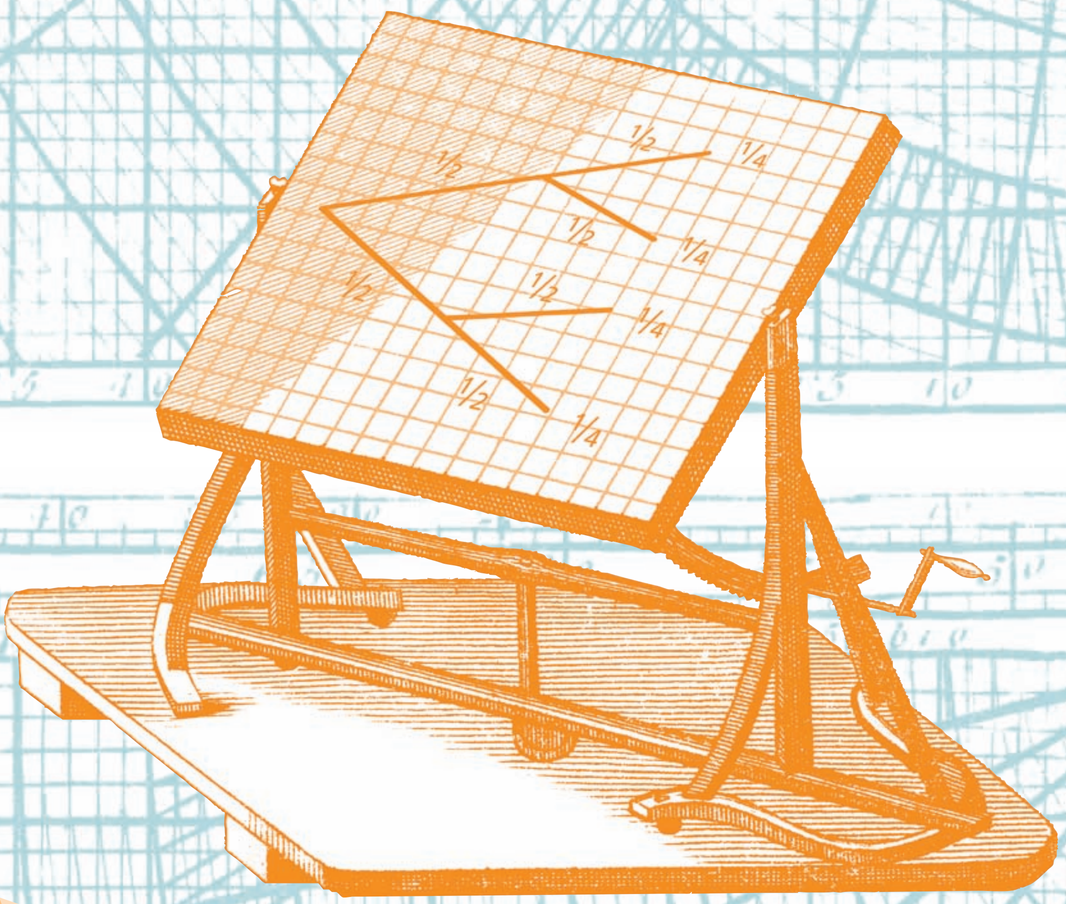
TALENTENKRACHT

Module 1, combinaties en kansen



VTB-Pro 2007-2010: Professionalisering in wetenschap en techniek

Module 1, combinaties en kansen

Bijeenkomst 1: 'Heb ik ze allemaal?'

Inleiding

De eerste module neemt de deelnemer mee in de spannende onderzoekswereld van de combinatoriek (het systematisch tellen van mogelijke combinaties) en kansrekening. Een onderzoekswereld waarin de onderzoekers, deelnemers en kinderen, uitgedaagd worden om bezig te zijn met speciale telproblemen en na te denken over de volledigheid van hun antwoorden. De telproblemen bereiden voor op de wereld van statistiek en kansrekening uit het dagelijks leven. Te denken valt hierbij aan zaken als de kans op een prijs bij een loterij, maar ook het gebruik van het begrip waarschijnlijkheid in het verzekeringswezen.

Bij het zoeken naar oplossingen van telproblemen wordt een appèl gedaan op een wiskundige attitude. Deze attitude kenmerkt zich door activiteiten als ordenen, systematiseren, redeneren en modelleren. Dit lijkt niet iets voor jonge kinderen. Niets is minder waar. Al op heel jonge leeftijd wordt het wiskundig denken op gang gebracht. Kinderen onderzoeken de hun omringende werkelijkheid op eigen wijze; alle zintuigen worden open gezet. Opvattingen over het hoe en waarom van fenomenen krijgen eerste invullingen. Het representeren van dat denken in taal en op schrift is een ander probleem. Dat gebeurt niet vanzelf maar in het algemeen in interactie met een volwassene en met andere kinderen. De jonge onderzoeker wordt aan het denken gezet door een motiverende probleemsituatie en door gerichte vragen. Het leren stellen van gerichte of productieve vragen en het op zoek gaan naar geschikte representaties van de probleemsituatie zijn belangrijke doelen van deze module.

De keus om deze serie van modulen te starten met wiskundige activiteiten wordt ingegeven door de kracht van de wiskunde als beschrijvingstaal voor probleemsituaties, door de eenvoud van de experimenten en door de spelcontext die voor veel kinderen zo bekend is.

In de opzet wordt, uitgaande van het werken op eigen niveau, via het bekijken en analyseren van gesprekken met kinderen, toegewerkt naar ideeën voor implementatie binnen de eigen groep. Het werk op eigen niveau is bedoeld om jezelf in de rol van onderzoeker te plaatsen. Het leren lol te krijgen in het zelf uitzoeken, het gevoel van nieuwsgierigheid beleven en geconfronteerd worden met notatievragen zijn daarbij belangrijke en wellicht motiverende aspecten. Als begeleider van de jonge onderzoeker heb je zelf ook een wetenschappelijke houding nodig. Dus een belangrijk doel is ook het bij jezelf ontwikkelen van een wetenschappelijke houding. Met een wetenschappelijke houding wordt bedoeld een gezonde honger naar 'willen weten hoe het zit'. Kenmerken zijn cognitief/kritisch zijn, nieuwsgierig zijn, onderzoekend of vragend zijn, niet snel tevreden zijn met een antwoord. U begrijpt dat dit doel boven de inhoud uitstijgt.

1. Aan de slag

Het muntenprobleem

Een munt heeft twee kanten, kop en munt genoemd. Als je gooit met een munt komt of kop of munt boven te liggen. Intuïtief wordt ervan uitgegaan dat de kans op kop boven even groot is als de kans op munt boven. Bij situaties waarin keuze uit twee gelijke mogelijkheden nodig is om een beslissing te nemen wordt de munt vaak gebruikt. Bijvoorbeeld in een voetbalwedstrijd moet de scheidsrechter een beslissing nemen welk elftal aan welke kant van het veld speelt. Voor deze beslissing wordt een toss georganiseerd. Men vindt dat een eerlijke manier om iets te beslissen.
Als er meerdere munten tegelijk opgegooid worden krijg je als uitkomst meer dan twee mogelijkheden. In het volgende onderzoek wordt de situatie 'met drie munten gooien' nader onderzocht.

