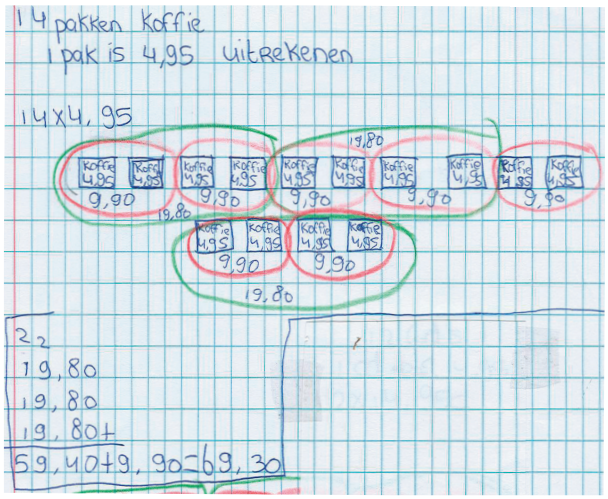
Leren vermenigvuldigen

met meercijferige getallen



Buijs, Kees

Leren vermenigvuldigen met meercijferige getallen / K. Buijs – Utrecht: Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education.

Proefschrift Universiteit Utrecht. Met literatuuropgave. Met samenvatting in het Engels.

ISBN: 978-90-73346-63-5

Trefwoorden: reken-wiskundeonderwijs / vermenigvuldigen met meercijferige getallen / onderwijsleertraject / aanpakgedrag / notatiegedrag / progressief mathematiseren / wiskundige kernideeën / ontwikkelingsonderzoek.

Key words: mathematics education / multiplying with multidigit numbers / teaching-learning trajectory / solution strategies / notations / progressive mathematising / mathematical core ideas / developmental research.

Grafische vormgeving: Communicatie & Vormgeving, Faculteit Bètawetenschappen, Universiteit Utrecht

© Kees Buijs, Driehuizen, Nederland

Leren vermenigvuldigen met meercijferige getallen

Learning to multiply with multidigit numbers

(with a summary in English)

Proefschrift

ter verkrijging van de graad van doctor
aan de Universiteit Utrecht,
op gezag van de rector magnificus, prof. dr. J.C. Stoof,
ingevolge het besluit van het college voor promoties
in het openbaar te verdedigen
op maandag 19 mei 2008 des middags te 12.45 uur

door

Cornelis Buijs
geboren 29 mei 1949 te Krommenie

Promotor: Prof. dr. K.P.E. Gravemeijer

Co-promotor: Dr. M. Beishuizen

Voorwoord

Toen het onderzoek waarvan deze dissertatie het resultaat is, na enkele voorbereidende gesprekken in het najaar van 2003 van start ging, had ik niet kunnen bevroeden dat het centrale leerstofdomein van het onderzoek, het vermenigvuldigen met meercijferige getallen, tegen de tijd dat het onderzoek afgerond zou zijn (in het vroege voorjaar van 2008), zo sterk in de belangstelling zou staan. In januari 2008 werd het rapport *Over de drempels met taal en rekenen* (Expertgroep doorlopende leerlijnen, 2008) gepresenteerd. Een van de onderwerpen op het gebied van rekenen-wiskunde die blijkens dit rapport aanleiding tot zorg geven, wordt gevormd door het meercijferige vermenigvuldigen. Wat in het kader van het onderzoek al eerder aan het licht was gekomen[1], werd ook door de 'Expertgroep doorlopende leerlijnen' nadrukkelijk voor het voetlicht gehaald: de prestaties van leerlingen einde basisonderwijs op het gebied van het schriftelijke, procedurele rekenen met grotere getallen zijn de afgelopen tien jaar flink teruggelopen. Dit geldt in het bijzonder voor de bewerkingen vermenigvuldigen en delen. Door de Expertgroep werd dan ook de wenselijkheid onderstreept van nader onderzoek op dit gebied. Niet alleen de vraag wat mogelijke oorzaken van deze achteruitgang zijn, maar ook de vraag hoe de betreffende leergangen binnen het curriculum van het basisonderwijs beter opgebouwd kunnen worden, zou daarbij beantwoord dienen te worden.

Een factor die bij het tot stand komen van de genoemde achteruitgang mogelijk een rol heeft gespeeld, is overigens ook al naar voren gekomen. Het is met name het betrekkelijk hoge percentage leerlingen dat bij opgaven als 23x56 en 1237:28 een hoofdrekenstrategie hanteert maar daarbij geen gebruik maakt van passende hulpnotaties (met veelal onjuiste uitkomsten als gevolg), dat van invloed lijkt te zijn geweest. Kennelijk slaagt het onderwijs er niet altijd in om de leerlingen van het nut van dergelijke notaties te doordringen. Het was juist deze kwestie die in het onderhavige onderzoek ook werd gesignaleerd en die bij het opzetten van het onderzoek van meet af aan een belangrijke rol heeft gespeeld. Met de presentatie van de resultaten van het onderzoek in de vorm van deze dissertatie hoop ik dan ook een bijdrage te leveren aan voortgaande ideevorming en discussie op het gebied van het meercijferige vermenigvuldigen en, in meer algemene zin, aan de verdere ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs.

Aan de totstandkoming van deze dissertatie hebben velen een bijdrage geleverd. Dat geldt in de eerste plaats natuurlijk voor mijn promotor prof. dr. Koeno Gravemeijer en mijn copromotor dr. Meindert Beishuizen. Beiden hebben in veel opzichten richting en inhoud aan het onderzoek gegeven. Van de eerstgenoemde heb ik daarbij in hoge mate gewaardeerd dat hij mij tot op zekere hoogte mijn gang liet gaan maar op hoofdpunten voor de nodige ondersteuning en sturing heeft gezorgd. Daarnaast was zijn steun bij de hele ideevorming rond de experimentele leergang, bij het uitwerken van de opzet van de dissertatie en het redigeren van de verschillende teksten daarbinnen van grote waarde. De laatstgenoemde heeft eveneens op veel punten een bijdrage geleverd. Dat begon al met de opzet van het praktijkexperiment en het vormgeven van de te ontwikkelen criteriumtoets. Maar ook voor wat betreft de praktische kant heeft hij veel werk verricht, bijvoorbeeld doordat hij de begeleiding van de twee van de vijf scholen goeddeels voor z'n rekening heeft genomen. Ook bij de ontwikkeling en toepassing van het beoordelingsinstrument was zijn steun onmisbaar.

Verder gaat mijn dank uit naar de vijf scholen die aan het onderwijsexperiment hebben deelgenomen, in het bijzonder naar de vijf leraren die de betreffende lessen hebben uitgevoerd. Dit zijn: Frank Bosma (obs. De Tweemaster, Enkhuizen), Gerrit Visser (obs. De Zonnewijzer, Hoorn), Stephan Kroes (bs. De Fontein, Dordrecht), Frits van Minos (pcbs. Sjaloom, Katwijk) en Alexandra Mahieu (obs. De Hobbit, Leiderdorp). Hun betrokkenheid en deskundigheid hebben zeker bijgedragen aan het welslagen van het experiment.

Evenzeer ben ik dank verschuldigd aan mijn beide werkgevers uitgeverij Bekadidact en SLO (nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling). Met name in de periode van het praktijkexperiment, in het najaar van 2004, heb ik van beide alle ruimte gekregen om dit experiment van zeer nabij te volgen. Bovendien heeft Bekadidact belangeloos een groot aantal illustraties beschikbaar gesteld terwijl de SLO mij in de afrondende fase van het onderzoek financieel heeft gesteund. Voorts dank ik het Cito (centraal instituut voor toetsontwikkeling) voor het beschikbaar stellen van de PPON-leerlingenboekjes uit 1997 en 2004 die betrekking hebben op het meercijferige vermenigvuldigen.

Daarnaast is er nog een aantal andere instellingen en personen die ik in het kort wil noemen. Dit betreft obs. De Overhael te Driehuizen in verband met de medewerking aan het vooronderzoek, prof. dr. Adri Treffers voor een aantal telefonische consultaties,

dr. Cees van Putten voor zijn hulp bij het uitvoeren van een aantal statistische bewerkingen rond de toetsgegevens uit het onderzoek, en mevr. Tracey Longden voor haar correcties van de Engelse samenvatting van de dissertatie.

Op een flink aantal plaatsen in deze studie wordt verwezen naar eerdere ontwikkelervaringen in het kader van de ontwikkeling van de methode *Wis en Reken*. Ik denk nog altijd met veel plezier terug aan de vele intensieve discussies en besprekingen die ik destijds met mijn medeauteurs had. Dit zijn: Frans Moerlands, Nina Boswinkel, Carlijn Bergmans, Marjan Torn, Toon Meeuwisse, Willem Vermeulen en Huub Jansen. Het werk dat wij destijds gezamenlijk verricht hebben, is ook bij het onderhavige onderzoek nog altijd van grote waarde geweest.

Tenslotte wil ik nog graag de leerlingen van de verschillende groepen 7 noemen die aan het experiment deelnamen en die hun oplossingen en ideeën vaak met grote bereidwilligheid wilden delen; en, *last but not least,* mijn familie, in het bijzonder Yvonne, Jorie en Mara, die mij tijdens het onderzoek altijd volop gesteund en gemotiveerd hebben.

Literatuur

Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008). *Over de drempels met taal en rekenen* (drie rapporten). Enschede: SLO.

voetnoten

1 In een presentatie van enkele gegevens en bevindingen uit het onderhavige onderzoek op de Panamaconferentie te Noordwijkerhout in januari 2006, werd reeds gememoreerd dat de goedscores op het gebied van het meercijferige vermenigvuldigen de afgelopen tien jaar met zo'n vijftien procentpunten gezakt zijn van ongeveer 0.75 naar .60.

Inhoudsopgave

1	**Inleiding, probleemstelling en overzicht**	13
1.1	Aanleiding tot het onderzoek	11
1.2	Onderzoeksvragen en werkwijze bij het onderzoek	17
1.3	Overzicht van het vervolg	19
2	**Theoretisch kader**	23
2.1	Inleiding	23
2.2	Ontstaan en hoofdkenmerken van de realistische onderwijstheorie	23
2.2.1	*Ontstaansgeschiedenis in vogelvlucht*	*23*
2.2.2	*Eerste denkbeelden over realistisch reken-wiskundeonderwijs*	*25*
2.2.3	*Wiskunde als menselijke activiteit; mathematiseren*	*26*
2.2.4	*Voorbeeldleergangen; progressief mathematiseren, didactische fenomenologie*	*27*
2.2.5	*'Three dimensions': vijf grondprincipes van de realistische onderwijsbenadering*	*32*
2.2.6	*Nieuwe voorbeeldleergangen; didactische principes in 'Revisiting Mathematics Education'*	*35*
2.2.7	*Ontwikkelingsonderzoek als impuls voor onderwijsontwikkeling en theorievorming*	*38*
2.2.8	*TAL en de specificatie van het niveaukarakter van het leerproces*	*41*
2.2.9	*Realisme en socio-constructivisme; aandacht voor interactie en wiskundige kernideeën*	*43*
2.3	Lokale onderwijstheorieën op het gebied van het meercijferige vermenigvuldigen	46
2.4	Enkele aandachtspunten voor het onderzoek	53
3	**Achtergronden van het onderzoek**	59
3.1	Inleiding	59
3.2	Veranderende opvattingen over hoofdrekenen en de plaats daarvan in het curriculum	60
3.3	Meercijferig vermenigvuldigen als leerstofdomein op een kruispunt van leerwegen	66
3.4	Enkele internationale onderzoeken rond het meercijferige vermenigvuldigen	75
3.4.1	*Ambrose, Baek en Carpenter: Cognitively Guided Instruction*	*75*
3.4.2	*Fosnot en Dolk: Young mathematicians at work*	*80*
3.4.3	*Murray, Olivier en Human: Problem-centered learning*	*85*
3.4.4	*Reflectie: kritische bezinning op de (on)mogelijkheden van de constructivistische onderwijsbenadering*	*89*
3.5	Stand van zaken wat betreft resultaten bij het meercijferige vermenigvuldigen in Nederland	94

4	**Opzet van het onderzoek**	105
4.1	Inleiding: ontwikkelingsonderzoek als onderzoeksmethode	105
4.2	De voorbereidende fase	110
4.3	De experimentele fase	114
4.4	De retrospectieve fase	120
4.5	Enkele grondkenmerken van ontwikkelingsonderzoek nader uitgewerkt	122
5	**Ontwikkeling van de leergang**	131
5.1	Recapitulatie; drie aandachtspunten voor de leergang	131
5.2	Situaties en strategieën	134
5.3	Modellen en notatievormen	139
5.4	Het vooronderzoek	142
5.5	Globale opzet van het beoogde onderwijsleertraject	152
5.5.1	*Drie didactische 'parameters'*	*152*
5.5.2	*Het beoogde onderwijsleertraject in vogelvlucht*	*156*
5.5.3	*Bredere inbedding van het onderwijsleertraject*	*159*
5.6	Verwachtingen met betrekking tot de beoogde progressie van de leerlingen	160
6	**Cruciale momenten uit het experimentele onderwijsleerproces**	167
6.1	Inleiding	167
6.2	Het verzamelen van gegevens tijdens het onderwijsexperiment	168
6.3	Wat zijn cruciale onderwijsmomenten?	172
6.4	Cruciale onderwijsmomenten	177
6.4.1	*Introductie van het groeperend rekenen*	*177*
6.4.2	*Overzicht leren houden*	*182*
6.4.3	*Basale rekenvaardigheid als voorwaardelijke kennis*	*185*
6.4.4	*Leren werken met groepjes van 10; de nulregel*	*189*
6.4.5	*Ontwikkeling van adequate hulpnotaties: het picturaal-schematische aspect*	*191*
6.4.6	*Inzichtelijk distributief redeneren*	*192*
6.4.7	*Ontwikkeling van adequate hulpnotaties: voortgaande schematisering*	*198*
6.5	Verbinding met de vooraf geformuleerde verwachtingen	202
7	**Analyse resultaten: de ontwikkeling van goedscores en aanpakgedrag**	207
7.1	Inleiding	207
7.2	Categorisering van de voornaamste typen oplossingsstrategieën	207

7.3 Werkwijze bij het analyseren van de gegevens uit de drie criteriumtoetsen 219
7.4 Voornaamste conclusies met betrekking tot goedscores en aanpakgedrag 225
7.4.1 Resultaten van alle leerlingen samen 225
7.4.2 Verschillen tussen de scholen 228
7.4.3 Verschillen tussen jongens en meisjes 229
7.5 Contrastanalyse: de 25% zwakste leerlingen vergeleken met de 25% beste leerlingen 231

8 Analyse resultaten: de ontwikkeling van het notatiegedrag 243
8.1 Inleiding; het belang van een zorgvuldige ontwikkeling van het notatiegedrag 243
8.2 Drie voorbeelden van de ontwikkeling van notatiegedrag; twee bruikbare criteria 244
8.3 Uitwerking van de twee criteria tot een beoordelingsinstrument 249
8.4 De resultaten van alle leerlingen in kaart gebracht 256
8.4.1 Werkwijze 256
8.4.2 Resultaten van alle scholen samen 257
8.4.3 Resultaten van de 25% zwakste en 25% beste leerlingen 259
8.4.4 Verschillen tussen jongens en meisjes 261
8.5 Conclusies en discussie met betrekking tot de ontwikkeling van het notatiegedrag 262
8.5.1 Mate van betrouwbaarheid van de beoordeling 262
8.5.2 Enige conclusies en aandachtspunten aangaande de ontwikkeling van het notatiegedrag 263
8.5.3 Variëteit in notatievormen als indicatie voor toegenomen inzicht 265

9 Bevindingen, discussie en aanbevelingen 271
9.1 Inleiding; terugblik op het doorgemaakte ontwikkelproces 271
9.2 Voorstel voor een aangepaste leergang 279
9.3 Naar een lokale onderwijstheorie 288
9.3.1 Het niveaukarakter van realistische leergangen 288
9.3.2 Voorbeelden van strategieën op de drie niveaus van formalisering 290
9.3.3 Mate van structurering van rekenstrategieën als graadmeter voor niveauverhoging 292

9.3.4 *Mate van inzicht in twee wiskundige kernideeën als tweede graadmeter* *294*
9.3.5 *Kern van de lokale onderwijstheorie* *296*
9.4 Bevindingen 298
9.4.1 *Inleiding: progressief mathematiseren* *298*
9.4.2 *Voortschrijdend inzicht in de distributieve eigenschap* *299*
9.4.3 *Voortschrijdende structurering van de S1-strategie als centrale oplossingsstrategie* *301*
9.4.4 *Voortschrijdend inzicht in nulregel en positionaliteit* *303*
9.4.5 *Voortgaande schematisering van informele hulpnotaties* *305*
9.5 Discussie en aanbevelingen 307
9.5.1 *Is er nog plaats voor het meercijferige vermenigvuldigen in het leerplan van de toekomst?* *308*
9.5.2 *Haalbaarheid van realistisch reken-wiskundeonderwijs* *310*
9.5.3 *Modellen en voorkeurstrategieën: groepjesmodel versus rechthoekmodel* *313*
9.5.4 *Ontwikkelingsonderzoek als onderzoeksmethode: behoefte aan nadere kwaliteitscriteria* *314*

Literatuurlijst 321

Engelse samenvatting 333

Bijlagen 357
1 Voorbeeld van een criteriumtoets 357
2 Overzicht resultaten per school bij T1, T2 en T3, met bijbehorende beknopte analyse 360
3 Overzicht strategiegebruik bij T1, T2 en T3 op alle scholen samen 370
4 Tabellen behorende bij de statistische toets die werd uitgevoerd met behulp van het spss-programma 371
5 Beoordelingsinstrument notatiegedrag 373
6 Overzicht scoreverschillen notatiegedrag van alle vijf scholen 383
7 De resultaten van de vijf scholen afzonderlijk 385

Curriculum vitae 389

1 Inleiding, probleemstelling en overzicht

1.1 Aanleiding tot het onderzoek

In deze studie wordt verslag gedaan van een onderzoek naar leermethoden op het gebied van het vermenigvuldigen van meercijferige getallen, dat wil zeggen getallen met twee of meer cijfers[1]. Tot in de jaren tachtig van de vorige eeuw werd dit gebied veelal omschreven met de term cijferend vermenigvuldigen omdat het betreffende onderwijsleerproces vrijwel geheel in het teken stond van het aanleren van het cijferalgoritme (zie fig. 1.1a). Sedert die tijd is daar binnen het curriculum van het basisonderwijs in zoverre verandering in gekomen dat, voorafgaand aan de introductie van het cijferalgoritme, veelal een onderwijsleerproces plaatsvindt waarin het verkennen van niet-cijfermatige oplossingswijzen centraal staat. Daarbij worden de eigen, informele hoofdrekenstrategieën van leerlingen geleidelijk aan uitgebouwd tot efficiënte, notatieondersteunde procedures die gewoonlijk aangeduid worden met de term gestileerd hoofdrekenen of kolomsgewijs rekenen[2] (zie fig. 1.1b). Het is dit overgangsgebied van het eigenlijke, meer flexibele hoofdrekenen naar het meer proceduurmatige gestileerde hoofdrekenen dat het centrale onderzoeksgebied van deze studie vormt.

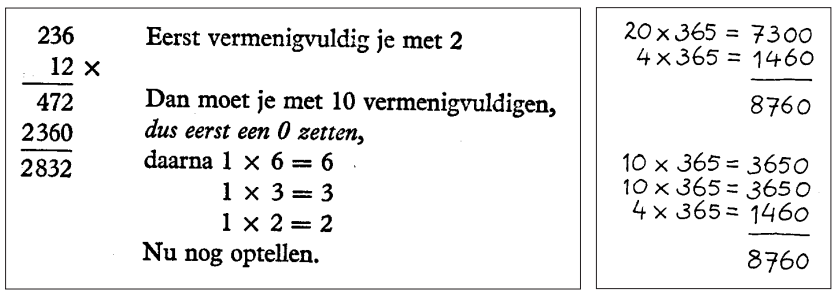


Fig. 1.1a en 1.1b Voorbeeld van een opgave (12x236) die cijfermatig wordt opgelost, afkomstig uit de methode *Naar Zelfstandig rekenen* (Zandvoort e.a., 1970); en een opgave (24x365) die via twee vormen van gestileerd hoofdrekenen wordt opgelost, afkomstig uit *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs, deel 2* (Treffers & De Moor, 1990).

Allereerste aanleiding tot deze studie was een episode in het ontwikkelwerk van de reken-wiskundemethode *Wis en Reken* (Buijs e.a., 2000) die in de jaren negentig werd ontwikkeld door een auteursgroep waarvan ik deel uitmaakte. Tijdens de try

out van het materiaal voor groep 7 bleef er met name voor wat betreft de leerlijn[3] rond het vermenigvuldigen met meercijferige getallen enigszins het gevoel bestaan dat deze leerlijn niet naar volle tevredenheid uitgekristalliseerd was en dat zich hier, meer in het algemeen, een didactisch probleem voordeed waarvoor op dat moment geen volledig bevredigende oplossing voorhanden was. Ook toen ik mij naderhand in het kader van het TAL-project intensief met het domein van het hoofdrekenen en daaraan verwante gebieden bezighield, bleef dit gevoel op de achtergrond altijd enigszins meespelen. En toen nog weer enige tijd later bij de uitkomsten van het vierde PPON-onderzoek van het Cito[4] in 2004 bleek dat de resultaten op het gebied van het meercijferige vermenigvuldigen een duidelijk neerwaartse tendens lieten zien, werd de toen al gemaakte keuze voor dit onderzoeksgebied nog weer verder bevestigd.

Kern van het bedoelde probleem betreft het feit dat het tot op heden niet goed gelukt is om een op realistische leest geschoeid onderwijsleertraject voor het gebied van het meercijferige vermenigvuldigen te ontwikkelen waarbij de informele en veelal nog omslachtige oplossingswijzen[5] die leerlingen bij de eerste verkenningen van dit gebied tentoonspreiden, op een natuurlijke en praktisch goed uitvoerbare manier uitgebouwd worden tot efficiënte, breed toepasbare procedures in de sfeer van het gestileerde hoofdrekenen; en waarbij de leerlingen geschikte notatievormen ontwikkelen die, ook in het geval een leerling niet tot het hoogste beheersingsniveau van zo'n procedure doordringt, gebruikt kunnen worden om op een redelijk efficiënte en inzichtelijke manier tot een oplossing te komen.

1.2 Onderzoeksvragen en werkwijze bij het onderzoek

De aandacht voor dit probleem is niet van zeer recente datum. Reeds in de late jaren zeventig werden in Nederland pogingen ondernomen om een geschikte didactische aanpak te ontwikkelen, hetgeen resulteerde in enkele wiskobaspublicaties[6] waarin voorstellen voor nieuwe leermethoden werden gedaan die gericht waren op het ontwikkelen van onderwijsleertrajecten waarin gestileerd hoofdrekenen centraal staat. Naderhand hielden onder meer auteursgroepen van nieuwe realistische reken-wiskundemethoden zich indringend met deze problematiek bezig. Op de ideeën, overwegingen en uitwerkingen die daarbij tot stand kwamen, wordt in deze studie voortgebouwd. Voornaamste bedoeling is dan ook om een verdere bijdrage aan de oplossing van dit probleem te leveren in de vorm van een nieuw prototype van een leergang en een daarbij passende lokale onderwijstheorie. Daarnaast is

het de bedoeling om een bijdrage te leveren aan de verdere ontwikkeling van de onderzoeksmethode die in het kader van deze studie gehanteerd wordt, namelijk die van ontwikkelingsonderzoek. Wat dat aangaat wordt voortgebouwd op eerdere projecten en onderzoeken waarin deze vorm van onderzoek geleidelijk aan steeds meer gestalte heeft gekregen.

In overeenstemming met het voorgaande hebben de volgende vragen als globaal vertrekpunt van het onderzoek gefungeerd:

(1) *Hoe kan een onderwijsleertraject rond het vermenigvuldigen van meercijferige getallen worden vormgegeven dat aansluit bij de eigen, informele strategieën van leerlingen op dit gebied en waarin deze strategieën gaandeweg worden uitgebouwd tot efficiënte, notatie-ondersteunde hoofdrekenstrategieën in de sfeer van het gestileerde hoofdrekenen?*
(2) *Hoe ontwikkelt zich binnen zo'n leergang het aanpakgedrag en het notatiegedrag van de leerlingen? En in hoeverre biedt deze leergang ook zwakkere leerlingen voldoende houvast om tot de met het onderwijs beoogde efficiënte strategieën te komen?*
(3) *Wat zijn de voornaamste elementen van een lokale onderwijstheorie die de grondslag van zo'n leergang vormt?*

Gelet op deze onderzoeksvragen was het van meet af aan duidelijk dat het onderzoek nadrukkelijk het karakter van een ontwikkelproces zou moeten krijgen waarbij gepoogd zou worden om, in het verlengde van wat reeds eerder op dit gebied tot stand was gebracht, een aantal ideeën te ontwikkelen die in een onderwijsexperiment uitgeprobeerd zouden worden om tot een aantal uitspraken over opzet, inhoud en theoretisch fundament van de beoogde leergang te komen. Uiteindelijk leidde dit tot een drietal samenhangende reeksen onderzoeksactiviteiten die in de afgelopen jaren uitgevoerd werden. Het vertrekpunt lag in een reeks activiteiten waarbij reflectie op eerdere ontwikkelervaringen plaatsvond, waarbij de onderzoeksvragen werden geformuleerd, en waarbij de voornaamste voorhanden zijnde vakinhoudelijke literatuur en onderzoeksliteratuur bestudeerd werd. Tevens werden eerste ideeën over opzet en inhoud van de te ontwerpen leergang ontwikkeld, en werd een vooronderzoek naar de mogelijke bruikbaarheid van deze ideeën uitgevoerd.

Daarna volgde een reeks activiteiten waarbij de leergang steeds verder werd uitgewerkt tot op het niveau van werkbladen, lesbeschrijvingen, toetsen en onderwijsactiviteiten. Verder werd een opzet gemaakt voor een onderwijsexperiment waarin deze leergang op een aantal scholen kon worden uitgeprobeerd, en vond een aantal activiteiten plaats gericht op het informeren en begeleiden van de aan het experiment

deelnemende leraren. Op basis daarvan werden vervolgens tijdens de uitvoering van het onderwijsexperiment de voornaamste aspecten van het onderwijsleerproces in de praktijk zo nauwkeurig mogelijk geobserveerd en geregistreerd (zie voor een voorbeeld van twee oplossingswijzen van een leerling fig. 1.2).

Tenslotte was er een reeks activiteiten die erop gericht was om de resultaten van het onderwijsexperiment kwalitatief en kwantitatief te analyseren, en om te achterhalen in hoeverre deze resultaten in overeenstemming waren met de vooraf geformuleerde verwachtingen met betrekking tot het beoogde onderwijsleertraject. Naar aanleiding van deze analyse werd vervolgens een beredeneerde lokale onderwijstheorie[7] beschreven. Met de formulering van een aantal bevindingen en discussiepunten over essentiële structuurkenmerken van dit onderwijsleertraject, alsmede over de gehanteerde onderzoeksmethode, werd deze derde reeks afgesloten.

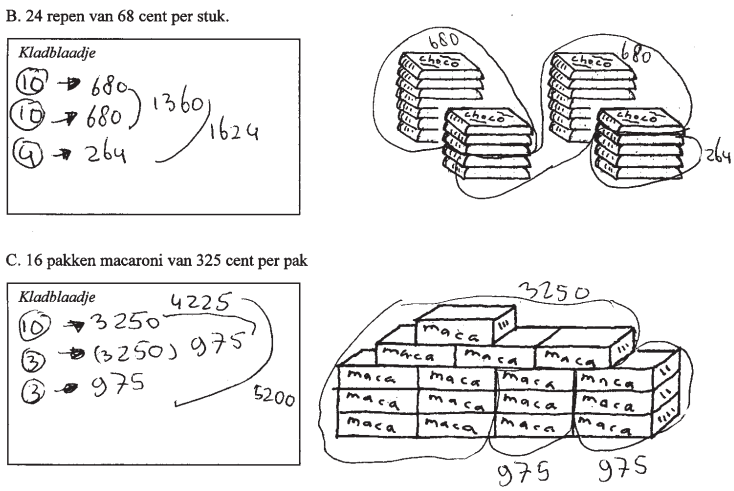


Fig. 1.2 Voorbeeld van twee oplossingswijzen van een leerling (inclusief een tafelfout in de eerste oplossingswijze) die zich bij het onderwijsexperiment in het kader van het onderzoek voordeden.

Een belangrijke bijkomende overweging bij de keuze van het onderzoeksterrein vormde verder nog de bredere context waarbinnen het onderzoek zich afspeelde. In het huidige reken-wiskundeonderwijs is er een duidelijke tendens waar te nemen om gevoel voor getallen[8], hoofdrekenen en schattend rekenen een meer centrale plaats in het curriculum toe te bedelen, en om het cijfermatige rekenen minder aandacht te

geven. De achtergrond van deze tendens, die zich in veel landen voordoet, ligt voor de hand: de grootschalige beschikbaarheid van rekenmachines heeft ervoor gezorgd dat de behoefte om zeer snel en efficiënt rekenopgaven met complexere getallen op papier te kunnen uitrekenen, drastisch geslonken is. Het maatschappelijk belang van het goed en snel kunnen cijferen is sterk verminderd. Des te belangrijker is het geworden om leerlingen grondig vertrouwd te maken met hoofdrekenen en met het gebruik van meer gestileerde vormen daarvan die enerzijds van betekenis kunnen zijn als voorloper van cijfermatige procedures, maar anderzijds ook op zichzelf waardevol zijn. De behoefte aan leergangen waarbij het eigenlijke hoofdrekenen geleidelijk aan overgaat in meer gestileerde vormen daarvan onder behoud van het inzichtelijke karakter van hoofdrekenen, is daarom des te sterker. Via het onderzoek dat in het kader van deze studie is uitgevoerd, wordt beoogd een bijdrage te leveren aan het voorzien in deze behoefte.

1.3 Overzicht van het vervolg

In het vervolg van deze studie wordt beschreven hoe de hierboven genoemde activiteiten werden uitgevoerd, tot welke resultaten dit leidde, en welke conclusies met betrekking tot de geformuleerde onderzoeksvragen getrokken konden worden.

In **hoofdstuk 2** wordt het *theoretisch kader* beschreven. Dit betreft in de eerste plaats de overkoepelende domeinspecifieke onderwijstheorie met betrekking tot realistisch reken-wiskundeonderwijs. Achtereenvolgens wordt ingegaan op de achtergrondfilosofie bij deze theorie, de ontstaansgeschiedenis en hoofdkenmerken van de theorie, en een aantal recente ontwikkelingen waarbij bepaalde elementen uit de theorie die voor deze studie van belang zijn, nader zijn uitgewerkt en doordacht. Daarna wordt stilgestaan bij enkele lokale onderwijstheorieën op het gebied van het meercijferige vermenigvuldigen. In een afsluitende paragraaf worden enkele aandachtspunten voor het onderhavige onderzoek besproken die voortvloeien uit dit theoretisch kader.

In **hoofdstuk 3** worden de voornaamste *achtergronden van het onderzoek* geschetst. Dit betreft in de eerste plaats een gebiedsafbakening van wat hoofdrekenen inhoudt. Daarbij wordt ingegaan op historische ontwikkelingen wat betreft inhoud en plaats in het curriculum van hoofdrekenen, en op de huidige veranderde opvattingen over

hoofdrekenen, inclusief de plaats van gestileerd hoofdrekenen. Speciale aandacht gaat uit naar het aspect van het gebruik van hulpnotaties in het kader van hoofdrekenen. Vervolgens wordt het domein van het vermenigvuldigen met meercijferige getallen eruit gelicht en wordt geschetst hoe dit leerstofgebied zich in het hedendaagse curriculum op een 'kruispunt van leerwegen' bevindt waarbij het eigenlijke, meer flexibele hoofdrekenen via het gestileerde hoofdrekenen overgaat in het cijfermatige rekenen. In de volgende paragraaf wordt een overzicht gegeven van de uitkomsten van een drietal voor het onderzoek relevante internationale onderzoeken. Tevens vindt een kritische bezinning plaats op mogelijkheden en grenzen van een in deze onderzoeken voorgestane onderwijsbenadering, namelijk de constructivistische onderwijsbenadering. Tenslotte wordt een overzicht gegeven van enkele voor het onderzoek relevante resultaten binnen dit subdomein zoals die in het PPON-onderzoek van het Cito naar voren komen. Met name de neerwaartse tendens in de resultaten en het summiere gebruik van notatie-ondersteunde hoofdrekenstrategieën, komen daarbij onder de aandacht.

In **hoofdstuk 4** wordt de *opzet van het onderzoek* beschreven. Eerst wordt stilgestaan bij de brede variëteit aan onderzoeksmethoden waardoor ontwikkelingsonderzoek wordt gekenmerkt, bij de drie fasen die binnen deze vorm van onderzoek veelal doorlopen worden, en bij een vijftal methodologische grondkenmerken die onderscheiden kunnen worden. Nadat de vraag besproken is waarom in het onderhavige geval gekozen is voor ontwikkelingsonderzoek als onderzoeksvorm, wordt in de volgende drie paragrafen geschetst welke onderzoeksactiviteiten binnen de drie genoemde fasen achtereenvolgens werden uitgevoerd. Daarbij wordt onder meer beschreven op welke momenten gedachte-experimenten in het onderzoek plaatsvonden (de voorbereidende fase), welke gegevens tijdens het onderwijsexperiment werden verzameld (de experimentele fase) en hoe een analyse van deze gegevens uiteindelijke leidde tot de ontwikkeling van een lokale onderwijstheorie (de retrospectieve fase). Bij deze beschrijving gaat de aandacht speciaal ook uit naar de vraag op welke wijze de progressie van de aan het onderwijsexperiment deelnemende leerlingen werd vastgesteld aan de hand van de resultaten op een criteriumtoets[9] die aan het begin, halverwege en aan het eind van het experiment werd afgenomen. In een afsluitende paragraaf wordt tenslotte nader stilgestaan bij de wijze waarop twee van de onderscheiden grondkenmerken in het onderzoek werden uitgewerkt.

