarmee ze de voorkomende vergelijkingen herkennen en betekenis geven, en waarin ze nieuwe oplossingsmethoden kunnen integreren. Het gaat hier niet om een kant-en-klare structurering, die leerlingen aangereikt krijgen en memoriseren, maar om

‘bouwmateriaal’ voor een mentaal schema dat in de loop van de tijd actief wordt opgebouwd, aangepast en uitgebreid.

5.2 Een kennisgraaf voor de het oplossen van vergelijkingen

Een eerste stap in het doordenken van een didactisch ontwerp van onderwijs kan het maken van een kennisgraaf zijn (Zwaneveld, 1999). In zo’n kennisgraaf of mindmap krijgen verschillende aspecten van het leren en onderwijzen van het onderwerp een plaats. Daarmee vormt de kennisgraaf het uitgangspunt voor het verdere ontwerp. Fig. 5 toont een begin van een dergelijke kennisgraaf voor het onderwerp vergelijkingen.



Figuur 6 Begin van een kennisgraaf voor het onderwerp vergelijkingen

Opdracht voor de lezer
Maak uitgaande van figuur 6 een kennisgraaf voor het oplossen van vergelijkingen. Gebruik daarbij de volgende aspecten maar breid de graaf desgewenst ook uit:

- typen vergelijkingen die aan de orde komen;
- basisvaardigheden voor het oplossen van vergelijkingen;
- aanpak en methode die aan de orde komen;
- beelden die leerlingen bij vergelijkingen ontwikkelen;
- didactische aandachtspunten voor de docent.

5.3 Aanpak van vergelijkingen in de onderbouw

Een repertoire aan basisvaardigheden
In de onderbouw spelen functies met de bijbehorende representaties tabel, grafiek en formule een belangrijke rol. Na de introductie van (woord)formules komen vergelijkingen aan bod. De schoolboeken kennen daarbij een stapsgewijze opbouw, die terug te zien is in de titels van de paragrafen. In een van de veelgebruikte methoden in Nederland zien we bijvoorbeeld de volgende hoofdstukopbouw op weg naar de ontwikkeling van een repertoire van basisvaardigheden:

1. Zoek de oplossing
   Er wordt gestart met het probleem “Kies een getal; vermenigvuldig dit getal met 3; tel bij de uitkomst 9 op; vertel me wat de uitkomst is, dan zeg ik je welk getal je gekozen had.”
   Ook komen er problemen aan bod als “4 zakken wegen evenveel als 1 zak en 3 kg; hoeveel weegt 1 zak?”

2. Snijdende lijnen
   Bij het snijpunt geeft de vergelijking van de ene lijn dezelfde uitkomst als de vergelijking van de andere lijn.
3. Links en rechts hetzelfde
   Gebruik de balansmethode om de oplossing van de vergelijking te vinden.
4. Vergelijkingen oplossen
   Hierin staat hoe je vergelijkingen oplost met de onbekende aan beide kanten van het gelijkteken:
   - Werk onbekende naar één kant door links en rechts hetzelfde te doen.
   - Werk vervolgens met pijlenketting of bordjesmethode of doe links en rechts hetzelfde.

Op deze manier ontstaat een repertoire van basisvaardigheden met bijbehorende beelden of denkmodellen. Een dergelijke Deze stapsgewijze opbouw zien we ook terug bij Bernard en Cohen (1988). Zij onderscheiden vier basistechnieken:

- De trial-and-improve methode
  Gok een waarde voor de onbekende en controleer de uitkomst. Op basis daarvan kan een verbeterde gok worden gemaakt.
  Voorbeeld
  $2x-3=11$
  Kies x = 5 → 2.5–3 = 7 te laag
  Kies x = 9 → 2.9–3 = 15 te hoog
  Kies x = 7 → 2.7–3 = 11 goed
- De omkeermethode
  Je inverteert de gevolgde rekenstappen in de pijlenketting van achter naar voren en keert zo vanuit de uitvoer terug naar de oorspronkelijke invoer.
  Voorbeeld
  $2x-3=11$
  De pijlenketting $x \xrightarrow{\text{keer } 2} 2x \xrightarrow{\text{min } 3} 2x-3$ geeft uitkomst 11.
  Terug, dus startend met 11 krijg je dan:
  11 $\xrightarrow{\text{plus } 3}$ geeft 14 $\xrightarrow{\text{gedeeld door } 2}$ geeft 7.
- De bordjesmethode
  Leg de hand op een deel van de vergelijking en breng die daarmee terug tot eenvoudigere vergelijking. Deze methode benadrukt het objectkarakter van deelexpressies.
  Voorbeeld
  $2x-3=11$
  $(...)-3=11$
  Dus (…) moet 14 zijn dus x = 7
- De balansmethode
  Je doet steeds ‘links en rechts hetzelfde’ om een equivalente, maar eenvoudiger vergelijking te maken zonder dat er oplossingen verloren gaan of bijkomen.
  Dit vraagt om strategisch handelen zodat de onbekende wordt geïsoleerd of ‘vrijgemaakt’.
  Voorbeeld
  $2x-3=11$, links en rechts 3 optellen
  $2x=14$, links en rechts delen door 2 geeft x = 7.