Opzetten van een experiment: Gooien met drie munten

Voorspellen:

1. Welke mogelijke uitkomsten kunt u verwachten? (Alle uitkomsten samen worden wel de uitkomstenruimte van het experiment genoemd.)
2. Komt elke uitkomst even vaak voor? Hoe kunt u dat onderzoeken?

Uitvoeren van het experiment

1. Hoe zou u kunnen uitzoeken welke uitkomsten mogelijk zijn? Voer dit uit.
2. Hoe zou u kunnen uitzoeken of alle genoemde uitkomsten ongeveer even vaak voorkomen als u gooit met drie munten? Voer dit uit.
3. Kloppen uw voorspellingen? Kunt u aangeven hoe nauwkeurig uw resultaten zijn?
4. Is het mogelijk om uw onderzoek nauwkeuriger te maken? Zo ja, hoe?

Conclusies

Welke conclusies trekt u uit het onderzoek?

Bespreking

In tweetallen

Wissel uw gegevens uit met een medecursist en bespreek elkaars werkwijze, argumentatie en conclusies.

Met de hele groep

vergelijk en bediscussieer elkaars werkwijze, argumentatie en conclusies.

1. Hoe heeft men het aangepakt?
2. Heeft men op papier de gegevens genoteerd? En hoe dan?
3. Wat heeft de discussie u opgeleverd? (verschillende aanpakken, grafische representaties, onderzoekvragen)?

2. De vertaalslag naar jonge kinderen

Het dierenboek (een Bond en andere dieren)

Een prentenboekje met vijf pagina's, elke pagina bevat een afbeelding van een dier, elke pagina is horizontaal in tweeën gedeeld. De tekeningen zijn zo gemaakt dat elke bovenkant aansluit op elke onderkant. Op die manier kunnen de kinderen zelf nieuwe dieren maken, bijvoorbeeld een schaap met een poezenkop of een poes met een schapenkop.
Dit boekje wordt voorgelegd aan kinderen van 3 tot 6 jaar oud.

Experiment: dieren maken, eerst op eigen niveau .....

Voorspellingen:

1. Hoeveel mogelijke dieren zijn er te maken?
2. Hoe zou u de dieren willen noemen? of symboliseren?
3. Hoe weet u zeker of u ze allemaal heeft?

Uitvoeren van het experiment;

1. Hoe kunt u uitzoeken welke dieren te maken zijn?
2. Hoe kunt u de uitkomsten op papier vastleggen?
3. Hoe kunt u de volledigheid van uw uitkomsten beredeneren?

En nu de kinderen .....

Voorbereiding:

1. Hoe zou u de kinderen het probleem voorleggen?

Voorspellingen:

1. Hoe gaan kinderen met de vraag aan de slag?
2. Tegen welke problemen lopen de kinderen aan in het onderzoek naar de dieren?
3. Met welke oplossingen komen ze?

3. Kinderen in beeld.

Film 1. Marijn en Naomi

Bekijk het fragment drie keer. Een eerste keer gewoon om de situatie te bekijken, maar daarna vanuit verschillend perspectief. Eerst als kind, dan gericht op het gebruikte materiaal en daarna als begeleider.

Vanuit de kinderen ...

Analyseer het denken van Marijn en Naomi.
Hoe hebben ze gedacht?, hoe zijn ze bezig met de vraag?
Wat zou Marijn bedoelen met de opmerking dat ze nog meer dieren zou kunnen maken als ze nog zo'n boek had?

Vanuit het materiaal ....

Maakt het materiaal (het boekje) de vraagstelling uitdagend?
Biedt het materiaal (het boekje) de kinderen genoeg mogelijkheden om het onderzoek naar de dieren goed uit te voeren?
Biedt het materiaal de kinderen mogelijkheden om oplossingen te representeren?
Wat zijn de eventuele beperkingen van het boekje?

Vanuit de interviewer (begeleider)....

Welke vragen worden gesteld om het probleem te introduceren?
Wordt de kinderen de ruimte geboden om op onderzoek te gaan?
Welke dieren worden door de kinderen benoemd?
Wat vindt u van de opbrengst van het gesprek?
Ziet u kansen om er meer uit te halen bij een vervolggesprek? Zo ja,
Wat zou u voor nieuwe vragen willen stellen aan de kinderen?

Groepsdiscussie:

Het onderzoek naar het denken en redeneren naar aanleiding van bovengenoemde taak levert de volgende gezichtspunten op:

4. Vergelijk van de taken.

In beide taken, munten en dierenboek, wordt de vraag naar de mogelijke combinaties gesteld. Bij de munten is daarbij uitgegaan van drie losse munten die opgegooid moeten worden. Uitkomsten als Kop, Kop, Munt (KKM) kunnen als combinatie worden weergegeven in een combinatieboekje, zoals dat van de dieren. De vraag is hoe dat boekje eruit zou moeten zien.

Opdracht

Ontwerp een boekje waarmee u de combinaties van drie munten kunt weergeven.

Bespreking

Hoe zien de ontwerpen eruit?
Kunt u met de ontwerpen alle combinaties laten zien?
Hoe verliep u denk- en ontwerpproces?

5. Andere combinatorische taken.

Naast het dierenboek zijn er ook andere taken ontwikkeld vanuit dezelfde problematiek. Het gaat om de volgende taken:

1. Een poppetje wordt in puzzelstukjes gepresenteerd. Het poppetje bestaat uit drie stukjes: kop, romp en benen. Elk stuk kent twee varianten. De onderzoeksvraag is, hoeveel verschillende poppetjes er te maken zijn.(gesprek met Flox)

2. Bloemen zijn samen te stellen uit blaadjes en hartjes. Er zijn drie kleuren bloemblaadjes (aan elkaar vast in een rondje) en drie kleuren hartjes. De onderzoeksvraag is, hoeveel verschillende bloemen er samen te stellen zijn? (gesprek met Daan en Loes)

3. Een smiley wordt samengesteld uit een bovenkant met keuze uit drie soorten ogen en een onderkant met keuze uit twee soorten monden. De onderzoeksvraag luidt: hoeveel verschillende smiley's zijn er te maken? (gesprek met Anna)

Deze taken weerspiegelen de zoektocht van de onderzoekers naar essentiële elementen voor een goede taak. Onder een goede taak wordt verstaan, een taak waarin een kind uitgedaagd wordt tot onderzoeken en waarbij het materiaal ondersteunend is en geen belemmeringen voor het vinden van oplossingen in zich heeft. Zo hebben de ontwikkelaars bij het maken van de taken o.a. geëxperimenteerd met de materialen die een kind ter beschikking kreeg om de vraag te onderzoeken. Het aanbieden van een taak en het begeleidingsgesprek over de uitvoering is ook een belangrijk element in het succes van een taak. Het vraagt van een begeleider o.a. kennis van het doel van de taak, van mogelijke aanpakken, maar ook de vaardigheid om aan te sluiten bij het taalniveau van een kind.