Vervolgens wordt in **hoofdstuk 5** de *ontwikkeling van de leergang* beschreven alsmede het resultaat daarvan in de vorm van een voorlopig ontwerp van de leergang. Eerst

wordt een fenomenologische analyse beschreven zoals die tijdens het onderzoek werd uitgevoerd om een eerste indicatie voor opzet en inhoud van de leergang te krijgen. Daarbij worden situaties en strategieën geïnventariseerd die voor de leergang van belang zijn, alsmede een aantal modellen en notatievormen die een rol kunnen spelen. De eerste ideeën met betrekking tot opzet en inhoud van de leergang waartoe deze analyse leidde, gaven aanleiding tot een vooronderzoek waarvan het verloop en de resultaten in de volgende paragraaf beschreven worden. Op basis hiervan wordt vervolgens de globale opzet van de leergang geschetst. In grote lijnen passeren daarbij een aantal contexten die aan bod komen de revue, de volgorde waarin dat gebeurt en de modellen die worden gebruikt, alsmede de notatievormen waarvan de leerlingen gebruik kunnen maken. Tevens wordt een aantal relaties van de leergang beschreven met verwante leergangen. Het hoofdstuk sluit af met een beschrijving van de voornaamste verwachtingen met betrekking tot het verloop van het onderwijsleerproces dat zich in het kader van het onderwijsexperiment zou gaan voltrekken.

In **hoofdstuk 6** wordt gerapporteerd over het onderwijsexperiment dat in het kader van deze studie plaatsvond. Dat gebeurt in de vorm van de beschrijving van een zevental *cruciale onderwijsmomenten* die zich tijdens het experiment voordeden. Ter inleiding van het hoofdstuk wordt een beeld geschetst van de gang van zaken tijdens het experiment en de wijze waarop gegevens verzameld werden, inclusief de gegevens betreffende goedscores en aanpakgedrag van alle leerlingen bij de drie afgenomen criteriumtoetsen. Daarna volgt een beschrijving van wat in het kader van deze studie verstaan moet worden onder cruciale onderwijsmomenten, waarbij benadrukt wordt dat het bij zulke momenten in wezen om een 'opeenvolging van gewichtige onderwijsgebeurtenissen' gaat die via reflectie en analyse aan het licht wordt gebracht. In aansluiting hierop worden zeven van deze momenten gememoreerd zoals die zich bij het experiment hebben voorgedaan. Tot besluit wordt nader ingegaan op de relatie van de beschreven momenten met de in het vorige hoofdstuk geformuleerde verwachtingen met betrekking tot het beoogde verloop van het onderwijsleerproces.

In **hoofdstuk 7** worden de *resultaten van het onderwijsexperiment* gepresenteerd en geanalyseerd voor wat betreft de door de deelnemende leerlingen behaalde *goedscores* alsmede het door hen ontwikkelde *aanpakgedrag* zoals die in de toetsresultaten bij de drie afgenomen criteriumtoetsen tot uitdrukking komen. Het hoofdstuk begint met een categorisering van de voornaamste typen oplossingsstrategieën die de leerlingen

tijdens het onderwijsexperiment bleken te hanteren. Mede op basis daarvan wordt vervolgens besproken op welke wijze de gegevens met betrekking tot goedscores en aanpakgedrag uit de drie criteriumtoetsen verzameld en geanalyseerd werden. In aansluiting hierop worden de resultaten van deze analyse gepresenteerd, waarbij wordt stilgestaan bij de resultaten van alle leerlingen samen, de verschillen tussen scholen, en de verschillen tussen jongens en meisjes. Tenslotte wordt nog apart ingegaan op de verschillen in ontwikkeling die zich tussen de 25% zwakste leerlingen en de 25% beste leerlingen hebben voorgedaan.

In **hoofdstuk 8** worden de *resultaten* gepresenteerd van een *analyse* van het door de leerlingen vertoonde *notatiegedrag* zoals dat in de drie criteriumtoetsen tot uitdrukking komt. Om tot een beoordeling van dit notatiegedrag te kunnen komen, wordt eerst een beoordelingsinstrument beschreven dat speciaal met dat doel ontwikkeld werd. Uitgangspunt voor dit instrument vormt een analyse van het notatiegedrag van een drietal leerlingen. Aan de twee criteria die van deze analyse het resultaat zijn, te weten mate van compactheid en mate van overzichtelijkheid, worden vervolgens nog twee criteria toegevoegd die te maken hebben met het niet-beoordeelbare karakter van sommige notatievormen, en met het cumulatieve effect dat kan optreden bij toepassing van de eerste twee criteria. Het aldus ontwikkelde instrument wordt vervolgens gebruikt om tot een beoordeling van het notatiegedrag van alle leerlingen te komen. De resultaten van deze beoordeling worden eerst voor alle leerlingen samen gegeven, en daarna voor de vijf scholen afzonderlijk, voor de 25% zwakste en 25% beste leerlingen, en voor de jongens en meisjes. Het hoofdstuk sluit af met een korte beschouwing over de vraag in hoeverre de door de leerlingen gedemonstreerde variëteit in notatievormen opgevat kan worden als een teken van toegenomen inzicht in de leerstof.

In **hoofdstuk 9** tenslotte worden een aantal *bevindingen* met bijbehorende *discussie en aanbevelingen* met betrekking tot het onderzoek als geheel gepresenteerd. Het vertrekpunt wordt daarbij gevormd door een reflectie op de in hoofdstuk 5 geformuleerde verwachtingen betreffende het beoogde onderwijsleerproces en op de met deze verwachtingen verbonden cruciale onderwijsmomenten die in hoofdstuk 6 werden beschreven. Naar aanleiding van een aantal bevindingen omtrent het al dan niet uitkomen van deze verwachtingen wordt vervolgens een voorstel voor een aangepaste leergang gepresenteerd en een daarbij passende lokale onderwijstheorie. Speciale aandacht gaat daarbij uit naar het niveaukarakter van de leergang. Op basis van alle gegevens en analyses uit de laatste drie hoofdstukken wordt daarna een

viertal bevindingen beschreven die als voornaamste nieuwe vakinhoudelijke ideeën kunnen worden aangemerkt die het onderzoek heeft opgeleverd. Het hoofdstuk sluit af met de bespreking van vier discussiepunten met bijbehorende aanbevelingen.

voetnoten

1 De term 'meercijferig' is geen officieel Nederlands woord. Om redenen van beknoptheid en duidelijkheid wordt de term in deze studie toch regelmatig gebruikt.

2 In de literatuur worden de termen gestileerd hoofdrekenen en kolomsgewijs rekenen soms door elkaar gebruikt in ongeveer dezelfde betekenis. Soms wordt een van beide termen overwegend gebruikt. Zie bijvoorbeeld de beschrijving in de TAL-brochure *Kinderen leren rekenen*, p. 10-15, waar uitsluitend de term kolomsgewijs rekenen wordt gehanteerd. Soms wordt echter een onderscheid gemaakt dat ook in deze studie wordt aangehouden. Daarbij heeft gestileerd hoofdrekenen een meer algemene betekenis als aanduiding voor al die vormen van hoofdrekenen waarbij opgaven volgens min of meer vaste strategieën worden opgelost waarbij met getalwaarden wordt gewerkt en waarbij hulpnotaties gebruikt worden om de verschillende stappen binnen deze strategieën vast te leggen. Kolomsgewijs rekenen staat voor de uiteindelijke verkorting van deze strategieën tot 'verticale' procedures die gebaseerd zijn op het decimaal splitsen der getallen. In hoofdstuk 3 van deze studie wordt nader op dit onderscheid ingegaan.

3 De termen leerlijn en onderwijsleertraject worden in deze studie enigszins door elkaar gebruikt in dezelfde betekenis van beschrijving van een globale opeenvolging van onderwijsleeractiviteiten die binnen een zekere tijdsspanne tot bepaalde leerdoelen voor het betreffende domein leiden. Daarnaast wordt de term leergang gebezigd als aanduiding voor de uitwerking van een onderwijsleertraject in een complete reeks lesactiviteiten inclusief werkbladen, lesbeschrijvingen, toetsbladen en zo meer.

4 Het Centraal Instituut voor Toetsontwikkeling (Cito) houdt eens in de vier jaar een Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau (PPON) waarmee beoogd wordt gegevens te verzamelen over het onderwijsaanbod en de onderwijsresultaten in het basisonderwijs en het speciaal basisonderwijs. Een van de vakgebieden waar dit onderzoek zich op richt wordt gevormd door rekenen-wiskunde.

5 De term 'oplossingswijze' wordt hier in algemene zin gebruikt als aanduiding voor de manier waarop een leerling bij een gegeven opgave tot een oplossing komt. Met hetzelfde doel worden in deze studie ook termen gebruikt als 'werkwijze', 'aanpak', 'oplossingsstrategie', of kortweg 'strategie'. De term 'procedure' wordt in een iets andere betekenis gebruikt, namelijk als aanduiding voor een volgens vaste stappen verlopende werkwijze die veelal het (eind)resultaat is van een door de leerlingen doorlopen onderwijsleertraject. Zie voor een beschouwing over het verschil tussen 'strategie' en 'procedure' bijvoorbeeld Beishuizen, 1997.

6 Dit betreft de publicaties 'Cijferend vermenigvuldigen en delen (1)' (Treffers e.a., 1979) en 'Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens wiskobas' (Dekker e.a., 1982). Wat wiskobas inhield wordt uitgebreid besproken in hoofdstuk 2 van deze studie, terwijl de inhoud van de beide genoemde publicaties in hoofdstuk 3 aan de orde komt.

7 Er wordt gesproken van 'lokale onderwijstheorie' omdat deze in hechte verbinding met de overkoepelende theorie van het realistisch reken-wiskundeonderwijs wordt ontwikkeld en omdat deze van die overkoepelende theorie als het ware een lokaal uitvloeisel vormt. In hoofdstuk 2 wordt deze kwestie nader toegelicht.

8 De term 'gevoel voor getallen' ('number sense' in het Engels) verwijst naar het vermogen van leerlingen om betekenis aan getallen te geven, om relaties tussen getallen te leggen, om deze globaal op een getallenlijn te positioneren, om ze te structureren, en zo meer. Dit vermogen wordt tegenwoordig in toenemende mate gezien als een belangrijke voorwaarde voor het goed leren opereren met getallen. Zie voor een nadere uiteenzetting bijvoorbeeld Treffers, 2001 en Buijs, 2004.

9 De term 'criteriumtoets' verwijst naar het feit dat deze toets als criterium wordt gebruikt om de progressie van de leerlingen op een drietal tijdstippen tijdens het experimentele onderwijsleerproces te meten. Deze toets bevat alle belangrijke typen opgaven waarvan de leerlingen verondersteld worden deze aan het einde van de leergang te beheersen. Doordat de inhoud van de toets alsmede de afnamecondities vrijwel constant gehouden worden, kan aan de hand van de toetsresultaten nauwkeurig worden nagegaan op welke wijze goedscores, aanpakgedrag en notatiegedrag van de aan het experiment deelnemende leerlingen zich in de loop van het experiment ontwikkelen.

2 Theoretisch kader

2.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt het theoretisch kader voor het onderzoek beschreven. Dat gebeurt vanuit een historisch-reconstructieve invalshoek waarbij de voornaamste elementen van de realistische onderwijstheorie geschetst worden tegen de achtergrond van hun ontstaansgeschiedenis. Tevens wordt ingegaan op verschillende lokale didactische theorieën met betrekking tot het centrale leerstofdomein van het onderzoek, het meercijferige vermenigvuldigen. In een afsluitende paragraaf worden tenslotte enkele aandachtspunten aangegeven die het beschreven theoretisch kader voor het onderhavige onderzoek biedt.

De keuze voor een historisch-reconstructieve invalshoek bij het beschrijven van het theoretisch kader vloeit voort uit de behoefte om niet alleen het (eind)product van de theorie als vertrekpunt voor het onderzoek te nemen, maar ook het proces dat tot deze theorie geleid heeft. Zoals verderop in dit hoofdstuk besproken zal worden, is de theorie immers nooit af. Door deze vanuit een historisch perspectief te schetsen, wordt het ook beter mogelijk om er naderhand op terug te komen teneinde bepaalde zaken nader te overdenken en uit te werken in het licht van de resultaten van het onderzoek.

De historische schets die hieronder gegeven wordt, heeft op geen enkele manier de pretentie van volledigheid. Het doel is eerst en vooral om de voornaamste elementen van de theorie zodanig weer te geven dat deze als funderend kader voor het onderzoek kan fungeren, en dat deze naderhand in het licht van de resultaten van het onderzoek op bepaalde punten nog eens heroverdacht kan worden.

2.2 Ontstaan en hoofdkenmerken van de realistische onderwijstheorie

2.2.1 Ontstaansgeschiedenis in vogelvlucht

De realistische onderwijstheorie is een theorie die niet zozeer vooraf is bedacht om een bepaald type nieuw reken-wiskundeonderwijs gestalte te geven, maar meer achteraf, als uitvloeisel van een viertal bepalende omstandigheden en innovatieve ontwikkelingen:

- de noodzaak om het in de jaren '60 vigerende, sterk op individualisering gerichte traditionele rekenonderwijs in Nederland te herzien;
- een achtergrondfilosofie over wiskunde en wiskundige activiteiten zoals die door Freudenthal werd ontwikkeld en in zijn eerste hoofdwerken werd weergegeven (Freudenthal, 1973; 1978);
- een aantal experimentele voorbeeldleergangen en –thema's die op basis van deze filosofie in de late jaren '70 en vroege jaren '80 werden ontwikkeld;
- een daarmee gepaard gaande reeks op theorievorming gerichte reflecties waarmee het ontwikkelde voorbeeldmateriaal en de daarmee opgedane praktijkervaringen geanalyseerd werden.

De betreffende leergangen werden in eerste instantie ontwikkeld en beproefd in het kader van het wiskobasproject[I], waarbij zich een voortgaand proces van onderwijs- en theorieontwikkeling voltrok dat in 1987 leidde tot de publicatie van het 'Framework for Instruction Theory' (Treffers, 1987) waarin de vijf grondprincipes van het realistisch reken-wiskundeonderwijs werden geformuleerd.

Daarmee was de theorie echter niet af. Mede onder invloed van maatschappelijke ontwikkelingen werden tegen het einde van de jaren '80 en in de vroege jaren '90 nieuwe voorbeeldleergangen alsmede realistische reken-wiskundemethoden ontwikkeld die op hun beurt voor aanscherping en nadere uitwerking van de theorie zorgden. Een belangrijk moment in dit proces vormde de verschijning van Freudenthal's laatste werk waarin hij de voornaamste eerder ontvouwen denkbeelden kritisch opnieuw bezag en op een rij zette (Freudenthal, 1991). De 'didactische principes' die hij hierin beschreef, werden later door Gravemeijer aangegrepen om drie sleutelprincipes voor de ontwikkeling van realistisch reken-wiskundeonderwijs te formuleren (Gravemeijer, 1994). Een verdere uitwerking van de realistische onderwijstheorie vond in de jaren '90 plaats in het TAL-project waarin met name over het niveaukarakter van het wiskundige leerproces een aantal denkbeelden werd ontwikkeld.

Een belangrijke impuls voor verdere theorievorming is voorts uitgegaan van de verschillende vormen van ontwikkelingsonderzoek die in de afgelopen vijfentwintig jaar in Utrecht, Leiden en Amsterdam hebben plaatsgevonden. De lokale onderwijstheorieën die dit onderzoek opleverde, noopten tot nadere doordenking en uitwerking van de realistische onderwijstheorie, en de resultaten daarvan leidden weer tot nieuwe voorbeeldleergangen en daarbij passende lokale onderwijstheorieën. Aldus voltrok zich een doorlopend proces van onderwijsontwikkeling en theorievorming dat tot op de dag van vandaag voortduurt.

2.2.2 Eerste denkbeelden over realistisch reken-wiskundeonderwijs

In twee opzichten kan de totstandkoming van de realistische onderwijstheorie gezien worden als een reactie op ongewenste ontwikkelingen op het gebied van het reken-wiskundeonderwijs in de jaren '60. Aan de ene kant was er in Nederland in die tijd sprake van een sterke verschraling van het toenmalige rekenonderwijs onder invloed van een tendens tot individualisering. Rekenmethoden die als uitvloeisel van deze tendens uitkwamen, zoals 'Naar Zelfstandig Rekenen', 'Naar aanleg en tempo' en 'Niveaucursus Rekenen', waren er op gericht dat leerlingen zich grotendeels zelfstandig en in eigen tempo de rekenleerstof eigen maakten, daarbij gesteund door een beperkte mate van instructie door de leraar. Om dit mogelijk te maken, bestond de leerstofinhoud voornamelijk uit vele pagina's met rijen oefenopgaven aan de hand waarvan de leerlingen zich de belangrijkste kennis en vaardigheden dienden eigen te maken. Bredere contexten of rijke problemen[2] pasten niet in zo'n opzet, evenmin als activiteiten gericht op hoofdrekenen, meten en schattend rekenen. Naderhand werd dan ook wel gesproken van 'solitaire sommenmakerij' (Treffers & De Moor, 1984, p. 63).

In veel andere landen vond in die periode een ingrijpende ontwikkeling plaats die met name door Freudenthal maar ook door andere toenmalige deskundigen voor Nederland in hoge mate als onwenselijk werd beschouwd: de introductie van de 'New Math'-wiskunde in het leerplan van de basisschool. Deze ging ervan uit dat het rekenen op een hogere, wiskundige grondslag geïntroduceerd diende te worden, waarbij verzamelingen en logische relaties centraal konden staan met een daarbij behorend begrippenkader ('de lege verzameling' als aanduiding voor het getal 0, doorsneden en verenigingen van verzamelingen) en gebruik van symbolen zoals pijldiagrammen om relaties als 'is meer dan' op een wiskundige manier aan te geven.

Het wiskobasproject dat in Nederland werd opgezet om een antwoord te vinden op de vraag welke kant het in ons land met het rekenonderwijs op moest, richtte zich in eerste instantie op verlevendiging van het bestaande rekenonderwijs. In wezen gingen de ambities echter veel verder en zo ontstonden al gauw eerste ideeën over inhoud en opzet van nieuw reken-wiskundeonderwijs. Goffree gaf hiertoe de aanzet in een artikel in het Wiskobasbulletin waarin hij vijftien 'doorkijkspiegelingen' presenteerde die beschouwd kunnen worden als eerste vingeroefeningen in het proces van theorieontwikkeling (Goffree, 1974). Het ging hier in principe om 'mathematisch-didactische verkenningen bedoeld als handreiking voor de beoordeling van onderwijsleermateriaal', maar in feite betrof het een reflectie op de ontwikkelervaringen die werden opgedaan met het experimentele wiskobasmateriaal dat bedoeld

was voor de verlevendiging van het rekenonderwijs. Zaken als het belang van goede instapproblemen, de probleemgeoriënteerdheid van het beoogde onderwijs, de noodzaak van een breed toepassingsbereik, het belang van bewustmaking en de wenselijkheid van het op verschillende niveaus oplosbaar zijn van wiskundige problemen, passeerden hier voor het eerst de revue. Hoewel lang niet alles even fundamenteel was, kan men in deze punten in bepaalde opzichten toch al de voorbode van de later door Treffers geformuleerde grondprincipes van de realistische onderwijsbenadering herkennen. Zo beschrijft Goffree een onderwijsleersituatie waarin leerlingen eerste praktische ervaringen opdoen met het gebruik van een kanstol (een sectordiagram met een kansverdeling in zes of meer gelijke sectoren en een bijbehorende wijzer die erover gedraaid kan worden). Vervolgens buigen ze zich over een probleem waarbij bepaald moet worden wanneer je meer kans hebt om het eerst bij de finish van een ganzenbordbaan te komen: als je steeds 4 stappen verder met je pion gaat, of als je steeds opnieuw met één dobbelsteen gooit. Goffree beschrijft hoe veel leerlingen dit probleem proberen op te lossen door de proef op de som te nemen. Maar er zijn ook leerlingen die op een hoger niveau redeneren: zij kleuren op hun kanstol het vakje 4 (zie fig. 2.1) en stellen vast dat degene die steeds opnieuw met de dobbelsteen gooit, maar twee mogelijkheden heeft om hoger te gooien en drie mogelijkheden om lager te gooien. De tol werkt hier als denkschema om tot de conclusie te komen dat je een grotere kans hebt om het eerst aan te komen als je steeds 4 stappen verder gaat, aldus Goffree. En hij constateert:

'(...) De leerlingen moeten zoveel mogelijk in de gelegenheid gesteld worden om op diverse niveaus aan het oplossen te beginnen (instapniveaus) en om op dat niveau tot een oplossing te komen' (Goffree, 1974, p. 480)

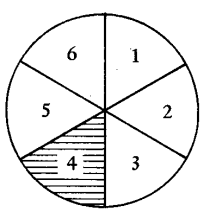


Fig. 2.1: schematische weergave van de kanstol die door leerlingen gebruikt werd om kansexperimenten uit te voeren.

2.2.3 Wiskunde als menselijke activiteit; mathematiseren

Ongeveer tezelfdertijd en in samenhang met het verlevendigingsmateriaal dat aanvankelijk door wiskobas werd ontwikkeld, werd door Freudenthal het idee van wiskunde als menselijke activiteit gelanceerd. Dit gebeurde in reactie op de formalistische opvatting over wiskunde en wiskundeonderwijs in de New Math-beweging[3].

Tegenover het idee van wiskunde als kant en klaar product plaatste Freudenthal het idee van wiskunde als een algemeen menselijke activiteit die haar oorsprong vindt in alledaagse situaties en die erop gericht is situaties beter hanteerbaar te maken en problemen die zich daarin voordoen, op te lossen op basis van gezond verstand. Hij verwijst daarbij naar de historische ontwikkeling van de wiskunde en betoogt dat kinderen de gelegenheid moeten krijgen om, in een notendop en zonder alle 'omwegen' die zich in de geschiedenis hebben voorgedaan, dit historische ontwikkelingsproces opnieuw te voltrekken (Freudenthal, 1973). Hij wijst daarbij op de wiskundige activiteiten die jonge kinderen uit zichzelf al ontplooien en geeft aan dat het onderwijs erop gericht zou moeten zijn om dit gezonde verstand te versterken, op eenzelfde manier waarop dit in grote lijnen in de historie heeft plaatsgevonden. Zo dienen wiskundige bewerkingen als '+', '-' en 'x' inleefbaar gemaakt te worden vanuit alledaagse situaties waarin de kinderen op een natuurlijke manier in aanraking komen met deze begrippen. In het blad School (Freudenthal, 1979) verwoordt hij een en ander als volgt:

'Wiskunde is in eerste instantie geen *weten*-schap en zeker geen verzameling weetjes: *wiskunde is een activiteit, een gedragspatroon, een geesteshouding*. Vóór het kind op schoolse weetjes wordt afgericht, leert het de hem eigen wiskunde al doende, op de hem eigen manier: al springende en verstoppertje spelende leert het tellen; met één oogopslag leert het zien wat meer en minder is; de eerste beginselen van de meetkunde leert het met legpuzzels en klimbomen. Geen traditioneel reken- of wiskundeprogramma vermeldt de voor de ontwikkeling van het kind belangrijkste wiskunde: al redenerende problemen oplossen met zijn gezond verstand.' (Freudenthal, 1979, p. 15)

En even verderop maakt hij een onderscheid tussen 'wiskunde voor allen' en 'wiskunde voor elkeen' en geeft aan hoe belangrijk het is in het onderwijs op een natuurlijke manier te differentiëren:

'Ik zei het al: wiskunde is allereerst een geesteshouding, een wijze van aanpak van problemen. Dit aan te leren, is wiskundeonderwijs *voor allen*. En wat *voor elkeen* is weggelegd, is: het anders te doen dan de ander, de één vlugger en oppervlakkiger, de ander langzamer en dieper wortel schietend, de één slimmer, de ander temidden van een ruimer horizon'. (Ibid.; cursiveringen van de auteur)

Het streven om dit idee van wiskunde als menselijke activiteit tot uitgangspunt voor de ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs te maken, is duidelijk herkenbaar in de materialen die in de vroege jaren '70 in het wiskobasproject (waarvan Freudenthal hoogleraar-directeur was) ontwikkeld werden. Zo wordt in het eerste

leerplandeel (Treffers, 1975) betoogd:

'Volgens de overtuiging van Wiskobas dient wiskunde opgevat te worden als een activiteit die geworteld is in de betekenisvolle realiteit van het kind' (Treffers, 1975, p. 10)

In het grote '1+-boek' dat in datzelfde jaar wordt gepubliceerd, wordt een aantal onderwijssuggesties gepresenteerd die enerzijds betrekking hadden op destijds nieuwe leerstof rond ruimtelijke oriëntatie (het thema 'Waterland') en anderzijds op de verkenning van het optellen en aftrekken tot 10 ('Autobusproblemen'). In het 'Overzicht van wiskundeonderwijs op de basisschool' dat eveneens in 1975 als leerplandeel 2 wordt gepubliceerd, zijn deze suggesties uitgebreid tot een 'schoolwerkplan' waarin voor alle leerjaren een reeks onderwijssuggesties wordt beschreven die vrijwel het gehele leerstofdomein van rekenen-wiskunde voor de basisschool omvatten.

Hecht verbonden met het idee van wiskunde als menselijke activiteit is de notie van het *mathematiseren*. Kern van de wiskundige activiteit die zich in het historische ontwikkelingsproces heeft voorgedaan, aldus Freudenthal, vormt het mathematiseren: de organiserende, structurerende en formaliserende activiteit waarmee delen van de alledaagse realiteit aangepakt en toegankelijk gemaakt worden voor wiskundige 'bewerking' en waarmee de wiskundige middelen die dat oplevert, steeds verder gestroomlijnd en op een hoger plan gebracht worden. Om dit begrip te verduidelijken, wordt in de genoemde Leerplanpublicatie 1 een reeks combinatorische telproblemen gegeven. Aan de hand van de daarbij ontplooide wiskundige activiteiten wordt het mathematiseren als volgt omschreven (Treffers, 1975):

'Mathematiseren duidt op de kern van de wiskundige activiteit, waar het niet in de eerste plaats gaat om het verwerven van kennis of het aanleren van vaardigheden, als wel om dieper gaande mathematische werkzaamheden als ordenen, classificeren, analogiseren, generaliseren, concretiseren en formaliseren.' (Treffers, 1975, p. 27)

Enige jaren later maakt Treffers een onderscheid in horizontaal en verticaal mathematiseren, waarbij de horizontale component duidt op het zodanig transformeren van een reëel probleem, dat dit met wiskundige middelen aangepakt kan worden. Verticaal mathematiseren verwijst naar de vervolgactiviteiten die betrekking hebben op de mathematische verwerking, de probleemoplossing, de generalisatie van de oplossing en de verdergaande formalisering (Treffers, 1978). Streefland omschrijft het onderscheid tussen horizontaal en verticaal mathematiseren naderhand als volgt:

'Bij horizontaal mathematiseren gaat het om de grensoverschrijding van reëel probleem naar de wiskunde, de wiskundige verwerking en beschouwing van de uitkomsten daarvan in de reële context, bij verticaal mathematiseren om de voortschrijding in de wiskunde en herschikking en reorganisatie van wiskundig materiaal.' (Streefland, 1985, p. 65)

In zijn laatste werk, uit 1991, accepteert Freudenthal dit onderscheid[4] als een waardevolle toevoeging en omschrijft het als volgt:

'Horizontale mathematisering leidt van de wereld van het leven naar de wereld der symbolen. In de wereld van het leven leeft men, handelt men (en lijdt men); in de andere wereld worden symbolen gevormd, opnieuw gevormd, gemanipuleerd, werktuigelijk, met begrip of op een reflectieve manier'. (Freudenthal, 1991, p. 41)

Dit onderscheid wordt vooral van belang geacht omdat het gebruikt kan worden om de realistische onderwijsbenadering fundamenteel te onderscheiden van de andere drie onderwijsbenaderingen zoals die door Treffers (1978) onderscheiden zijn. Hij geeft aan dat de aloude mechanistische onderwijsbenadering zowel voor horizontaal als verticaal mathematiseren geen ruimte biedt, terwijl de empiristische benadering wel aandacht schenkt aan horizontaal maar niet aan verticaal mathematiseren en terwijl bij de structuralistische benadering het omgekeerde het geval is. In het schema van fig. 2.2 (Treffers, 1987) komt dit tot uitdrukking[5].

	Horizontaal mathematiseren	Verticaal mathematiseren
Mechanistisch	-	-
Empiristisch	+	-
Structuralistisch	-	+
Realistisch	+	+

Fig. 2.2: schematische overzicht van de vier onderwijsbenaderingen in relatie tot het horizontaal en verticaal mathematiseren (schema afkomstig uit Treffers, 1987, p. 251).

2.2.4 Voorbeeldleergangen; progressief mathematiseren, didactische fenomenologie

In 1975 verscheen de grote overzichtspublicatie waarin wiskobas een eerste uitwerking van inhouden en werkwijzen voor het Nederlandse rekenonderwijs gaf. In deze 'Leerplanpublicatie 2' (De Jong e.a., 1975) werd het beoogde onderwijs in episodes van ongeveer zes weken globaal beschreven waarbij steeds voor een enkel onderdeel een nadere uitwerking en onderwijsbeschrijving werd gegeven. Het accent in deze beschrijvingen lag vrij sterk op nieuwe, wiskundige leerstof, zoals combinato-

riek, kansrekening, ruimtelijke oriëntatie, afstand-tijd-grafieken, en zo meer. Aan de hand van deze nieuwe leerstof werd duidelijk gemaakt op welke wijze het idee van het mathematiseren als wiskundige kernactiviteit gestalte kon krijgen. Bijvoorbeeld: vergelijken van grote hoeveelheden via structureren en één-één-verbinding, het doorzien van de overeenkomstige structuur van verschillende (combinatorische) telproblemen als middel om tot generalisatie en modelvorming te komen, en het aan elkaar relateren van 'zweetkans' (proefondervindelijk ervaren kans) en 'weetkans' (beredeneerde kans) om tot een bewustwording van de wet van de grote aantallen te komen[6]. Deze publicatie werd gevolgd door een stroom van vervolgpublicaties waarin voorbeeldleergangen voor bijvoorbeeld oppervlakte en cijferend optellen en aftrekken maar ook voorbeeldthema's zoals De Kamping en Blokjes bouwen werden beschreven. In leerplanpublicatie nr. 10 (Treffers (red.), 1979), over cijferend vermenigvuldigen en delen, wordt vervolgens nader ingegaan op de didactische principes die aan deze leergangen en thema's ten grondslag liggen. Hier wordt de term 'progressief schematiseren' geïntroduceerd als grondprincipe voor de leergangen rond het cijferen. Het wordt als volgt omschreven:

'De kinderen krijgen gelegenheid om de volledige cijferhandelingen steeds meer te schematiseren, te verkorten en te verinnerlijken, zodat het standaardalgoritme voor een belangrijk deel als het ware op een natuurlijke wijze door de kinderen zélf wordt ontwikkeld' (Treffers (red.), 1979, p. 9)

Als voordelen van deze werkwijze, die gesteld wordt tegenover de aanpak van de 'progressieve complicering' die tot die tijd gangbaar was, werd onder meer genoemd dat van meet af aan met betrekkelijk grote getallen gewerkt kan worden en dat ook zwakke leerlingen goed uit de voeten kunnen omdat ze 'op hun eigen niveau van schematisering tot een oplossing kunnen komen' (zie fig. 2.3 voor een voorbeeld van een uitwerking op een betrekkelijk laag niveau bij de opgave 78x13). Bovendien hebben de leerlingen gelegenheid om tijdens het algoritmiseringsproces 'belangrijke wiskundige ontdekkingen te doen'.