Er zit een zekere stapeling in de technieken: bij elke volgende heb je kennis van de vorige techniek nodig. Deze basisvaardigheden blijven echter naast elkaar nodig en zullen dan ook onderhouden moeten worden.

Opdracht voor de lezer
Ga in een van de schoolmethodes, bij voorkeur een die op de eigen school wordt gebruikt, na in hoeverre de vier methoden van Bernard en Cohen aan de orde komen, in welke volgorde, en in welke mate van formalisering.

Een begin van een categorisering van typen vergelijkingen
Na deze basistechnieken bij lineaire vergelijkingen komen veelal de tweedegraads vergelijkingen aan bod. Ook hier kennen de schoolboeken verschillende manieren van probleemaanpak (zie figuur 7).

Hoe los je een tweedegraads vergelijking op?

1 Kijk goed of er een makkelijke manier is om de vergelijking op te lossen.

VOORBEELD		
$(2x-3)(x+1)=0$	$(x+2)^2=9$	$2x^2+4x=0$
$2x-3=0$ of $x+1=0$	$x+2=3$ of $x+2=-3$	$2x(x+2)=0$
$2x=3$ of $x=-1$	$x=1$ of $x=-5$	$2x=0$ of $x+2=0$
$x=1\frac{1}{2}$ of $x=-1$		$x=0$ of $x=-2$

2 Herleid indien nodig op nul en ontbind vervolgens in factoren of gebruik de *abc*-formule.

VOORBEELD	
$3x^2+3x=18$	$x^2-5x-1=0$
$3x^2+3x-18=0$	$a=1, b=-5, c=-1$
$x^2+x-6=0$	$D=(-5)^2-4\times1\times-1=29$
$(x-2)(x+3)=0$	$x=\frac{5+\sqrt{29}}{2}\approx5{,}19$ of $x=\frac{5-\sqrt{29}}{2}\approx-0{,}19$
$x=2$ of $x=-3$	

Figuur 7 Tweedegraads vergelijkingen in een van de schoolmethoden

Hierna komen dan verschillende nieuwe typen vergelijkingen apart aan de orde, zoals veeltermvergelijkingen en gebroken vergelijkingen. Wat in de schoolboeken echter ontbreekt is een expliciete vergelijking van de verschillende typen vergelijkingen en de bijbehorende oplossingsstrategieën. Bij elk nieuw type vergelijking is het aan de leerlingen om deze nieuwe informatie zelf te verwerken en te integreren in een samenhangend schema. De vraag is of dit de gemiddelde leerling lukt zonder expliciete aandacht in het onderwijs. Generalisatie en formalisering blijven eveneens achterwege, terwijl deze voor de vorming van een veelzijdig cognitief schema wel van belang zijn.
Sommige methoden van vroeger besteden overigens wel expliciet aandacht aan strategische perspectieven en formalisering. In Bos & Lepoeter (1959, deel II) wordt

bijvoorbeeld de regel ‘uit $A \cdot B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$’ genoemd en vervolgens geoefend en toegepast in vragen als: ‘Wat volgt er uit $A \cdot B \cdot C = 0$? ’en ‘Los op $(x-1)\cdot(x-2) = 6$ ’.
Dan gaat het via $(x-5)\cdot(2x-7) = 4\cdot(2x-7)$ verder naar de regel ‘uit $A \cdot B = A \cdot C$ volgt
$A = 0$ of $B = C$’, waarbij vergelijkingen als
$(x^2-7x+12)\cdot(8x-11) = (x^2-7x+12)\cdot(3x+14)$ niet geschuwd worden. Door deze opdrachten worden leerlingen gedwongen hun kennis in nieuwe situaties toe te passen, waardoor deze kennis zich verdiept. De strategie van het oplossen staat centraal, wordt expliciet gemaakt en geformaliseerd.
Om de schemaontwikkeling te bevorderen kan in de onderbouw behalve aan basistechnieken ook aandacht worden besteed aan een beginnende categorisering. Voor het einde van klas 3 van havo en vwo zou het leerdoel dan kunnen bestaan uit geschikte beelden van vergelijkingen (de balans, het snijpunt van grafieken), uit de basisvaardigheden zoals hierboven beschreven, en een begin van een categorisering van typen en methoden die de volgende typen vergelijkingen zou kunnen omvatten.

1. Vergelijkingen van het type $A^2 = B^2$, bijvoorbeeld $(x+1)^2 = (2x-3)^2$.
2. Vergelijkingen van het type $A^2 =$ *getal*, bijvoorbeeld $(x+2)^2 = 6$.
3. Vergelijkingen waarin hetzelfde ‘bordje’ meerdere keren voorkomt, bijvoorbeeld $(x+3)^2-(x+3)-6=0$.
4. Vergelijkingen waarin ‘product=0’ gebruikt wordt, eventueel na ontbinden in factoren, bijvoorbeeld $2\cdot(x-3)\cdot(2x-8)=0$, $2x^2-6x=0$ en $x^2-6x-40=0$.
5. Vergelijkingen die worden opgelost met de abc-formule, zoals $2x^2-x-5=0$.