De uitvoering van de taken en het gesprek erover wordt in drie filmfragmenten getoond. In deze drie gesprekken ligt het onderzoek naar alle mogelijke combinaties op tafel. Elke taak biedt op eigen wijze ondersteuning aan de leerling wat betreft het komen tot een systematiek van het aantal combinaties. Bij het bekijken van de filmfragmenten probeert u in de huid van de leerling te kruipen om de onderzoekstaak uit te voeren. U kijkt naar en analyseert de taak, het gebruikte materiaal, de vragen van de interviewer, de taal van de leerling tijdens het beredeneren van volledigheid. Het doel ervan is dat u zicht krijgt op mogelijke vraagstellingen voor de eigen praktijk, en op de essentiële elementen van taak en gesprek.

1. Flox en de poppetjes,

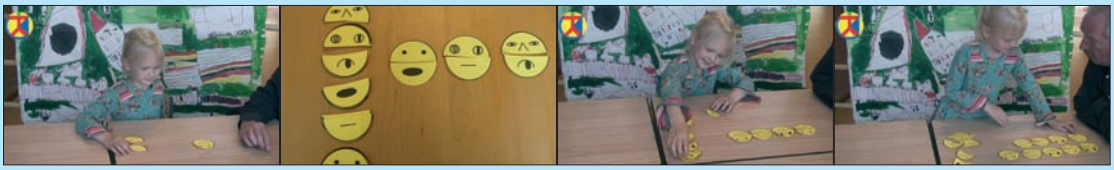
De taak	Het gebruikte materiaal	De vragen	De taal

2. Daan en Loes en de bloemetjes

De taak	Het gebruikte materiaal	De vragen	De taal

3. Anna en de Smiley's.

De taak	Het gebruikte materiaal	De vragen	De taal



Bespreking in tweetallen

Vergelijk uw bevindingen met die van een medecursist. Probeer samen te komen tot preciezere antwoorden en tot vragen voor de groepsdiscussie. Hierbij kunt u de volgende vragen gebruiken:

- Ziet u verschil in hoe de taak wordt geïntroduceerd?
- Welke mogelijkheden en/of beperkingen biedt het materiaal om de taak uit te voeren?
- Welke mogelijkheden en/of beperkingen biedt het materiaal om de vraag naar de volledigheid van de oplossingen te kunnen beantwoorden?
- Biedt de taak aanzetten om tot representeren over te gaan?
- Welke verschillen tussen de taken heeft u waargenomen?
- Welke verschillen in vragen heeft u gezien?
- Welke verschillen in redeneren heeft u gezien?

Bespreking in de hele groep

Notities:

- Wat hebben de kinderen bij het uitvoeren van de taak getoond aan wiskundige attitude?
- Welke ontwikkelingsmogelijkheden bieden bovengenoemde taken aan de kinderen?
- Aan welke voorwaarden lijkt het materiaal te moeten voldoen om de kinderen te ondersteunen bij het uitvoeren van de taak?
- Welke conclusies zijn er te trekken over de rol die de begeleider in dit soort probleemsituaties kan spelen in het stimuleren van het zoeken naar volledigheid?

6. De huiswerkopdracht: het maken van een taak voor de eigen praktijk

Het maken van geschikte taken voor kinderen uit de eigen groep vraagt eenzelfde cyclus zoals in deze eerste bijeenkomst is gevolgd. Het nadenken over een geschikte taak leidt tot een eerste opzet, deze wordt voorgelegd aan een collega van uw school, besproken en van commentaar voorzien. Vervolgens wordt de taak uitgewerkt in materiaal en volgt een eerste try-out met een kind uit de doelgroep 3-6 jaar. De try-out kan leiden tot aanscherping van de vraagstelling en aanpassing van het materiaal, en het bijstellen van de taak.
Het onderwerp combinatorisch tellen heeft een eerste invulling gekregen vanuit de voorbeelden. Het kenmerkende in zowel het muntenprobleem als ook het boekje over de dieren, het maken van verschillende poppetjes met puzzelstukjes, de bloemen en de smiley's, is het vormen van mogelijke combinaties uit deelverzamelingen. De vraag of je ze allemaal hebt gevormd is daarbij de kernvraag. Deze kernvraag leidt tot wiskundige activiteiten als systematiseren, ordenen en indien nodig tot visualiseren of representeren.
Als echte wetenschappers gaan de kinderen door de eerste 'rommelfase' naar een meer systematische aanpak. De rommelfase is daarbij heel belangrijk. Eerst maar eens wat doen, een paar combinaties maken, om vervolgens te komen tot een onderzoeksfase waarin de vraag aan de orde is, zouden er nog meer te maken zijn? Dit onderzoek naar alle mogelijkheden krijgt tenslotte een afronding vanuit de vraag 'heb ik ze nu allemaal? En hoe weet ik dat zeker?'

Het maken van een taak voor de kinderen in de eigen groep vraagt een doordenking op de volgende punten:

- Vraagstelling (uitdagend, betekenisvol, doet een beroep op nieuwsgierigheid)
- Materiaal (laat verschillende niveaus van handelen toe, geeft mogelijkheden voor visualiseren of representeren, is makkelijk manipuleerbaar, uitdagend en betekenisvol)
- Taal (Welke vragen stel je als begeleider, hoe sluit je aan bij het taalniveau van het kind?)

Huiswerk

1. Lees het stuk over de achtergronden van combinatorisch tellen. (Zie bijlage)
2. Voer met een kind uit de leeftijdsgroep 3-8 jaar een gesprek over een combinatorische telprobleem. Ontwerp zelf materiaal waarmee het kind het probleem betekenis kan geven en de vraag naar volledigheid kan oplossen. In deze oefening gaat het u vooral om uw eigen vaardigheid op het gebied van gespreksvoering met kinderen. Bereid het gesprek goed voor op papier. Neem het gesprek op video op en analyseer het gesprek op de punten die in de bijeenkomst aan de orde zijn geweest, .

- hoe introduceer je het probleem bij het kind?
- kan het kind aan de gang?
- welke vragen stel jij om het onderzoek van het kind te ondersteunen?
- welke vragen zijn effectief en welke niet?
- is het materiaal direct hanteerbaar?
- is het materiaal ondersteunend aan het denken en redeneren?

Bijlage

Achtergronden van combinatorisch tellen.