Aldus kwam een eerste uitwerking van het mathematiseren tot stand voor een lang lopend leerproces dat, anders dan de tot dan toe geconstrueerde uitwerkingen zoals rond het combinatorische tellen en het bouwen met blokjes, betrekking had op een kerninhoud van het aloude rekenonderwijs: het cijferen. Didactische principes als uitgaan van voor de kinderen betekenisvolle contextproblemen, aansluiten bij informele oplossingsstrategieën, geleidelijke verkorting en niveauverhoging, en toepassing van het geleerde binnen andere, complexere probleemsituaties, kregen hier een

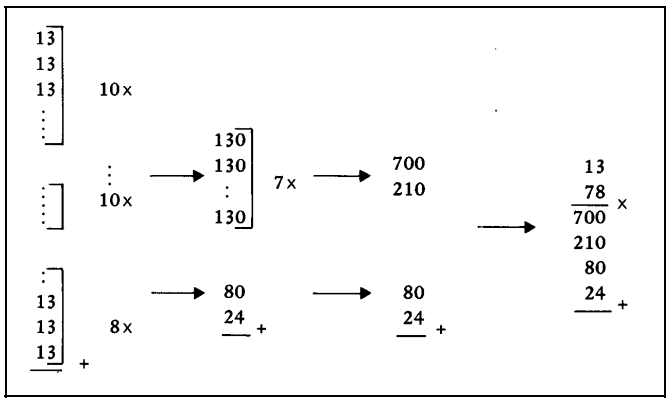


Fig 2.3: Voorbeeld van een oplossingswijze bij de opgave 78x13 volgens het herhaald optellen-model. De opgave wordt via 7 happen van 10x en één hap van 8x opgelost (voorbeeld afkomstig uit Treffers (red.), 1979, p.10).

eerste concrete invulling. Andere leergangen, zoals die rond oppervlakte en breuken, volgden weldra. Bij het ontwikkelen daarvan dienden zich weer nieuwe didactische vraagstukken en oplossingen aan omtrent de wijze waarop het mathematiseren binnen deze leergangen gestalte kon krijgen. Gaandeweg ontstond zo een beeld van progressief mathematiseren als kern van het wiskundig leerproces. Streefland (1983) omschrijft deze kern als volgt:

'Over langere termijn beschouwd, zou men de aaneenschakeling van mathematiseringsprocessen, het gedurig voortschrijden in de wiskunde, kunnen omschrijven als progressieve mathematisering'. (Streefland, 1983, p. 32)

In dezelfde publicatie pleit hij onder meer voor een veelsporige benadering van het verschijnsel breuk en beschrijft een groot aantal 'breukveroorzakende situaties', dat wil zeggen situaties waaruit op een natuurlijke manier breuken kunnen ontstaan. Voor de door hem ontwikkelde breukenleergang kiest hij vervolgens het eerlijk verdelen als eerste ingang en beschrijft hoe het breukbegrip geleidelijk aan via verkenning van diverse andere contexten door de leerlingen verworven kan worden. Hiermee geeft hij een voorbeeld van wat Freudenthal (1984) een didactisch-fenomenologische analyse van het leerstofdomein breuken noemt.

Zo'n analyse is erop gericht om voor het betreffende leerstofgebied verschijnselen en situaties in kaart te brengen waarin zich deze leerstof op een natuurlijke manier

aandient en om te bepalen in welke volgorde die situaties het beste aangeboden kunnen worden teneinde de leerlingen een proces van progressieve mathematisering te laten doorlopen. Freudenthal omschrijft dit principe als volgt:

'*Fenomenologie* van wiskundige begrippen, structuren, denkbeelden betekent: ze in hun relatie tot de fenomenen te beschrijven waarvoor zij geschapen en waartoe zij uitgebreid werden in het leerproces van de mensheid; en voorzover deze beschrijving met het leerproces van de jonge generatie te maken heeft, wordt zij *didactische fenomenologie*, wegwijzer voor de onderwijsgevende naar de instap van de lerende in het leerproces van de mensheid'. (Freudenthal, 1984, p. 9)

Hiermee dient zich een belangrijk constructieprincipe voor het ontwerpen van realistische leergangen aan dat ook bij het ontwikkelwerk ten dienste van deze studie volop toegepast is (zie hoofdstuk 5).

2.2.5 'Three dimensions': vijf grondprincipes van de realistische onderwijsbenadering

Terwijl de eerste realistische reken-wiskundemethoden inmiddels vaste grond onder de voeten krijgen op de onderwijsmarkt en terwijl tevens vergelijkende analyses van zulke methoden worden gepubliceerd (De Jong, 1986), worden de voornaamste bevindingen tot dan toe op een rij gezet en in een nieuw theoretisch kader geplaatst. Dit gebeurde in 'Three dimensions' (Treffers, 1987), een publicatie die naast de Engelse vertaling van de dissertatie van Treffers een belangrijk nieuw hoofdstuk bevatte met een 'Framework for instruction theory'. In dit hoofdstuk wordt nog eens benadrukt dat het om een 'a posteriori-theorie' gaat waarvan de ontwikkeling slechts mogelijk was nadat voorafgaand hieraan het nodige ontwikkelingswerk verricht was. Er worden vier vertrekpunten voor het theoretisch kader geformuleerd die voortvloeien uit de reeds in eerdere publicaties uiteengezette acht algemene uitgangspunten voor realistisch reken-wiskundeonderwijs:

- Veel aandacht voor 'her-uitvinden' in de zin van het opnieuw creëren van wiskundige begrippen en structuren op basis van de intuïtieve noties van de leerlingen;
- Het onderwijs beweegt zich voort langs verschillende 'niveaus van concreetheid en abstractie';
- De ordening van instructieactiviteiten wordt bij voorkeur geleid door de historisch-genetische methode in plaats van door de leerstof-systematische methode[7];
- De instructie is hecht verbonden met de realiteit en met betekenisvolle situaties.

Vervolgens wordt stilgestaan bij de niveautheorie van Van Hiele, door deze samen met zijn vrouw ontwikkeld op basis van het eigen leerproces als onderwijsgevende (Van Hiele, 1973). Deze theorie stelt dat het wiskundige leerproces van leerlingen in drie niveaus verloopt waarbij niveauverhoging tot stand komt doordat het wiskundig handelen van het lagere niveau object van analyse en overdenking op het hogere niveau wordt. Treffers geeft in navolging van Freudenthal (die dit reeds eerder had gedaan in de Engelstalige, uitgebreide editie van zijn 'Didactische fenomenologie van wiskundige structuren' (Freudenthal, 1984)) aan dat deze theorie belangrijke aanknopingspunten biedt, maar dat er ook bezwaren zijn. Zo ontbreken er, aldus Treffers, duidelijke criteria voor het afbakenen van de drie niveaus los van wiskundige inhouden (begrippen, structuren, e.d.), en blijkt het niet zonder meer mogelijk op basis van de niveautheorie een passend antwoord te vinden op twee fundamentele vragen die in het ontwikkelwerk van wiskobas naar voren kwamen:
(1) Hoe dient de fenomenologische verkenning op het eerste niveau concreet gestalte te krijgen?
(2) Welke didactische handelingen kunnen voltrokken worden om leerlingen van het ene naar het andere niveau te doen overgaan?

Freudenthal's didactische fenomenologie biedt, aldus Treffers, aanknopingspunten om tot beantwoording van deze vragen te komen. Hij betoogt dat het nieuwe van de realistische onderwijsbenadering met name ook schuilt in het feit dat de realiteit niet alleen als bron van toepassingen achteraf, maar ook als bron van begripsontwikkeling bij de aanvang van het leerproces fungeert. Via deze toepassingen vooraf wordt de grondslag gelegd voor de wiskundige activiteiten op het eerste niveau, waarbij het didactische, aan Freudenthal ontleende credo luidt:

'Put the pupils in touch with the phenomena for which the mathematical structure is the organising tool in order to let them shape these tools themselves in a process of re-invention, and learn to handle and use these mathematical organising tools in concept formation.' (Treffers, 1987, p. 247)

Treffers verwijst vervolgens naar Freudenthal's constatering dat het wiskundige leerproces beschouwd kan worden als zijnde opgebouwd uit een groot aantal microniveaus, en betoogt dat daarin toch ook de drie grovere niveaus te onderkennen zijn zoals Van Hiele die onderscheidde. Met name is het van belang om een onderscheid te maken tussen het niveau waarop de systematiek binnen een bepaald leerstofgebied aan het licht komt, en de daaraan voorafgaande 'intuïtief-fenomenologische' en 'lokaal-beschrijvende' niveaus. En hij vervolgt:

'The desire to have reality function as a source of mathematising together with the structuring according to micro-levels by reflection and recursion processes, as well as according to Van Hiele's macro levels, gives the first outline of our framework for instruction theory.' (Ibid., p. 247)

In het licht van deze analyse geeft Treffers vervolgens een nadere karakterisering van het progressief mathematiseren. In de horizontale component 'wordt de weg naar de wiskunde geplaveid via modelvorming, schematisering en symbolisering', terwijl de verticale component betrokken is op 'de wiskundige bewerking en niveauverhoging bij het structureren van het betreffende probleemgebied'. Progressief mathematiseren in deze zin wordt, aldus Treffers, geïnspireerd door vijf grondprincipes die logisch verbonden zijn met niveautheorie en didactische fenomenologie. Deze vijf grondprincipes ('leerstellingen') komen neer op:
(1) Een *fenomenologische verkenning* waarbij de wiskundige activiteiten binnen een concrete context plaatsvinden en waarbij de werkelijke fenomenen waarbinnen de wiskundige begrippen en structuren zich manifesteren, zo breed mogelijk geëxploreerd worden, met als doel dat een rijke verzameling intuïtieve noties verworven wordt waarmee essentiële aspecten van begrippen en structuren voorgevormd worden.
(2) *Overbrugging met behulp van verticale hulpmiddelen* waarbij een variëteit aan modellen, schema's, diagrammen en symbolen wordt aangeboden, verkend en ontwikkeld met als doel het overbruggen van het niveauverschil tussen het intuïtieve, informele, contextgebonden opereren van het eerste niveau en het reflectieve, formeel-systematische opereren van het derde niveau.
(3) Een centrale plaats in het onderwijs voor *eigen constructies en producties van leerlingen* waardoor op gedifferentieerde wijze oplossingsmanieren worden geconstrueerd die een afspiegeling vormen van de verschillende microniveaus waarop de leerlingen zich bewegen en die als aangrijpingspunt voor niveauverhoging kunnen fungeren.
(4) Het onderwijs is *interactief* van karakter in de zin dat de leerlingen regelmatig geconfronteerd worden met de oplossingswijzen van andere leerlingen waardoor zij gestimuleerd kunnen worden tot verkorting en niveauverhoging van de eigen werkwijzen en waardoor het onderwijs is opgebouwd uit een combinatie van eigen werkzaamheden van leerlingen en het raadplegen van medeleerlingen, groepsdiscussie, momenten van gezamenlijk terugblikken en het presenteren van de eigen producties.
(5) Een hechte *verstrengeling van leertrajecten* waardoor het proces van progressief mathematiseren beter tot z'n recht komt, zowel wat betreft vooronderstelde vaardigheden en algoritmen als wat betreft aspecten van inzicht.

In een toelichting op het tweede grondprincipe duidt Treffers de relatie tussen de microniveaus van Freudenthal en de macroniveaus van Van Hiele nader. Progressieve mathematisering is meer een geleidelijk stap voor stap verlopend proces dat via veel microniveaus verloopt. Daarin zijn nochtans in meer globale zin de drie macroniveaus te onderscheiden die de essentie bepalen van de in het kader van het onderwijsleerproces beoogde progressie. In een schema wordt deze relatie als volgt tot uitdrukking gebracht (zie fig. 2.4).

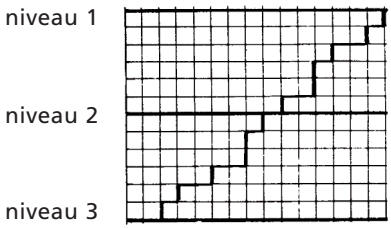


Fig. 2.4: Schema waarin de relatie tussen de microniveaus van Freudenthal en de macroniveaus van Van Hiele tot uitdrukking wordt gebracht (afkomstig uit Treffers, 1987, p. 248)

2.2.6 Nieuwe voorbeeldleergangen; didactische principes in 'Revisiting Mathematics Education'

Mede op basis van het aldus geformuleerde theoretische referentiekader werden eind jaren '80 en begin jaren '90 nieuwe voorbeeldleergangen ontwikkeld die hun weg naar nieuwere versies van reken-wiskundemethoden snel vonden. Deze leergangen hadden in de eerste plaats betrekking op het aanvankelijk rekenen en betroffen het tellen en rekenen tot 20 (Buys & Van Eerde (red.), 1991), het rekenen tot 100 (Vuurmans (red.), 1991) en de tafels van vermenigvuldiging (Bokhove, Huitema & Noteboom (red.), 1991). Hierbij werden onder meer uitwerkingen gemaakt van de fenomenologische oriëntatie die de leerlingen in de eerste fase van het leerproces binnen het betreffende domein zouden kunnen uitvoeren. Met name de wijze waarop de 'overbrugging met behulp van verticale hulpmiddelen' kon plaatsvinden, kwam uitgebreid onder de aandacht. Zo werden nieuwe modellen voor het rekenen tot 20 (het rekenrek) en het rekenen tot 100 (honderd kralensnoer en lege getallenlijn) ontwikkeld. Voor het gebied van de tafels waren al eerder belangrijke nieuwe ideeën ontwikkeld door Ter Heege. Deze hadden onder meer betrekking op de fenomenologische oriëntatie binnen dit gebied, op een aantal te gebruiken modellen (zoals groepjesmodel, rechthoekmodel en getallenlijn), en op een aantal fundamentele rekenstrategieën zoals verdubbelen, eentje meer/eentje minder, en gebruik van '5 keer' als ankerpunt (Ter Heege, 1985; 1987). Al deze ideeën kunnen als belangrijke nieuwe uitwerkingen van de realistische onderwijstheorie voor de betreffende leerstofdomeinen beschouwd worden.

Daarnaast werden voorstellen ontwikkeld voor fundamentele leerstofinhoudelijke aanpassingen van het leerplan voor de basisschool. Deze hadden met name betrekking op een verschuiving van de aandacht van cijferend rekenen naar hoofdrekenen en schattend rekenen. Reeds in de tweede publicatie over cijferend vermenigvuldigen en delen (Dekker e.a., 1982) was door wiskobas opgemerkt dat in het licht van nieuwe ontwikkelingen waarbij de kinderen steeds meer de beschikking zouden krijgen over zakrekenmachientjes, 'niet zozeer het snelle cijferen volgens de meest verkorte algoritmevormen nu primair is, als wel het schatten, handig rekenen, hoofdrekenen en speciaal het kunnen toepassen van de cijferprocedures op de geëigende contextproblemen'. Enkele jaren later werd dit standpunt nader uitgewerkt in de publicatie '10 voor de basisvorming' (Treffers en De Moor, 1984). Minder aandacht voor het cijferen, meer ruimte in het programma om het direct aanleren van cijferprocedures te vervangen door het geleidelijk inkorten van rekenprocedures via handig rekenen, en (in samenhang daarmee) sterkere nadruk op hoofdrekenen. In deel 2 van de 'Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool' (Treffers & De Moor, 1990) kreeg een en ander verder z'n beslag. Hier wordt hoofdrekenen in brede zin voor het eerst aangemerkt als grondslag voor het cijfermatige rekenen, waarbij als tussenvorm tussen het eigenlijke handige, flexibele hoofdrekenen en het pure cijferen het kolomsgewijze rekenen oftewel gestileerd hoofdrekenen wordt gepresenteerd. Met het oog op een goede inpassing van dit kolomsgewijze rekenen in het programma, wordt bepleit om de introductie van het cijferen uit te stellen tot ongeveer eind groep 5, begin groep 6 en om in de daaraan voorafgaande periode het hoofdrekenen centraal te stellen. In de herziene versie van realistische reken-wiskundemethoden die in de loop van de jaren '90 verschijnen, worden deze aanbevelingen daadwerkelijk opgevolgd.

Met de publicatie van 'Revisiting Mathematics Education', het laatste werk van Freudenthal, werd vervolgens een nieuwe mijlpaal in het proces van onderwijs- en theorieontwikkeling bereikt (Freudenthal, 1991). In dit werk zette Freudenthal alle ontwikkelde ideeën nog eens op een rij met het doel meer overzicht en helderheid te creëren. In aanvulling op zijn eerder ontvouwen denkbeelden typeert hij hier wiskunde leren nog eens als het steeds verder ontwikkelen van gezond verstand. Wiskunde kan, zo betoogt Freudenthal, in de grond van de zaak beschouwd worden als datgene wat 'wis en zeker' is, en gezond verstand is de meest primaire en overvloedige bron van die 'zekerheid'. Wiskundige activiteiten zoals die door jonge kinderen spontaan worden bedreven, kenmerken zich eerst en vooral door het gebruik van gezond verstand, en het onderwijs dient zich erop te richten om datgene wat

wordt ingegeven door het gezond verstand, ter discussie te stellen, in twijfel te trekken en zodanig te onderzoeken of te bewerken dat een meer beredeneerde, meer wiskundige vorm van zekerheid tot stand komt. In het verlengde hiervan beschrijft hij een viertal didactische principes waarmee hij de kern van het onderwijsleerproces volgens de realistische onderwijsbenadering typeert. Het eerste daarvan, *Guided Reinvention*, verwijst naar het feit dat wiskunde door de leerlingen in een door de leraar geleid proces heruitgevonden dient te worden op een wijze die overeenkomt met de wijze waarop de mensheid die wiskunde in de loop der geschiedenis heeft uitgevonden. Bij het tweede principe, *Bonds with reality*, benadrukt Freudenthal dat het begrip realiteit breed opgevat dient te worden in de zin dat dit alles kan omvatten wat de lerende als reëel ervaart, inclusief reeds verworven wiskunde:

'(...) As soon as mathematising is didactically translated into reinvention, the reality to be mathematised is that of the learner, the reality into which the learner has been guided, and mathematising is the learner's own activity'. (Freudenthal, 1991, p. 67)

Bij het derde principe, *Learning processes*, benadrukt hij onder meer het niveaukarakter van het leerproces en de noodzaak om via reflectie tot niveauverhoging te komen. En bij het vierde principe, *Long term learning processes*, onderstreept hij het belang van inzichtelijk leren waarbij niettemin oefenen een waardevolle rol kan spelen om het inzicht verder te versterken en verdiepen.

Een belangrijk hoofdstuk in het boek wordt verder gevormd door het hoofdstuk over ontwikkelingsonderzoek. Freudenthal beschrijft hierin de bezwaren die andere vormen van onderzoek zoals vergelijkend onderzoek en onderzoek via toetsen aankleven, en wijst op de gevaren van het gebruik van een vaste, vooropgezette methodologie die vaak als een keurslijf fungeert. Methodologie dient in het geval van onderzoek van onderwijs meer het karakter te hebben van een reflectie achteraf op de gebruikte onderzoeksmethode, dan van een 'vooraf opgelegde doctrine'. Hij wijst op de schaduwzijden van het talrijke onderzoek dat is gedaan naar fouten die door leerlingen veel worden gemaakt, en benadrukt dat, 'als wiskunde onder leiding van de leraar heruitgevonden dient te worden, fouten onvermijdelijk en tot op zekere hoogte welkom zijn indien deze gebruikt worden om weerstand aan te kweken tegen het opnieuw optreden ervan'. Voorts wijst hij op het feit dat ontwikkelingsonderzoek een vorm van onderzoek van alle tijden is die, in zekere zin, altijd al door ontwikkelaars van (wiskunde)onderwijs bedreven is, waarbij gedachte-experimenten het vertrekpunt van de ontwikkelactiviteiten vormden. De stap naar een meer gefundeerde vorm van ontwikkelingsonderzoek omschrijft hij daarna als volgt:

'Observing their thoughtexperiments and reporting on them would have transformed educational developers into educational researchers, who present their findings together with the arguments, rather than dogmatically.' (Ibid., p. 158)

Naast het belang van cyclische afwisseling van gedachte-experimenten en feitelijke onderwijsexperimenten, noemt Freudenthal verder onder meer het belang van reproduceerbaarheid en betoogt dat datgene wat ontwikkelingsonderzoek het recht geeft op de term onderzoek, schuilt in het feit dat in deze vorm van onderzoek datgene tot bewustzijn wordt gebracht dat 'fundamenteel nieuw en essentieel vruchtbaar' is in onderzoek dat voortkomt uit onderwijsontwikkeling. En hij vervolgt:

'*Developmental research* means: experiencing the cyclic process of development and research so consciously, and reporting on it so candidly that it justifies itself, and that this experience can be transmitted to others to become like their own experience (ibid., p. 161; cursivering auteur)

2.2.7 Ontwikkelingsonderzoek als impuls voor onderwijsontwikkeling en theorievorming

Ook hier geldt dat deze typering van ontwikkelingsonderzoek eerder het resultaat is van een reflectie achteraf dan van een theoretische stellingname vooraf. In de voorafgaande jaren vond immers al een aantal belangrijke onderzoeken plaats waarin bepaalde domeinen binnen het realistische reken-wiskundeonderwijs onderzocht werden. Dit betrof behalve het reeds genoemde onderzoek van Streefland naar een realistische breukendidactiek (Streefland, 1988) en het onderzoek van Van den Brink rond realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen (Van den Brink, 1989), bijvoorbeeld ook het onderzoek van Nelissen (1987) naar de rol van reflectie in het onderwijsleerproces bij rekenen-wiskunde. Enige jaren later volgde onder meer het onderzoek van Gravemeijer e.a. naar de mate waarin realistisch reken-wiskundeonderwijs aan de hand van een gangbare methode in de praktijk daadwerkelijk gerealiseerd werd (Gravemeijer e.a., 1993). Hierin werd het gebruik in de praktijk onderzocht van een realistische en een mechanistische methode in relatie tot de door de betreffende leraren gehuldigde opvattingen. Geconstateerd werd onder meer dat lessen gegeven door leraren die met de realistische methoden werkten, slechts 'beperkt realistisch' waren. Weliswaar onderschrijven deze leraren de realistische onderwijsbenadering in grote lijnen wel, maar in de didactische uitwerking van de lessen blijken hun opvattingen toch niet zo realistisch (Ruesink e.a., 1991). Daarmee treedt een discrepantie tussen theorieontwikkeling en onderwijspraktijk aan het licht die ook naderhand nog het nodige stof zal doen opwaaien.

In zijn enige tijd later verschijnende dissertatie gaat Gravemeijer al terugblikkend op z'n eigen ervaringen als ontwikkelaar nader in op een aantal aspecten van de realistische onderwijsbenadering (Gravemeijer, 1994). Zo constateert hij dat er een belangrijk verschil is tussen de wijze waarop in de realistische onderwijsbenadering concreet materiaal in het onderwijsleerproces wordt ingezet in vergelijking met de wijze waarop dit in de structuralistische onderwijsbenadering gebeurt. In dat laatste geval wordt dergelijk materiaal (zoals MAB-materiaal) vooral als concretisering van de onderliggende wiskundige structuur ingezet en dientengevolge 'van bovenaf' opgelegd. De belichaamde structuur weerspiegelt dan niet wat de leerlingen heruitgevonden hebben, maar wat de experts bedacht hebben. Het gevaar bestaat daardoor dat het materiaal niet aansluit bij de eigen intuïtieve noties van leerlingen en dat ze dit ook niet ervaren als een hulpmiddel om tot niveauverhoging en verkorting te komen. In het geval van de realistische onderwijsbenadering wordt het materiaal zo gekozen (of althans, dient dit zo gekozen te worden, aldus Gravemeijer), dat dit optimaal aansluit bij de eigen intuïtieve noties en informele strategieën van leerlingen. Als voorbeeld noemt hij de abacus, het rekenrek en het honderdkralensnoer, en hij wijst erop dat deze modellen hun kracht onder meer ontlenen aan het feit dat deze onder bepaalde condities (zoals de verbondenheid met passende contexten) aansluiten bij informele noties en strategieën.

Mede op grond van deze constateringen en zich baserend op Freudenthal definieert hij vervolgens drie sleutelprincipes die als heuristieken (zoekstrategieën) voor de ontwikkeling van realistisch reken-wiskundeonderwijs gebruikt kunnen worden:

- Geleid heruitvinden / progressief mathematiseren;
- Didactische fenomenologie;
- Zelf ontwikkelde modellen.

Voor wat dit laatste punt betreft geeft hij aan dat leerlingen bij het oplossen van problemen zelf modellen dienen te ontwikkelen. En hij verwijst onder meer naar Streefland die het onderscheid aanbracht tussen de fase waarin een model wordt ontwikkeld als afspiegeling van een reëel probleem en de oplossing daarvan (de 'model van-fase'), en de fase waarin dat model gebruikt gaat worden om allerlei andere soorten problemen op te lossen (de 'model voor-fase') (Streefland, 1985, p.63). In deze laatste fase, aldus Gravemeijer, wordt het model een 'entiteit op zichzelf' dat geschikt is voor wiskundig redeneren. Voorts gaat Gravemeijer in op de vraag wat nu essentiele kenmerken van ontwikkelingsonderzoek zijn. Hij sluit daarbij aan op de ideeën van Freudenthal en merkt op dat er in Nederland reeds sinds enige tijd een traditie is

waarbij onderwijsontwikkeling en onderzoek geïntegreerd plaatsvinden. Hij wijst op het feit dat ontwikkelingsonderzoek berust op de ontwikkeling van prototypen van leergangen waarbij het cyclisch proces van gedachte-experimenten en onderwijs-experimenten de kern vormt. Ontwikkelingsonderzoek, aldus Gravemeijer, omvat echter meer dan onderwijsontwikkeling omdat er sprake is van theorievorming:

'Developmental research can be distinguished from development by its goal: the building of justified theory, not just for the private realm of the researcher but to be put before the research community.' (Gravemeijer, 1994, p. 113)

Daarbij kan rechtvaardiging niet alleen in de onderwijsexperimenten gevonden worden, maar ook in de gedachte-experimenten die gebaseerd zijn op argumenten die zowel aan de eerder ontwikkelde theorie ontleend zijn, als aan eerdere onderwijsexperimenten. Gravemeijer benadrukt verder de noodzaak van betrouwbaarheid en introduceert in navolging van Smaling (1990) als graadmeter daarvoor de term (na)volgbaarheid of 'trackability' in de zin van reconstrueerbaarheid van het door de onderzoeker gevolgde onderzoeksspoor waarbij in het onderzoeksverslag melding wordt gemaakt van de tegen- en meevallers tijdens het onderzoek, de gevolgde werkwijze, het gebruikte begrippenkader en de redenen die er waren om bepaalde keuzen te doen. Overigens wijst hij ook op de noodzaak voor nadere wetenschappelijke fundering van ontwikkelingsonderzoek als onderzoeksmethode. In hoofdstuk 4 van deze studie ga ik daar nader op in.

In de loop van de jaren '90 volgen diverse onderzoeken die leiden tot nadere verduidelijking en uitwerking van bepaalde aspecten van de realistische onderwijstheorie. Zo is er het onderzoek van Van Eerde (1996) waarin zij verslag doet van het Kwantiwijzerproject en waarin zij aanbevelingen doet voor wat zij diagnosticerend onderwijzen noemt. Dat wil zeggen: een vorm van onderwijzen die erop gericht is met name ook de eigen ideeën en strategieën van leerlingen een belangrijke plaats in het denken en handelen van de leraar toe te kennen met het oog op progressie in het onderwijs. Verder is er het onderzoek van Klein naar de mogelijkheden van het gebruik van de lege getallenlijn als centraal model bij het rekenen tot 100 (Klein, 1998). In dat onderzoek worden twee parallel-leergangen voor dit leerstofdomein met elkaar vergeleken en wordt geconstateerd dat de leergang gebaseerd op de lege getallenlijn als centraal model met name leidt tot flexibeler aanpakgedrag van leerlingen, en dus tot grotere toepasbaarheid van het geleerde.

2.2.8 TAL en de specificatie van het niveaukarakter van het leerproces

Zoals in het voorgaande is uiteengezet, wordt een van de hoekstenen van de realistische onderwijsbenadering gevormd door het idee dat het wiskundige leerproces een niveaukarakter heeft en dat er in een proces van voortgaande verkorting en niveauverhoging naar gestreefd wordt om de informele kennis en noties van leerlingen te doen uitgroeien tot meer formele, structurele kennis van een domein. Reeds in 1981 had Freudenthal de vraag opgeworpen 'hoe het wiskundig leerproces volgens niveaus gestructureerd kan worden en hoe deze structurering gebruikt kan worden voor differentiatie' (Freudenthal, 1981). Zoals hierboven is beschreven, had Treffers (1987) in 'Three dimensions' een algemene typering gegeven van de drie aan Van Hiele (1973) ontleende (macro-)niveaus die volgens de theorie van de realistische onderwijsbenadering binnen de verschillende leerstofdomeinen door de leerlingen doorlopen kunnen worden:

- Het informele, contextgebonden niveau;
- Het semi-formele, modelondersteunde niveau;
- Het formele, vakmatige niveau.

Toen in de late jaren '80 en vroege jaren '90 eenmaal een aantal ideeën over fenomenologische oriëntatie, gebruik van modellen en, algemener, het proces van progressief mathematiseren ontwikkeld waren voor centrale domeinen als tellen en elementair getalbegrip, rekenen tot 20, rekenen tot 100, en de tafels van vermenigvuldiging, ontstond ook de mogelijkheid om specifieker per leerstofdomein aan te geven op welke wijze deze niveaus uitgewerkt zouden kunnen worden. Dat gebeurde in de tweede helft van de jaren '90 en in de eerste jaren na de millenniumwisseling in het TAL-project. Dit project was erop gericht om leerkrachten beter overzicht te verschaffen over de globale opeenvolging van onderwijsleeractiviteiten met daaraan gekoppelde tussendoelen (de leerlijn) die door de leerlingen binnen een bepaald domein doorlopen kan worden. Het lag voor de hand om juist het niveaukarakter van de betreffende leerprocessen nader te duiden teneinde betere mogelijkheden voor leraren te creëren om greep te krijgen op deze processen. Met die intentie ontstonden dan ook een aantal 'didactische drieslagen' waarbij de te doorlopen niveaus getypeerd werden in termen van handelingen die karakteristiek zijn voor de progressie binnen het betreffende gebied. Zo werd onder meer voor het gebied van het rekenen tot 20 een drieslag onderscheiden van tellend rekenen, structurerend rekenen en formeel rekenen (dwz. rekenen op basis van getalrelaties en rekeneigenschappen) (Treffers, 1999). En voor het hoofdrekenen werd, naar analogie van het rekenen tot 100, een vergelijkbare drieslag van rijgend rekenen, splitsend rekenen

en rekenen via variastrategieën onderscheiden (Buys, 2001). Bij deze laatste drieslag werd evenwel in een intern discussiestuk de kanttekening geplaatst dat de betreffende drie typen strategieën weliswaar tot op zekere hoogte maatgevend zijn voor de beoogde niveauverhoging, maar dat het niet zo is dat deze typen samenvallen met de drie abstractieniveaus. Daarmee werd duidelijk dat deze drieslag net als de andere drieslagen weliswaar een aspect van de niveauverhoging karakteriseert, maar niet de niveauverhoging in haar totaliteit. Andere aspecten dienen daarin ook betrokken te worden. Menne (2001) beschreef deze kwestie naderhand in haar dissertatie voor wat betreft het domein van het rekenen tot 100 als volgt in een diagram (zie fig. 2.5).

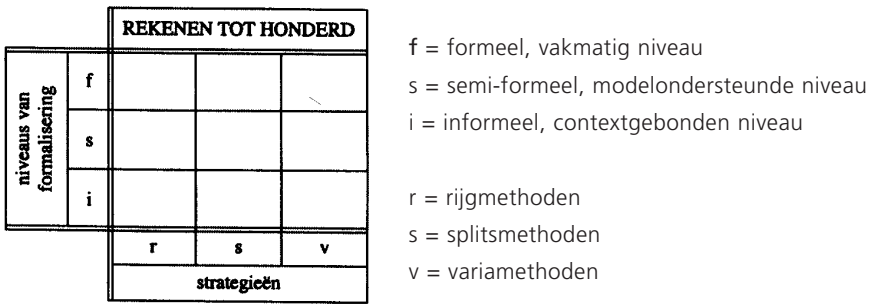


Fig. 2.5: Schema waarin het niveaukarakter van het leerproces voor het gebied van het rekenen tot 100 in twee dimensies wordt gekarakteriseerd (afkomstig uit Menne, 2001, p.31).

Hierop voortbordurend maakte Treffers (2005) een onderscheid in drie basiscomponenten in de rekenhandelingen waarmee de progressie binnen een domein adequaat beschreven kan worden. Naast de abstractiegraad (oftewel niveaus van formalisering, zoals ze in het diagram van Menne worden genoemd) en de aard van de verkorting (mate van structureren) betreft dit de algemeenheid van de betreffende handelingen (de mate van toepasbaarheid).

Op het sterke accent dat in de beschrijving van leerlijnen door de TAL-groep werd gelegd op te ontwikkelen rekenhandelingen, volgde echter de nodige kritiek. Deze kwam er met name op neer dat sommige vakdeskundigen de nadruk op rekenhandelingen te eenzijdig vonden. Het zou belangrijk kunnen zijn, aldus deze kritiek, om ook nadrukkelijk aandacht te besteden aan te ontwikkelen fundamentele wiskundige inzichten. In aansluiting op de kritiek legde de TAL-bovenbouwgroep (die zich onder meer bezighield met de ontwikkeling van leerlijnen en tussendoelen voor de

domeinen breuken, procenten, verhoudingen en kommagetallen) een ander accent door 'kerninzichten' te formuleren die leerlingen in de loop van de betreffende leergangen dienden te ontwikkelen (Keijzer e.a., 2005). Met name binnen gebieden waar van oudsher de nadruk in het onderwijs sterk lag op vaardigheidstraining onder relatieve verwaarlozing van begripsvorming, zou het, aldus de TAL-bovenbouwgroep, aan te bevelen zijn om het accent te verschuiven van 'kunnen' naar 'begrijpen' en om doelen te formuleren in termen van kerninzichten in plaats van in termen van vaardigheden. Hoewel op een aantal van de in het kader van deze visie ontvouwen denkbeelden ook weer de nodige kritiek volgde (Goddijn, 2005), gaf zij in ieder geval voeding aan de twijfel die bij sommigen leefde over het eenzijdige primaat van het beschrijven van rekenhandelingen als middel om de voortgang in het proces van progressief mathematiseren adequaat te karakteriseren.