De leerlingen kunnen dan ook niet-standaardvergelijkingen zoals $2\cdot(x-1)^2-7=10$ of $2x^2-8=-3x^2+10$ herleiden tot type 2 en vergelijkingen zoals $3(x-4)(2x+9)=0$, $6x^2=15x$ of $x^2-2x=80$ tot type 4.

Onderbouwing in de onderbouw
Natuurlijk moeten de oplossingsmethoden ook onderbouwd worden. Speciale aandacht in dit verband vraagt de abc-formule. Van oudsher werd deze afgeleid via het kwadraatafsplitsen. De laatste jaren is deze afleiding in de schoolboeken veelal naar de extra opgaven verwezen. De afleiding kan echter helpen de techniek betekenis te geven. Een alternatief voor het kwadraatafsplitsen is de methode van de Babyloniërs. Dit is een generalisatie van het ontbinden in factoren. Het linkerdeel van de vergelijking $x^2+p\cdot x+q=0$ wordt ontbonden door te zoeken naar x_1 en x_2 waarvoor geldt dat $x_1+x_2=p$ en $x_1.x_2=q$. Door de keuze $x_1=\frac{1}{2}p+k$ en $x_2=\frac{1}{2}p-k$ krijg je $x_1\cdot x_2=(\frac{1}{2}p+k)\cdot(\frac{1}{2}p-k)$ waarmee je k in p en q kunt uitdrukken. Daarmee is de ontbinding gevonden. Zie hiervoor bijvoorbeeld het zebraboekje ‘Babylonische wiskunde’ (Kindt en Van de Roest, 2005).

5.4 Aanpak van vergelijkingen in de Tweede Fase van havo en vwo

In de Tweede Fase van havo en vwo worden vergelijkingen die bij nieuwe onderwerpen naar voren komen – denk aan vergelijkingen met exponentiële, logaritmische en goniometrische functies – geleidelijk in het bestaande schema ingepast. Daarmee zullen docenten in de onderbouw bij het opbouwen van schema's al op moeten anticiperen. Skemp (1971) geeft aan dat bestaande schema's zich lastig laten veranderen en dat al in vroeg stadium rekening gehouden moet worden met toekomstige uitbreidingen.
Verder blijft de 'kunst' van het oplossen van vergelijkingen in de Tweede Fase niet beperkt tot de genoemde basistechnieken en -categoriën. Wat van belang is, is om deze te kunnen combineren, om te kunnen herkennen op welk type vergelijking welke techniek van toepassing is, en om bij het toepassen van een basistechniek het spoor van de globale oplosstrategie niet uit het oog te verliezen. Zo omvat het schema dus meer dan de technieken alleen. Bij de ontwikkeling van een dergelijk schema kan het leerlingen helpen om te benadrukken hoe vergelijkingen systematisch kunnen worden aangepakt en samen met hen een structuur van oplossingsstrategieën te ontwerpen.

Het structureren van het oplossen van vergelijkingen
Bijlage 1 bevat bij wijze van illustratie een mogelijke structurering van de typen vergelijkingen en bijbehorende oplosmethoden die in de Tweede Fase van havo en vwo voorkomen. Deze voorbeeldmatige structurering van typen vergelijkingen en oplossingsmethoden is door een docent in samenspraak met een aantal goede leerlingen gemaakt.
De vergelijkingen en methoden zijn in deze bijlage ingedeeld in zes categorieën. Om deze op te lossen, worden in de rechterkolom van de tabel veelal de hierboven onderscheiden basisvaardigheden toegepast. Vergelijkingen die direct passen in een van de zes categorieën noemen we standaardvergelijkingen; andere vergelijkingen zijn non-standaard. Merk op dat bij deze standaardcategorieën nieuwe kennis ten opzichte van de onderbouw is geïntegreerd. Zo speelt bij het categorie 1, het 'wegdenken' van de laatste bewerking, de monotonie of inverteerbaarheid van functies een rol. Het mentale schema behelst dus meer dan het 'trucje' maar omvat tevens de wiskundige concepten en beelden.

De aanpak van het oplossingsproces
Het oplosproces van een vergelijking kan dan als volgt verlopen. Eerst wordt gekeken in welke categorie de vergelijking past, of na herleiding zou kunnen passen. Bij de herleidingen worden handelingen gebruikt als 'links en rechts vermenigvuldigen, delen, optellen, aftrekken', 'haakjes wegwerken', 'volgorde van bewerkingen veranderen', 'bij elkaar nemen of splitsen', en specifieke rekenregels van bijvoorbeeld machten, sinus of logaritme. Dit leidt tot een standaardvergelijking, die volgens de gebruikelijke methode wordt aangepakt. Levert dit weer een vergelijking op, dan start met deze nieuwe vergelijking weer de eerste stap van het proces. Het oplossen is dus een iteratief proces. Zo ontstaat de volgende gestructureerde aanpak om vergelijkingen op te lossen (zie figuur 8).

Stap 1	Identificatiealgoritme Bepaal tot welke categorie de vergelijking hoort of kan horen; werk in dit laatste geval de vergelijking om zodat de vergelijking past bij een categorie
Stap 2	Oplossingsalgoritme Los de standaardvergelijking op volgens de aangegeven oplossings-methode.
Stap 3	Eventueel herhalingsstap Als je weer op een vergelijking uitkomt, begin je weer bij het identificatiealgoritme.