Inleiding

Het tellen van het aantal mogelijkheden bij kans of toevalexperimenten is een rijk onderzoeksgebied. Het succes van vele quizspelletjes, lotto en loterijen laat zien dat veel mensen graag een gokje wagen. Maar wat is een gokje wagen? Sommige deelnemers aan loterijen zoals de staatsloterij of de lotto gokken met eigen gekozen strategie en geven zich daarmee meer kans op een prijs. Voorbeelden van zulke eigen strategieën zijn,

- het telkens weer kiezen van hetzelfde getal. (Verwachting dat de kans groter wordt als het lot nog niet op het gekozen getal is gevallen),
- Het bijhouden van de lotto getallen en op basis van deze gegevens een keuze maken voor de getallen die het minst zijn voor gekomen.(verwachting dat de kans groter wordt als een getal lang niet is voorgekomen).

Vaak is de honger naar een prijs een krachtige voedingsbron voor geloof in eigen denkbrouwsels. Kritische analyse van eigen denken door middel van het ontwerpen van kleine model experimenten zou betere resultaten opleveren.
In de kinderwereld worden veel spellen gespeeld. Bij veel spellen is de kans om te winnen gelijk. Voorbeelden zijn mens-erger-je-niet, ganzenbord, kwartetten en pesten. Als de kans niet gelijk is ontstaat al snel de vraag of het spel dan eerlijk is. Dit geeft kinderen te denken. Eerlijk wordt geïnterpreteerd als gelijke kans om te winnen. Een dobbelsteen gooien is eerlijk, elk getal heeft gelijke kans om boven te liggen. (regelmatig veelvlak)
Om uitkomsten en kansen op die uitkomsten in beeld te krijgen, met het doel er meer greep op te krijgen, zijn er in de loop van de geschiedenis allerlei wetenschappers bezig geweest om onderzoek te doen binnen het gebied van telproblemen. Wiskundige begrippen als permutatie en combinatie zijn voorbeelden van opbrengsten van dit soort onderzoek. Om het denken over en analyseren van telproblemen in beeld te brengen wordt gekozen voor het uitwerken van een paar voorbeeld experimenten. De voorbeelden laten wiskundige activiteiten zien als ordenen, systematiseren, en modelleren. De achtergrond kennis die u nodig heeft om met kinderen van de basisschool dit onder-zoeksterrein te betreden wordt zeer beknopt hieronder weergegeven. Natuurlijk is het mogelijk om meer informatie te zoeken op internet.

Op weg naar een systematische aanpak van telproblemen

Een spel spelen met een dobbelsteen. Uitkomsten zijn {1,2,3,4,5,6}. Elk getal (aantal ogen) heeft in theorie een gelijke kans op voorkomen. Maar in een reeks van bijvoorbeeld 40 keer werpen komt niet elk getal evenveel voor. Gelijk wil in dit geval zeggen, in theorie, en ongeveer voorkomend bij een heel groot aantal worpen. De kans op een 4 is dus in theorie $^1/_6$.
Kiezen we echter twee dobbelstenen dan wordt het al ingewikkelder. De uitkomsten zijn makkelijk vast te stellen, het gaat om {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}. 11 uitkomsten, maar komen ze ook evenveel voor? Hier kan het ordenen van de mogelijke worpen uitkomst brengen. Van (1,1); (2,1); (3,1); …. naar …. (6,4); (6,5); (6,6). In totaal 36 mogelijke worpen.

In tabel in beeld gebracht:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)				
3	(3,1)					
4						(4,6)
5						(5.6)
6	(6,1)			(6,4)	(6,5)	(6,6)

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

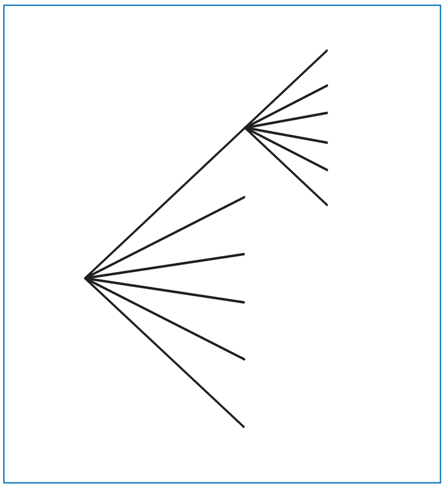
Kijkend naar de uitkomsten van de worpen ontstaat daarmee het bovenstaande beeld:

Hier brengt systematisering orde in het geheel. Vanuit deze tabel kunnen antwoorden gegeven worden op vragen als ' is de kans op een 4 even groot als de kans op een 7?' Uit de tabel is af te leiden dat van de 36 uitkomsten drie keer een 4 en zes keer een 7 voorkomt. In kanstaal betekent dit dat er een kleinere kans op uitkomst 4(3/36) is dan op de uitkomst 7(6/36).
Om over een kans te kunnen spreken heb je dus alle mogelijke uitkomsten nodig. Om te onderzoeken welke mogelijkheden er zijn is het aanbrengen van systematiek in het tellen een eerste stap.

Representatie

Het gebruik van een tabel als representatie is een van de mogelijkheden om de uitkomsten van twee dobbelstenen systematisch in beeld te brengen. De tabel is bij twee variabelen goed bruikbaar als representatie, maar als er meer variabelen zijn moet worden gekeken naar een representatie met meer mogelijkheden. De belangrijkste is het zogenaamde boomdiagram
Het woord boom in boomdiagram geeft aan dat je te maken hebt met takken die zich weer kunnen vertakken. Onderstaand diagram geeft een stukje weer van het hele diagram dat het gooien met twee dobbelstenen representeert. Als aan elke tak zes vervolgtakjes getekend zouden worden dan ontstaat het hele diagram met 36 uiteinden.

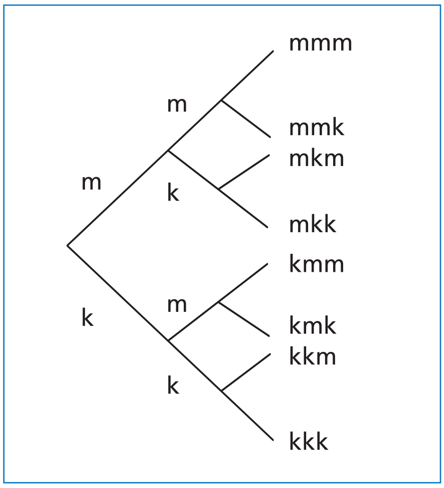
Boomdiagram (deel):



De kracht van zo'n representatie (model) is gelegen in
- de eenvoud van beschrijven,
- de onafhankelijkheid van het gebruikte materiaal (dobbelsteen, vaas met balletjes, etc.)
- de mogelijkheid om schijnbaar niet-vergelijkbare problemen te kunnen vergelijken en daarmee de interne structuur van het probleem bloot te leggen.

In feite wordt een probleemsituatie van alle niet essentiële contextfactoren ontdaan en ontstaat een visuele representatie van het echte probleem. Zoals uit bovenstaande tekst blijkt kan de tabel of een boom de uitkomsten van het gooien met twee dobbelstenen systematisch weergeven. Maar de dobbelstenen zijn verdwenen, het kan ook over iets anders gaan waarvan de uitkomstenstructuur vergelijkbaar is aan die van twee dobbelstenen.