2.2.9 Realisme en socio-constructivisme; aandacht voor interactie en wiskundige kernideeën

Terwijl de realistische onderwijstheorie in de jaren '80 en '90 in steeds bredere, internationale kring bekendheid kreeg, kwamen in een aantal landen initiatieven van de grond voor de opzet van soortgelijke ontwikkelingsprojecten als in Nederland. In sommige gevallen raakten Nederlandse onderzoekers en ontwikkelaars betrokken bij dergelijke projecten. Niet alleen droegen zij soms in aanzienlijke mate bij tot het welslagen van zulke projecten, maar ook kwamen zij in aanraking met ideeën en opvattingen die tot op zekere hoogte weer hun invloed deden gelden op de ontwikkelingen in Nederland. Dit was met name het geval voor de ideeën van het socio-constructivisme die door Gravemeijer in Nederland werden geïntroduceerd (Gravemeijer, 1992a; 1995; 2001). Binnen deze richting wordt wiskundige kennis primair gezien als iets dat door de lerende zelf geconstrueerd wordt, waarbij deze kennis tot gemeenschappelijke kennis van alle leerlingen uitgroeit via een proces van 'betekenis-onderhandeling' (negotiation of meaning). De leraar heeft daarbij vooral ook een rol als begeleider en gangmaker bij het 'onderhandelingsproces'. Deze vraagt in het gezamenlijke 'wiskundige gesprek' (mathematical discourse) aan leerlingen niet direct om hun antwoorden of strategieën te verwoorden, maar meer om 'hun kennis en ideeën met de andere leerlingen te delen'.

Onderzoek vanuit dit perspectief maakte duidelijk dat zich in het gangbare onderwijs een probleem kan voordoen doordat leraar en leerlingen in het gezamenlijke gesprek vanuit verschillende referentiekaders werken. Zo kunnen wiskundige begrippen als 'tiental' (bij de verkenning van het positiesysteem) of 'omkeren' (de

verwisseleigenschap bij het leren vermenigvuldigen) verschillende betekenissen hebben die de onderlinge communicatie bemoeilijken. Bovendien bestaan er in de klas veelal ingeslepen reactiepatronen van vraag en antwoord die 'kennis delen' moeilijk maken. Vaak is het bijvoorbeeld zo, aldus Gravemeijer, dat herhaling van een vraag door de leraar bij leerlingen de associatie oproept dat het antwoord van de vorige leerling niet correct cq. gewenst was, en dat hij of zij dus naar een ander antwoord op zoek moet gaan. Terwijl het, om tot werkelijk gedeelde kennis te komen, juist van belang is dat leerlingen hun kennis naast elkaar plaatsen en met elkaar in verband proberen te brengen. Gravemeijer spreekt in dit verband in navolging van Cobb van de noodzaak om de 'sociale normen' (socials norms) in de klas te veranderen (Cobb e.a., 1992; Cobb e.a., 1993), zodat deze meer zijn afgestemd op het proces van kennisdelen. Gravemeijer ziet hier een belangrijk kritiekpunt in op de praktijk van het realistische reken-wiskundeonderwijs. Daarin vormt interactie in de zin zoals hierboven is beschreven immers een hoeksteen. Indien echter deze interactie volgens geconditioneerde patronen van vraag en antwoord verloopt die voornamelijk gericht zijn op het antwoord dat de leraar voor ogen heeft, dan zal het met de interactie niet zo'n vaart lopen. Er zal in dat geval van een werkelijke wisselwerking tussen leerlingen en leraar op basis van een vrije uitwisseling van strategieën en ideeën nauwelijks sprake zijn. In die zin, aldus Gravemeijer, is het socio-constructivistische gezichtspunt van grote waarde om kritisch naar de praktijk van het realistisch reken-wiskundeonderwijs te kijken.

Een aandachtspunt bij het wijzigen van de sociale normen is dat dit niet zonder meer tot stand komt door de leerlingen hiervan kortweg op de hoogte te stellen. De nieuwe normen moeten ook worden ingebed in de dagelijkse onderwijspraktijk, waarbij leerlingen er bewust van gemaakt worden dat het belangrijk is om hun ideeën en oplossingsstrategieën zodanig te verwoorden dat deze zo goed mogelijk voor anderen te begrijpen zijn; maar ook dat ze naar anderen luisteren, dat ze de verwoorde strategieën proberen te begrijpen en met de eigen oplossingswijze in verband proberen te brengen. Om tot een wijziging van de sociale normen te komen, wijst Gravemeijer op de mogelijkheid het leerproces indirect te sturen via onder andere 'retro-actieve sturing' (waarbij de leraar na inventarisatie van een aantal door leerlingen aangedragen oplossingswijzen stuurt in de richting van een beoogde oplossing) of via 'pro-actieve sturing'. Dat laatste kan zich voordoen indien de leraar een of meer door de leerlingen aangedragen aanpakken zodanig op het bord weergeeft dat dit niet alleen aansluit bij wat de leerlingen deden om tot een oplossing te komen, maar ook anticipeert op notatiewijzen of schematiseringen die naderhand

in gebruik genomen kunnen worden om tot verdere verkorting en niveauverhoging te komen. Ook kan zich deze vorm van sturing voordoen indien de leraar bij de presentatie van een probleem bepaalde gegevens zodanig op het bord weergeeft, dat hiermee tevens een richting wordt aangegeven waarin leerlingen op zoek kunnen gaan naar een oplossing. Gravemeijer geeft het voorbeeld van het probleem van de ouderavond (81 ouders moeten verdeeld worden over tafels met 6 stoelen, hoeveel tafels zijn er nodig?), waarbij visualisering van een tafel met 6 personen op de in fig. 2.6 weergegeven wijze (afkomstig uit Dolk & Uittenbogaard, 1989), de leerlingen op een spoor kan zetten dat naderhand vruchtbaar kan blijken te zijn om tot een passende oplossing van het probleem te komen.

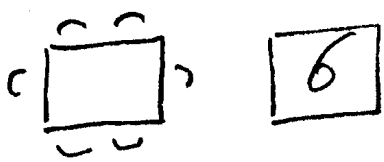


Fig. 2.6: Een tafel met zes stoelen weergegeven via een rechthoek met boogjes eromheen, en daarnaast nog zo'n tafel maar dan meer schematisch weergegeven. (afbeelding afkomstig uit Dolk & Uittenbogaard, 1989)

In verschillende ontwikkelprojecten is geprobeerd om socio-constructivistische ideeën nader uit te werken en in de dagelijkse onderwijspraktijk tot hun recht te laten komen. Fosnot en Dolk doen daarvan verslag in een serie boeken 'Young Mathematicians at Work' waarvan er één handelt over vermenigvuldigen en delen (Fosnot & Dolk, 2001). Zij besteden uitgebreid aandacht aan de rol van contexten en de mogelijkheden die leerlingen dienen te krijgen om tot eigen schematiseringen en informele notaties te komen die het uitgangspunt kunnen vormen voor wat zij 'wiskunde-conferenties' (math conferences) noemen. En zij pleiten ervoor om de klas om te vormen tot een 'wiskundige gemeenschap' (mathematical community) die via regelmatige kennisdeling en via het gezamenlijk vaststellen van wat er geleerd is, collectieve progressie in het leerproces boekt. Verder pleiten zij ervoor om het onderwijs meer te richten op het door de leerlingen laten construeren van 'grote ideeën' (big ideas) die ten grondslag liggen aan de steeds verdere ontwikkeling van strategieën. Zij omschrijven dit als de 'centrale organiserende ideeën van de wiskunde' die sterk verbonden zijn met de structuren van de wiskunde en die tevens karakteristiek zijn voor bepaalde veranderingen in de wijze van redeneren van de lerende. Als voorbeeld van zo'n groot idee noemen zij onder meer het vormen van nieuwe eenheden (unitizing) waarbij een verzameling van tien objecten niet louter als tien objecten door de kinderen gezien worden, maar ook als een groep van 10, en waarbij evenzo tien verzamelingen van tien objecten ook als een groep van 100

worden opgevat. Dit vormen van nieuwe eenheden is zo belangrijk, aldus Fosnot en Dolk, omdat het de grondslag vormt voor het begrijpen van plaatswaarde en het vermenigvuldigen met en delen door 10. Andere voorbeelden van grote ideeën die zij met name in het kader van het vermenigvuldigen noemen zijn de distributieve eigenschap, commutatieve eigenschap en associatieve eigenschap die tijdens het leren vermenigvuldigen op diverse niveaus begrepen en gebruikt dienen te worden. Verder noemen zij het doorzien van 'rechthoekige ordeningen' (arrays) een groot idee.

In Nederland zijn onder meer Klep en Noteboom bezig geweest met het onderscheiden van dergelijke wiskundige kernideeën. In een interne SLO-notitie duiden zij deze aan als 'wiskundige essenties' waarvan het doorzien door de leerlingen van doorslaggevend belang is om verder te komen in het wiskundige leerproces. Voor het begrijpen van getallen binnen het getalgebied tot 100 hebben zij een aantal wiskundige essenties onderscheiden, zoals de structuur van de telrij, zowel wat betreft het visueel-symbolische aspect, het akoestische aspect, als het decimale telaspect. In de praktijk bleek het vooralsnog echter niet zo makkelijk om leraren te overtuigen van de waarde van het door de leerlingen doorzien van dergelijke essenties met het oog op de te boeken progressie in het getalgebied tot 100.

2.3 Lokale onderwijstheorieën op het gebied van het meercijferige vermenigvuldigen

Gedurende lange tijd is de opbouw van het leerproces rond het vermenigvuldigen met kleinere en grotere getallen in veel landen nauwelijks aan veranderingen onderhevig geweest. In grote lijnen komt deze opbouw op het volgende neer:
(1) Introductie van het vermenigvuldigen als zodanig, en van daaruit inoefening van de tafels van vermenigvuldiging (van 1 t/m 10, voorheen t/m 12);
(2) Het vermenigvuldigen met tienvouden en honderdvouden volgens hoofdrekenstrategieën (ook wel de grote tafels genoemd: 10x20; 10x35; 30x20; 4x120; enzovoorts);
(3) Vermenigvuldigen van een eencijferig met een meercijferig getal volgens het standaardalgoritme (cijferprocedure);
(4) Vermenigvuldigen van een willekeurig meercijferig getal met 10 en (soms) veelvouden van 10;
(5) Vermenigvuldigen van een meercijferig met een meercijferig getal, volgens het uitgebreide standaardalgoritme[8] (eveneens cijferprocedure).

Ook in didactiekboeken uit de eerste helft van de vorige eeuw wordt veelal deze opbouw aangehouden. Bij de onderdelen (1) en (2) staat gewoonlijk hoofdrekenen centraal in de zin van uit het hoofd rekenen zonder hulpnotaties, en is het leerproces sterk gericht op het inprenten van de betreffende rekenfeiten. Bij de onderdelen (3), (4) en (5) staat veelal het cijferen centraal waarbij de eerder geleerde feitenkennis ingezet dient te worden. Soms wordt beoogd de leerlingen ook enig inzicht te doen verwerven in het waarom achter de rekenfeiten en de cijferprocedures, soms is het voornamelijk blind inoefenen. Toepassingen worden veelal pas gemaakt nadat de betreffende procedures reeds zijn ingeoefend, dus achteraf.

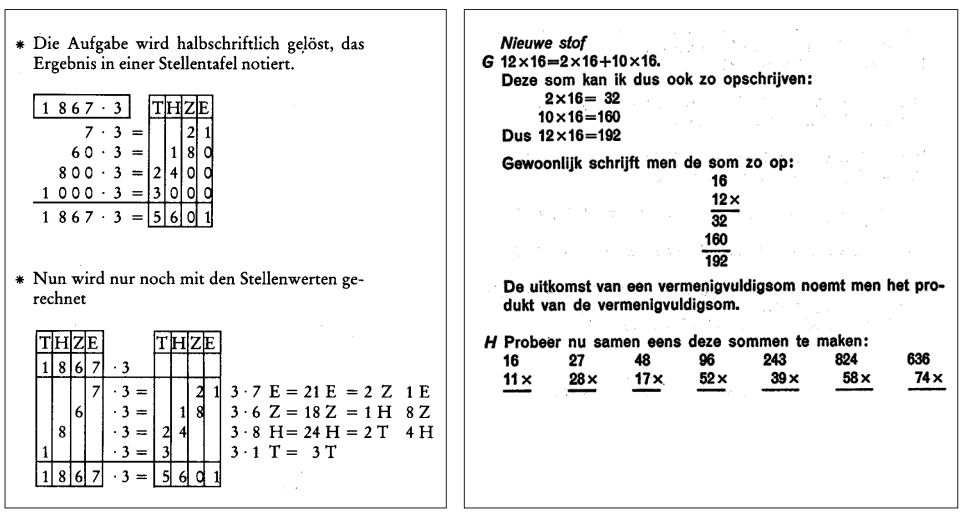
In deze opbouw zijn een aantal hoofdkenmerken te onderscheiden die impliciet als theoretisch fundament een rol spelen. De voornaamste daarvan zijn:
(a) Van geval tot geval opbouw;
(b) Kale opgaven vormen gewoonlijk het vertrekpunt;
(c) Didactische benadering wordt gekenmerkt door voor- en nadoen;
(d) Er is weinig aandacht voor het verwerven van inzicht.

Wat betreft punt (a) geldt dat er door de leerlingen van geval tot geval wordt gewerkt in de zin dat de opgaven steeds een stapje moeilijker worden en de leerlingen dus steeds weer nieuwe moeilijkheden ondervinden. Zo komt bij het vermenigvuldigen van tweecijferige getallen veelal eerst het geval aan de orde van twee getallen niet groter dan 20 zonder onthouden, daarna met één keer onthouden, dan het geval van twee getallen boven de 20 met één keer onthouden, enzovoorts.

Wat betreft punt (b) geldt dat toepassingen dus geen rol spelen om een procedure te introduceren en eventueel aannemelijk te maken, terwijl punt (c) inhoudt dat leerlingen voornamelijk bezig zijn om datgene wat de leerkracht op het bord voordoet, na te doen en vervolgens steeds verder in te oefenen. Dat er nauwelijks sprake is van inzicht verwerven (punt (d)) blijkt wel uit het feit dat zulke abstracte handelingen als 'onthouden' (in de zin van '8x6 is 48; 8 opschrijven 4 onthouden' bij een opgave als 28x36) veelal nauwelijks onderbouwd of inzichtelijk gemaakt worden.

Met name in de jaren '70 en '80 wordt evenwel de tendens sterker om meer aandacht te besteden aan het ontwikkelen van inzicht bij de leerlingen. Zo wordt bij het vermenigvuldigen van een eencijferig met een meercijferig getal vaak eerst met getalwaarden in plaats van met cijfers gerekend, een aanpak die in Duitsland 'das halbschriftliche Verfahren' wordt genoemd (Radatz & Schipper, 1983; zie fig. 2.7a).

In eerste instantie worden de handelingen daarbij onderbouwd via geld, later wordt met een positietabel gewerkt. Iets soortgelijks geldt voor het vermenigvuldigen van twee meercijferige getallen, zoals te zien is in het voorbeeld in fig. 2.7b, afkomstig uit de Nederlandse methode 'Uitkomst' (Klavier (red.), 1976). Dit voorbeeld laat ook de beperkingen van deze benadering via voor- en nadoen zien. Bij de voorbeeldopgave van 12x16 is het immers nog betrekkelijk eenvoudig om de eerste subopgave 2x16 werkend met getalwaarden uit het hoofd uit te rekenen. Bij de opgaven die daarna door de leerlingen zelf geprobeerd dienen te worden (zoals 28x27 en 39x253), wordt dit echter al gauw veel lastiger. Hier liggen de zuivere cijferhandelingen inclusief 'onthouden' veel meer voor de hand, maar deze zijn niet voorbereid in de voorbeeldopgave.



* Die Aufgabe wird halbschriftlich gelöst, das Ergebnis in einer Stellentafel notiert.

1867 · 3	T	H	Z	E
7 · 3 =			2	1
60 · 3 =		1	8	0
800 · 3 =	2	4	0	0
1000 · 3 =	3	0	0	0
1867 · 3 =	5	6	0	1

* Nun wird nur noch mit den Stellenwerten gerechnet

T	H	Z	E		T	H	Z	E	
1	8	6	7	· 3					
			7	· 3 =			2	1	3 · 7 E = 21 E = 2 Z 1 E
		6		· 3 =		1	8		3 · 6 Z = 18 Z = 1 H 8 Z
	8			· 3 =	2	4			3 · 8 H = 24 H = 2 T 4 H
1				· 3 =	3				3 · 1 T = 3 T
1	8	6	7	· 3 =	5	6	0	1	

Nieuwe stof

G 12×16=2×16+10×16.
Deze som kan ik dus ook zo opschrijven:
2×16= 32
10×16=160
Dus 12×16=192

Gewoonlijk schrijft men de som zo op:

16
12×
32
160
192

De uitkomst van een vermenigvuldigsom noemt men het produkt van de vermenigvuldigsom.

H Probeer nu samen eens deze sommen te maken:

16	27	48	96	243	824	636
11×	28×	17×	52×	39×	58×	74×

Fig. 2.7a en 2.7b: Voorbeeld van twee didactische aanpakken waarbij ernaar gestreefd wordt de leerlingen op basis van inzicht tot verwerving van het cijferalgoritme te brengen. Links de aanpak van Radatz & Schipper (1983, p.116), rechts die uit de Nederlandse methode Uitkomst (Klavier (red.), 1976; deel 4a, p.23).

Ongeveer tegelijkertijd ontstaat echter steeds meer twijfel over de waarde van het cijfermatige rekenen dat in het leerplan van de hogere leerjaren in de basisschool een dominante positie inneemt. In steeds meer landen wordt geconstateerd dat vaardigheid in het cijfermatige rekenen, gelet op de steeds algemenere beschikbaarheid van zakrekenmachines, steeds minder relevant wordt. Zo betoogt Plunkett (1979) dat de standaardalgoritmen in tegenstelling tot hoofdrekenstrategieën in de praktijk

steeds minder gebruikt worden, en dat het aanleren ervan een zeer tijdrovende en 'cognitieve passiviteit' in de hand werkende aangelegenheid is. Hij bepleit een sterke accentverschuiving richting hoofdrekenen, en bovendien richting het gebruik van niet-standaardmethoden waarbij met getalwaarden en niet met cijfers wordt gewerkt. Als voorbeeld geeft hij een methode voor het vermenigvuldigen waarbij in een rechthoek wordt gewerkt (zie fig. 2.8).

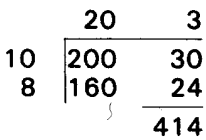


Fig. 2.8: voorbeeld van een niet-standaardmethode voor het vermenigvuldigen van meercijferige getallen zoals door Plunkett (1979, p.5) wordt aanbevolen.

Hutton (1977) beschrijft de resultaten van een onderzoek naar informele vermenigvuldigstrategieën met grotere getallen, waarbij de centrale startopgave luidt: 'Hier staan 24 doosjes en in ieder doosje zitten 42 snoepjes. Hoeveel snoepjes zijn dat bij elkaar?' Zij laat zien dat zich in een dergelijke situatie een grote verscheidenheid aan strategieën kan voordoen zoals allerlei vormen van herhaald optellen en verdubbelen, decimaal splitsen van het eerste getal (10x42 en nog 10x42 en nog 4x42), niet-decimaal splitsen van het eerste getal (12x42 en nog 12x42), enzovoorts. Bovendien beschrijft zij hoe de leerlingen als gevolg van onderlinge uitwisseling van dergelijke strategieën en het corrigeren van gemaakte fouten, al gauw overgaan op de methode waarbij het eerste getal decimaal gesplitst wordt. Deze wordt vervolgens verder verkort met als resultaat dat de kinderen uiteindelijk bij de standaardprocedure terecht komen. Hoewel haar benadering sterke verwantschap lijkt te vertonen met de enige jaren later door wiskobas gelanceerde benadering via progressieve schematisering, is ook hier geen sprake van een expliciete theorie over de wijze waarop het vermenigvuldigen van meercijferige getallen het beste aangepakt kan worden.

Met de beide hierboven reeds gememoreerde wiskobaspublicaties over vermenigvuldigen ('Leerplanpublicatie nr. 10' en 'Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens wiskobas') komt daar verandering in. Hier wordt het reeds genoemde didactische principe van de progressieve schematisering als uitgangspunt voor cijferleergangen gekozen. Dit principe komt erop neer dat de leerlingen, uitgaande van passende contextproblemen, een 'globale methode ineens' tot hun beschikking krijgen waarmee in beginsel alle verschillende opgaventypen opgelost kunnen worden, zij het dat dit aanvankelijk op een aangepast niveau gebeurt. Zo wordt bij het cijferend optellen en aftrekken op de abacus gewerkt terwijl bij het vermenigvuldigen in eerste aanleg

via herhaald optellen of via 'lijnenbundels' wordt gewerkt. Kenmerkend is verder dat er systematisch wordt toegewerkt naar verkorting en niveauverhoging. Zo wordt bij het optellen en aftrekken de echte abacus op een zeker moment vervangen door de 'papieren abacus' (een positieschema) aan de hand waarvan dezelfde handelingen die eerst daadwerkelijk werden uitgevoerd, nu 'op papier' worden gedaan. En bij het vermenigvuldigen en delen vindt verkorting plaats via het werken met bundels of happen van 10. Bij dit proces van verkorting en niveauverhoging hebben de leerlingen een belangrijke inbreng doordat zij, binnen zekere grenzen, zelf verkortingen kunnen aanbrengen. Tenslotte is kenmerkend dat het accent in de leergang meer op het proces dan op het product (cq. het eindalgoritme) ligt. Het is in deze benadering namelijk niet strikt noodzakelijk dat leerlingen tot volledige beheersing van het eindalgoritme komen – een minder verkorte vorm daarvan kan evenzeer als eindstation fungeren.

In de beide publicaties worden voor het vermenigvuldigen in globale zin twee benaderingen geschetst: die volgens het herhaald optellen-model, en die volgens het kruispuntenmodel. In beide gevallen vormen, zoals gezegd, contextproblemen het vertrekpunt die de leerlingen tot allerlei informele eigen oplossingswijzen uitlokken. Na een verkenning van deze strategieën worden de leerlingen in het geval van de eerste benadering bewust gemaakt van de mogelijkheid om bij de herhaalde optelling een groep van 10 in één keer uit te rekenen door een nul achter het getal te plaatsen. Dit wordt onderbouwd door met een positiekaart te werken en de leerlingen te doen inzien dat de cijfers binnen een getal bij vermenigvuldigen met 10 als het ware opschuiven: de eenheden worden tientallen, de tientallen honderdtallen, enzovoorts. Op basis van dit inzicht wordt vervolgens onderzocht hoe het eerste getal in happen van 10 gesplitst kan worden, waarbij een opgave als 62x45 wordt uitgerekend via 6 keer 450, en via 2x45. In de beschrijving van de leergang worden voorbeelden gegeven van de manier waarop leerlingen na ongeveer 15 lessen tot een oplossing komen (zie fig. 2.9).

Opvallend bij deze aanpakken zijn de verschillende notatiewijzen die gehanteerd worden. Kennelijk hadden de kinderen een zekere vrijheid om hierin hun eigen weg te volgen. Uit deze werkwijze via groepen van 10 ontstaat vervolgens 'de eindfase' waarbij volgens het standaardalgoritme wordt gewerkt, via verdere verkorting door naast 2x45 ook 60x45 in één keer uit te rekenen en tenslotte de deelproducten 'ineen te vlechten'.

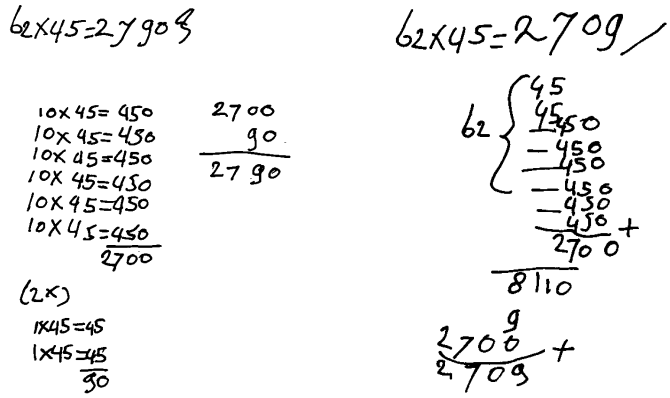


Fig. 2.9: Twee voorbeelden van oplossingswijzen van leerlingen bij de herhaald optellen-benadering, (afkomstig uit Dekker e.a., 1982, p.52/53)

Bij de benadering volgens het kruispuntenmodel wordt uitgegaan van een context die een dergelijke aanpak aannemelijk maakt, namelijk die van een (Amerikaanse) stad met 24 straten die (loodrecht) gekruist worden door 35 lanen. De vraag is hoeveel verkeersagenten er nodig zijn als je op ieder kruispunt één agent zou zetten. Een klassikaal gesprek over deze situatie leidt tot de visualisering van fig. 2.10.

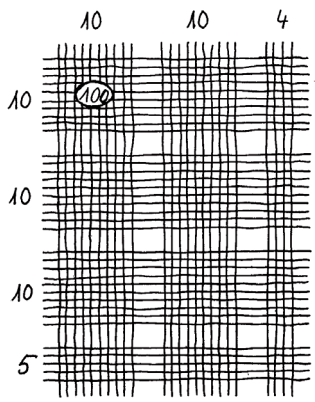


Fig. 2.10: Visualisering van het probleem waarbij het aantal kruispunten bepaald moet worden van een stad met een rechthoekig patroon van 24 straten en 35 lanen (afkomstig uit Dekker e.a., 1982, p.91).

Een oplossing waarbij 'blokken van 100' met nog enkele kleinere blokken worden gevormd, ligt nu voor de hand. Naderhand wordt de aldus verkregen oplossingswijze verder verkort en geschematiseerd. In vogelvlucht wordt daarbij de volgende fasering doorlopen (zie fig. 2.11; voorbeeldopgave 27x49). In de afsluitende fase wordt dan het eindalgoritme weer afgeleid. In een vergelijkende analyse worden tot slot de

voor- en nadelen van beide benaderingswijzen op een rij gezet. Als voordeel van het kruispuntenmodel wordt genoemd de visuele steun die dit model geeft, alsmede de overzichtelijke tussenstappen waardoor de leergang gekenmerkt wordt. Een nadeel is echter dat de toepasbaarheid van dit model minder is.

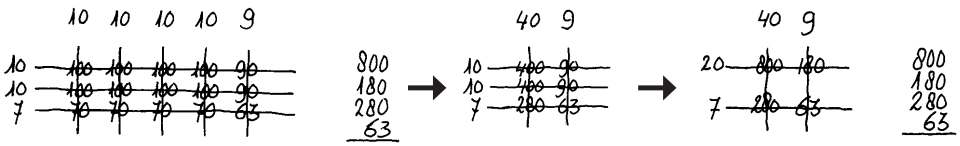


Fig. 2.11: Deel van de fasering die doorlopen wordt bij de didactische aanpak volgens het kruispuntenmodel. Omdat de subtotalen bij de tweede stap dezelfde zijn als die bij de eerste en derde stap, zijn deze niet weergegeven (overzicht afkomstig uit Dekker e.a., 1982, p.112).

In contextproblemen doet zich de vermenigvuldiging namelijk niet zoveel voor als een 'kruising', met als gevolg dat er een kloof kan ontstaan tussen de procedure die bij kale vermenigvuldigingen gehanteerd wordt, en de werkwijzen die de leerlingen bij contextopgaven gebruiken. Dat dit gevaar bepaald niet denkbeeldig is, wordt door Ter Heege en Treffers in leerplanpublicatie nr. 10 geïllustreerd met het voorbeeld van een leerling Els die aan de experimentele leergang volgens het kruispuntenmodel deelneemt (Ter Heege & Treffers, 1979). Els laat bij het maken van kale opgaven een redelijke progressie laat zien. Worden haar in een toetsles evenwel enkele toepassingen voorgelegd met een groepjesstructuur (13 zwarte pieten hebben elk een zak met 34 pakjes), dan blijkt zich iets merkwaardigs voor te doen: Els lost de opgave tot twee keer toe op via vormen van herhaald optellen (zie fig. 2.12).

Blijkbaar, zo concluderen Ter Heege en Treffers, ziet Els in de zwarte pieten-opgave helemaal geen vermenigvuldiging in de zin zoals dat bij 'gekruiste situaties' het geval was, en dus acht zij het daarbij gehanteerde model ook niet van toepassing.
De herhaald optellen-benadering heeft het nadeel van deze mogelijke kloof niet. Echter, dat model heeft ook een nadeel doordat 'de afstand tussen het herhaald optellen en het eindalgoritme erg groot is'. Bovendien zijn de tussenfasen minder duidelijk te markeren, met als gevaar dat 'de weg terug voor zwakkere leerlingen minder goed open blijft liggen' in het geval zulke leerlingen vastlopen. Dit laatste, de mogelijkheid om een of meer fasen in de leergang terug te gaan in het geval een leerling door de bomen het bos niet meer ziet, wordt als een belangrijke voorwaarde voor het leerproces volgens progressieve schematisering gezien.

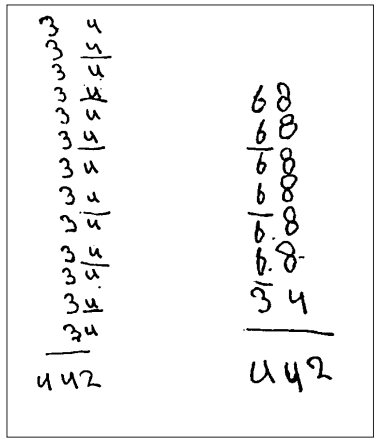


Fig. 2.12: De beide oplossingswijzen die Els gebruikt om de zwarte pieten-opgave op te lossen (afkomstig uit Treffers (red.), 1979, p.124/125).

In de jaren '80 en '90 zijn de hierboven beschreven lokale onderwijstheorieën geleidelijk aan steeds meer doorgedrongen in realistische reken-wiskundemethoden. Met name toen onder invloed van publicaties zoals '10 voor de basisvorming rekenen/wiskunde' (Treffers & De Moor, 1984) en 'Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool' (deel 1 en 2; Treffers e.a. 1989; 1990) de algemene overtuiging groeide dat het gestileerde hoofdrekenen een blijvende vaste plaats in het curriculum toekwam, kreeg dit steeds verder z'n beslag. Dat gold in de eerste plaats de bewerkingen optellen en aftrekken: vanaf het einde van de jaren '90 kan men in vrijwel alle methoden varianten van het kolomsgewijze rekenen voor deze bewerkingen aantreffen. Ook voor de bewerking delen vond een vorm van kolomsgewijs rekenen brede ingang, namelijk die van het herhaalde aftrekken. Zoals in hoofdstuk 3 nader zal worden beschreven, bleef het vermenigvuldigen daarbij echter enigszins achter. Er vonden wel uitwerkingen van de beide hierboven beschreven theorieën plaats, maar in de praktijk leken deze niet altijd even goed te voldoen. In paragraaf 3 van hoofdstuk 3 wordt daar nader op ingegaan.

2.4 Enkele aandachtspunten voor het onderzoek

Met het oog op het onderhavige onderzoek is het in de eerste plaats natuurlijk van belang om een helder beeld te hebben van de overkoepelende domeinspecifieke theorie waarvan de leergang in kwestie verondersteld wordt een lokale uitwerking

te vormen. Dit maakt de zoektocht naar een geschikte opzet voor deze leergang doelgerichter en meer gefundeerd. Ook een analyse van de reeds bestaande lokale onderwijstheorieën op het gebied van het meercijferige vermenigvuldigen kan daaraan bijdragen. Alleen al om deze redenen is het gewenst om aan de beschrijving van het theoretisch kader ruime aandacht in deze studie te besteden. Daarnaast levert dit kader enkele meer specifieke aandachtspunten voor het onderzoek op die hieronder kort worden aangeduid.

Zo lijkt het aanbeveling te verdienen om bij de ontwikkeling van de leergang nadrukkelijk rekening te houden met de steeds duidelijkere tendens om aan het cijfermatige rekenen nog slechts een beperkte plaats in het curriculum toe te kennen en om vooral veel aandacht te schenken aan dat gedeelte van het onderwijsleerproces dat eraan voorafgaat: het gedeelte waarin het vermenigvuldigen met meercijferige getallen voor het eerst wordt verkend, waarin informele strategieën en notatievormen worden ontwikkeld en waarin geleidelijk aan de weg wordt ingeslagen naar een nog nader te bepalen vorm van gestileerd hoofdrekenen. Uitgezocht zal moeten worden welke vorm(en) van gestileerd hoofdrekenen het meest in aanmerking komt (komen), en hoe het proces van voortgaande verkorting en niveauverhoging het beste z'n beslag kan krijgen.

Daarbij lijkt het in ieder geval ook belangrijk om te pogen het niveaukarakter van de leergang zo goed mogelijk te duiden, waarbij gezocht kan worden naar een beschrijvingskader waarmee de progressie zowel in termen van te verwerven strategieën (en dus in termen van rekenhandelingen) wordt weergegeven zoals dat in de eerste fase van het TAL-project gebeurde, als in termen van te verwerven wiskundige inzichten of kernideeën zoals dat in het vervolg van dat project plaatsvond. Een dergelijk beschrijvingskader kan niet alleen het theoretisch fundament van de leergang versterken, maar ook de praktische bruikbaarheid ervan vergroten doordat leraren beter in staat gesteld worden om vanuit een overzicht over de totaliteit van het beoogde onderwijsleerproces tewerk te gaan.

Om het interactieve karakter van dat onderwijsleerproces goed tot z'n recht te laten komen, zou verder overwogen kunnen worden om in de lesbeschrijvingen suggesties op te nemen in de richting van retro-actieve en pro-actieve sturing zoals die door Gravemeijer (1995) worden beschreven. Een cruciaal aspect van het onderwijsleerproces is immers gelegen in het door de leerlingen laten ontwikkelen van geschikte

notatievormen, en over deze notatievormen moet door de leerlingen onder leiding van de leraar goed gecommuniceerd worden. Het lijkt bijvoorbeeld aan te bevelen om op zoek te gaan naar sturingsmogelijkheden om de leraar dergelijke notatievormen op een zodanige manier op het bord te laten weergeven dat enerzijds recht wordt gedaan aan de eigen denkwijze van leerlingen terwijl anderzijds geanticipeerd wordt op beoogde notatievormen. Dat wil zeggen: op notatievormen die het uitlokken van verkortingen als het ware in de hand werken.