Figuur 8 Gestructureerde aanpak om vergelijkingen op te lossen

Bij de verschillende stappen komen de verschillende soorten weten aan bod. Bij de identificatie speelt symbol sense, onder andere in de vorm van globaal kijken naar vergelijkingen, een rol. Bij het omwerken van vergelijkingen naar standaardvergelijkingen is symbol sense in de vorm van strategisch werken vereist. *Weten hoe, weten waarom* en *weten over weten* zijn dus nadrukkelijk en in samenhang van belang. Ook kennis van rekenregels en basisvaardigheden, *weten dat* is onmisbaar. Bij het gebruiken van de oplossingsalgoritmen in de tweede stap is er sprake van algebraïsche basisvaardigheden, dus *weten dat.*
De structuur van de zes categorieën vergelijkingen dient ter ondersteuning van de schemaontwikkeling en heeft een drievoudige functie. Ten eerste kent de leerling per categorie oplossingsalgoritmen, die op detailniveau nog wat verschillen. Denk bijvoorbeeld aan het 'wegdenken' bij categorie 1. Daarmee wordt dus het oplosrepertoire uitgebreid. Ten tweede geven de categorieën richting aan het herleiden van non-standaard vergelijkingen tot vergelijkingen waarmee de leerling wel uit de voeten kan. Ten derde is de zoekruimte van de leerlingen bij het oplossen van vergelijkingen veel minder groot geworden: er zijn maar zes categorieën waar de leerling zich op hoeft te richten. De indeling geeft de leerlingen een ´bril´ om gericht naar vergelijkingen te kijken. Overigens zijn de zes categorieën niet disjunct en in zekere zin redundant.
Deze aanpak is gebaseerd op het werk van Landa (1983) die een algoritmisch-heuristische aanpak voorstaat, waarin het proces in elementaire stappen opgedeeld en expliciet gemaakt wordt en vervolgens geautomatiseerd wordt.

Voorbeelden van andere manieren van oefenen
Zoals al eerder opgemerkt, zou de ontwikkeling technische vaardigheden niet los moeten staat van de ontwikkeling van symbol sense. Daarom is het nodig dat ook opgaven van een ander type dan 'los op' in het leertraject van vergelijkingen aan de orde komen. We geven enkele voorbeelden ter inspiratie.

1. De prijs van de algebra
   In de context van 'De Prijs van de Algebra' (zie bijlage 2 uit Kindt, 2003) kan een aantal interessante vragen worden gesteld, zoals:
   - Onderzoek de prijs van de twee gelijkwaardige expressies $2n^2+16n-2$ en $2n\cdot(n+8)-2$.

- Toon aan dat $x^2 - 6x + 5$, $x(x-6)+5$, $(x-5)(x-1)$, $(x-3)^2+4$ steeds dezelfde uitkomsten geven en bereken de prijs van deze expressies.
- Verzin verschillende gelijkwaardige expressies bij $2(x-3)^2 - 18$ en bereken van alle expressies de prijs.

2. Onderzoeksopdrachten
   Leerlingen kunnen worden uitgedaagd om zelf oplossingsalgoritmen 'uit te vinden' en te expliciteren. Met behulp van grafische software kunnen leerlingen het aantal oplossingen bepalen van vergelijkingen als
   $(a.x+b)^2 = (c.x+d)^2$ (categorie. 1), $(a.x+b)^2 = c$ (categorie 2) en
   $a(x-b)(x-c) = 0$ (categorie 4).
   Vervolgens kunnen de leerlingen oplossingsstrategieën ontwerpen en expliciteren. Het eindresultaat is een oplossingsalgoritme zoals bijvoorbeeld in bijlage 1 verwoord is.
3. Toepassen
   Natuurlijk is het ook van belang om te kijken naar de toepassingen van de typen vergelijkingen waarvoor leerlingen oplossingsschema's ontwikkelen. Je kunt denken aan een aantal toepassingsopdrachten waarin vergelijkingen in authentieke contexten van binnen en buiten de wiskunde aan de orde komen. Denk bijvoorbeeld aan natuurkunde, economie en kunst, maar ook aan meetkundige situaties waarin algebraïsering tot bekende vergelijkingen leidt.
4. Gevarieerde en geïntegreerde oefening
   Variatie in oefening is belangrijk. Als leerlingen kennis gemaakt hebben met de verschillende categorieën en de bijbehorende oplossingsalgoritmen, kunnen leerlingen oefenen in het indelen van nieuwe vergelijkingen in de verschillende categorieën. Hier spelen symbol sense en strategische aanpak een belangrijke rol. Dit geldt ook voor het herleiden tot standaardvergelijkingen. Explicitering en verantwoording van gemaakte keuzes zijn hier belangrijk. Behalve open vragen kunnen ook meerkeuzevragen of matchingsopgaven een rol spelen. Ook kan gedacht worden aan spelvormen zoals kwartetten. Daarbij bestaat een kwartet uit de verschillende stappen van het oplossingsproces van een bepaalde vergelijking. Bijvoorbeeld vormen de volgende kaarten een kwartet: $2(x-1)^2 - 2 = 16$,
   $(x-1)^2 = 9$, $x-1=3 \vee x-1=-3$ en $x=4 \vee x=-2$. Leerlingen leggen alle kaartjes op tafel en zoeken de goede viertallen bij elkaar. Het spel verloopt verder zoals gewoon kwartetten.
   Daarnaast is het van belang dat het oplossen van vergelijkingen ook wordt geïntegreerd in een groter verband, zoals het bepalen van de nulpunten van de afgeleide bij het zoeken van extreme waarden.
5. Beelden bij vergelijkingen
   In oefeningen kan ook aandacht besteedt worden aan verschillende beelden die de leerling bij een vergelijking heeft. Leerlingen krijgen bijvoorbeeld onderstaande tabel met in het midden een vergelijking. De opdracht bestaat uit een aantal vragen: bedenk een context die tot deze vergelijking leidt; maak een grafische weergave die bij deze vergelijking past; los de vergelijking op; en formuleer welke vergelijkingen dezelfde structuur hebben.