Als voorbeeld hiervan kan het beginprobleem van de drie munten dienen. De uitkomsten van het gooien met drie munten is met een boomdiagram goed in beeld te brengen. De eerste munt geeft de meest linkse takken(m of k). Elke tak vertakt zich op dezelfde wijze als de tweede munt gegooid is. Als laatste volgt de vertakking van de derde munt. Er ontstaan op die manier 2 x 2 x 2 = 8 takken.



De boom laat zien dat 8 mogelijke uitkomsten in gelijke mate kunnen voorkomen.
Als de volgorde van MMK; MKM en KMM, voor de uitkomst niet belangrijk is, geeft de boom aan dat van de 8 mogelijke uitkomsten er een is met drie keer M, er een is met geen M (drie keer K), er drie zijn met twee keer M en drie met een keer M. Vanuit deze telling zijn ook kansen te berekenen op deze uitkomsten.

Module 1, combinaties en kansen

Bijeenkomst 2, 'Eerlijk of niet eerlijk?'

Inleiding

In de eerste bijeenkomst van deze module heeft u kennis gemaakt met onderzoeksvragen rondom combinatorisch tellen. Met name het greep krijgen op de volledigheid van de oplossing geeft aanleiding om na te denken over de systematiek en de representatie van de systematiek. De vraag naar volledigheid is voor jonge kinderen een moeilijke vraag. Vanuit het betekenis geven aan de vraag, het omzetten van die betekenis naar het opzetten van een redenering, het gebruik van geschikte taal en eventuele representaties is het vooral de kunst om de systematiek van het eigen denken naar voren te brengen. In de eerste bijeenkomst heeft u daar op video voorbeelden van kunnen zien. Voor de leraar of begeleider is de opgave om aantrekkelijke en uitdagende taken te maken en goede vragen te stellen. De ruimte die het kind voelt om exploratief aan de gang te gaan hangt vooral af van de kwaliteit van de taak en de interactie met de begeleider/ de leraar. Als u kijkt naar het onderzoeksproces van het kind dan is, net als in de wetenschap, de eerste fase van brede verkenning nodig is om duidelijk te krijgen wat precies de vragen zijn die er toen doen. Deze fase vraagt ruimte voor open vragen in plaats van gerichte gesloten vragen.

In het onderwijs op de basisschool wordt in sommige vakken, of vanuit een bepaalde opvatting aandacht besteed aan onderzoekend en ontdekkend leren. Onderwijs dat uitgaat van nieuwsgierigheid en een onderzoekende geest wordt vertaald in een onderzoeksklimaat waarin geleerd wordt. Elementen daarvan zijn bijvoorbeeld terug te vinden in de beschrijving van de kerndoelen van schoolvakken.
Zo staat bij de beschrijving van de kerndoelen rekenen/wiskunde het volgende te lezen:
'Het uitleggen, formuleren en noteren en het elkaar kritiseren leren kinderen als specifiek wiskundige werkwijze te gebruiken om alleen en samen met anderen het denken te ordenen, te onderbouwen en fouten te voorkomen.'
Ook specifieke stromingen in het basisonderwijs besteden aandacht aan het fenomeen onderzoekend leren. Zo wordt bijvoorbeeld in de didactiek van het ontwikkelingsgericht onderwijs(OGO), gebaseerd op o.a. de Russische leerpsycholoog Vygotski, een ontwikkelingslijn door de basisschool aangehouden van spel naar onderzoek. Brede verkenning, van met name maatschappelijke fenomenen, in spel(o.a rollenspel) worden gevolgd door het meer systematisch onderzoeken vanuit reflecties op de spelfase.
Een laatste voorbeeld komt uit het project 'Leren Onderzoekend en Ontwerpend Leren(2007)' ontwikkeld door het Amstel instituut van de Universiteit van Amsterdam. Hierin is voor het schoolvak natuur en techniek lesmateriaal ontwikkeld vanuit een didactiek gericht op het leren onderzoeken en ontwerpen van begrippen en concepten uit natuur en techniek.

In deze tweede bijeenkomst wordt verder ingegaan op het stimuleren van de wetenschappelijk attitude van de leraar en het het kind. Daarin wordt dezelfde lijn gevolgd als in bijeenkomst 1, met elementen als het werken op eigen niveau, het bespreken van videomateriaal, achtergrondkennis en een lijn naar de eigen praktijk. Het onderwerp combinatorisch tellen wordt doorgetrokken naar het begrip kans.
Er wordt gestart met het terug kijken op de huiswerkopdracht uit bijeenkomst 1.

1. De huiswerkopdracht

In drietallen

Bespreek de ontwerpopdracht voor een kind uit bijeenkomst 1.

- Ontwerp: Neem per persoon 5 minuten om het proces van houtskool schets naar ontwerp te vertellen. Geef daarbij aan welke problemen u bent tegengekomen en hoe u die heeft opgelost.
- Uitvoering: Laat uw partner voorspellen hoe de kinderen in zullen gaan op de probleemsituatie. Bespreek hoe dat in werkelijkheid is gegaan.
- Kijk naar de vragen die effectief bleken.
- Evaluatie: Rond deze eerste fase af met een overzicht van wat het heeft opgeleverd. Gebruik eventuele videobeelden of materialen van het gesprek.

Groepsgesprek

Bespreek in de groep de gemaakte overzichten met als resultaat een aanzet tot een aantal aanbevelingen voor het ontwerpen van een goede praktijkopdracht en voor het stellen van goede vragen. Goed slaat hierbij op stimulerend voor het ontwikkelen van een wetenschappelijke attitude.

2. Van mogelijkheden naar kans.

Probleem op eigen niveau

Als je een punaise op een vlak oppervlak gooit is het resultaat ofwel de punaise komt op z'n kop met de punt omhoog op het oppervlak te liggen ofwel de punaise steunt met z'n punt op het oppervlak en steunt ook op een zijkant van z'n kop. De vraag dient zich aan of er een uitspraak te doen is over de kans op een van beide mogelijkheden.