De beide hierboven beschreven lokale onderwijstheorieën leveren ook enkele aandachtspunten op. Waardevol aan de benaderingswijze volgens het kruispuntenmodel lijkt in ieder geval het sterk visuele karakter van de gehanteerde notatievormen, de mogelijkheden die er zijn om situaties zoals die van de stad met straten en lanen in overleg met de leerlingen zelf visueel-schematisch weer te geven, en de mogelijkheden om leerlingen zelf voortgaande vormen van verkorting en schematisering te laten aanbrengen. Ook de overzichtelijkheid van de door de leerlingen gehanteerde notatievormen spreekt aan (zie voor een voorbeeld fig. 2.13).

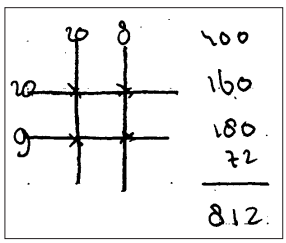


Fig. 2.13: Voorbeeld van een oplossingswijze tijdens een toetsles uit de experimentele leergang rond het kruispuntenmodel. Om te voorkomen dat een subtotaal vergeten zou worden, heeft de leerling de kruispunten afgetekend (voorbeeld afkomstig uit Ter Heege & Treffers, 1979, p.117).

Omdat dit model echter het bezwaar heeft dat nogal wat typen vermenigvuldigsituaties zich er niet zo makkelijk mee laten beschrijven, zou overwogen kunnen worden om voor een ander model te kiezen waarvoor dit bezwaar veel minder geldt. Het aantrekkelijke van het herhaald optellen-model is dat dit model sterk aansluit bij de eigen informele oplossingswijzen van leerlingen (herhaald optellen, verdubbelen e.d.), en dat het op een natuurlijke manier kan voortkomen uit die oplossingswijzen. Al met al zou in het kader van deze studie nader onderzocht kunnen worden hoe de aantrekkelijke kanten van beide modellen mogelijk met elkaar te combineren zijn.

voetnoten

1 De term wiskobas is een samentrekking van '**wisk**unde **o**p de **bas**isschool'. Zie voor een uitgebreide beschrijving van het wiskobasproject bijvoorbeeld Treffers, 1978 (p. 11-34) of Goffree, 1979 (p. 73-116).

2 De term 'rijk probleem' verwijst naar aansprekende, tot een veelheid aan wiskundige activiteiten aanleiding gevende problemen die passen binnen een bepaalde fase van het onderwijsleerproces. Zie voor een nadere uiteenzetting hierover bijvoorbeeld Goffree, 1984.

3 Zie voor een nadere beschrijving van deze New Math-beweging (die vooral in de Verenigde Staten maar ook in landen als Frankrijk en Engeland vaste grond onder de voeten kreeg) en voor de mislukking daarvan Kline, M: *Why Johnny can't add. The failure of New Math* (1973).

4 Hierbij dient opgemerkt te worden dat er een nuanceverschil is tussen de omschrijvingen van Treffers en Streefland. Waar Treffers de mathematische verwerking en probleemoplossing tot het verticaal mathematiseren rekent, plaatst Streefland dit onder het horizontaal mathematiseren. Naderhand is deze kwestie onder meer aan de orde gesteld door Gravemeijer die een onderscheid in drie categorieën wiskundige activiteiten voorstelt: horizontaal mathematiseren, verticaal mathematiseren en het uitvoeren van wiskundige bewerkingen (Gravemeijer, 2005). Met name in het geval van routinematig uitgevoerde wiskundige handelingen zoals bij resultatief tellen of bij kolomsgewijs optellen kan inderdaad moeilijk van mathematiseren gesproken worden. Indien tijdens de uitvoering van een bewerking evenwel sprake is van een element van verkorting of niveauverhoging, zou dit echter juist wel onder mathematiseren gerekend kunnen worden. Hoe dit ook zij, duidelijk is in ieder geval dat het begrip mathematiseren niet álle mogelijke soorten wiskundige activiteiten dekt.

5 Kenmerkend voor de mechanistische benadering van reken-wiskundeonderwijs is het werktuigelijke karakter van de activiteiten van leerlingen waarbij deze erop gericht zijn om datgene wat de leerkracht voordoet of op het bord demonstreert, zo goed mogelijk na te doen en aldus tot kennisverwerving te komen. De leerstof wordt daarbij veelal gevormd door de traditionele rekenleerstof. Bij de empiristische benadering ligt het accent op door leerlingen zelf uitgevoerde praktische activiteiten in de sfeer van meten en meetkunde waarbij veel wordt geëxperimenteerd en waarbij met tabellen en grafieken wordt gewerkt. In de structuralistische benadering ligt de nadruk op wiskundig redeneren en op het verkennen van (formele) wiskundige structuren waarbij veel aandacht is voor niet-rekenkundige leerstof zoals logica, talstelsels en waarschijnlijkheidsrekening. Zie voor een nadere typering bijvoorbeeld Treffers, 1978, p.12-14.

6 Ongeveer tezelfdertijd werd dit leerstofgebied van de kansrekening voor de NOT (onderwijstelevisie) uitgewerkt in een leerstofpakket voor de hoogste klassen van de lagere school onder de titel 'Kijk op kans'. Zie voor een nadere beschouwing over termen als weetkans, zweetkans en wet van de grote aantallen het onderwijzersboek bij dit pakket (Janssen, 1974).

7 Hiermee doelt Treffers op het feit dat de instructieactiviteiten beter geordend kunnen worden volgens een

aanpak waarbij verschijnselen en situaties geselecteerd worden die op een natuurlijke manier aanleiding tot een bepaald begrip of handeling geven, liever dan volgens een aanpak waarbij de moeilijkheidsgraad van de opgaven in kwestie het leidende principe vormt.

8 Anders dan bij het optellen, aftrekken en delen gaat het bij het vermenigvuldigen om twee varianten van de cijferprocedure waarvan de een betrekking heeft op het vermenigvuldigen van een eencijferig met een meercijferig getal, en de ander op het vermenigvuldigen van twee meercijferige getallen. Bij deze laatste variant speelt ook de problematiek van het plaatsen van nullen in het antwoord bij het vermenigvuldigen met het tienvoud en (eventueel) het honderdvoud. Er wordt in dat verband wel gesproken van het kleine algoritme en het grote algoritme.

9 Onlangs werd er in Nederland door enkele deskundigen juist voor gepleit om het cijferend rekenen weer voluit centraal te stellen en om hoofdrekenen veel minder aandacht te geven. Zie bijvoorbeeld Van de Craats, 2007. Vooralsnog ziet het er niet naar uit dat hun pleidooi in vakkringen op veel steun kan rekenen. Zie bijvoorbeeld de reactie op het hierboven genoemde artikel van Uittenbogaard (2007).

3 Achtergronden van het onderzoek

3.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt een aantal achtergronden geschetst die bij het opzetten en uitvoeren van het onderzoek van belang zijn. Dat betreft in de eerste plaats de interpretatie van het begrip hoofdrekenen. In de beschrijving van de probleemstelling in hoofdstuk 1 werd gesproken van de wenselijkheid een onderwijsleertraject te ontwerpen dat gericht is op de ontwikkeling van informele, notatieondersteunde hoofdrekenstrategieën. Gezien het feit dat aan het begrip hoofdrekenen nogal eens verschillende betekenissen worden toegekend, is het gewenst om aan te geven wat hiermee precies bedoeld wordt. In paragraaf 3.2 wordt deze kwestie onder de loep genomen waarbij verduidelijkt wordt op welke wijze in de context van het onderzoek termen als hoofdrekenen en hoofdrekenstrategieën gebruikt worden. Daarbij wordt ook ingegaan op veranderende opvattingen omtrent de plaats van hoofdrekenen in het curriculum voor de basisschool, met name wat betreft de verhouding met cijferend rekenen.

In paragraaf 3.3 wordt vervolgens stilgestaan bij de plaats van het meercijferige vermenigvuldigen in het huidige curriculum. Nog altijd kan dit leerstofgebied beschouwd worden als een centraal onderdeel van het curriculum, maar de didactische opvattingen over de wijze waarop dit gebied het beste aan de orde kan komen, zijn aan veranderingen onderhevig. Zoals in hoofdstuk 2 reeds werd aangestipt, zijn maatschappelijke ontwikkelingen, met name door de grootschalige beschikbaarheid van rekenmachines en een daardoor sterk verminderde behoefte aan personen die het cijfermatige rekenen optimaal beheersen, daar onder meer debet aan. Net als binnen andere gebieden (zoals het optellen en aftrekken met hele getallen) gaat de voorkeur uit naar een didactische benadering waarbij vanuit het gevarieerde en flexibele hoofdrekenen een vorm van gestileerd hoofdrekenen ontwikkeld wordt. In deze paragraaf worden de achtergronden van deze benadering nader uiteengezet. Mede op basis van een beknopte analyse van enkele reken-wiskundemethoden worden vervolgens enige aandachtspunten beschreven voor het onderwijsleertraject dat in het kader van deze studie wordt ontwikkeld.

Er is, internationaal gezien, nogal wat onderzoek gedaan naar het gebruik van informele strategieën door kinderen binnen het gebied van het meercijferige verme-

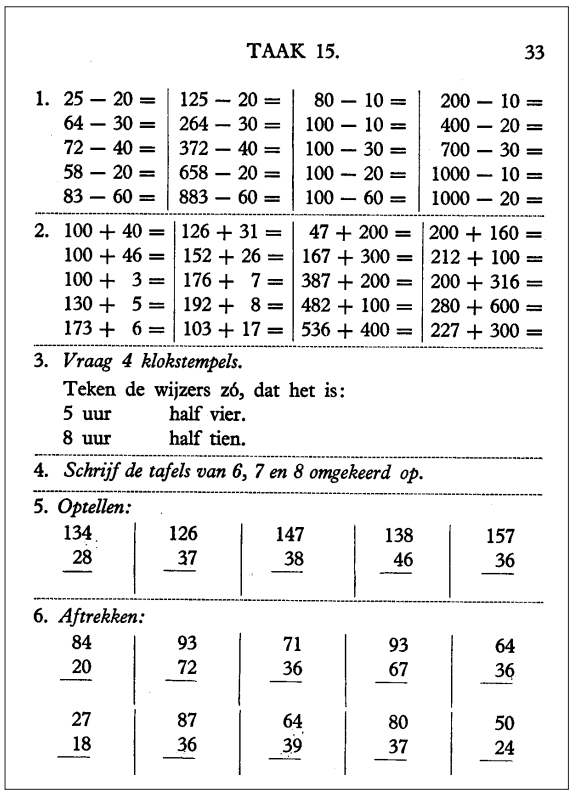
nigvuldigen, en naar de wijze waarop in het onderwijs op dergelijke strategieën voortgebouwd kan worden. Omdat zulke onderzoeken waardevolle informatie verschaffen over de manier waarop het beoogde onderwijsleertraject in het onderhavige onderzoek opgezet kan worden, wordt in paragraaf 3.4 stilgestaan bij de voornaamste uitkomsten en aanbevelingen van een drietal onderzoeken. Tevens wordt kort ingegaan op de mogelijkheden en grenzen van een onderwijsfilosofie die in belangrijke mate ten grondslag aan deze onderzoeken ligt, namelijk de constructivistische onderwijsfilosofie.

In paragraaf 3.5 tenslotte wordt de Nederlandse situatie in beschouwing genomen voor wat betreft de onderwijsresultaten op het gebied van het meercijferige vermenigvuldigen zoals die naar voren komen in het door het Cito uitgevoerde PPON-onderzoek. Zoals in hoofdstuk 1 reeds werd vermeld, laten recente resultaten van dit onderzoek een duidelijk neerwaartse tendens zien die niet alleen tot uitdrukking komt in de behaalde goedscores, maar ook in het afnemend gebruik van notatieondersteunde hoofdrekenstrategieën. Een analyse van deze resultaten leidt tot enkele aanbevelingen met betrekking tot de wijze waarop het beoogde leertraject ingericht kan worden.

3.2 Veranderende opvattingen over hoofdrekenen en de plaats daarvan in het curriculum

Opvattingen over hoofdrekenen en over de plaats daarvan in het curriculum van de basisschool in Nederland zijn in de loop der jaren vrij sterk onderhevig geweest aan veranderingen (Jansen, 1973; Nieland, 1986; Treffers, 1991; Buys, 2001a). Er zijn tijden geweest dat hoofdrekenen vooral werd gezien als 'uit-het-hoofd-rekenen' waarbij antwoorden op opgaven direct en zonder tussenkomst van hulpnotaties geproduceerd dienden te worden. Onderwijs in hoofdrekenen was in deze opvatting sterk gericht op geheugentraining en op lesactiviteiten waarbij de leerlingen een zeer beperkte tijd kregen om de antwoorden op een aantal veelal mondeling gepresenteerde opgaven op papier te zetten. Wat betreft de leerstof ging het daarbij in de eerste plaats om gebieden zoals het rekenen tot 20 en tot 100, de tafels van vermenigvuldiging en de deeltafels, en het rekenen met grotere ronde getallen. Ook in landen als Duitsland, Engeland, Frankrijk en de V.S. heeft deze opvatting geruime tijd gedomineerd. Daarbij is wel sprake van accentverschillen. Terwijl bijvoorbeeld een gebied als het optellen en aftrekken tot 100 in Nederland en Duitsland traditie-

getrouw tot het domein van het hoofdrekenen behoorde, viel dat in Engeland en de V.S. veelal onder het cijferen. Kenmerkend voor het rekenprogramma bij deze benadering van hoofdrekenen is verder dat deze rekenvorm naast die van het cijferen voorkwam en daar veelal los van stond. Aan de ene kant waren er de opgaven waarbij duidelijk kenbaar werd gemaakt dat het om hoofdrekenen ging, aan de andere kant de opgaven die onder elkaar genoteerd stonden en waarbij gecijferd diende te worden[1] (Zie fig. 3.1)



TAAK 15. 33

1. 25 − 20 = | 125 − 20 = | 80 − 10 = | 200 − 10 =
64 − 30 = | 264 − 30 = | 100 − 10 = | 400 − 20 =
72 − 40 = | 372 − 40 = | 100 − 30 = | 700 − 30 =
58 − 20 = | 658 − 20 = | 100 − 20 = | 1000 − 10 =
83 − 60 = | 883 − 60 = | 100 − 60 = | 1000 − 20 =

2. 100 + 40 = | 126 + 31 = | 47 + 200 = | 200 + 160 =
100 + 46 = | 152 + 26 = | 167 + 300 = | 212 + 100 =
100 + 3 = | 176 + 7 = | 387 + 200 = | 200 + 316 =
130 + 5 = | 192 + 8 = | 482 + 100 = | 280 + 600 =
173 + 6 = | 103 + 17 = | 536 + 400 = | 227 + 300 =

3. *Vraag 4 klokstempels.*
Teken de wijzers zó, dat het is:
5 uur half vier.
8 uur half tien.

4. *Schrijf de tafels van 6, 7 en 8 omgekeerd op.*

5. *Optellen:*

134	126	147	138	157
28	37	38	46	36

6. *Aftrekken:*

84	93	71	93	64
20	72	36	67	36
27	87	64	80	50
18	36	39	37	24

Fig 3.1: Voorbeeld van een bladzijde uit een rekenboek uit de jaren '70 uit de methode Naar Zelfstandig Rekenen (Zandvoort e.a., 1970). Bovenaan de bladzijde staan de hoofdrekenopgaven, onderaan de cijferopgaven.

Daar staat tegenover dat er ook tijden zijn geweest dat een andere opvatting over hoofdrekenen opgeld deed. Zo werd reeds in een van de eerste didactiekboeken in Nederland (Versluijs, 1899) hoofdrekenen aangeduid als niet-cijfermatig rekenen waarbij met name ook flexibiliteit een rol speelt[2]:

'Een groot verschil tusschen het hoofdrekenen en het cijferen bestaat hierin dat men bij het cijferen gewoonlijk begint met de eenheden van den laagsten rang en bij het hoofdrekenen met de eenheden van den hoogsten rang. (...) Verder volgt men bij het cijferen meestal vaste regels, dat wil

zeggen: men handelt bij gevallen van dezelfde soort steeds op dezelfde wijze. Bij het hoofdrekenen daarentegen brengt men verschillende bekortingen aan, waartoe de getallen in veel gevallen aanleiding geven.' (Versluijs, 1899; p. 84; geciteerd in Treffers, 1991)

Ruim een halve eeuw later betogen Jansen, Reijnders en Snijders (1964) op een soortgelijke manier dat het bij hoofdrekenen gaat om zaken als het systematisch zoeken naar oplossingsmethoden, het analyseren van de bewerkingen en het gebruik van bewerkingseigenschappen, en het kiezen voor de meest bruikbare oplossingsmethode. Zij omschrijven hoofdrekenen als 'het zien en hanteren van getalrelaties' waarbij men steunt op getalinzicht en waarbij 'men geestelijk lenig moet zijn'. Dit in tegenstelling tot het cijferen waarbij men vaste regels hanteert, steunt op inzicht in de decimale structuur van getallen en er geen ruimte is voor eigen keuzes van leerlingen. In deze opvatting heeft hoofdrekenen veel meer het karakter van 'rekenen-met-het-hoofd', zoals Scholten (1988) het later zou omschrijven. Bij deze opvatting is het niet essentieel dat alles uit het hoofd gebeurt – in principe hebben leerlingen de mogelijkheid om een tussenstap of tussenantwoord ter ondersteuning van het denken op papier te zetten[3] . Geleidelijk aan heeft deze laatste opvatting steeds meer terrein gewonnen, en thans is zij in veel landen gangbaar. In de TAL-brochure 'Kinderen leren rekenen' (Van den Heuvel-Panhuizen e.a. (red.), 2001) wordt zij als volgt omschreven:

'Hoofdrekenen is in de eerste plaats een *benaderingswijze* van getallen en getalsmatige gegevens waarbij handig en flexibel met de getallen wordt gerekend:

- werkend met getalwaarden en niet met cijfers; de getallen worden bij het hoofdrekenen 'in hun waarde gelaten';
- gebruik makend van elementaire rekeneigenschappen en getalrelaties zoals de verwisseleigenschap, de verdeeleigenschap, de inverse-relatie, en combinaties daarvan;
- steunend op een goed ontwikkeld getalgevoel en een hechte kennisbasis van elementaire rekenfeiten tot 20 en tot 100;
- al naar gelang de situatie eventueel gebruik makend van passende tussennotaties, maar voor een belangrijk deel uit het hoofd rekenend.' (Van den Heuvel-Panhuizen e.a. (red.), 2001, p. 38)

Behalve de opvattingen over hoofdrekenen als zodanig zijn ook de ideeën over de relatie tussen hoofdrekenen en cijferen veranderd. Zoals het voorbeeld uit Naar Zelfstandig Rekenen al doet vermoeden, werden beide rekenvormen lange tijd los van elkaar aangeboden, zonder dat een duidelijke relatie werd gelegd. Sinds de jaren '90 is daar in zoverre verandering in gekomen, dat hoofdrekenen (samen met gevoel voor getallen[4]) algemeen als de grondslag voor al het rekenen wordt beschouwd,

en dat de overtuiging is gegroeid dat meer gestandaardiseerde procedures zoals die van het cijferen, bij voorkeur ontwikkeld dienen te worden vanuit het meer flexibele hoofdrekenen (Huitema 1991; Treffers, 1995; Van den Heuvel-Panhuizen, 1999). Zoals in hoofdstuk 2 van deze studie reeds is aangestipt, wordt als een overgangsvorm van het eigenlijke, flexibele hoofdrekenen (ook wel handig rekenen genoemd) naar het cijfermatige rekenen een meer gestructureerde variant van hoofdrekenen aanbevolen, namelijk die van het gestileerde hoofdrekenen[5] of kolomsgewijs rekenen waarbij wel met getalwaarden wordt gewerkt, maar dan volgens een vaste procedure. In voornoemde TAL-brochure wordt dit als volgt omschreven:

'Kenmerkend voor kolomsgewijs rekenen is niet zozeer de verticale schrijfwijze van de opgave, als wel de splitsende rekenwijze met positiegetallen bij het berekenen van deeluitkomsten, werkend van groot-naar-klein, van links-naar-rechts. Dit in tegenstelling tot cijferen waarbij van klein-naar-groot, van rechts-naar-links, met positiecijfers wordt geopereerd.' (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001, p. 65)

Aan de hand van voorbeelden wordt deze rekenvorm voor wat betreft de bewerkingen optellen, aftrekken en vermenigvuldigen als volgt verduidelijkt[6] (zie fig. 3.2).

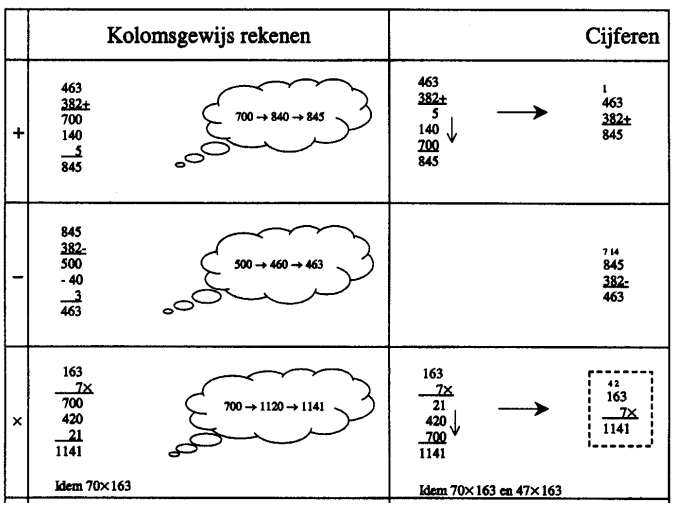


Fig. 3.2: Schema uit de TAL-brochure 'Kinderen leren rekenen' waarin de werkwijzen voor het kolomsgewijs optellen, aftrekken en vermenigvuldigen alsmede de overgang naar het cijferen wordt toegelicht. (Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001; p. 68)

Een andere belangrijke verandering vormt het feit dat tot eind jaren '80 het hoofdrekenen bij de introductie van de cijferprocedures sterk op de achtergrond raakte, terwijl de opvatting thans algemeen is dat hoofdrekenen ook daarna nog van vitaal belang is[7]. In de TAL-brochure 'Kinderen leren rekenen' (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001) wordt deze samenhang als volgt uitgebeeld (zie fig. 3.3).

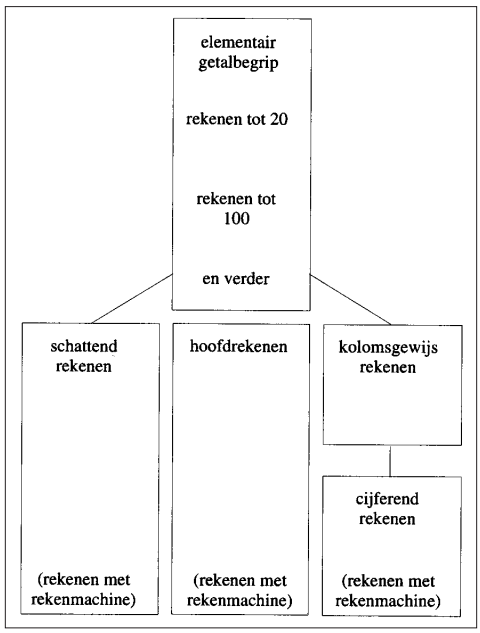


Fig. 3.3: Schema uit de TAL-brochure 'Kinderen leren rekenen' waarin de verticale samenhang in het curriculum tot uitdrukking wordt gebracht: elementair getalbegrip, rekenen tot 20, tot 100 en daarboven als basis voor drie 'vertakkingen' : hoofdrekenen, schattend rekenen en kolomsgewijs / cijferend rekenen. (Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001; p. 10)

Ook in andere landen wint deze benadering van het rekenen steeds meer terrein. Zo bepleitte in Duitsland Krauthausen reeds in 1992 het gebruik van 'halbschrifliche Rechenstrategien' als een tussenvorm tussen het eigenlijke flexibele hoofdrekenen en het gestandaardiseerde cijferen (Krauthausen, 1992, p.20-22). En in de publicatie die in Engeland als grondslag voor de herziening van het leerplan rekenen-wiskunde wordt gehanteerd, de 'National Numeracy Strategy', wordt beschreven hoe de basis voor het leren rekenen wordt gelegd via 'mental computation strategies'[8] waarna via 'informal written methods' die sterk overeenkomen met die van het gestileerde hoofdrekenen, de overstap naar het cijferen wordt gemaakt (QCA, 1999; zie ook Thompson (red.), 1997; Beishuizen, 2001). Als informele schriftelijke methode voor het vermenigvuldigen van meercijferige getallen wordt in de genoemde publicatie overigens gekozen voor een 'grid method' (roostermethode; zie fig. 3.4) die sterk overeenkomt met de werkwijze volgens het oppervlaktemodel die in Nederland door wiskobas enige tijd werd gepropageerd.

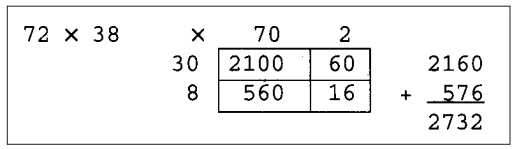


Fig. 3.4: Informele schriftelijke methode voor het vermenigvuldigen van meercijferige getallen aanbevolen in de Engelse leerplanpublicatie 'National Numeracy Strategy' (QCA, 1999; p. 67, Y456 examples)

Ook in de Verenigde Staten hebben zich dergelijke ontwikkelingen voorgedaan. Werden in gezaghebbende publicaties zoals 'Everybody counts' (NRC, 1989) en 'Mathematics for the young child' (NCTM, 1990) bijvoorbeeld voor het optellen en aftrekken tot 100 zowel het gebruik van hoofdrekenstrategieën als van cijferprocedures (ondersteund met MAB-materiaal) voor het onderwijs nog aanbevolen, in recentere publicaties wordt de nadruk steeds meer op 'mental calculation strategies' gelegd (NCTM, 2000; Baroody & Dowker (red.), 2003; NCTM, 2006). Deze ontwikkeling spoort ook in hoge mate met het pleidooi van McIntosh, Reys en Reys (1992) voor het centraal stellen van gecijferdheid als overkoepelend onderwijsdoel, een pleidooi dat naderhand in veel landen (waaronder Nederland; zie bijvoorbeeld Treffers, 1994) ondersteund zou worden.

Kort samengevat komt het er dus op neer dat tegenwoordig algemeen getalgevoel en elementair hoofdrekenen als de basis van het rekenen worden gezien en dat een meer gestructureerde vorm van hoofdrekenen die veelal wordt aangeduid als gestileerd hoofdrekenen, wordt beschouwd als de verbindende schakel tussen het meer flexibele hoofdrekenen enerzijds en het cijferen anderzijds. Nemen we nu het leerstofdomein onder de loep dat in deze studie centraal staat, het meercijferige vermenigvuldigen, dan kan, in overeenstemming met het voorgaande, gesteld worden dat zich binnen dit gebied een belangrijke overgang voltrekt doordat de aandacht in eerste instantie vooral uitgaat naar gevarieerde, notatieondersteunde hoofdrekenstrategieën en dat geleidelijk aan de weg geëffend wordt naar een meer gestileerde vorm van hoofdrekenen. Hierbij dient opgemerkt te worden dat de bedoelde strategieën in zoverre als hoofdrekenstrategieën aangemerkt kunnen worden dat er sprake is van het werken met getalwaarden (en niet met positiewaarden of cijfers) en dat er sprake is van flexibel oplossingsgedrag in de zin dat leerlingen al naar gelang de situatie gebruik kunnen maken van passende getalrelaties of rekeneigenschappen. Anders dan bij het eigenlijke hoofdrekenen zoals het hierboven is omschreven, worden de handelingen in kwestie evenwel niet voornamelijk of helemaal uit het hoofd uitgevoerd, maar

voornamelijk of helemaal aan de hand van tussennotaties. Als in het kader van deze studie gesproken wordt van notatieondersteunde hoofdrekenstrategieën, dan gaat het dus om hoofdrekenstrategieën die grotendeels of helemaal worden uitgevoerd aan de hand van tussennotaties. Dit onderscheidt zich nog weer van de strategieën waarvan bij het gestileerde hoofdrekenen gebruikt wordt gemaakt doordat veel minder sprake is van vaste stappen die in een vaste volgorde worden uitgevoerd.

3.3 Meercijferig vermenigvuldigen als leerstofdomein op een kruispunt van leerwegen

De stap naar het verkennen van situaties waarin vermenigvuldigingen met meercijferige getallen besloten liggen, is een belangrijke stap in de reken-wiskundige ontwikkeling van de leerlingen. In de periode voorafgaand daaraan, hebben ze een aantal leerstofdomeinen geëxploreerd waarbinnen bepaalde leerdoelen grotendeels of geheel gerealiseerd zijn. Dit betreft bijvoorbeeld het gebied van *getallen en getalrelaties* (begrip van de verschillende betekenissen van getallen, gevarieerd tellen, gevoel voor de plaats van getallen op de getallenlijn, inzicht in de decimale structuur, kennis van getalrelaties, ...), het *optellen en aftrekken* (inzicht in de betekenis der operaties, kennis van basisfeiten tot 20, vertrouwdheid met basisstrategieën tot 100, vaardigheid in de procedures van het kolomsgewijze en cijferende rekenen, ...) en het *vermenigvuldigen* (inzicht in de operatie 'keer', vertrouwdheid met elementaire rekenstrategieën, geautomatiseerde tafelkennis, vertrouwdheid met basisstrategieën voor het geval 'eencijferig maal meercijferig', ...).

Voor wat betreft dit laatste domein kan het resultaat van het onderwijsleerproces zijn dat leerlingen tegen het einde van groep 6 een reeks opgaven oplossen zoals aangegeven in fig. 3.5. Eveneens van grote waarde is een grondige kennismaking met het domein van het *meten*, in het bijzonder wat betreft de grootheden *lengte en oppervlakte* (maatgevoel, ervaring met het zelf bedenken van meetstrategieën en het gebruik van meetinstrumenten, kennis van natuurlijke en standaardmaten en hun relaties, ervaring met het gebruik van rechthoekstructuren bij het bepalen van de oppervlakte van allerlei objecten; zie voor een nadere beschrijving van deze leerlijn Buijs, 2003).

Nadat het gebied van het meercijferige vermenigvuldigen in voldoende mate is geëxploreerd, zijn er in de periode daarna weer nieuwe leerstofgebieden waarin de verworven kennis toegepast en uitgebouwd dient te worden. Dit betreft bijvoor-

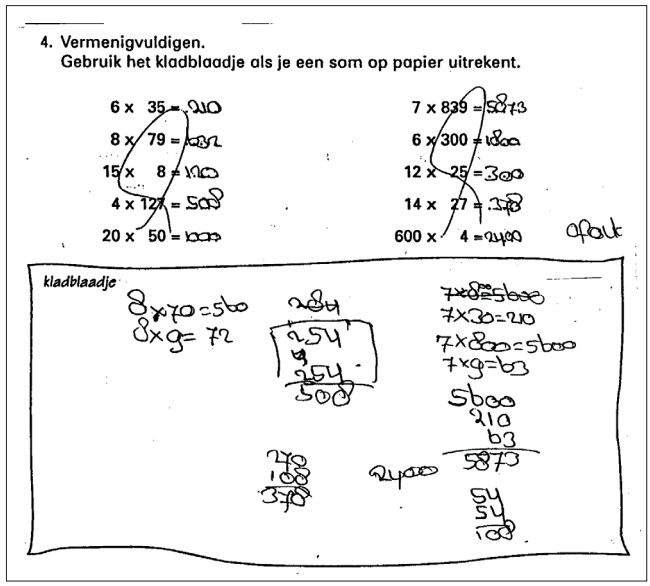


Fig. 3.5: Kladblaadje afkomstig van een leerling tijdens de try out van de methode Wis en Reken (eind groep 6). Duidelijk is te zien hoe zij de opgaven 6x35, 15x8, 20x50, 6x300, 12x25 en 600x4 direct uit het hoofd heeft gedaan, terwijl voor de overige opgaven tussenantwoorden of –stappen zijn genoteerd.

beeld de gebieden van de *verhoudingen*, de *kommagetallen* en de *procenten*. Daarbij gaat het niet alleen om vaardigheid in het uitvoeren van deze bewerking als zodanig, maar ook om het kunnen construeren van schematische of modelmatige voorstellingen van situaties met een vermenigvuldigstructuur, en om het kunnen gebruiken van belangrijke bewerkingseigenschappen zoals distributiviteit. Verder wordt ook in het voortgezet onderwijs voortgebouwd op kennis, vaardigheden en inzichten die (mede) binnen het gebied van het meercijferige vermenigvuldigen tot ontwikkeling zijn gekomen. Dit geldt bijvoorbeeld voor het gebied van de *elementaire algebra* waarbij leerlingen mede op basis van hun inzicht in het vermenigvuldigen en het gebruik van het oppervlaktemodel leren werken met algebraïsche vormen zoals 4(x-3) en (y+2)(2y-3) (Kindt, 2006; Van Streun, 2007; ReAlproject, 2007).