Context		Grafische weergave
	Vergelijking $2(x-1)^2+4=10$	
Oplossingsmethode van vergelijking (in welke categorie)		Voorbeelden van verwante vergelijkingen, die tot dezelfde categorie behoren

Figuur 9 Voorbeeld om beeldvorming door leerlingen bij vergelijkingen te stimuleren

Vergelijkingen samengevat
Samengevat pleiten we ervoor om in het ontwerp van onderwijs rond vergelijkingen de ontwikkeling van mentale schema's op verschillende manieren te bevorderen: door te aanbrengen van een repertoire aan basisvaardigheden, door het structuren van de typen van vergelijkingen die aan de orde komen, door het expliciteren van oplossingsstrategieën, door het variëren van oefeningen en door het ontwikkelen van beelden die passen bij de probleemaanpak.

6 Conclusie

De vraag die in dit katern centraal staat luidde:

Wat is een effectieve en efficiënte didactiek voor het leren en onderhouden van algebraïsche vaardigheden?

Wat kunnen we, terugkijkend, als antwoorden formuleren? Allereerst is gesteld dat algebra belangrijk is en blijft. De gestelde vraag is dus zeker relevant.
Vervolgens is aan de hand van fouten die leerlingen maken een aantal didactische aandachtspunten voor het algebraonderwijs in het algemeen gedestilleerd:
- De dualiteit proces – object
- Visuele kenmerken van expressies en explicitering van rekenregels
- Basisvaardigheid en symbol sense
- De betekenis van algebraïsche expressies
- Het oefenen van vaardigheden
- De ontwikkeling van schema's

Als docent kan het dus nuttig zijn om bij de voorbereiding van onderwijs in de algebra na te gaan of en op welke manier deze punten van belang zijn. Hoe zie je proces- en objectkarakter terug, en wat wordt van leerlingen op dit punt verwacht? Welke cues of afleiders springen in het oog bij de expressies of formules die aan de orde komen? Om welke vaardigheden, maar ook om welke inzichten en beelden gaat het? Hoe kunnen de algebraïsche objecten en procedures betekenis hebben voor de leerlingen, wat kunnen leerlingen er zich bij voorstellen? Hoe gaan we de vaardigheden onderhouden en wat zijn daarvoor geschikte oefeningen? Welke schema's zijn vruchtbaar voor de leerling om te ontwikkelen en hoe bouwen we deze op?

Bij wijze van voorbeeld zijn deze vragen in dit katern uitgewerkt voor het onderwerp vergelijkingen. Aangegeven is op welke manier de vragen kunnen worden beantwoord en tot welk didactisch ontwerp dit kan leiden. Bij het ontwerpen hebben we vooral gebruik gemaakt van het besef dat het ontwikkelen van cognitieve schema's expliciet doel van het onderwijs is. Om deze ontwikkeling te ondersteunen, kan het in samenspraak met leerlingen structuren van het domein zinvol zijn. Het idee is dat een dergelijke structurering leerlingen helpt van hoger standpunt naar vergelijkingen te kijken, zodat sprake is van verticaal mathematiseren: het oplossen van vergelijkingen is op een hoger niveau object van studie geworden. Als het idee van het structureren een star en statisch beeld van de beoogde mentale schema's oproept, is dat niet terecht. Algebraïsche schema's kenmerken zich ook door wendbaarheid, door het vermogen flexibel te switchen tussen concrete betekenis en abstract manipuleren, tussen globaal en lokaal kijken, tussen proces en object, tussen impliciete en expliciete regels, en tussen verschillende strategieën.
Behalve aan het ontwikkelen van schema's rond het onderwerp vergelijken is ook gewezen op het belang van variatie in oefeningen, die aanleiding zijn voor de ontwikkeling van zowel routine in basistechnieken als betekenisvolle beelden en strategieën die deel uitmaken van symbol sense. Het zou niet goed zijn het een ten opzichte van het andere te verwaarlozen.
Dat neemt niet weg dat er in praktijk een didactische spanning bestaat tussen het uitvoeren van algebraïsche bewerkingen 'op de automatische piloot' en het inzichtelijk werken. Freudenthal beschrijft het gevaar van te grote nadruk op automatiseren als volgt:

I have observed, not only with other people but also with myself (...) that sources of insight can be clogged by automatism. One finally masters an activity so perfectly that the question of how and why is not asked any more, cannot be asked any more, and is not even understood any more as a meaningful and relevant question. (Freudenthal, 1983, p. 469)

Daar staat tegenover dat een gebrek aan routine ervoor zorgt dat eenvoudige bewerkingen het werkgeheugen overmatig belasten, waardoor er te weinig ruimte overblijft om grotere problemen aan te pakken. Te veel nadruk op routine leidt echter tot een 'automatische piloot' die wendbaarheid of zicht op alternatieve methoden in de weg staat; het eigen denken stopt en wordt niet meer gebruikt in nieuwe situaties.

Het is onze overtuiging dat de zes genoemde aandachtspunten niet alleen van belang zijn bij onderwijs in het oplossen van vergelijken maar ook bij andere onderwerpen uit de algebra. Ook dan kan expliciete structurering de mentale schemaontwikkeling ondersteunen. Zo kan bijvoorbeeld bij het ontwikkelen van een schema voor het werken met functies en hun representaties een structuur met overgangen tussen verbale representatie, tabel, grafiek en formule (Janvier, 1987) een papieren weerslag zijn waaraan veel aspecten van het mentale schema kunnen worden opgehangen. Ook bij andere onderwerpen uit het algebracurriculum is de balans tussen vaardigheden en inzicht delicaat. De voornaamste conclusie van dit katern is dan ook dat inzicht in de zes genoemde factoren de docent kan helpen bij de ontwikkeling van een effectieve en efficiënte didactiek voor het leren en onderhouden van algebraïsche vaardigheden. Misschien is het nog wel sterker: een didactiek die deze factoren verwaarloost, zal minder effectief en efficiënt zijn.

7 Opdrachten voor de lezer

1. Kijk terug naar de kennisgraaf die je eerder in dit katern hebt gemaakt. Verbeter die en breid die uit op basis van je eigen bevindingen en de inhoud van het katern die later aan de orde is gekomen.
2. Ontwerp enkele opdrachten die bij leerlingen de ontwikkeling van een schema voor het oplossen van vergelijkingen bevorderen. Hier volgen enkele ideeën:
   a. Ontwerp een uitgebreide opdracht waarin leerlingen door het oplossen van een serie vergelijkingen, bijvoorbeeld startend bij $x^2 = 4$, op het spoor worden gebracht van het oplossen van een algemene tweedegraads vergelijking met de abc-formule. Hierbij kun je een weg volgen via kwadraatafsplitsen of via de methode van de Babyloniërs.
   b. Ontwerp een opdracht waarin leerlingen inzien dat het oplossen van tweedegraads vergelijkingen ook buiten de wiskundelessen gebruikt wordt.
   c. Ontwerp een motiverende en activerende opdracht waarin leerlingen oefenen om een adequate aanpak te kiezen bij het oplossen van tweedegraads vergelijkingen.
3. Een expert kan bij symbolen (meerdere) beelden oproepen. Wiskundestudenten geven aan dat zij graag een beeld hebben (krijgen of maken) als zij wiskundige concepten leren. Welke beelden kunnen bij de volgende vergelijkingen van pas komen? Onderzoek welke beelden leerlingen hierbij hebben.
   a. $3 \cdot (x+4) - 2x = -2x$
   b. $(x-3)^2 = 0$
4. Zoek voorbeelden van impliciet gebruik van (reken)regels in de wiskundemethoden.
5. Zie bijlage 1. Bij het ontwikkelen van de oplossingsalgoritmen in de categorieën 1 en 2 kunnen de grafieken van de bijbehorende functies een belangrijke rol spelen. Ontwerp onderzoeksopdrachten om deze oplossingsmethoden met leerlingen te ontwikkelen.
6. Ontwerp werkbladen bij applets waarmee bepaalde facetten die in het katern genoemd zijn worden geoefend. Neem bijvoorbeeld AlgebraPijlen en/of AlgebraExpressies op www.wisweb.nl of ga naar http://wims.leidenuniv.nl en dan via studentenbereik naar Gestructureerde Aanpak Algebraïsche Vaardigheden (GAAV; login met test en wachtwoord gaav).
7. Het idee van categorieën van problemen met een beperkt aantal standaardalgoritmen kan misschien ook voor andere delen van het (algebra)programma gelden. Daarnaast zullen we echter steeds heuristieken nodig hebben om tot een indeling in categorieën te komen (identificatiealgoritmen). Overweeg voor welke delen van het (algebra)programma een zelfde werkwijze mogelijk is.

Literatuur

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35. http://flm.educ.ualberta.ca/index.php?do=extras&lang=en.

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *25*(2), 42-47.

Bernard, J., & Cohen, M. (1988). *An integration of Equation-solving Methods into a Developmental Learning Sequence. The ideas of algebra K-12.* NCTM Yearbook 1988. Reston, VA: NCTM.