1. Onderzoek deze vraag.
2. Bedenk hoe nauwkeurig uw onderzoek is.

Het onderzoek naar de vraag 'Wat is de kans op een van beide mogelijkheden?' is een voorbeeld van een kansexperiment waarin de kans experimenteel kan worden vastgesteld. Op basis van een aantal herhalingen van het experiment wordt een uitspraak gedaan over de verhouding van de uitkomsten. Vanuit die verhouding wordt een kansuitspraak geformuleerd. Zo kan het gooien van een munt met de twee mogelijkheden (Kop en Munt) als uitkomsten bij voldoende herhaling de uitspraak 'kans op Kop is $^1/2$' ondersteunen. Een kans die op basis van een herhaald experiment wordt vastgesteld wordt ook wel de 'zweet'kans genoemd. Dit in tegenstelling tot een zogenoemde 'weet'kans.
In het geval van de 'zweet'kans wordt de kans bepaald door een grote verzameling herhaalde experimentresultaten, in het geval van de 'weet'kans, wordt uitgegaan van een redenering. Bij de munten is het aannemelijk dat een munt gelijke kanten heeft, dus ook dat de

kans op K(op) even groot is als de kans op M(unt). Een ander voorbeeld van een 'weet'kans is de kans op een 3 bij het gooien van een dobbelsteen. De kans op een 3 is $1/6$, aangezien er 6 uitkomsten zijn met gelijke mogelijkheden. (beredeneerd op basis van de symmetrie van de kubus(dobbelsteen)). 'Zweet'-kansen worden maatschappelijk veel gebruikt in informatie over voorspellingen. Voorbeelden zijn kans op een jongen/meisje bij geboorte, kans op regen, kans op overlijden, etc.

Opdracht

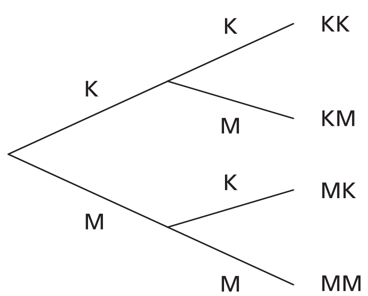
In bijeenkomst 1 bent u bezig geweest met de vragen naar de uitkomsten bij het experiment 'gooien met drie munten'.

1. Kunt u aangeven welke 'zweet'kansen u heeft gevonden voor de verschillende uitkomsten?
2. Kunt u beredeneren welke 'weet'kansen bij dit experiment horen?

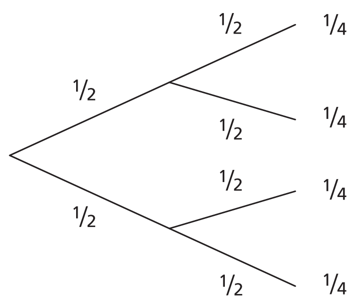
De basis van het kansbegrip is gelegen in de verhouding tussen een bepaalde uitkomst en alle mogelijke uitkomsten van een experiment.
Voorbeeld:
Het experiment 'het gooien met 2 munten' heeft de volgende mogelijke uitkomsten [(KK); (MK); (KM); MM]. Ervan uitgaande dat we te maken hebben met een symmetrische munt, is de aanname dat elk van de vier mogelijkheden gelijk voorkomt als er vaak genoeg gegooid wordt. Dit betekent voor de kans op elke uitkomst het onderstaand beeld.

- de kans op KK betekent een van de vier mogelijke uitkomsten, dus de kans is $1/4$.
- de kans op MM betekent een van de vier mogelijke uitkomsten, dus de kans is $1/4$.
- de kans op een kop en een munt, uitkomsten KM en MK, betekent twee van de vier mogelijke uitkomsten, dus de kans is $1/2$.
- soms is het belangrijk om onderscheid te maken de volgorde KM en MK, bijvoorbeeld als de twee munten achtereenvolgens gegooid worden. In dat geval moet er gesproken worden over de kans op KM = $1/4$, en de kans op MK = $1/4$.

In een zo genoemde boomdiagram gerepresenteerd ziet het experiment er als volgt uit:



de mogelijke uitkomsten



de bijbehorende kansen

Opdracht

Kunt u op basis van bovenstaande informatie een diagram maken voor het experiment 'gooien met een punaise'.

3. Voorbereiding op gesprekken in de basisschool

De loterij

In de basisschool wordt nauwelijks aandacht geschonken aan het kansbegrip. Toch komen kinderen op intuïtieve wijze vaak in aanraking met het begrip kans, vooral vanuit de vraag of iets eerlijk is. Eerlijk betekent dan zoiets als 'voor iedereen evenveel kans of mogelijkheid'. Een loterij is eerlijk als iedereen evenveel kans heeft op een prijs. Een ronddraaiend rad met getallen, waarbij na draaiing bij toeval een getal wordt aangewezen als winnend, is daar in de kinderwereld een voorbeeld van. Ook een bordspel waarin met een dobbelsteen wordt bepaald hoeveel vakjes je verder mag, wordt als eerlijk ervaren aangezien de kans op elk van de uitkomsten even groot is.

De koppeling van het intuïtieve gevoel 'eerlijk' en het kansbegrip vormt een rijk onderzoeksterrein. Om dit onderzoeksterrein in beeld te brengen, wordt een aantal situaties op eigen niveau onderzocht vanuit de vraag, 'is het eerlijk?'. Vervolgens wordt gekeken naar gesprekken over dezelfde problematiek met kinderen van groep 5 en 7. Het bekijken van de beelden geeft informatie over hoe u met kinderen het onderzoeksterrein kunt betreden.

U krijgt vier situaties over het trekken van lootjes voorgeschoteld. In alle vier de gevallen is de vraag 'is dit eerlijk?' aan de orde. Deze vraag kan ook anders gesteld worden in termen van kansen. Heeft elke deelnemer aan de loterij evenveel kans op een prijs? Natuurlijk is het geven van een antwoord niet genoeg. De intuïtie vraagt om een vervolg: een verantwoording volgens een heldere redenering. De redenering vraagt om een ondersteuning door middel van een visuele representatie van de situatie. Een boomdiagram biedt uitkomst.

Situatie 1.

Vier mensen trekken een lootje uit een hoge hoed met vier lootjes erin. Ieder maakt tegelijk het lootje open. Op elk lootje staat een getal(1 t/m 4). Geen lootje is gelijk. Het winnende getal wordt getoond. Een van de vier is winnaar.

Situatie 2.

De spelleider geeft vooraf het winnende getal. Vervolgens trekken de vier deelnemers een lot uit de hoed en openen dit tegelijk op teken van de spelleider.

Situatie 3.

De spelleider geeft vooraf het winnende getal. Een van de deelnemers mag een lot trekken en openen. Als het geen winnend lot is mag een volgende deelnemer een lot trekken en openen. Etc. Zodra het winnend lot is geopend hoeven de anderen de lootjes niet meer te trekken en te openen.

Situatie 4.

De spelleider geeft vooraf het winnende getal. Een van de deelnemers mag een lot trekken en openen. Is er sprake van het winnende lot dan is de loterij afgelopen. Is het getrokken lot geen winnend lot dan vouwt deze deelnemer z'n lot weer dicht en gooit deze terug in de hoed. De spelleider schudt opnieuw en de volgende deelnemer mag een lot trekken. Etc.
Het trekken gaat net zo lang door totdat het winnende lot is getrokken.

In alle vier de gevallen geldt de vraag: Is dit eerlijk?
Intuïtief:
Beredeneerd:

Bespreking in tweetallen:

Bespreek de vier gegeven situaties:

- Vergelijk intuïtie en redenering in elke situatie.
- Probeer elke situatie in een boomdiagram te representeren.
- Inventariseer vragen voor een groepsdiscussie.