Zo bezien kan gesteld worden dat het gebied van het meercijferige vermenigvuldigen zich *op een kruispunt van leerwegen* bevindt waarbij enerzijds wordt voortgebouwd op wat in het voorafgaande in het denken en doen van de leerlingen tot ontwikkeling is gekomen, en waarbij anderzijds geanticipeerd wordt op zaken die naderhand onder de aandacht komen.

Hoewel het kunnen uitrekenen van meercijferige vermenigvuldigingen sinds jaar en dag in de kerndoelen vermeld staat en dus een centraal leerdoel voor het basisonderwijs vormt, is de noodzaak voor het verwerven van deze vaardigheid tegenwoordig minder vanzelfsprekend geworden. Zoals hierboven reeds besproken is, heeft dat een duidelijke oorzaak. De maatschappelijke behoefte aan mensen die vlot en efficiënt grote vermenigvuldigingen als 547x68 of 694x235 kunnen uitrekenen, is door de grootschalige verspreiding van de rekenmachine drastisch geslonken. Zelfs op de mobiele telefoon waarover vrijwel iedereen tegenwoordig beschikt, zit bijna altijd een rekenfunctie, en doet zich in de praktijk een situatie voor waarin een grote vermenigvuldiging uitgerekend moet worden, dan zal dit vrijwel altijd op de machine gebeuren. Iets soortgelijks geldt voor het voortgezet onderwijs. Vanaf de eerste dag dat leerlingen in de brugklas vertoeven, worden ze verondersteld een rekenmachine bij de hand te hebben waarmee alle opgaven die als moeilijk ervaren worden om direct uit het hoofd uit te rekenen, in een handomdraai opgelost kunnen worden.

In overeenstemming met deze maatschappelijke ontwikkelingen, wordt het cijfermatige rekenen ook door onderwijsgevenden in het basisonderwijs van minder belang geacht. In een door de TAL-groep uitgevoerd onderzoek (Van den Heuvel-Panhuizen & De Goeij, 1999a, 1999b) blijkt een ruime meerderheid van de geraadpleegde leraren basisonderwijs van mening te zijn dat aan dit leerstofgebied een meer ondergeschikte rol moet worden toegekend. Over de vraag naar de betekenis van het cijferen voor zwakke leerlingen blijken de meningen in dit onderzoek overigens verdeeld. Enerzijds is er een groep leraren die van mening is dat cijferen voor zwakke leerlingen belangrijk is omdat het 'succeservaringen geeft', anderzijds is er een (wat grotere) groep die zich op het standpunt stelt dat 'cijferen te lastig is voor zwakkere leerlingen' en dat dit bijgevolg voornamelijk frustraties oplevert. Hierbij kan nog de kanttekening geplaatst worden dat het wellicht zinvol is om een onderscheid te maken tussen de verschillende bewerkingen. Zo lijkt het cijferend optellen en in mindere mate het cijferend aftrekken ook voor zwakke leerlingen over het algemeen goed te doorzien en haalbaar. Maar, zoals verderop in dit hoofdstuk besproken zal worden, is het cijferend vermenigvuldigen evenals het cijferend delen voor veel van deze leerlingen moeilijk te doorgronden. Het zou dan ook wel eens zo kunnen zijn dat eventuele frustraties als gevolg van niet tot een goed beheersingsniveau kunnen komen, vooral bij het leerproces rond het cijferend vermenigvuldigen en delen ontstaan.

Tegen de achtergrond van deze ontwikkeling ligt het voor de hand dat er ook in didactisch opzicht veranderingen wenselijk zijn. Immers, grote didactische inspanningen om de cijferprocedure voor het meercijferige vermenigvuldigen zo goed mogelijk inzichtelijk te maken en in te laten oefenen, zijn duidelijk minder relevant geworden. Daarentegen zijn inspanningen om de leerlingen op dit gebied vertrouwd te maken met efficiënte strategieën in de sfeer van het gestileerde hoofdrekenen, wel aan te bevelen. Daarmee kan immers niet alleen bewerkstelligd worden dat de leerlingen opgaven van dit type vlot en efficiënt kunnen uitrekenen, maar ook dat de band met het voorafgaande gevarieerde hoofdrekenen intact blijft en dat doelen die van belang zijn in verband met toekomstige leerprocessen, zoals inzicht in de distributieve eigenschap en het kunnen construeren van schematische voorstellingen van vermenigvuldigsituaties, beter gerealiseerd kunnen worden. Bovendien kunnen dergelijke procedures voor een deel van de leerlingen, met name de zwakke leerlingen voor wie de eigenlijke cijferprocedure moeilijk haalbaar is, als einddoel fungeren, net zoals dit voor het optellen en aftrekken geldt (De Goeij en Nelissen, 2004). Tenslotte is van belang dat de leerlingen bij het gestileerde hoofdrekenen veel meer zicht houden op de orde van grootte van een uitkomst. Dientengevolge bereidt deze vorm van rekenen beter voor op het schattende rekenen en op het verstandig leren omgaan met de rekenmachine.

Deze didactische insteek voor het meercijferige vermenigvuldigen is overigens bepaald niet helemaal nieuw. Zoals in hoofdstuk 2 werd gememoreerd, werd reeds in de hierboven genoemde publicatie 'Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens wiskobas' (Dekker e.a., 1982) een lans gebroken voor een enigszins vergelijkbare didactische benadering die als volgt werd omschreven:

'Het door ons voorgestelde cijferen is, we noemden het al, kort te typeren als geïntegreerd cijferen volgens progressieve schematisering, waarbij 'geïntegreerd' zowel betrekking heeft op cijferen vervlochten met handig rekenen als op cijferen verweven met toepassingen.' (Dekker e.a., 1982; p. 194)

Ook hier wordt dus al gepleit voor vervlechting van het cijferen met het handig rekenen, al wordt de term 'gestileerd hoofdrekenen' nog niet gebruikt en al wordt ook niet zo nadrukkelijk aangegeven dat het cijferen uit het hoofdrekenen dient voort te komen. In het kader van deze benadering werd overigens ook nadrukkelijk gewezen op de mogelijkheid van het nastreven van 'variabele eindniveaus' waarbij

leerlingen al naar gelang de eigen mogelijkheden tot een zeker niveau van verkorting en schematisering geraken.

In de praktijk lijkt het tot op heden evenwel nog niet zo goed gelukt om deze benadering concreet gestalte te geven. Van de beide in de genoemde publicatie voorgestelde didactische aanpakken is die volgens het kruispuntenmodel slechts in één reken-wiskundemethode terechtgekomen (Rekenwerk, Nelissen e.a., 1988; zie fig. 3.6) die reeds enige tijd uit de handel is.

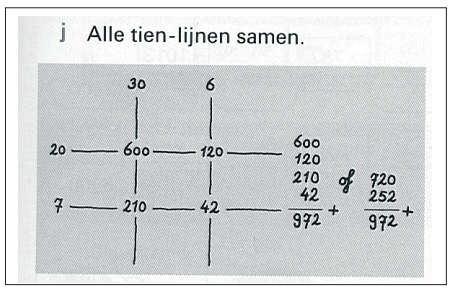


Fig. 3.6: Voorbeeld van een notatieschema uit de methode Rekenwerk (Nelissen e.a., 1988) waarbij een vermenigvuldigopgave wordt opgelost met behulp van het kruispuntenmodel. Het schema is afkomstig uit leerlingenboek 7a, p. 5.

De andere didactische aanpak, die volgens het herhaald optellen-model, is in de jaren '80 en '90 in een aantal methoden uitgewerkt, zoals De Wereld in Getallen (1e versie; Van de Molengraaf (red.), 1985; 2e versie; Huitema e.a., 1990) en Rekenen & Wiskunde (Gravemeijer e.a., 1988). Soms werd daarbij echter de fase van het herhaald optellen met het oog op de bewerkelijkheid en de beperkte praktische uitvoerbaarheid summier gehouden. Een voorbeeld hiervan is te vinden in De Wereld in Getallen (1e versie) waarbij het herhaald optellen beperkt blijft tot gevallen als 8x36, terwijl voor grotere vermenigvuldigingen een opsplitsing wordt gemaakt in subopgaven die direct via hoofdrekenen (al dan niet ondersteund met een tabel; zie fig. 3.7) uitgerekend worden.

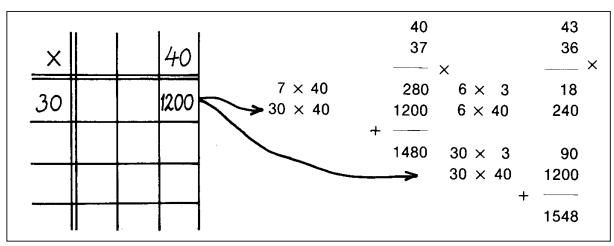


Fig. 3.7: Overzicht uit Handleiding 4a (p. 17) van De Wereld in Getallen (1e versie) van de wijze waarop leerlingen met behulp van een tabel deelproducten bij opgaven als 37x40 en 36x43 konden achterhalen.

In de methode Rekenen & Wiskunde werd de fase van het herhaald optellen wel tamelijk uitgebreid doorlopen, waarbij een soort happenschema als verkort notatieschema fungeerde om de overstap naar verdere verkortingen te kunnen maken. Zie het voorbeeld in fig. 3.8.

Voor deze methoden geldt verder dat het accent sterk bleef liggen op het bereiken van het eindalgoritme, terwijl het aansluiten bij informele eigen aanpakken van leerlingen enigszins onderbelicht bleef. Zo kan men zich voorstellen dat nogal wat leerlingen bij het in fig. 3.8 weergegeven voorbeeld uit Rekenen & Wiskunde de subopgave 8x39 niet zo sterk geneigd zullen zijn op te lossen via herhaald optellen maar via het veel efficiëntere splitsen (8x30 en 8x9) of compenseren (8x40 min 8x1).

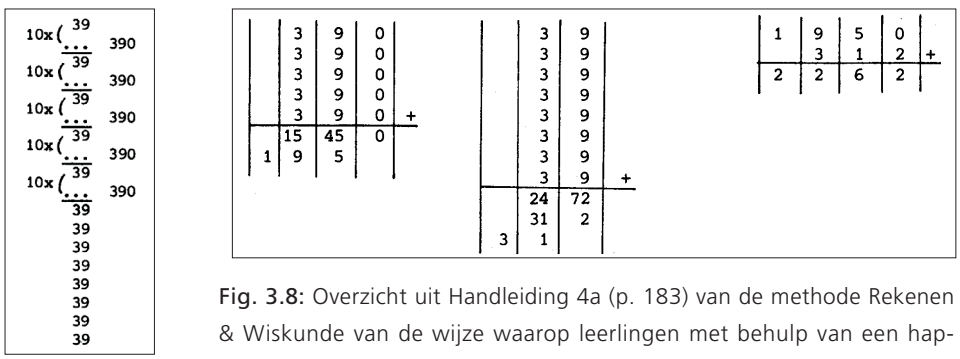


Fig. 3.8: Overzicht uit Handleiding 4a (p. 183) van de methode Rekenen & Wiskunde van de wijze waarop leerlingen met behulp van een happenschema en drie bijbehorende optellingen in een positieschema een opgave als 58x39 verondersteld worden uit te rekenen.

Ook in latere methoden zoals Pluspunt (Van Beusekom e.a., 1998; zie fig. 3.9) en Rekenrijk (Bokhove e.a., 2000) wordt het herhaald optellen als vertrekpunt gekozen, en wordt ernaar gestreefd de leerlingen een proces van voortgaande verkorting en niveauverhoging te laten doorlopen. Maar ook hier lijkt er nog altijd sprake van een tamelijk sterke gerichtheid op het bereiken van het eindalgoritme.

Daar komt nog bij dat de notatievormen die in de verschillende methoden aangehouden worden, niet altijd even logisch en voor de hand liggend lijken te zijn. Zo is de hierboven weergegeven notatiewijze uit Rekenen & Wiskunde dermate uitgebreid, dat men zich zou kunnen voorstellen dat leerlingen deze als erg omslachtig ervaren. Hetzelfde geldt voor de notatiewijze bij stap 3 in de methode Pluspunt. Het lijkt voor de leerlingen niet erg aantrekkelijk om na de betrekkelijk beknopte notatie van stap 2 de overstap naar de veel uitgebreidere notatie te maken van stap 3.

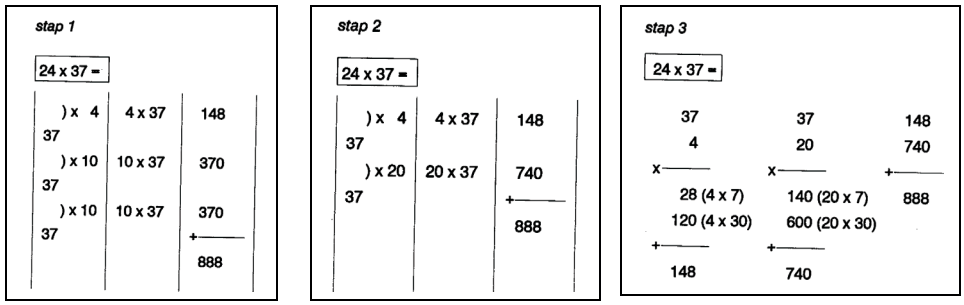


Fig. 3.9: Deel van een overzicht uit Handleiding 7a, p. 32, van de methode Pluspunt (Van Beusekom e.a., 1998) waarin uiteengezet wordt welke stappen voor het vermenigvuldigen van meercijferige getallen gedaan worden.

Meer in het algemeen zou het zo moeten zijn dat de notatievorm die ontwikkeld wordt, nauw aansluit bij de informele oplossingswijzen van leerlingen en als het ware een afspiegeling vormt van de handelingen waarmee deze oplossingswijzen verkort worden. Bij de ontwikkeling van het nieuwe onderwijsleertraject zou nader onderzocht kunnen worden hoe dit in de praktijk gestalte kan krijgen.

Hoe lastig deze problematiek is, heb ik zelf aan den lijve ondervonden bij de ontwikkeling van een andere reken-wiskundemethode, namelijk Wis en Reken (Buijs e.a., 2000). Op grond van eerdere try out-ervaringen was door de auteursgroep besloten om eind groep 5, begin groep 6 eerst een brede oriëntatie op het vermenigvuldigen met grotere getallen (eencijferig, meercijferig, rond, niet-rond) te laten plaatsvinden, en vervolgens in de loop van groep 6 de nadruk te leggen op situaties waarin sprake is van vermenigvuldigingen van het type 'eencijferig maal meercijferig'. Rond dergelijke opgaven was een leerlijn ontwikkeld die in de try outs goed bleek te functioneren en die erop neerkwam dat de leerlingen zich eerst oriënteerden op een vorm van gestileerd hoofdrekenen waarbij het tweede getal decimaal gesplitst werd (bijvoorbeeld: 6x235 via 6x200, 6x30 en 6x5), en vervolgens op het corresponderende cijferalgoritme waarbij van rechts naar links werd gewerkt en waarbij de bekende 'onthoud-handelingen' (6x5 is 30; 0 opschrijven, 3 onthouden) ingeoefend werden. Daarnaast werd dan nog een spoor van handig hoofdrekenen uitgezet waarbij de leerlingen allerlei handige en gevarieerde hoofdrekenstrategieën oefenden voor opgaven met ronde getallen, zoals bij 20x35, 15x40, 8x150, 60x15, en zo meer.

In de eerste helft van groep 7 kwamen daarna opgaven van het type 'meercijferig maal meercijferig' centraal te staan. Een analyse van de beoogde handelingen bracht

de auteursgroep tot de slotsom dat een benadering voor de hand lag waarbij een opgave als 47x64 opgelost werd door 40x64 en 7x64 uit te rekenen en vervolgens de beide subtotalen onder elkaar op te tellen. Voorafgaand hieraan zouden dan opgaven van het type 40x64 verkend kunnen worden, waarbij als voorkeurstrategie de aanpak werd aangemoedigd waarbij zo'n opgave wordt opgelost door '10x64 en dat 4 keer te doen'. Deze aanpak zou dan verkort kunnen worden tot '4 keer 640'. Als dit eenmaal goed begrepen werd door de leerlingen, zo was de gedachte, zou het nog maar een kleine stap zijn om de beoogde aanpak via gestileerd hoofdrekenen voor het type 47x64 te introduceren (zie fig. 3.10).



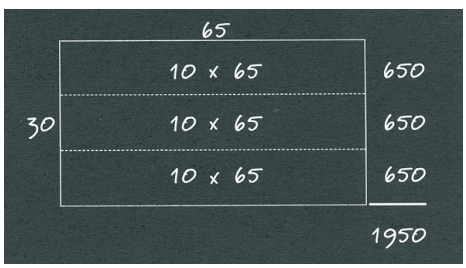
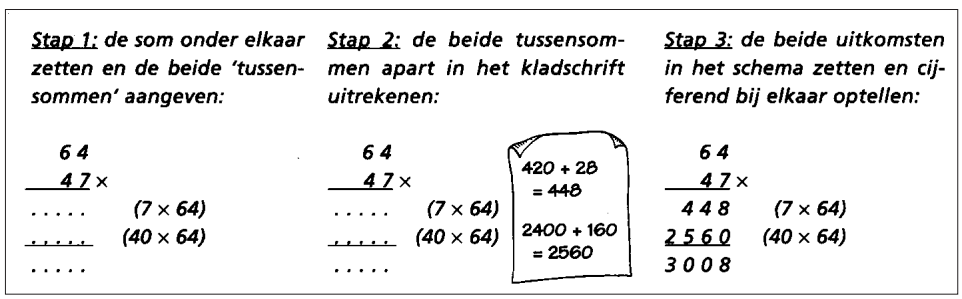


Fig. 3.10: Hierboven een contextprobleem rond de opgave 30x65 en de in de handleiding aanbevolen oplossingswijze via 3 keer 10x65. Hieronder een toelichting uit de handleiding met betrekking tot de wijze waarop in het verlengde van bovengenoemd type opgaven, de opgave 47x64 opgelost zou kunnen worden.



Deze leerlijn bleek in de try outs tamelijk goed te functioneren, althans wat betreft de resultaten. Maar bij een nadere analyse van het aanpakgedrag dat leerlingen bij verschillende toetsen demonstreerden, bleek er iets merkwaardigs aan de hand. Ondanks de gerichte instructie die daartoe was gegeven, bleken verreweg de meeste leerlingen opgaven van het type 40x64 helemaal niet op te lossen via '4 keer 640', maar met behulp van de kennelijk veel meer voor de hand liggende werkwijze via 40x60 en 40x4. Gezien de voorgeschiedenis waarbij de nadruk voor het oplossen van opgaven van het type 6x235 op de werkwijze via het splitsen van het tweede getal lag, lag deze aanpak eigenlijk ook nogal voor de hand. Maar een en ander strookte niet met het voornemen van de auteurs om de weg naar een standaardprocedure zo goed mogelijk te plaveien waarbij de leerlingen 47x64 zouden oplossen door het eerste getal te splitsen.

Achteraf was het misschien toch niet zo verstandig geweest om de nadruk in de hele tweede helft van groep 6 op opgaven van het type eencijferig maal meercijferig te leggen en daarbij dan steeds verder toe te werken naar een standaardaanpak waarbij het tweede getal gesplitst werd. Ook begonnen de auteurs zich steeds meer af te vragen in hoeverre het bereiken van het eindalgoritme nog wel zo zwaar diende te wegen bij het opzetten van het onderwijsleertraject. In nog sterkere mate, zo werd overwogen, gold dit wellicht voor het eindalgoritme rond opgaven van het type eencijferig maal meercijferig. In toenemende mate rees de vraag of het helemaal nog wel zoveel zin had om een cijferprocedure voor dit type opgaven te introduceren. Hoe dan ook, de uitwerking van dit onderdeel van het bovenbouwprogramma van Wis en Reken werd niet naar volle tevredenheid afgesloten – de auteursgroep bleef het gevoel houden dat hier op de een of andere manier kansen gemist werden.

Resumerend zou op grond van bovenstaande analyse gesteld kunnen worden dat een onderwijsleertraject dat gericht is op het ontwikkelen van een vorm van gestileerd hoofdrekenen voor het vermenigvuldigen van meercijferige getallen ruimschoots aandacht zou moeten besteden aan de informele eigen strategieën van leerlingen, en aan het voortbouwen daarop; dat ernaar gestreefd zou moeten worden om verkorte notatievormen op een natuurlijke manier te laten voortkomen uit wat leerlingen zelf aan verkortingen aandragen; en dat de wijze waarop het proces van voortgaande verkorting en niveauverhoging verder ingericht wordt, niet per definitie in alle opzichten afgestemd hoeft te zijn op het bereiken van het cijferalgoritme. Indien er efficiënte strategieën in de sfeer van het gestileerde hoofdrekenen gevonden kunnen worden en de leerlingen blijken daarmee goede resultaten te boeken, dan is er nog maar weinig reden om de overstap te maken naar het cijferalgoritme.

3.4 Enkele internationale onderzoeken rond het meercijferige vermenigvuldigen

Hoewel in sommige landen de nadruk voor wat betreft het meercijferige vermenigvuldigen nog altijd op het onderwijzen van het gangbare cijferalgoritme ligt, zijn er wel een aantal belangrijke internationale onderzoeken geweest waarin onderzocht is wat voor informele strategieën leerlingen zoal gebruiken bij dit type opgaven, en hoe daarop in het onderwijs voortgebouwd zou kunnen worden in de richting van gestileerd hoofdrekenen. Omdat dit voor de opzet van het beoogde onderwijsleertraject in het onderhavige onderzoek van grote waarde is, heb ik een aantal gegevens uit een drietal grote onderzoeken op een rij gezet. Hieronder worden deze onderzoeken beknopt beschreven, waarbij met name wordt ingegaan op de onderwijskundige context waarbinnen de verschillende onderzoeken plaatsvonden. Zijdelings stip ik ook nog enkele kleinere maar eveneens waardevolle onderzoeken aan. Omdat in alle drie de grote onderzoeken als achterliggende onderwijsfilosofie een constructivistische benadering wordt voorgestaan, ga ik in een afsluitende reflectie nader in op de mogelijkheden en grenzen van deze filosofie met het oog op het onderhavige onderzoek.

3.4.1 Ambrose, Baek en Carpenter: Cognitively Guided Instruction

Een onderzoek dat veel waardevolle informatie bevat over informele oplossingsstrategieën van leerlingen en over de wijze waarop in het onderwijs daarop kan worden voortgebouwd, betreft het Amerikaanse onderzoek van Ambrose, Baek en Carpenter (2003). Zij onderzochten uitvoerig wat zij noemen de 'zelf uitgevonden algoritmen van leerlingen' voor wat betreft vermenigvuldigen en delen[9]. Ten grondslag aan hun onderzoek lag een filosofie die in de jaren '90 door Carpenter en Fennema werd ontwikkeld (Carpenter & Fennema, 1992; 1999) en die erop neerkomt dat leerlingen vaak uit zichzelf al een redelijk geavanceerd idee van wiskundige begrippen en oplossingsstrategieën hebben terwijl het onderwijs hier grotendeels aan voorbijgaat en niet in staat blijkt om een verbinding met deze kennis tot stand te brengen. Het zou daarom goed zijn, aldus Carpenter en Fennema, als leraren beter op de hoogte van die informele kennis waren en als ze ernaar zouden streven om deze kennis tot vertrekpunt voor hun onderwijs te maken en leerlingen op basis van inzicht verder in hun wiskundige ontwikkeling te laten komen. Deze filosofie wordt omschreven als 'cognitively guided instruction'. Om de beoogde onderwijsaanpak mogelijk te maken, hebben Carpenter en Fennema jaren lang onderzoek gedaan naar de informele kennis van leerlingen binnen een aantal leerstofdomeinen, alsmede naar de manier waarop leraren gebruik zouden kunnen maken van deze kennis. Zij con-

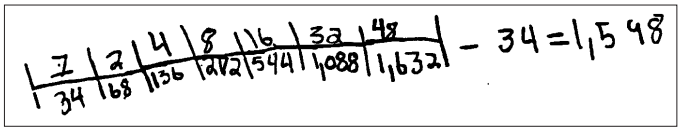
stateerden dat leraren met het oog daarop dienen te beschikken over een aantal 'begripsmatige landkaarten' (conceptual maps) waarmee de ontwikkeling van het wiskundig denken van leerlingen binnen belangrijke leerstofdomeinen in grote lijnen beschreven wordt. Op basis van hun kennis van deze begripsmatige landkaarten zouden leraren dan zelf leertrajecten kunnen uitzetten waarlangs zij hun leerlingen naar meer formele wiskundige kennis zouden kunnen leiden.

Een recent voorbeeld van zo'n begripsmatige landkaart wordt gevormd door het gebied van het vermenigvuldigen en delen met meercijferige getallen. Op basis van een veldstudie van een jaar hebben Ambrose, Baek en Carpenter nauwkeurig in kaart gebracht welke zelf uitgevonden algoritmen door leerlingen gebruikt worden voor typen opgaven die in het onderwijs wel met een zekere regelmaat aan de orde kwamen, maar zonder dat daar gerichte instructie over werd gegeven[10]. Tevens geven zij een aantal aanwijzingen of richtlijnen voor de wijze waarop in het onderwijs op deze algoritmen zou kunnen worden voortgebouwd. In hun onderzoek inventariseren zij de volgende vijf categorieën strategieën:

(1) Verdubbelen;
(2) Complexere vormen van verdubbelen;
(3) 'Opbouwen met andere factoren' (building up by other factors);
(4) De vermenigvuldiger splitsen in tientallen en eenheden;
(5) Zowel vermenigvuldiger als vermenigvuldigtal tientallig splitsen.

Bij (2) geven zij onder meer het voorbeeld van herhaald verdubbelen en handig combineren van subtotalen zoals door Dana uitgevoerd (zie fig. 3.11a). Bij (3) vormt verdubbelen het uitgangspunt, maar stapt de leerling al rekenend over op hogere factoren om de uit te voeren handelingen te bekorten. Een voorbeeld hiervan is de werkwijze van Bob (zie fig. 3.11b) die een oplossing bedenkt voor de opgave 'een school heeft 24 groepen; hoeveel kinderen zitten in totaal op die school als er in elke groep 32 kinderen zijn?' De leerling in kwestie verdubbelt eerst gewoon (32+32=64) maar bepaalt vervolgens een vijfvoud (32+32+32+32+32=160) en gebruikt de aldus verkregen 'factoren' om tot een oplossing te komen door vier keer een vijfvoud op te tellen, en daar nog eens twee keer 32 en een keer 64 aan toe te voegen.

Strategieën van het type (4) komen op een laag niveau grotendeels overeen met die van Bob uit de vorige categorie, bijvoorbeeld wanneer een leerling eerst via herhaald optellen 10 keer bepaalt, en op basis daarvan verder rekent. Zie het voorbeeld van John in fig. 3.12a. Op een hoger niveau wordt deze strategie uitgevoerd door 10



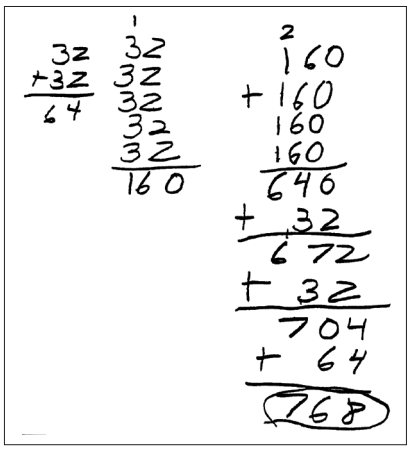
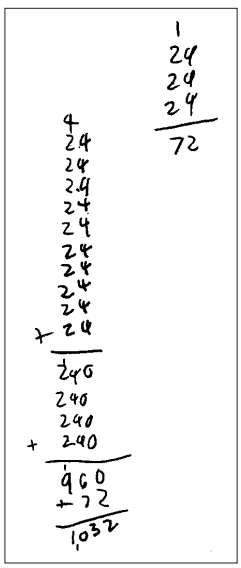
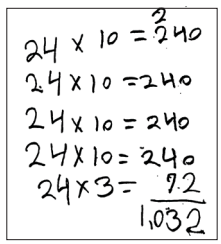


Fig. 3.11a en 3.11b: Twee voorbeelden van zelf uitgevonden algoritmen uit het onderzoek van Ambrose c.s. Linksboven de herhaald verdubbelen-strategie van Dana voor een probleem rond 47 groepen van 34 kinderen; linksonder de werkwijze van Bob bij een opgave rond 24 groepen van 32 kinderen waarbij wordt verdubbeld door op te bouwen met steeds grotere factoren.

keer te bepalen via vermenigvuldigen (en dus via gebruik van de nulregel). Zie het voorbeeld van Tim in fig. 3.12b. Een voorbeeld van een strategie van het type (5) tenslotte is de strategie van Sean in fig. 3.12c, waarbij de opgave '43 groepen van 24 kinderen' wordt opgelost door 43 in 40 en 3 te splitsen, en 24 in 20 en 4.





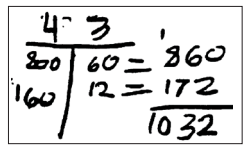


Fig. 3.12a, 3.12b en 3.12c: Nog drie voorbeelden van zelf uitgevonden algoritmen. Links en in het midden twee voorbeelden van strategieën (van resp. John en Tim) waarbij de vermenigvuldiger in tientallen en eenheden wordt gesplitst. Rechts de strategie van Sean waarbij beide getallen tientallig worden gesplitst.

Interessant aan deze indeling in categorieën van zelf gevonden oplossingsstrategieën is dat zij grotendeels overeenkomt met de categorieën in andere onderzoeken zoals dat van Murray e.a. (zie verderop in deze paragraaf) en met de categorieën die in het vooronderzoek werden gevonden dat aan het eigenlijke onderzoek in het kader van deze studie voorafging. Opmerkelijk is overigens wel dat in de beschrijving van Ambrose c.s. een categorie onjuiste strategieën ontbreekt die wel door Murray genoemd wordt en ook in andere onderzoeken veelal beschreven wordt, namelijk die waarbij beide getallen tientallig gesplitst worden en vervolgens onvolledig met elkaar vermenigvuldigd worden. Bijvoorbeeld: 43x24 uitrekenen door 40x20 en 3x4 te doen.

Van belang is verder een aantal opmerkingen die Ambrose c.s. maken over de wijze waarop in het onderwijs voortgebouwd zou kunnen worden op deze zelf gevonden algoritmen. Zo geven zij aan dat ze aanvankelijk het idee hadden dat verdubbelstrategieën tot op zekere hoogte wel effectief kunnen zijn, maar dat zulke strategieën geen perspectief bieden op meer geavanceerde, op decimaal splitsen berustende aanpakken en dat deze daarom als een doodlopende weg beschouwd dienen te worden. Leerlingen zoals Bob en John lieten echter zien dat dit niet juist is. Door namelijk tijdens het verdubbelen met (steeds) grotere factoren te gaan werken, kan deze oplossingswijze op een natuurlijke manier overgaan in de strategie waarbij de vermenigvuldiger decimaal gesplitst wordt. In dit creëren van grotere factoren ligt, aldus Ambrose c.s., dan ook een belangrijke sleutel voor de overgang van het additieve naar het multiplicatieve denken in het geval van situaties met meercijferige getallen. Verder merken zij op dat de strategie waarbij beide getallen decimaal gesplitst worden (zoals bij Sean), in principe abstracter is in de zin dat deze een hoger begripsniveau van het meercijferige vermenigvuldigen veronderstelt. Gezien vanuit de context immers (43 groepen van 24 kinderen) ligt een strategie waarbij het tweede getal als geheel wordt opgevat en het eerste getal wordt gesplitst, veel meer voor de hand dan een strategie waarbij beide getallen worden gesplitst. Sean maakt, aldus Ambrose c.s., beide getallen los uit de specifieke context en bewerkt ze onafhankelijk daarvan. Tenslotte maken zij nog een opmerking over het gebruik van de commutatieve eigenschap. Zij constateerden dat, ondanks het feit dat veel van de leerlingen wel in staat waren een opgave als 24x10 vlot op basis van de nulregel uit te rekenen, dit niet gold voor een opgave als 10x24. Zij doorzagen niet dat deze opgave via verwisselen van beide termen eenvoudig herleid kan worden tot 24x10. Het zou kunnen zijn dat nogal wat leerlingen mede daardoor betrekkelijk veel hun toevlucht namen tot verdubbelstrategieën. Ook in verband met het creëren van een goede

basis voor leerstofdomeinen die later aan de orde komen (zoals vermenigvuldigen met breuken en kommagetallen, en met algebraïsche vormen), lijkt het Ambrose c.s. in ieder geval aan te raden om bij de verkenning van het meercijferige vermenigvuldigen van tijd tot tijd ook situaties met een rechthoekstructuur op te nemen zodat de commutatieve eigenschap uitgebreid over het voetlicht kan komen.

Al met al levert dit onderzoek waardevolle aanwijzingen voor het onderhavige onderzoek op. Een leertraject dat mikt op het door leerlingen laten inzetten van eigen, informele oplossingsstrategieën, zal in ieder geval aandacht moeten besteden aan te verwachten vormen van verdubbelen, herhaald verdubbelen e.d. Verder zal het mogelijkheden moeten aanreiken om, in de terminologie van Ambrose c.s., met grotere factoren te gaan werken. Ook lijkt het aan te bevelen om aandacht aan de nulregel te besteden en bewust te maken waarom het uitrekenen van opgaven als 10x24 eigenlijk heel simpel is. Tenslotte lijkt het aan te bevelen om in het traject naast situaties met een groepjesstructuur (zoals die rond het klassenprobleem) ook regelmatig situaties met een rechthoekstructuur op te nemen.