Bock, D. de (1998). De illusie van lineariteit. Deel 1: Situering en achtergronden. *Wiskunde & Onderwijs, 93*, 18-26.

Bos, W.J. & Lepoeter, P.E. (1959). *Wegwijzer in de algebra*. Amsterdam: Meulenhoff.

Drijvers, P. (Red.)(2006a). *Wat a is, dat kun je niet weten. Een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Drijvers, P. (2006b). Context, abstractie en vaardigheid in schoolalgebra. *Nieuw Archief voor Wiskunde, 5/7*, 198-203.

Drijvers, P. (2006c). Algebraïsche basisvaardigheden en symbol sense in de tweede fase van havo en vwo. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 25*(3), 4-10.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gravemeijer, K. (1990). Globaal kijken, een kenmerk van algebraïsche deskundigheid. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs, 10*(2), 29-33.

Gravemeijer, K. (2005). Revisiting 'Mathematics education revisited'. In Ter Heeg, H., Goris, T., Keijzer, R., & Wesker, L. (red.), Freudenthal 100, special *Panama Post / Nieuwe Wiskrant*, 106-113.

Hiele, P.M. van (1973). *Begrip en inzicht, werkboek van de wiskundedidactiek*. Purmerend: Muusses.

Janvier, C. (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning Mathematics*. Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kemme, S. (2002). Welke algebra is nodig voor klas 4? *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 21*(3), 29-31.

Kindt, M. (2000). Discrete algebra. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 19*(4), 31-36.

Kindt, M. (2003). *Oefeningen in algebra*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Kindt, M. & Van de Roest, A. (2005). *Babylonische wiskunde*. Utrecht: Epsilon.

Kirshner, David (2004). Visual Salience of Algebraic Transformations, *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(4), 224-257.

Landa, L.N. (1976). *Instructional Regulation and Control, Cybernetics, Algorthmization and heuristics in Education.* Englewood Cliffs, NY: Educational Technology Publications.

Landa, L.N. (1983). *Landamatics Instructional Design Theory and Methodology for Teaching General Methods of Thinking*. In C.M Reygeluth (ed.), Instructional Design theories and models. Hillsdale NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Streun, A. van (2001). *Het denken bevorderen*. Groningen: RuG.

Streun, A. van (2006). Parate kennis en algebra. *Euclides, 82*(2, 3, 4, 5, 6).

Skemp, R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics.* Middlesex, England: Penguin books.

Tall, D & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 125 - 147.

Vos, P. (2007). Algebra-prestaties van tweedeklassers. *Euclides, 82*(4), 129-132.

Wagner, S., Rachlin, S., & Jensen, R. (1984). *Algebra learning project, final report.* Athens GA: University of Georgia.

Wenger, R.H. (1987). Cognitive science and algebra learning. In A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematical education*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Werkgroep 3TU (2006). Aansluiting vwo en technische universiteiten. *Euclides, 81*(5), 242-247.

Zwaneveld, G. (1999). *Kennisgrafen in het wiskundeonderwijs*. Heerlen: Open Universiteit.

Bijlage 1
Een voorbeeld van zes categorieën standaardvergelijkingen

Een voorbeeld van een categorisering uit de praktijk van een docent met zijn leerlingen.

Categorie 1: Zoals een ‘expertleerling’ het formuleerde: ik denk links en rechts dezelfde (laatste) bewerking weg. In gevallen van monotoon stijgende of dalende functies zal dat eenvoudig zijn, zoals bij $3^{2x-6}=3^{-x+6}$ en $\log(2x)=\log(-x+8)$. Als dat niet het geval is dan moet het oplossingsalgoritme uitgebreid worden, zoals bij $(x+3)^2=(2x-8)^2$ en $\sin(3x)=\sin(x-\pi)$ en $2x^2.(3x+8)=6.(3x+8)$.

Categorie 1 met oplossingsalgoritmen:

	oplossingsalgoritme
a) $g^A=g^B$	$g^A=g^B \to A=B$
$\log(A)=\log(B)$ *(1)*	${}^g\log(A)={}^g\log(B)\to A=B$
$\sqrt{A}=\sqrt{B}$	$\sqrt{A}=\sqrt{B}\to A=B$
$A^n=B^n$, *met n oneven*	$A^n=B^n\to A=B$, *als n oneven*
b) $\sin(A)=\sin(B)$ *(2)*	$\sin(A)=\sin(B)\to A=B+k\cdot 2\pi, A=\pi-B+k\cdot 2\pi$
$A^n=B^n$, *met n even*	$A^n=B^n\to A=B, A=-B$
c) $A.(B)^n=C.(B)^n$	*A=C of B=0*

Categorie 2: De vergelijking kan worden opgelost door een pijlenketting om te keren. Voorbeelden van vergelijkingen die tot deze categorie behoren zijn: $3(x-4)^2=18$, $4+5x^3=40$, $\sqrt{2x+6}=8$ en $\sin(2x)=0,5$. Ook nu speelt het monotone karakter van de functie een belangrijke rol bij het oplossen van de vergelijkingen.