In de hele groep:

- Bespreek de vier situaties en de representaties.
- Kunt u voorspellen of de kinderen van groep 5 en 7 de loterij eerlijk of oneerlijk vinden?
- Wat levert de bespreking voor u op?

Het vergelijken van de vier situaties vanuit de vraag, 'eerlijk of niet eerlijk?' is het vergelijken van de kans voor elke deelnemer aan het begin van de loterij om de hoofdprijs te winnen. Het gaat er niet om welke kans een deelnemer heeft op het moment dat er al twee lootjes getrokken zijn zonder dat het winnende is getrokken. De vraag naar eerlijk of niet eerlijk betekent het beschouwen van de kansen vanuit de totale gebeurtenis gezien.
Als deelnemer 1 een lootje heeft getrokken (kans op winnend lot is $^{1}/_{4}$) en het lootje is niet het winnende lot, dan blijft er voor de overige drie deelnemers een nieuw kansenveld over. De volgende deelnemer heeft op dat moment een kans van een op drie ($^{1}/_{3}$) op het winnende lot. Kijkend naar de kans op een winnend lot vanaf het begin van de loterij betekent, meewegen dat deelnemer 1 ook het winnende lot kan trekken. In het geval dat deelnemer 1 het winnende lot trekt dan is de kans op een winnend lot van de overige deelnemers meteen tot 0 teruggebracht. Het is juist deze opstapeling van kansen die het vergelijken van de vier situaties voor elke deelnemer mogelijk en zinvol maakt. Er is sprake van een afhankelijkheid van de ene gebeurtenis met de vorige.
Voor deelnemer 1 is de kans op een winnend lot $^{1}/_{4}$. Voor deelnemer 2 wordt de kans op een winnend lot bepaald door de gebeurtenissen, deelnemer 1 trekt niet het winnende lot (kans is $^{3}/_{4}$) en deelnemer 2 trekt vervolgens het winnende lot(kans is $^{1}/_{3}$). Dat wil zeggen een kans van: $^{1}/_{3}$ van $^{3}/_{4}$ (schrijf $^{1}/_{3} \times {}^{3}/_{4}$), geeft een kans van $^{1}/_{4}$. De kans lijkt dus gelijk ($^{1}/_{4}$) te blijven.

Opdracht

Onderzoek de kansen voor deelnemer 3 en 4 op een winnend lot.
Wat valt je op?

In het geval het getrokken lootje weer terug wordt gedaan, krijg je een verandering die al zichtbaar wordt bij deelnemer 2. Er geldt voor deelnemer 1 een kans van $^{1}/_{4}$ op het winnende lot. Voor deelnemer 2 wordt de kans bepaald door de gebeurtenissen deelnemer 1 trekt niet het winnende lot (kans van $^{3}/_{4}$) en deelnemer 2 trekt vervolgens wel het winnende lot (kans is $^{1}/_{4}$). Dat wil zeggen een kans van: $^{1}/_{4}$ van $^{3}/_{4}$ (schrijf $^{1}/_{4} \times {}^{3}/_{4}$). Dit geeft een kans van $^{3}/_{16}$. Daarmee lijkt de kans af te nemen.

Opdracht

Onderzoek de kansen voor deelnemer 3 en 4 op een winnend lot.
Wat valt je op?
In deze situatie hoeft het winnende lot niet te vallen na een ronde lootjes trekken.
Kun je nagaan hoe groot de kans is dat deelnemer 1 het winnende lot trekt in de tweede ronde?

4. De loterij en de kinderen

Er is met twee groepjes van vier kinderen gesproken over de eerlijkheid van de loterij. Eerst met een groepje kinderen uit groep 5 en vervolgens met een groepje kinderen van groep 7. In het gesprek worden bovengenoemde alternatieve vormen 1 tem 4 met de kinderen gespeeld en besproken. Telkens is de vraag: is het voor iedereen eerlijk? Bekijk de videoclips met onderstaande vragen in het achterhoofd:

1. Welk(e) concept(en) over eerlijk tonen de kinderen?
2. Welk(e) kenmerk(en) van een onderzoekende houding zie je terug bij de kinderen?
3. Zie je verschil (in ontwikkeling) in en tussen beide groepen?
4. Welke vragen zou u willen stellen aan de kinderen?

De valse dobbelsteen

Het gooien met een dobbelsteen is voor de meeste kinderen intuïtief een eerlijke manier om een spel te spelen, een beslissing te nemen of uit te maken wie 'm is. Er zijn echter valse dobbelstenen te koop bij goochel- en feestwinkels. Het spelen van het spelletje 'wie het eerst 10 x een zes gooit' levert een wisselend resultaat op bij symmetrische dobbelstenen. In het geval je het opneemt tegen iemand met een valse steen, wordt winst wel erg moeilijk.
Het onderzoeken van dit verschijnsel betekent voor de kinderen de confrontatie met een cognitief en wellicht normatief conflict. Cognitief in de zin van 'dat kan toch niet?' en normatief in de zin van 'je gaat er niet vanuit dat iemand vals speelt, zeker een volwassene niet'. Maar hoe lang blijf je geloven in eerlijk spel?
Kijkt u naar de beelden van kinderen uit groep 5 en groep 7 vanuit onderstaande vragen.

1. Welk(e) kenmerk(en) van een onderzoekende houding ziet u bij de kinderen?
2. Stimuleert de gespreksleider de onderzoekende houding van de kinderen? Waaruit blijkt dat?
3. Zou u zelf vragen aan de kinderen willen stellen? Zo ja, welke vragen?

5. Didactische implicaties

Inleiding

In bovenstaande situaties wordt een richting gegeven om het onderzoeksterrein kans met kinderen te betreden. Het doel is om kinderen van de basisschool met een onderzoekende houding een nieuw domein van de wiskunde te laten ontdekken. In dit domein kunnen nieuwe begrippen en verbanden worden ontdekt met een houding waarin systematisch handelen en redeneren de boventoon voeren. Een wetenschappelijke houding wordt gevoed door nieuwsgierigheid en een onderzoekende geest. Hoge eisen worden gesteld aan de begeleiding van deze jonge onderzoekers. Een aantal eisen op rij:

- ontwikkelen van uitdagende taken die kunnen leiden naar redeneringen en ontdekkingen,
- kritisch kunnen volgen van het denkproces van het kind,
- op het juiste moment een productieve interventie kunnen plegen,
- aanmoedigen in plaats van afremmen of overnemen,
- kunnen uitgaan van en zich verplaatsen in een onderzoekende houding

In de afsluiting van deze module wordt aandacht geschonken aan deze didactisch implicaties.