Deze aanbevelingen sporen overigens in hoge mate met de didactische benadering die al eerder door een Amerikaanse leraar/onderzoeker, M. Lampert, in de eigen klas werd ontwikkeld (Lampert, 1986). Zij betoogt dat het belangrijk is dat leerlingen leren om zich iets voor te stellen bij formele opgaven zoals 82x352, en dat zulke voorstellingen er in hoge mate toe kunnen bijdragen dat er inzichtelijke oplossingswijzen ontwikkeld worden die dicht aansluiten bij de eigen intuïtieve ideeën van leerlingen. Zij beschrijft hoe de hierboven genoemde opgave verbonden kan worden met een situatie als: er worden 82 nieuwe flatgebouwen gebouwd en in elk gebouw komen 352 appartementen; hoeveel appartementen zijn dat in totaal? De leerlingen kan gevraagd worden, aldus Lampert, om bij deze situatie schematisch-visuele voorstellingen te bedenken waardoor 82x352 betekenis krijgt als '82 groepjes van 352'. Een voor de hand liggende strategie is dan om de 82 groepjes op te delen in 8 grote groepen van 10x352 en nog 2 gewone groepjes van 352, en ook dit kan weer visueel gerepresenteerd worden. Op basis daarvan kan vervolgens de uitkomst van de opgave als volgt bepaald worden (zie fig. 3.13). Naderhand kan deze strategie verkort worden om uiteindelijk getransformeerd te worden tot het gangbare cijferalgoritme, aldus Lampert. Juist door de leerlingen veel ervaring te laten opdoen met het zelf creëren van visuele voorstellingen op verschillende abstractieniveaus, zo stelt zij, kan bevorderd worden dat ze steeds efficiëntere werkwijzen ontwikkelen.

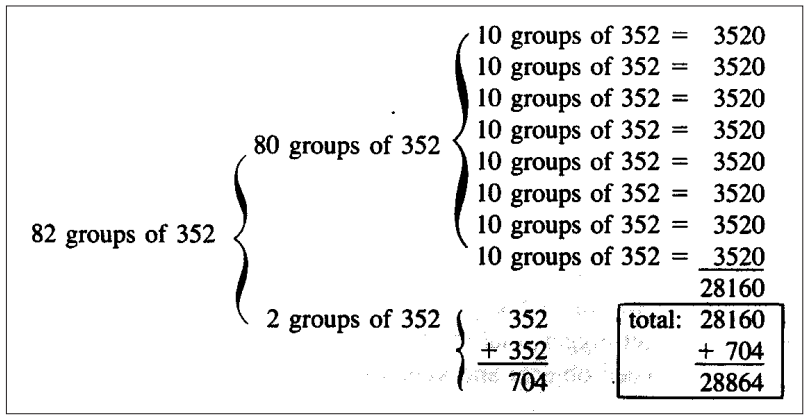


Fig. 3.13: Oplossingswijze voor de opgave 82x352 door deze op te vatten als '82 groepen van 352' en door deze groepen onder te verdelen in 8 keer 10 groepen van 352 en nog 2 groepen van 352 (afbeelding afkomstig uit Lampert, 1986, p. 242).

3.4.2 Fosnot en Dolk: Young mathematicians at work

Het tweede grote onderzoek dat hier besproken wordt betreft het onderzoek van Fosnot en Dolk (2001a; 2001b; 2003). Dit onderzoek, dat net als het vorige sterk is geïnspireerd op de socio-constructivistische onderwijsfilosofie die in het vorige hoofdstuk reeds is aangeduid, richt zich anders dan dat van Ambrose c.s. niet zozeer op het in kaart brengen van informele oplossingsstrategieën en op het aanreiken van mogelijkheden om hierop voort te bouwen, maar meer op het ontwikkelen van een voorbeeldmatige onderwijsomgeving waarbinnen leerlingen hun eigen wiskunde kunnen construeren.

Om het beoogde onderwijsleerproces te typeren, gebruiken zij de metafoor van de reis die door de leerlingen ondernomen wordt onder begeleiding van de leraar. De taak van deze leraar is niet zozeer om instructie te geven en leerlingen naar beoogde leerdoelen in de zin van te verwerven procedures te leiden, maar meer om de globale route uit te stippelen waarlangs de reis zich beweegt, en om het 'reizen' van de leerlingen te vergemakkelijken. Om dat adequaat te kunnen doen, heeft de leraar kennis nodig van wat Fosnot en Dolk het leerlandschap noemen, dat wil zeggen het geheel aan contextproblemen, modellen, strategieën en wiskundige kernideeën die zij als belangrijke bakens in het landschap zien waar de reis langs voert.

Een centraal aspect van die reis wordt gevormd door de samenwerking en onderlinge communicatie van leerlingen en door de gezamenlijke uitwisseling van ideeën,

strategieën, en dergelijke. De leraar richt zich in deze benadering dan ook in sterke mate op het 'faciliteren' en stimuleren van die communicatie. Zo worden leerlingen ertoe aangemoedigd om hun ideeën en strategieën zodanig weer te geven (onder andere op posters) dat deze voor de andere 'deelnemers' aan de 'reis' optimaal te begrijpen zijn en dat communicatie mogelijk wordt waarmee gezamenlijke kennis tot stand komt. Dit spoort in hoge mate met het idee van socio-constructivisme zoals door Cobb e.a. gepropageerd (Cobb, Yackel & Wood, 1992) waarbij de klas gezien wordt als een wiskundige gemeenschap die zich sterk richt op het creëren van een gemeenschappelijke kennisbasis van 'gedeelde' betekenissen, interpretaties en praktijken. Een kernactiviteit in de door Fosnot en Dolk beschreven onderwijsbenadering wordt gevormd door het 'wiskunde-congres' dat met een zekere regelmaat gehouden wordt om tot gezamenlijke uitwisseling en verdere constructie van wiskundige kennis te komen. De leraar vervult hierbij een cruciale rol doordat hij/zij de leerlingen niet alleen richt op het verhelderen en beschrijven van eigen ideeën en aanpakken, maar ook op het door de leerlingen laten 'rechtvaardigen' van zulke aanpakken en op het beargumenteren van de juistheid ervan. In de socio-constructivistische opvatting vormen dit essentiële elementen in de totstandkoming van gedeelde wiskundige kennis (Yackel, 2001).

Het idee van het wiskunde-congres is overigens ook in Duitsland beproefd door Selter (1998), maar dan in een iets andere vorm doordat de leerlingen daar eerst individueel hun aanpakken in een soort wiskundedagboek beschreven en deze vervolgens in kleine groepjes van drie tot vijf leerlingen onderling uitwisselden zonder verdere tussenkomst van de leraar. Bovendien werden de leerlingen in de betreffende experimenten op een zeker moment ook geconfronteerd met bepaalde geavanceerde oplossingsstrategieën van (al dan niet denkbeeldige) andere leerlingen zodat er een zekere progressie in de richting van beoogde strategieën tot stand kwam. Een dergelijke aansturing lijkt bij Fosnot en Dolk grotendeels te ontbreken.

Net als Selter nemen Fosnot en Dolk overigens de realistische onderwijsbenadering expliciet als uitgangspunt. In de wijze waarop zij het proces van progressieve mathematisering gestalte proberen te geven, leggen zij verder de nadruk op enkele andere zaken. Belangrijk is bijvoorbeeld de activiteit van het modelleren waarbij leerlingen een contextprobleem zodanig schematisch weergeven dat er een modelmatige afspiegeling ontstaat waarmee het probleem opgelost kan worden. Dit komt in hoge mate overeen met het idee van Lampert van het creëren van visuele voorstellingen bij een opgave zoals dat hierboven is aangeduid. Juist in het construeren van model-

matige voorstellingen, aldus Fosnot en Dolk, ligt een essentiële wiskundige activiteit besloten omdat leerlingen zich daarmee een mogelijkheid verschaffen om hun eigen wiskunde verder op te bouwen. Zie voor een voorbeeld van zo'n zelf gecreëerde visuele voorstelling fig. 3.14.

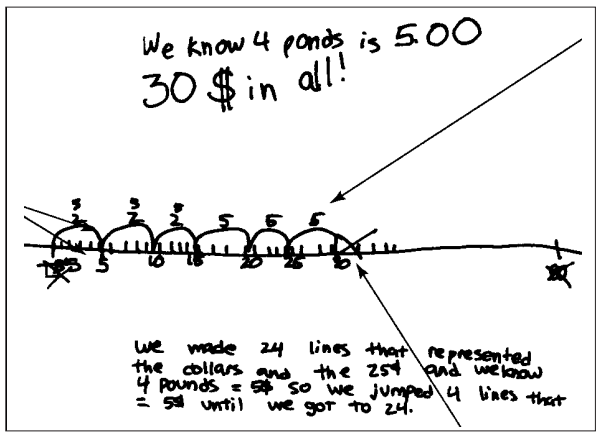


Fig. 3.14: Voorbeeld van een op de lege getallenlijn gerepresenteerde oplossingswijze van twee leerlingen. Zij gebruiken een soort dubbele getallenlijn bij de oplossing van het probleem: 1 pond kalkoen kost $ 1,25; hoeveel betaal je voor een kalkoen van 24 pond? (Voorbeeld afkomstig uit Cameron, Hersch en Fosnot, 2005, p. 10)

Verder leggen Fosnot en Dolk veel nadruk op het door de leerlingen verwerven van inzicht in 'big ideas', dat wil zeggen in wiskundige kernideeën in de vorm van structuren, eigenschappen en relaties die niet alleen op de kortere termijn ondersteunend werken voor het ontwikkelen van efficiënte oplossingsstrategieën en dergelijke, maar die ook op de langere termijn van groot belang zijn omdat ze voor de hele verdere wiskundige ontwikkeling als sleutelbegrippen beschouwd moeten worden. Voor wat betreft het vermenigvuldigen noemen zij een vijftal van zulke kernideeën:

- bundelen ('unitising')
- distributiviteit
- associativiteit
- commutativiteit
- rechthoekspatronen begrijpen

Bundelen verwijst naar het kunnen opvatten van een groep objecten als een grotere eenheid waarmee handig geteld en gerekend kan worden, zoals in het geval

van bundelen in groepen van vijf en van tien. Ook bij vermenigvuldigen speelt dit idee een grote rol, aldus Fosnot en Dolk, doordat leerlingen leren een verzameling objecten op te vatten als bijvoorbeeld 4 groepen van 6 objecten, en dus als 4x6. Distributiviteit betrekken zij niet alleen op elementaire situaties waarin een opgave als 9x5 wordt uitgerekend door deze te 'verdelen' in 5x5 en nog 4x5, maar ook op situaties met grotere getallen waarbij bijvoorbeeld 12x13 wordt uitgerekend via 2x3, 2x10, 10x3 en 10x10. Associativiteit wordt vooral verbonden met situaties waarin sprake is van meerdere vermenigvuldigfactoren, zoals bij een bouwsel dat bestaat uit 5 verdiepingen met op elke verdieping 2 keer 3 rijen blokken, terwijl commutativiteit verbonden wordt met elementaire situaties waarin blijkt dat 5 keer 3 ook opgevat kan worden als 3 keer 5. Het doorzien van zulke eigenschappen wordt bevorderd met behulp van rechthoekspatronen ('arrays'), en Fosnot en Dolk zien het begrijpen van zulke rechthoekspatronen eveneens als een wiskundig kernidee.

Er is in hun opvatting overigens sprake van een wisselwerking tussen strategieën en wiskundige kernideeën. Zo kan het gebeuren dat zo'n kernidee geconstrueerd wordt doordat leerlingen een strategie verkennen en onderzoeken waarom deze al dan niet correct is. Maar het omgekeerde komt ook voor. Dat is bijvoorbeeld het geval als een reeds bekend wiskundig kernidee wordt gebruikt om te onderzoeken of een strategie al dan niet correct is. Het voorbeeld wordt gegeven van leerlingen die zich afvragen of het uitrekenen van een opgave als 16x16 via 10x10 en 6x6 wel juist is. Door het rechthoekspatroon erbij te nemen en de opgave in termen daarvan weer te geven, achterhalen ze dat dit niet het geval is (zie fig. 3.15).

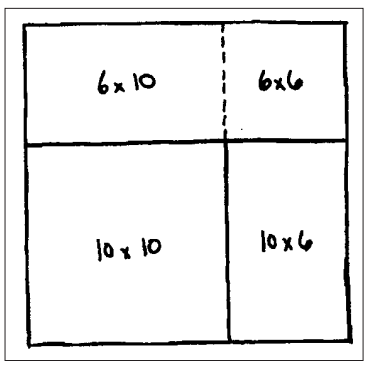


Fig. 3.15: Tekening van een rechthoekspatroon waarmee twee leerlingen onderbouwen dat de oplossing van 16x16 via 10x10 en 6x6 niet correct is doordat nog twee factoren (6x10 en 10x6) ontbreken. (afkomstig uit Fosnot en Dolk, 2001b, p. 44).

Enigszins onduidelijk blijft hierbij overigens op welke wijze dit rechthoekspatroon de status van model heeft gekregen. In eerste instantie zou dit moeten gebeuren door het modelleren van situaties met een rechthoekstructuur (de model-van-fase, in de

terminologie van Streefland e.a.) waarna het resultaat daarvan op een zeker moment ook als 'model-voor' moet gaan fungeren bij het oplossen van allerlei opgaven met andere structuren. In Cameron, Hersch en Fosnot (2005) wordt beschreven hoe dit laatste gebeurt bij het uitrekenen van de opgave 'een kalkoen van 24 pond kopen als de prijs per pond $ 1,25 is'. In de tekst, bedoeld voor de leraar als aandachtspunt bij het 'faciliteren' van de betreffende activiteit, wordt aangegeven dat het rechthoek-model gebruikt kan worden om leerlingen, die op eigen initiatief het standaardalgoritme gebruiken maar eigenlijk niet doorzien waarom dit een correcte aanpak is, een mogelijkheid te bieden om het waarom achter deze aanpak beter te doorgronden. Daarbij wordt de volgende afbeelding gegeven (zie fig. 3.16). Men kan zich afvragen of dit niet een nogal hoog gegrepen vorm van modelgebruik is en of het model in een dergelijke situatie niet enigszins uit de lucht komt vallen.

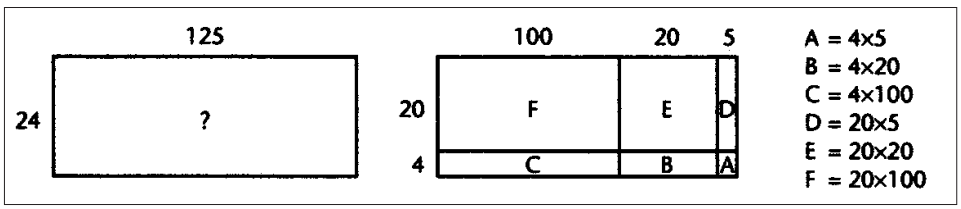


Fig. 3.16: Beschrijving van de wijze waarop verklaard kan worden waarom het standaardalgoritme een correcte aanpak is (afkomstig uit Cameron, Hersch en Fosnot, 2005, p. 3)

Een vraag die deze constructivistische onderwijsbenadering ook enigszins oproept is de vraag wat de leraar te doen staat in het geval een leerling uit zichzelf niet zo goed in staat blijkt om enigermate efficiënte strategieën te construeren, en daar ook niet toe komt op grond van wat hij of zij andere leerlingen ziet doen en beschrijven.

Al met al levert dit onderzoek enkele waardevolle aanwijzingen op voor bepaalde aspecten van het eigen onderzoek naar het meercijferige vermenigvuldigen. Zo wordt door Fosnot en Dolk op overtuigende wijze het belang onderstreept van een goede communicatie tussen leerlingen onderling, en tussen leraar en leerlingen. Dit geldt in het bijzonder voor een onderwijsleerproces dat beoogt voort te bouwen op de informele (hoofd)rekenstrategieën van leerlingen. De mogelijkheden die zij schetsen om leerlingen expliciet hun strategieën te laten beschrijven door middel van posters die het uitgangspunt vormen voor gezamenlijke besprekingen en doordenkingen, lijken veelbelovend. Ook het belang dat gehecht wordt aan het onderbouwen van strategieën en aan het beargumenteren van de correctheid daarvan, lijkt

van grote waarde om tot een proces van volwaardige wiskundige kennisverwerving te komen. Tenslotte biedt het werken met wiskundige kernideeën aanknopingspunten in de zin dat dit ertoe lijkt te kunnen bijdragen om leerlingen een beter inzicht in strategieën te doen verwerven, en dus ook om het beoogde proces van verkorting en niveauverhoging op basis van eigen inbreng van leerlingen, succesvol te doen verlopen. Een aandachtspunt daarbij vormt het feit dat het in de eerste plaats belangrijk lijkt om de leraar ervan te overtuigen dat het waardevol is om in het onderwijs een zekere nadruk op zulke kernideeën te leggen.

3.4.3 Murray, Olivier en Human: Problem-centered learning

In de door deze Zuid-Afrikaanse onderzoekers beschreven benadering (Murray, Olivier en Human, 1992; 1994; 1997) is het onderwijs sterk gericht op het werken aan betekenisvolle problemen door leerlingen, op het zelf bedenken en overdenken van oplossingsstrategieën en op het verwerven van een goed begrip van de wiskunde die besloten ligt in deze activiteiten. Men gaat ervan uit dat leerlingen bij binnenkomst in de school veelal een houding hebben waarbij ze geneigd zijn om op de eigen denkkracht ('power of thought') te vertrouwen, en dat het bestendigen van deze houding het voornaamste is dat in het onderwijs dient te gebeuren. Dat kan, aldus Murray c.s., door aan te sluiten bij de eigen intuïtieve ideeën en informele werkwijzen van leerlingen, en door leerlingen gelegenheid te geven om deze ideeën en werkwijzen in het onderwijs verder uit te bouwen. In de praktijk betekent dit dat de standaardprocedures van het cijferen niet of slechts zijdelings aan de orde komen. Voorwaarden voor leerlingen om tot een zeker acceptabel oplossingsniveau te komen, hebben naar het idee van Murray c.s. vooral betrekking op drie zaken, te weten een goed begrip van getallen, een besef van bepaalde bewerkingseigenschappen (zoals bij het vermenigvuldigen de distributieve eigenschap) en kennis van basale rekenfeiten (zoals de tafels van vermenigvuldiging). In hun benadering is het centrale doel van het onderwijs niet zozeer gelegen in het verwerven van efficiënte oplossingsprocedures. Veeleer is dit vooral een middel om andere doelen te bereiken die begripsmatig van aard zijn: begrip van getallen, van bewerkingen en bewerkingseigenschappen, begrip van algoritmisch denken als proces, en begrip van de toepasbaarheid van procedures. Zij bouwen in deze opvatting onder meer voort op de Franse onderzoeker Vergnaud die het gebruik van 'stellingen-in-actie' (theorems-in-action) als een belangrijk aspect van het wiskundig leerproces onderscheidt: wiskundige wetmatigheden en eigenschappen die vaak impliciet een rol spelen in het oplossingsproces (zoals de commutatieve eigenschap en de distributieve eigenschap) maar die voor de verdere progressie van leerlingen op de lange termijn van grote waarde zijn[11] (Vergnaud, 1983; 1988).

Ook de rol van de leraar dient in de visie van Murray c.s. anders van aard te zijn dan in het gangbare onderwijs het geval is. Deze dient eigenlijk maar weinig te interveniëren in de activiteiten waarmee kinderen individueel of in kleine groepjes bezig zijn. Zijn of haar rol is er vooral op gericht om een onderwijsomgeving te creëren waarbinnen leerlingen persoonlijk betekenisvolle kennis kunnen construeren. Belangrijk daarbij is dat de sociale interactie en communicatie tussen leerlingen gestimuleerd wordt, en dat intensieve uitwisseling van eigen ideeën en aanpakken plaatsvindt met het oogmerk om leerlingen van elkaar te laten leren en tot opbouw van gemeenschappelijke kennis te laten komen.

Voor wat betreft het vermenigvuldigen van meercijferige getallen hebben zij onderzocht welke strategieën leerlingen gebruiken die gedurende vijf jaar onderwijs volgens de beschreven benadering gevolgd hebben. Het doel was daarbij om na te gaan welke typen strategieën zich voordoen, hoe effectief die zijn, en in hoeverre de betreffende leerlingen er blijk van geven nog altijd te beschikken over een houding waarbij vertrouwd wordt op eigen denkkracht. Om dit te achterhalen, legden zij een groep van 226 leerlingen, verdeeld over drie scholen, onder meer de volgende opgave voor: Mevrouw Schreuder maakt schooltasjes voor de leerlingen. Ze gebruikt 27 cm band voor elk tasje. Ze krijgt een opdracht voor 35 tasjes. Hoeveel cm band heeft ze nodig?

In hun inventarisatie van alle door de leerlingen gedemonstreerde strategieën onderscheiden zij de volgende typen strategieën:
(1) decimaal splitsen van beide getallen: via 20x30, 20x5, 7x30 en 7x5;
(2) strategieën waarbij een van beide getallen gesplitst wordt. Bijvoorbeeld: rekenen via 27x30 en 27x5; of via 10x35, 10x35, 4x35 en 3x35;
(3) splitsen van het ene getal en naderhand splitsen van het andere getal: bijvoorbeeld via 20x35, 7x30 en 7x5;
(4) herhaald verdubbelen: bijvoorbeeld door 3x35 en nog eens 3x35 op te tellen (210), het totaal te verdubbelen (420) en nog eens te verdubbelen (840), en daar nog eens 3x35 bij op te tellen (840+105 is 945)[12];
(5) omvormen van een der getallen en dan compenseren: bijvoorbeeld door 10x35 te doen (350), dat keer 3 (1050), en daar 3x35 vanaf te trekken;
(6) de standaardprocedure van het cijferen;
(7) strategieën die niet te ontcijferen zijn.

Verder wordt er één type 'logische vergissing'-strategie onderscheiden (logical error), namelijk de strategie waarbij het splitsen onvolledig wordt uitgevoerd door 27x35 via 20x30 en 7x5 uit te rekenen. In hun beschrijving geven Murray c.s. een tabel met een frequentieverdeling in procenten met betrekking tot het optreden van deze verschillende typen strategieën (zie fig. 3.17).

Table 1: Multiplication-type problem frequency distribution (%)

Strategies	1	2	3	4	5	6	7	Logical error
School A (n=94)	29	53	9	0	1	2	2	4
School B (n=79)	43	33	8	0	0	1	1	14
School C (n=53)	47	34	6	2	0	11	0	0

Fig. 3.17: Tabel met de relatieve frequentie van het optreden van de zeven typen strategieën bij de opgave rond de schooltasjes (35x27; afkomstig uit Murray, Olivier en Human, 1994, p. 400)

Uit deze tabel kan dus geconcludeerd worden dat de strategie waarbij beide getallen gesplitst worden (deze zal verderop in deze studie omschreven worden als de AS-strategie, 'Alles Splitsen'), door 29% van de leerlingen in school A, 43% van de leerlingen in school B, en 47% van de leerlingen in school C werd gebruikt. Evenzo wordt de strategie waarbij een van beide getallen gesplitst wordt, door 53% van de leerlingen in school A gebruikt, door 33% van de leerlingen in school B, en door 34% van de leerlingen in school C. Enzovoorts. Op het eerste gezicht lijkt uit deze tabel geconcludeerd te kunnen worden dat er bij het gebruik van de verschillende typen strategieën in het geheel geen fouten door leerlingen gemaakt zijn met uitzondering van de 'logical error-strategie'. In hoeverre dit daadwerkelijk het geval is, is niet duidelijk.

Dat een groot deel van de leerlingen nog altijd hun zelf uitgevonden strategieën gebruiken en niet de standaardprocedure van het cijferen, zien Murray c.s. als een aanwijzing dat deze leerlingen een houding gericht op het vertrouwen op eigen denkkracht behouden hebben, en dat de 'problem centered classroom-culture' nog altijd intact is. Leerlingen die wel het standaardalgoritme gebruiken, doen dit naar hun idee vooral als gevolg van invloeden van thuis, of doordat ze afkomstig zijn van andere scholen.Verschillen tussen de scholen onderling kunnen vooral toegeschreven worden aan de invloed die de betreffende klassen als 'gemeenschap van beoefenaars van wiskunde' op het individuele denken van leerlingen uitoefenen.

Voorts stellen Murray c.s. vast dat alle gebruikte strategieën ongeveer van hetzelfde niveau zijn voor wat betreft het gebruik van getalrelaties en bewerkingseigenschappen zoals de distributieve eigenschap[13]. Wel constateren zij grote verschillen tussen leerlingen binnen een categorie strategieën, dat wil zeggen voor wat betreft de manier waarop individuele leerlingen zo'n strategie hanteren. Dergelijke verschillen zijn toe te schrijven aan verschillen in begrip van getallen, en verschillen in kennis van basisfeiten. Omdat het gebruik van een bepaalde strategie de eigen keuze en voorkeur van een leerling weerspiegelt, mag ervan uit worden gegaan dat hij of zij deze strategie ook echt begrijpt, aldus Murray c.s. In de praktijk van het onderwijs, zo constateren zij verder, zal de beoogde benadering lang niet altijd even zuiver uitgevoerd worden, en zal er sprake zijn van compromissen als gevolg van het niet helemaal accepteren of begrijpen door leraren van de basisprincipes van de beoogde benadering. Het optreden van de 'logical error'-fout zien zij dan ook vooral als een gevolg van zulke compromissen. Een van de meest gebruikelijke compromissen betreft wat zij noemen 'het gebrek aan vertrouwen van leraren in het vermogen van vooral zwakkere leerlingen om zelf efficiënte strategieën te construeren', met als resultaat dat zij zulke leerlingen veel gerichter naar een bepaald type strategie toe leiden. Tenslotte wijzen zij erop dat het niet alleen de aard en de kwaliteit van de door leerlingen gebruikte strategieën is die in hoge mate mede bepaald wordt door de genoemde klasse-cultuur, maar ook de gebruikte notatievormen. Meer formele notatiewijzen kunnen in een klas die als wiskundige gemeenschap fungeert, heel goed het resultaat zijn van een logische en natuurlijke ontwikkeling waarbinnen bepaalde beslissingen over het gebruik van een notatie door de gemeenschap overwogen en gerechtvaardigd zijn.

Over de wijze waarop leraren vertrouwd gemaakt werden met de benadering van 'problem centered learning' en over de aanwijzingen die zij kregen bij het ten uitvoer brengen van deze benadering, geven Murray c.s. maar weinig informatie. Onduidelijk blijft dus of leraren, net als bij de beide andere hierboven geschetste benaderingen, verondersteld werden in belangrijke mate zelf het beoogde leertraject uit te stippelen, en in hoeverre zij eventueel extra ondersteuning boden aan zwakkere leerlingen. Ook blijft onduidelijk, zoals hierboven reeds is aangegeven, of de door hen beschreven oplossingsstrategieën foutloos werden uitgevoerd. Afgaande op wat andere onderzoekers hierover rapporteren (zie bijvoorbeeld: Foxman en Beishuizen, 2003), zou verwacht mogen worden dat het gebruik van een strategie als die waarbij beide getallen gesplitst worden, nogal eens fouten oplevert doordat bijvoorbeeld nullen te veel of te weinig genoteerd worden. Maar Murray c.s. melden daar niets over.

Dat neemt niet weg dat hun onderzoek waardevolle aanwijzingen voor de onderhavige studie oplevert. Zo geeft hun overzicht van strategieën belangrijke aanwijzingen over wat er op dit gebied te verwachten valt aan het einde van een onderwijsleertraject waarbij aansluiting bij en voortbouwen op eigen informele strategieën van leerlingen een centraal uitgangspunt vormt – een mooie aanvulling op het overzicht dat Ambrose c.s. geven voor wat betreft te verwachten informele strategieën aan het begin van het onderwijsleerproces. Interessant daarbij is overigens dat de strategie die zij als herhaald verdubbelen omschrijven, verwantschap vertoont met de strategie die door Ambrose c.s. wordt aangeduid met verdubbelen en opbouwen met andere factoren. Waardevol lijkt verder dat door hen net als door Fosnot en Dolk het optreden wordt gesignaleerd van een onjuiste maar niettemin regelmatig voorkomende strategie waarbij het splitsen onvolledig plaatsvindt – de strategie waarbij een opgave als 27x35 wordt uitgerekend door 20x30 en 7x5 te doen. Wellicht dat de conclusie dat deze strategie voor een belangrijk deel kan worden toegeschreven aan het niet goed door leraren uitvoeren van de beoogde benadering, wat voorbarig is.

3.4.4 Reflectie: kritische bezinning op de (on)mogelijkheden van de constructivistische benadering

Hoewel er in de hierboven beschreven drie onderzoeken een onderwijsbenadering wordt voorgestaan die in bepaalde opzichten verschillen vertoont, is er toch een zeer duidelijke verwantschap. Deze benadering kan in z'n algemeenheid getypeerd worden als een constructivistische benadering en komt tot uitdrukking in zaken als:

- Gerichtheid op het werken met betekenisvolle contextproblemen als uitgangspunt voor het onderwijs, en op het door leerlingen zelf construeren van oplossingen voor deze problemen;
- Nadruk op het 'delen' van kennis door leerlingen in de zin van gezamenlijke uitwisseling en doordenking van ideeën en strategieën, en op het gezamenlijk construeren van kennis op basis daarvan;
- Een belangrijke rol voor de leraar als degene die het beoogde onderwijsleertraject voor een aanzienlijk deel zelf uitstippelt op basis van een goede kennis van het betreffende leerstofdomein en die vooral een begeleidende en stimulerende taak heeft bij het bevorderen van onderlinge communicatie;
- Weinig nadruk op instructievormen waarbij de leraar zelf uitleg geeft, zelf voor aansturing in de richting van beoogde verkortingen of niveauverhoging zorgt, of zelf voor bijsturing zorgt in het geval een leerling op een 'doodlopende weg' belandt doordat een omslachtige of onjuiste strategie gehanteerd wordt;

- Veel aandacht voor het verwerven van inzicht door leerlingen en op het doorzien van wiskundige kernideeën die leerlingen verondersteld worden in de loop van het onderwijsleerproces steeds beter te gaan doorzien.

Zoals Fosnot en Dolk ook expliciet aangeven, vertoont deze benadering op zich een duidelijke verwantschap met de realistische onderwijsbenadering die in hoofdstuk 2 is beschreven en die in het onderhavige onderzoek naar het meercijferige vermenigvuldigen het uitgangspunt vormt. Er lijken in deze constructivistische benadering zeker waardevolle elementen te schuilen die in het onderhavige onderzoek een plaats kunnen krijgen. Daarbij wordt immers gezocht naar een onderwijsleertraject waarbinnen eveneens aangesloten wordt op de eigen intuïtieve ideeën en informele aanpakken van leerlingen, en waarbij deze mede het vertrekpunt voor progressieve mathematisering vormen. Toch lijkt de constructivistische benadering ook haar grenzen te hebben – grenzen die enerzijds vooral te maken hebben met de randvoorwaarden waaronder het beoogde onderwijs kan gedijen. Zo kan men zich afvragen of deze onderwijsbenadering in de praktijk wel zo goed te realiseren is, zeker als overwogen wordt dat klassen in de gangbare praktijk toch al gauw uit zo'n 20 tot 25 leerlingen bestaan en dat de verschillen tussen leerlingen soms groot zijn. Het tot stand brengen en gaande houden van de gewenste communicatie op basis van zelf bedachte werkwijzen en ideeën lijkt een sterk beroep te doen op vaardigheden waarover leerlingen én leraar bepaald niet zonder meer beschikken. Ook rijst de vraag of het soort van kennis van theoretische uitgangspunten en didactische werkwijzen dat leraren verondersteld worden te hebben, wel zo makkelijk te verwerven is. En verder kan men zich afvragen hoe effectief deze vorm van onderwijs buiten de experimentele setting van het onderzoek is. Bereiken alle leerlingen een acceptabel niveau van vaardigheid? Wat doet de leraar in het geval een deel van de leerlingen nauwelijks of geen progressie lijkt te boeken? Voor welke benadering in het onderhavige onderzoek ook gekozen wordt, het lijkt in ieder geval aan te bevelen om de resultaten van het uit te voeren onderwijsexperiment nauwkeurig in kaart te brengen, zowel qua goedscores als qua aanpakgedrag, en dan bij voorkeur op verschillende tijdstippen tijdens het onderwijsleerproces. Ook lijkt het nuttig om te kiezen voor een betrekkelijk ruime, gevarieerde leerlingenpopulatie in uiteenlopende soorten scholen.

Daarnaast is er nog een andere kwestie van meer psychologische aard die de aandacht vraagt. Deze heeft te maken met de veranderende rol van de leraar en het feit dat het initiatief voor de progressie in het leerproces meer bij de leerlingen en minder

bij de leraar lijkt komen te liggen. Om deze kwestie nader te verduidelijken, neem ik een voorbeeld van een praktische onderwijsleersituatie zoals die beschreven wordt in een invloedrijk artikel waaraan onderzoekers van twee van de drie hierboven beschreven onderzoeken een bijdrage hebben geleverd. Het betreft een artikel uit het Amerikaanse tijdschrift Educational Researcher (Hiebert, Carpenter, Fennema, Fuson, Human, Murray, Olivier en Wearne, 1996) waarin de auteurs een pleidooi houden voor een vorm van onderwijs die gericht is op het 'problematiseren' van wiskunde en op het ontwikkelen van inzicht door leerlingen. Hoewel de auteurs deze term niet expliciet gebruiken, lijkt de door hen voorgestane benadering voor een belangrijk deel op constructivistische leest geschoeid te zijn. Centraal in deze benadering staat het door de leerlingen oplossen van wiskundige problemen, het zelf bedenken van oplossingsstrategieën, het onderling uitwisselen van ideeën en strategieën, en het beargumenteren van de (on)juistheid van strategieën. Een belangrijke plaats in het artikel wordt ingenomen door een voorbeeld van een praktische onderwijsleersituatie die betrekking heeft op een aftrekking onder de 100 en die ik hieronder letterlijk overneem (Hiebert e.a., 1996, p. 13):

De klas van mevrouw Hudson (een groep 4) bevindt zich in een stadsschool met een grote latino populatie. Voorafgaand aan de les van vandaag, in januari, hebben de leerlingen gewerkt aan optel- en aftrekopgaven waarbij ze hun eigen oplossingsstrategieën ontwikkeld hebben. Sommige leerlingen hebben tientallig materiaal gebruikt zoals stokjes met 10 stippen erop. Het probleem van vandaag hield in dat het verschil in lengte uitgezocht moest worden tussen Jorge en Paulo die respectievelijk 62 inches en 37 inches lang zijn. Nadat de meeste leerlingen een oplossing uitgewerkt hadden, vroeg mevrouw Hudson naar vrijwilligers die hun oplossingswijze wilden delen.