Categorie 2 met oplossingsalgoritmen:

	oplossingsalgoritme
$g^A=getal$	$g^A=p\to A={}^g\log(p)$
${}^g\log(A)=getal$ (1)	${}^g\log(A)=p\to g^p=A$
$A^n=getal$	$A^n=p\to A=\sqrt[n]{p}$, als n oneven
	$A^n=p\to A=\sqrt[n]{p}, A=-\sqrt[n]{p}$, als n even
$\sin(A)=getal$ (2)	$\sin(A)=p\to A=\sin^{-1}(p)+k.2\pi, A=\pi-\sin^{-1}(p)+k.2\pi$
$\sqrt{A}=getal$	$\sqrt{A}=p\to A=p^2$ en controleren oplossing

Categorie 3: De vergelijkingen kunnen vereenvoudigd worden door meerdere dezelfde ‘bordjes’ te vervangen door een nieuwe variabele. Voorbeelden: $(x-3)^2-5(x-3)-14=0$, $(e^x)^2-4.e^x-12=0$ en $\dfrac{3.\log(x)-(\log(x))^3}{\log(x)}=0$.

Categorie 4: De vergelijkingen bestaan uit het product van een aantal factoren die gelijk zijn aan 0. Voorbeelden: $4(x-9)(x^2-8)(3x+9)=0$ en $x^2.(4x-9)=0$. Bij deze categorie rekenen we ook vergelijkingen die opgelost kunnen worden door een eenvoudige ontbinding in factoren. Voorbeelden: $6x^3-4x^2=0$ en $x^2-2x-8=0$.

Categorie 5: Hierin zitten tweedegraads vergelijkingen die met de abc-formule opgelost worden.

Categorie 6: In deze categorie vallen vergelijkingen die, volgens ‘expertleerlingen’, gedomineerd worden door breuken, logaritmen, sinus/cosinus en wortels. Deze eye-catchers roepen bij leerlingen direct associaties op met de bijzondere rekenregels die vaak nodig zijn om vergelijkingen op te lossen. Voorbeelden zijn: $\frac{2x-7}{5x}=3$, $\frac{2x-6}{x}=\frac{3x-8}{x+1}$ ${}^2\log(x)+{}^2\log(x+4)={}^2\log(4x+8)$, $\sqrt{2x+6}=x-1$, $\sin(2x)=\cos(x)$.

Categorie 6 met oplossingsalgoritmen:

breuken	oplossingsalgoritme
$\frac{A}{B}=C$	$\frac{A}{B}=C \rightarrow A=B.C$
$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$	$\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \rightarrow A.D=B.C$
logaritme	
${}^g\log(A)+{}^g\log(B)={}^g\log(C)$	${}^g\log(A)+{}^g\log(B)={}^g\log(C) \rightarrow A.B=C$
$n.{}^g\log(A)={}^g\log(C)$	$n.{}^g\log(A)={}^g\log(C) \rightarrow A^n=C$
${}^g\log(A)={}^g\log(B)$	${}^g\log(A)={}^g\log(B) \rightarrow A=B$
${}^g\log(A)=getal$	${}^g\log(A)=p \rightarrow A=g^p$
sinus	
$\sin(2A)=\cos(A)$	$\sin(A)=\cos(\frac{1}{2}\pi-A)$
$(\sin(A))^2=\cos(A)$	$(\sin(A))^2=1-(\cos(A))^2$
$\sin(A)=\cos(B)$	$\sin(A)=\cos(B) \rightarrow \cos(\frac{1}{2}\pi-A)=\cos(B)$
$\sin(A)=\sin(B)$	$\sin(A)=\sin(B) \rightarrow A=B+k.2\pi, A=\pi-B+k.2\pi$
$\sin(A)=getal$	$\sin(A)=p \rightarrow A=\sin^{-1}(p)+k\cdot 2\pi, A=\pi-\sin^{-1}(p)+k\cdot 2\pi$
wortels	
$\sqrt{A}=B$	$\sqrt{A}=B \rightarrow A=B^2$ en uitkomst controleren

Bijlage 2
De prijs van de algebra
Bron: Kindt, M. (2003), p. 102

De prijs van de algebra (I)

Algebra kost tijd, en dus geld.
Een gedetailleerde prijslijst vind je hieronder

Prijslijst:	
bewerkingen +, –, ×, :, /	1 punt per keer
kwadrateren	2 punten per keer
3-de macht nemen	3 punten per keer
4-de macht nemen	4 punten per keer
enz.	enz.
variabelen aanroepen	1 punt per keer
haakjes en gewone getallen	gratis

Voorbeeld 1: wat kost $3n + m$?

3	**gewoon getal**	**gratis**
n	**aanroep variabele**	**1 punt**
$3 \times n$	**vermenigvuldiging**	**1 punt**
m	**aanroep**	**1 punt**
$3 \times n + m$	**optellen**	**1 punt**
	totaalprijs	**4 punten**

Voorbeeld 2: wat kost $(3n + m)^2$?

$3n + m$	zojuist berekend	**4 punten**
$(3n + m)^2$	**kwadrateren**	**2 punten**
	totaalprijs	**6 punten**

- Stel de prijs vast van:

  $n^2 + 3n$

  $n \times (n + 3)$

  $(n + 1) \times (n + 3)$

  $n^2 + 4n + 3$