Het onderzoeksterrein

In de module zijn we bezig geweest om de onderwerpen combinatorisch tellen en kans als onderzoeksterrein voor jonge kinderen te verkennen. Het doel van de module is te laten zien en ervaren dat onderzoeksmatig bezig zijn binnen een specifiek terrein zoals de combinatoriek en kansrekening kan bijdragen tot en stimuleren van een wetenschappelijke attitude bij kinderen. Deze attitude kenmerkt zich door gedreven nieuwsgierigheid, door een onderzoekende en vragende houding en door de wil om te willen weten en begrijpen. Op basis van een aantal specifieke taken hebben de kinderen getoond dat het bezig zijn met telproblemen uit de combinatoriek kan leiden tot wiskundige activiteiten. Zo hebben we de kinderen zien ordenen, systematiseren en horen redeneren. Met name de vraag naar alle mogelijkheden leent zich op alle niveaus voor het uitlokken van een wiskundige attitude.
De overstap van combinatoriek naar kans ligt voor het oprapen. Het kans begrip is intuïtief bij veel kinderen aanwezig. Het verschil tussen een 'weet'kans en een 'zweet'kans is een belangrijk beginpunt. Het leren redeneren in de context van eerlijk geeft vervolgens mooie aanknopingspunten om de kansrekening binnen te gaan. Hierin gaat het vooral om het ontwikkelen van een visualisatie of een representatie van de redenering.

Talentontwikkeling

Binnen het onderzoeksprogramma Talentenkracht wordt onderzoek gedaan naar aanwijzingen om talenten op het gebied van wiskunde, science en techniek bij jonge kinderen op te sporen en in kaart te brengen. Voor het woord talent wordt daarbij de volgende definitie gebruikt:
Talent is een vermogen van een kind tot hoge ontwikkeling op een specifiek gebied met als kenmerken:

1. *een hoog leerpotentieel op het betreffende gebied,*
2. *samenhangend met het vermogen aan de sociale en materiële omgeving een hoge kwaliteit van ondersteuning en hulp te ontlokken,*
3. *een grote diepte-van-verwerking,*
4. *originaliteit,*
5. *een hoge waargenomen (leer)competentie bij het kind (de overtuiging in staat te zijn ook moeilijke talentspecifieke vaardigheden te kunnen leren),*
6. *een sterke drijfveer en positieve waardering voor het talentgebied (zich onder andere uitend in nieuwsgierigheid, doorzettingsvermogen, en plezier).*

(Van Geert en Steenbeek, 2007)

Talent komt tot uitdrukking in een bepaalde manier van waarnemen, handelen en redeneren in de concrete taaksituaties. Talent duidt op een proces dat te zien is in de concrete interactie tussen het kind, de taakobjecten en de volwassene (en eventueel ook een ander kind). Voorwaarde voor het optreden van dit proces zijn de volgende kenmerken van de situatie en taak: voldoende talentontlokkend, open en tegelijk ondersteunend.
Talent is een ook kenmerk van een persoon. Dus er moet sprake zijn van een proces op de korte termijn van een concrete taaksituatie, maar ook op de lange termijn van het behoud en de verdere ontwikkeling van deze vorm van probleemoplossend gedrag (talent is dus geen eenmalig "succes", eenmalig de talentkenmerken laten zien in een taakje).
Kijkend naar het handelen en verwoorden van de kinderen in deze module, zijn graduele verschillen te onderscheiden. Een eerste beschrijving van deze verschillen zou als volgt kunnen zijn:

- verschil in het al dan niet gebruik maken en afhankelijk zijn van de aangereikte concrete materialen;
- verschil in de systematiek van het doen en van het redeneren;
- verschil in het ongeveer of precies willen weten;
- verschil in het gebruik van taal om redeneringen onder woorden te brengen;
- verschil in het ondersteunen van redeneringen door vormen van representaties.

Om meer greep te krijgen op deze verschillen is het opdoen van ervaring met onderzoekend leren nodig en gewenst. Binnen het wiskundig terrein van deze module liggen nieuwe taken voor het oprapen. Het is zeker niet de bedoeling om een leerlijn combinatoriek en kansrekening in de basisschool te gaan promoten. Wel zijn er genoeg aanwijzingen om te komen tot aanbevelingen voor onderzoeksvragen op bovengenoemde terreinen vanaf de voorschoolse periode tot aan het einde van de basisschool.

Fase 1: een aantal combinatorische telproblemen wordt verkend. Door middel van tastbaar materieel onderzoekt het kind zoveel mogelijk oplossingen.(leeftijdsfase vanaf 3 jaar)

Fase 2: een aantal combinatorische telproblemen wordt verkend. De vraag naar volledigheid ligt op tafel. Met behulp van materiaal en eventueel op papier zoekt de leerling naar de volledige oplossing. (leeftijdsfase vanaf 6 jaar)

Fase 3: een aantal toevalsexperimenten wordt onderzocht. De mogelijkheden worden systematisch in kaart gebracht. Visualiseren en representeren als ondersteuning van het redeneren worden gestimuleerd. (leeftijdsfase vanaf 8 jaar)

Fase 4: het begrip kans krijgt in een aantal specifieke contexten een betekenis.(vanaf 10 jaar)

De begeleider

In alle fasen is de rol van de begeleider essentieel. Een aantal kenmerken van die rol zijn:

- het stellen van bij het oplossingsproces van de leerling aansluitende vragen zodat de leerling verder kan denken,
- het aanvullen of aanpassen van het materiaal dat op tafel ligt
- het uitlokken van een volgende denkstap.
- Het stimuleren van verwoorden, redeneren, experimenteren, conclusies trekken, hypothesen opstellen en toetsen, etc.

De begeleider moet daarvoor de verschillende fasen van het onderzoeksproces in beeld hebben. Op basis van handelen met materiaal, via het meer systematisch representeren op papier naar het herkennen van verbanden en patronen. Bij elke fase horen verschillende vragen. Met name worden hier bedoeld vragen die bepaalde denkstapjes stimuleren. De stap van doen naar meer systematisch doen, de stap van doen naar vertellen wat je doet en waarom, de stap naar het trekken van beredeneerde(onderbouwde) conclusies.

Opdracht

Neem als groep een van de vier filmpjes uit bijeenkomst 1 en bekijk deze met in het achterhoofd de bovengenoemde kenmerken van een begeleider.
- Welke kenmerken zie je terug in het gesprek?
- Welke aanvullingen zou jij willen geven aan het gesprek om een eventueel ontbrekende kenmerk aan de orde te stellen?

Afronding met een opdracht in de basisschool. (groep 5-8)

Speel met 3 kinderen ganzenbord. Een van de kinderen mag telkens vier vooruit, de rest gooit met een dobbelsteen. Voer een gesprek met kinderen of dit spel eerlijk of niet eerlijk is.

- Hoe zou je het eerlijk of niet eerlijk zijn van het spel kunnen onderzoeken?
- Wanneer zou je kunnen zeggen dat je uitspraak betrouwbaar is?
- kun je beredeneren of moet je 'zweten' door het telkens te spelen?