Gabriela, de eerste leerling die wilde delen, had het probleem opgelost via doortellen van 37 naar 62. In dat proces telde ze met sprongen van 1 en van 10, waarbij ze greep op het tellen hield door losse stippen te tekenen die de eenheden voorstelden, en staafjes die de tientallen voorstelden. Ze telde eerst door van 37 naar 40, daarbij drie stippen tekenend. Daarna telde ze van 40 tot 60 door met sprongen van 10 te tellen, waarbij ze twee staafjes tekende om de twee tientallen te laten zien. Tenslotte telde ze door tot 62 waarbij ze nog twee stippen tekende. Ze beschreef haar oplossing als volgt:

Gabriela: 'Ik zei, 'Hoeveel moet Paulo groeien?'. Dus 37 plus 3 (wijst naar de drie stippen) is 38, 39, 40, en dan 50 (wijst naar een 10-staafje), 60 (wijst naar nog een 10-staafje), 61, 62 (wijst naar nog twee stippen). Dus dat is nog 23, 24, 25 dat hij moet groeien.'
Mevr. Hudson: 'OK. Roberto?'
Roberto had eerst een plaatje van Jorge en Paulo getekend en daarbij een horizontale lijn van de

bovenkant van Paulo's hoofd naar Jorge getrokken. Daarna had hij 6 10-staafjes getekend en 2 stippen om 62 weer te geven. Hij haalde 37 weg door eerst drie staafjes weg te strepen om er 30 af te halen. Daarna zette hij een streepje op het vierde staafje op ongeveer drietiende van de lengte daarvan en schreef een kleine 7 onder het streepje om de weggehaalde 7 te laten zien, alsmede een 3 boven het streepje om te laten zien dat er 3 over waren. Daarna combineerde hij de 3 boven het streepje, de 2 stippen en de resterende 2 staafjes en kwam tot 25. Dit is wat Roberto zei:

Roberto: 'Ik liet de grote man krimpen door de kleine man van hem af te trekken (wijst naar z'n tekening van Paulo en Jorge). Ik haalde 3 tienen van de 6 tienen af en 7 van deze tien (wijzend naar z'n vierde staafje). Dan blijven deze 3 en 2 over, dat is 5 en 2 tienen dat is 25.'
Mevr. Hudson: 'OK. Nu ga ik Jose vragen hoe hij het deed.'

Jose had aangevuld van 37 naar 62 gebruikmakend van een combinatie van genoteerde getallen en tekeningen ter ondersteuning. Hij had op een enkele regel 37 genoteerd, daarna 3 (zodat hij bij 40 kwam), daarna 2 staafjes (zodat hij bij 60 kwam), daarna 2 (zodat hij bij 62 kwam). Daarna keek hij terug en combineerde de 3, de twee staafjes en de 2 tot 25.
Jose: 'Ik deed het net als Gabriela, maar ik schreef 3 en toen mijn 10-staafjes en 2, en daarna telde ik ze op en kreeg ik 25 die de kleine man nodig heeft.'

Maria was de volgende leerling om een strategie te delen. Zij had 62 min 37 in verticale vorm opgeschreven en gebruikte een meer gebruikelijke aftrekprocedure behalve dat ze eerst 7 van 10 aftrok (liever dan van 12), dat ze de overgebleven 3 met de 2 combineerde tot 5, en daarna 3 tientallen van de resterende 5 tientallen aftrok waarbij 2 tientallen en 5 overbleven.
Maria: 'Ik trok Paulo van Jorge af zoals Roberto deed, maar ik gebruikte getallen. Ik nam een van de tientallen om genoeg te hebben om de 7 eraf te halen, dus dat was 3 en nog 2 is 5 eenheden, en er waren nog 2 tientallen over, dus 25.'
Mevr. Hudson: 'Kan iemand vertellen hoe Roberto's en Maria's manieren op elkaar lijken?'
Carlos: 'Ze haalden allebei de kleine man weg.'
Mevr. Hudson: 'Nog iets anders?'
Jazmin: 'Ze moesten allebei een tiental openmaken omdat er geen 7 eenheden waren om weg te halen. Dus Roberto haalde z'n 7 af van dat 10-staafje. Hij haalde er 7 af en hield 3 over. En Maria nam een tiental van de 6 tientallen en schreef die bij de eenheden en haalde daarna de 7 eraf om er 3 over te houden.'
Mevr. Hudson: 'Dus ze dachten ongeveer op dezelfde manier maar schreven het op verschillende manieren op?'
Leerlingen: 'Ja.'

Tot zo ver de beschrijving van deze onderwijsleersituatie. In de situatie doet zich een interessante en waardevolle uitwisseling van aanpakken voor waarbij een viertal leerlingen hun strategie voor de hele groep beschrijven. Aansluitend legt de leraar de leerlingen een vraag voor die gericht is op het met elkaar in verband brengen van de aanpakken van twee van de vier leerlingen. Bij het beschrijven van hun strategie hadden twee leerlingen overigens zelf al aangegeven dat hun aanpak verwant was aan de twee reeds verwoorde werkwijzen. Bij het oplossen van de opgave blijken de leerlingen regelmatig gebruik te hebben gemaakt van informele notaties en tekeningen, en in hun beschrijving van de eigen oplossing verwijzen ze naar deze notaties. Verder blijkt het gebruik van tientallig materiaal in de oplossingswijzen een belangrijke rol te spelen ter ondersteuning van het denken. Uit de beschrijving van de onderwijsleersituatie blijkt duidelijk dat het verwerven van inzicht een centraal leerdoel is, en dat de leerlingen hierbij zelf een actieve, constructieve rol spelen. In hoeverre álle leerlingen hiervan profiteren blijft echter onduidelijk. Men kan zich afvragen in hoeverre het weergegeven gesprek voor alle leerlingen te volgen is, en in hoeverre dit voor iedereen bijdraagt tot het verwerven van inzicht. Zou dit ook gelden voor de leerlingen die aan het begin van de bespreking nog niet zelf tot een oplossing waren gekomen en die wellicht in hun manier van denken en handelen op een ander niveau zitten? En zou het ook gelden voor leerlingen die verbaal weinig begaafd zijn en voor wie het volgen van het gesprek en het meedenken met de verwoorde redeneringen te hoog gegrepen is? Wellicht zou dit bevorderd kunnen worden indien de vier oplossingswijzen op enigerlei wijze ook op het bord of op een poster stonden weergegeven, zodat deze voor andere leerlingen beter te doorzien en met elkaar te vergelijken zouden zijn[14].

Verder is er nog een ander opmerkelijk punt, namelijk de rol van de leraar. In overeenstemming met de opvattingen zoals die door Ambrose c.s., Fosnot c.s. en Murray c.s. worden gehuldigd, stelt deze leraar zich zeer terughoudend op, richt zich vooral op het door de leerlingen zo goed mogelijk laten verwoorden van de eigen strategieën, en op het gezamenlijk bespreken en overdenken van deze strategieën. Zelf geeft zij nauwelijks of geen instructie – haar taak lijkt er vooral uit te bestaan om erop toe te zien dat er wiskundig waardevolle zaken door de leerlingen voor het voetlicht gebracht worden, en dat er een intensieve communicatie over deze zaken tot stand komt. Dit betekent dat het initiatief voor de voortgang van het mathematiseringsproces in hoge mate bij de leerlingen ligt, en dat de leraar deze voortgang hoogstens kan beïnvloeden door de leerlingen geschikte problemen voor te leggen, door ze actief aan eigen oplossingswijzen te laten werken en door de communicatie

over deze oplossingswijzen zo goed mogelijk te laten verlopen[15]. Van instructie in de meer klassieke zin waarbij de leraar zelf bepaalde cruciale handelingen, relaties of werkwijzen uitlegt, is dus geen sprake meer. Daarmee ontstaat voor de leraar een soort afhankelijkheid van waar leerlingen mee komen, van de mate waarin dezen erin slagen om werkwijzen zelf te bedenken en goed te verwoorden, en van de mate waarin de leraar er zelf in slaagt om zulke aanpakken goed te interpreteren en in het brede kader van het beoogde leertraject te plaatsen. Vanuit psychologisch standpunt gezien lijkt dit een niet erg benijdenswaardige positie voor leraren waar velen zich wellicht niet erg behaaglijk bij zullen voelen. Is niet juist een van de hoekstenen van het beroep van het onderwijzen, zo kan men zich afvragen, dat men zelf een goede instructie kan verzorgen, dat men leerlingen zelf op het spoor van handige aanpakken kan zetten, en dat men, mede op basis van wat leerlingen aandragen, zelf voor aansturing in de richting van verkorting en niveauverhoging kan zorgen? Is het juist geen kernelement in de professionaliteit van leraren dat ze daartoe in staat zijn en dat ze bij het al dan niet succesvol doen verlopen van onderwijsleerprocessen niet afhankelijk zijn van waar leerlingen 'toevallig' mee komen? Het lijkt een goede zaak om in het kader van deze studie naderhand nog eens terug te komen op deze problematiek.

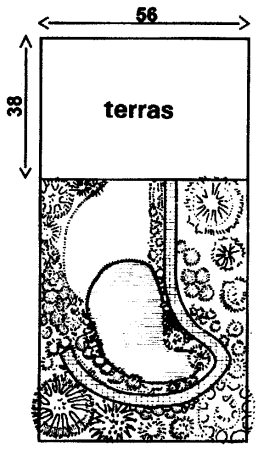
Hoe dit ook zij, het lijkt in ieder geval aan te bevelen om bepaalde elementen uit de constructivistische benadering in het met het onderhavige onderzoek beoogde onderwijsleertraject op te nemen, zoals een zekere gerichtheid op het door leerlingen zelf laten bedenken van oplossingsstrategieën, en op de uitwisseling daarvan en de communicatie daarover. Maar, zeker gezien de beperkte mogelijkheden om de aan het op te zetten onderwijsexperiment deelnemende leraren voor te scholen en te begeleiden, lijkt een meer actief instruerende en sturende rol dan in de hierboven aangeduide benadering, zeker geen slechte zaak. In termen van de door Fosnot en Dolk gebruikte metafoor van de leraar als reisbegeleider: niet alleen als begeleider, maar ook als wegbereider en soms als wegwijzer kan de leraar een vitale rol spelen.

3.5 Stand van zaken wat betreft resultaten bij het meercijferige vermenigvuldigen in Nederland

Een belangrijke aanleiding voor het onderzoek naar het meercijferige vermenigvuldigen wordt gevormd door de resultaten die op dat gebied in de afgelopen tien jaar door Nederlandse leerlingen in het basisonderwijs zijn behaald. Om van deze

resultaten een beeld te krijgen werden een aantal gegevens geanalyseerd die door het Cito over dit leerstofgebied zijn verkregen bij de laatste twee PPON-onderzoeken (Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau), namelijk de onderzoeken uit 1997 en 2004 (Janssen e.a., 1999; Janssen e.a., 2005). Bedoeling van deze onderzoeken, die in principe eens in de vijf jaar door het Cito worden uitgevoerd[16], is om regelmatig het prestatieniveau van de Nederlandse leerlingen vast te stellen, en om mogelijke veranderingen daarin te signaleren. Zoals reeds in hoofdstuk 1 van deze studie werd aangegeven, is er aan de hand van de gegevens uit 1997 en 2004 een duidelijke dalende tendens op het gebied van het meercijferige vermenigvuldigen waar te nemen. In deze paragraaf wordt daar nader op ingegaan.

Uit de PPON van 1997 en 2004 zijn twee contextopgaven genomen die betrekking hebben op het totaal aantal auto's dat door een pont vervoerd kan worden, en op het totaal aantal steentjes op een rechthoekig terras (zie fig. 3.18).



Op het terras komen 38 rijen met steentjes te liggen.
In elke rij 56 steentjes.
Hoeveel steentjes zijn dat in totaal?

Op een pont kunnen in één keer 23 auto's vervoerd worden.
Hoeveel auto's kan die pont hoogstens vervoeren als hij 56 keer oversteekt?

Fig. 3.18: De twee opgaven uit de Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau (PPON) van het Cito waarvan de resultaten zowel voor 1997 als voor 2004 zijn geanalyseerd. Het betrof hier uiteraard opgaven waarbij leerlingen uitrekenpapier mochten gebruiken.

Deze opgaven kunnen als maatgevend beschouwd worden voor het meercijferige vermenigvuldigen en zijn in beide genoemde jaren op dezelfde wijze in de toetsen van het onderzoek opgenomen. Om een zo nauwkeurig mogelijk beeld van de resultaten voor deze twee opgaven te krijgen, zijn alle toetsboekjes waarin deze opgaven voorkwamen geanalyseerd voor wat betreft goedscores en voor wat betreft de door de leerlingen in kwestie gehanteerde strategieën.

Omdat in 2004 verschillende groepen leerlingen verschillende opgavenboekjes kregen voorgelegd, varieert in dat jaar het totaal aantal leerlingen dat een opgave heeft gemaakt, per opgave. Terwijl in 1997 in totaal 552 leerlingen beide opgaven gemaakt hebben, bedroeg dit aantal in 2004 voor de pont-opgave 394 en voor de terras-opgave 398 leerlingen. Bij het analyseren van de verschillende oplossingsstrategieën is een eerste onderscheid gemaakt tussen cijferen en hoofdrekenen. Deze laatste categorie is nog weer onderverdeeld in een categorie hoofdrekenen direct uit het hoofd (dus zonder gebruik van hulpnotaties) en hoofdrekenen mét gebruik van hulpnotaties. In principe zou het ook nog mogelijk zijn om de categorie cijferen weer onder te verdelen in een categorie puur cijferen (waarbij de standaard-cijferprocedure voor vermenigvuldigen wordt gebruikt), en een categorie waarbij een vorm van kolomsgewijs rekenen wordt gebruikt. In de praktijk bleek het echter niet altijd mogelijk om beide categorieën goed uit elkaar te houden, en daarom is deze onderverdeling achterwege gelaten.

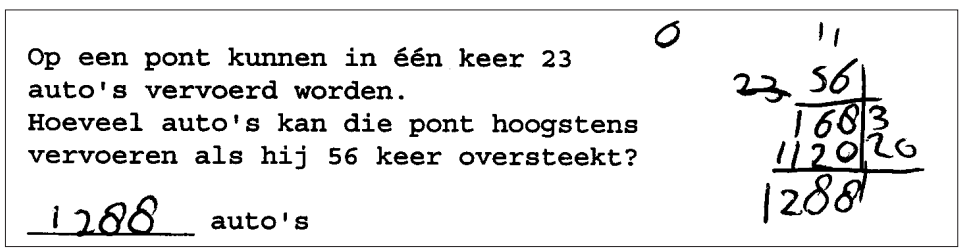


Fig. 3.19: Voorbeeld van een oplossingswijze waarbij het moeilijk is om deze eenduidig als 'cijferen' dan wel als 'kolomsgewijs rekenen' te categoriseren.

Zo zou de oplossingswijze van de leerling in fig. 3.19, gelet op de notatie, in principe als cijferen kunnen worden aangemerkt. Er staat evenwel naast de tussenantwoorden nog wel duidelijk 3 en 20 genoteerd, en dit lijkt erop te wijzen dat de leerling dus niet zuiver met positiewaarden heeft geredeneerd, maar met getalwaarden. Daarom zou de oplossingswijze ook als kolomsgewijs rekenen kunnen worden gekarakteriseerd. Omdat er nogal wat van dergelijke varianten waren waarbij het lastig is om een aanpak op eenduidige wijze als cijferen dan wel als kolomsgewijs rekenen aan te merken, zijn deze allemaal onder cijferen gerekend.

In fig. 3.20 en fig. 3.21 zijn twee tabellen opgenomen waarin de resultaten met betrekking tot de genoemde opgaven voor de beide jaren 1997 en 2004 staan weergegeven.

	Opgave: **Op het terras komen 38 rijen met steentjes te liggen. In elke rij 56 steentjes. Hoeveel steentjes zijn dat in totaal?**									
	Cijferen		Geen antwoord	HR-dir (zonder tussenno taties)		HR-not (met tussenno taties)		Totale goed score	
	goed	*fout*	*fout*	*goed*	*fout*	*goed*	*fout*	*goed*	*fout*
PPON '97 (n=552)	*342 (62%)*	*69 (13%)*	*13*	*42 (7%)*	*43 (8%)*	*32 (6%)*	*11 (2%)*	416 (75%)	136 (25%)
	Totaal: 411 (75%)		*Totaal: 13 (2%)*	*Totaal: 85 (15%)*		*Totaal: 43 (8%)*			
PPON '04 (n=398)	*192 (48%)*	*81 (21%)*	*21 (5%)*	*21 (5%)*	*43 (11%)*	*21 (5%)*	*19 (5%)*	234 (59%)	164 (41%)
	Totaal: 273 (69%)		*Totaal: 21 (5%)*	*Totaal: 64 (16%)*		*Totaal: 40 (10%)*			

Fig. 3.20: Overzicht van de resultaten bij de terrasopgave tijdens de PPON van 1997 en van 2004.

	Opgave: **Op een pont kunnen in één keer 23 auto's vervoerd worden. Hoeveel auto's kan die pont hoogstens vervoeren als hij 56 keer overs teekt?**								
	Cijferen		Geen antwoord	HR-dir (zonder tussenno taties)		HR-not (met tussenno taties)		Totale goed score	
	goed	*fout*	*fout*	*goed*	*fout*	*goed*	*fout*	*goed*	*fout*
PPON '97 (n=552)	*402 (73%)*	*62 (11%)*	*29*	*6 (1%)*	*33 (6%)*	*14 (3%)*	*6 (1%)*	422 (77%)	130 (23%)
	Totaal: 464 (84%)		*Totaal: 29 (5%)*	*Totaal: 39 (7%)*		*Totaal: 20 (4%)*			
PPON '04 (n=394)	*191 (48%)*	*53 (14%)*	*26 (6%)*	*30 (8%)*	*53 (13%)*	*22 (6%)*	*19 (5%)*	243 (62%)	151 (38%)
	Totaal: 244 (62%)		*Totaal: 26 (6%)*	*Totaal: 83 (21%)*		*Totaal: 41 (11%)*			

Fig. 3.21: Overzicht van de resultaten bij de pontopgave tijdens de PPON van 1997 en van 2004.

Opvallend aan deze gegevens is in de eerste plaats de vrij sterke daling in goedscores. Bij de pontopgave gaat het van 77% naar 62%, bij de terrasopgave van 75% naar 59%. In beide gevallen is dus sprake van een daling van ongeveer 15%. Deze daling komt overeen met de daling bij de enigszins vergelijkbare maar wat makkelijkere bioscoopopgave (zie fig. 3.22) waar de goedscore zakte van 86% naar 72%. Voor een

wat lastigere opgave waarbij 24 x € 37,50 uitgerekend moest worden werd in 2004 een goedscore vastgesteld van 48% (in 1997 werd deze opgave niet gemaakt).

In de bioscoop zijn 25 rijen met stoelen.
In elke rij staan 22 stoelen.
Hoeveel stoelen zijn er in totaal?

Fig. 3.22: Nog een voorbeeld van een vermenigvuldigopgave rond het meercijferige vermenigvuldigen uit de PPON: de bioscoopopgave.

Kijken we verder naar de verhouding cijferen-hoofdrekenen, dan valt op dat het percentage leerlingen dat een cijferstrategie volgde, flink omlaag is gegaan: betrof dit in 1997 bij de pontopgave nog 84% van de leerlingen (waarvan 87% tot een goed antwoord kwam), in 2004 was het 62% (waarvan 78% goed). Bij de pontopgave lag dit percentage in 1997 wat lager (75% waarvan 83% correct), en ging het in 2004 omlaag naar 69% (waarvan 70% correct). Terwijl voorts het percentage leerlingen zonder antwoord in alle vier de gevallen tamelijk stabiel laag blijft (rond de 5%), zien we dat het percentage leerlingen dat een hoofdrekenstrategie volgt toeneemt. Opmerkelijk daarbij is dat niet alleen het percentage leerlingen stijgt dat een hoofdrekenstrategie mét tussennotaties hanteert (bij de pontopgave van 4% naar 11%; bij de terrasopgave van 8% naar 10%; zie voor twee voorbeelden van hoofdrekenstrategieën mét gebruik van tussennotaties fig. 3.23), maar ook het percentage leerlingen dat een hoofdrekenstrategie gebruikt zonder tussennotaties.

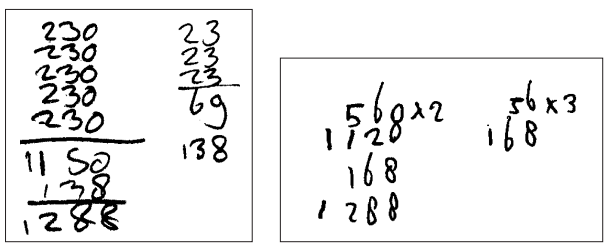


Fig. 3.23: Twee voorbeelden van geslaagde hulpnotaties bij de pontopgave (56x23) uit de PPON van 2004.

Bij de pontopgave is dit zelfs een spectaculaire stijging van 7% naar 21%, bij de terrasopgave een (verwaarloosbare) stijging van 15% naar 16%. De goedscore is bij deze

categorie zonder tussennotaties begrijpelijkerwijs laag: bij de pontopgave in beide jaren respectievelijk 15% en 36%, bij de terrasopgave 49% en 33%. Ook bij andere opgaven, zoals de opgave waarbij 24x€ 37,50 moest worden uitgerekend, is het percentage leerlingen dat uit het hoofd rekent zonder gebruik van hulpnotaties, betrekkelijk hoog (14%) met eveneens een lage goedscore: 44%.

Al met al betekent dit dat niet alleen de totale goedscore voor dit type opgaven beduidend is gedaald, maar ook dat het percentage leerlingen dat kennelijk niet in staat is zelf een passende hulpnotatie te bedenken en dus direct uit het hoofd rekent (met veelal geen goed resultaat) tamelijk gestegen is. De conclusie moet dan ook zijn dat het onderwijs er kennelijk niet in slaagt de leerlingen met dergelijke hulpnotaties vertrouwd te maken. Dit beeld komt overeen met het door Van Putten en Hickendorff (2006) gesignaleerde beeld bij het delen, waar voor de beide PPON-onderzoeken van 1997 en 2004 eveneens een flinke stijging werd geconstateerd van het percentage leerlingen dat grotere deelopgaven zonder gebruik van tussennotaties uit het hoofd oploste, eveneens met zeer magere resultaten. In een ander onderzoek signaleerden Van den Heuvel-Panhuizen en Bodin-Baarends iets soortgelijks voor het gebied van het probleemoplossen. Zij onderzochten in hoeverre goede rekenaars uit groep 6 in staat zijn om puzzelachtige opgaven zoals die in fig. 3.24 op te lossen. Het betreft hier een categorie opgaven waarbij niet zonder meer een bepaalde bewerking kan worden toegepast – er wordt vooral een beroep gedaan op probleemoplossingsvaardigheden die in de klas niet zoveel aan de orde komen. Het bleek dat ook onder deze groep goede rekenaars het gebruik van hulpnotaties in het geheel niet gebruikelijk was: 93 van de 152 leerlingen maakten daar geen gebruik van, en ook hier lag de goedscore bij dit type oplossingen zeer laag (19 van de 93, dus 20%) terwijl die bij de categorie oplossingen waarbij wél gebruik werd gemaakt van hulpnotaties (in fig. 3.24 aangeduid als 'kladblaadje'), beduidend hoger lag (20 van de 39, dus 51%).

Ook hier kan niet anders dan geconstateerd worden dat het onderwijs er kennelijk niet in slaagt om de leerlingen bewust te maken van de grote voordelen die het maken van hulpnotaties kan hebben om greep op het eigen denkproces te houden en op een doordachte manier tot een oplossing te komen. Dit gegeven roept des te meer vraagtekens op omdat het kunnen gebruiken van zulke tussennotaties een essentieel leerdoel van de realistische onderwijsbenadering is[17].

Al met al vormt deze kwestie een belangrijk aandachtspunt voor het te ontwikkelen onderwijsleertraject. Als een aantal contextproblemen gekozen wordt die als vertrek-



	Kladblaadje niet gebruikt	Kladblaadje wel gebruikt	Totaal aantal leerlingen
Goede antwoord	19	20	39
Foute antwoord	74	39	113
Totaal aantal leerlingen	93	59	152

De resultaten van betere rekenaars uit groep 6 bij de toetsopgave 'Vind je getal'.

Fig. 3.24: Puzzelachtige opgave uit de toets van Van den Heuvel-Panhuizen en Bodin-Baarends, met rechts de resultaten bij deze opgave voor een groep van 152 leerlingen (Van den Heuvel-Panhuizen & Bodin-Baarends, 2004, p. 12/13)

punt voor het traject fungeren om leerlingen eigen informele oplossingen te laten bedenken zoals deze onder meer door Ambrose c.s. geschetst worden (zie paragraaf 3.4.1) dan lijkt het van grote waarde om de leerlingen bij het proces van voortgaande verkorting en niveauverhoging in het verlengde daarvan, zoveel mogelijk actief en constructief te betrekken bij het ontwikkelen van notatievormen die enerzijds recht doen aan de genoemde informele oplossingswijzen en die anderzijds anticiperen op meer geavanceerde werkwijzen in de sfeer van het gestileerde hoofdrekenen. De vraag dient zich dan aan welk model of welke modellen zich lenen om dit proces te stimuleren. Voor welk model ook gekozen wordt, het zou, in overeenstemming met wat Lampert reeds in 1986 propageerde en met wat Gravemeijer naderhand in theoretische zin onderbouwde (zie bijvoorbeeld Gravemeijer, 2003), in ieder geval een goede zaak zijn als zo'n model mede het resultaat zou zijn van de eigen constructieve activiteit van leerlingen waarbij deze schematische voorstellingen van contextproblemen ontwikkelen waaruit dat model als 'model van' naar voren kan komen. Naderhand kan dit dan als 'model voor' gaan fungeren in andere contextsituaties.

voetnoten

1 Aan het voorbeeld uit Naar Zelfstandig Rekenen is al te zien dat 'rekenen-uit-het-hoofd' en 'rekenen-met-het-hoofd' in de praktijk veelal naast elkaar voorkwamen. Een deel van de opgaven 1 t/m 4 uit Taak 15 van die methode zijn op te vatten als typische 'uit-het-hoofd'-opgaven terwijl bij een ander deel ook 'rekenen-met-het-hoofd' te pas komt.

2 Zie voor een uitgebreidere beschouwing over Versluys en diens rol bij het ontstaan van de vakdidactiek in Nederland bijvoorbeeld De Moor, 1999: *Van Vormleer naar realistische meetkunde*, p. 119-127.

3 Een werkvorm die typerend voor het gebied van het hoofdrekenen is en die zich bij uitstek leent om de leerlingen efficiënt te laten oefenen op dit gebied wordt gevormd door het 'rekendictee', een werkvorm waarbij klassikaal gewerkt wordt en waarbij de leerlingen in korte tijd een aantal hoofdrekenopgaven in mondelinge of schriftelijke vorm krijgen voorgelegd. Zie voor een nadere beschrijving van deze werkvorm het artikel *Hoofdrekenen, je krijgt er nooit genoeg van* (Buys, 1997).

4 Zie voor een nadere beschouwing over de betekenis en de functie van activiteiten rond getalgevoel het artikel *2400, daar hoef je niet eens naar te kijken* (Buys, 2001b).

5 In de TAL-brochures wordt in het algemeen de term kolomsgewijs rekenen gebruikt ter aanduiding van al die vormen van hoofdrekenen waarbij opgaven volgens min of meer vaste, niet-cijfermatige procedures 'onder elkaar' worden opgelost onder gebruikmaking van hulpnotaties waarmee de verschillende stappen binnen deze procedures worden vastgelegd. In verband met de sterke associatie van de term kolomsgewijs met het verticale rekenen, wordt er in deze studie de voorkeur aan gegeven om voor de genoemde vormen van hoofdrekenen de term gestileerd hoofdrekenen te gebruiken. Een belangrijke overweging daarbij is dat de informele notatieondersteunde oplossingswijzen die leerlingen bij het meercijferige vermenigvuldigen veelal hanteren, in nogal wat gevallen niet verticaal van aard zijn. De term kolomsgewijs rekenen lijkt dan minder goed op z'n plaats, en daarom wordt deze voorbehouden aan de verticale procedures waarin het gestileerde hoofdrekenen uitmondt en waarbij de leerling op basis van het decimaal splitsen en werkend met getalwaarden via een aantal vaste stappen tot een oplossing komt.

6 De term positiegetallen wordt hier in dezelfde betekenis gebruikt als de term getalwaarden in de TAL–omschrijving van hoofdrekenen. Het komt er daarbij op neer dat een getal als 357 wordt opgevat als zijnde samengesteld uit 300, 50 en 7. Dit in tegenstelling tot de betekenis van de term positie*cijfers* waarbij 357 wordt gezien als bestaande uit 3 honderdtallen, 5 tientallen en 7 eenheden.

7 Een belangrijk argument daarbij vormt het feit dat hoofdrekenen in tegenstelling tot cijferen algemeen ook maatschappelijk van grote waarde wordt geacht. In het dagelijks leven speelt het bijvoorbeeld een rol bij het rekenen in geldsituaties, het rekenen met tijd en in meetsituaties (bij het omrekenen van de ene naar de andere maatsoort). Zie ook de TAL-brochure *Kinderen leren rekenen*, p.39 en p.67.

8 Zie voor een uitgebreide beschrijving van de ontwikkelingen in het Verenigd Koninkrijk op dit gebied de beschouwing *Contrasting approaches that challenge tradition* van J. Anghileri in: Anghileri, J. (ed.), 2001: *Principles and Practices in Arithmetic Teaching* (p.4-15).

9 De term algoritme wordt door deze onderzoekers in een iets andere betekenis gebruikt dan in ons land gangbaar is. Het gaat in deze interpretatie namelijk niet om gestandaardiseerde oplossingsmethoden waarbij een aantal vaste stappen in een vaste volgorde wordt uitgevoerd (de betekenis die in ons land veelal aan de term algoritme

wordt toegekend), maar om zelf uitgevonden, niet-gestandaardiseerde oplossingswijzen die leerlingen zelf ontwikkelen in een type onderwijs waarin ze met een zekere regelmaat passende opgaven krijgen voorgelegd zonder dat er duidelijke instructie plaatsvindt met betrekking tot de wijze waarop ze deze opgaven verondersteld worden op te lossen. Zie voor een nadere beschouwing over algoritmen en het onderwijzen daarvan F. Goffree: *Wiskunde & Didactiek voor aanstaande leraren basisonderwijs*, deel 2 p.54-60.

10 Het onderwijs in het door Ambrose c.s. beschreven onderzoek was erop gericht de leerlingen de opgaven (veelal opgaven met een groepjes- of verhoudingsstructuur, zoals in het geval van een opgave waarbij de totale kosten gevraagd worden van een uitstapje van 47 kinderen waarbij per kind 34 dollar betaald moet worden) zoveel mogelijk op basis van begrip te laten oplossen. De resultaten daarvan werden intensief onderling uitgewisseld, maar zonder dat door de leerkracht aangestuurd werd op beoogde oplossingsstrategieën.

11 Vergnaud ontwikkelde met name een veel geciteerde theorie over de wijze waarop onderzoekers de begripsontwikkeling bij kinderen in kaart kunnen brengen door een wiskundig begrip als een drietal 'verzamelingen' op te vatten, te weten een verzameling situaties waarmee dat begrip reële betekenis krijgt, een verzameling 'invarianten' bestaande uit essentiële wiskundige eigenschappen, relaties en 'stellingen-in-actie' die verbonden zijn met dat begrip, en een verzameling symbolische representaties waarmee dat begrip op symbolisch niveau tot uitdrukking wordt gebracht. Daarbij moet in gedachten gehouden worden, aldus Vergnaud, dat begrippen niet gescheiden optreden, maar met elkaar verweven. De onderzoeker dient dus 'begripsvelden' te bestuderen en daarbij te proberen om in kaart te brengen op welke wijze geavanceerde wiskundige kennis kan voortkomen uit meer informele, intuïtieve kennis van leerlingen. Ook dient de onderzoeker na te gaan welke didactische situaties georganiseerd kunnen worden om dit proces te bevorderen, waarbij zowel korte termijn-doelen in het oog gehouden dienen te worden gericht op het leren oplossen van de aangeboden problemen en op het ontwikkelen van daarbij passende vaardigheden, als lange termijn-doelen gericht op het leggen van een begripsmatig fundament voor zaken die pas later actueel zullen worden in de wiskundige ontwikkeling. Zie verder vooral Vergnaud, G., 1988: *Multiplicative structures*, p.141-160, in: Hiebert, J. & M. Behr (eds.), Number concepts and Operations in the Middle Grades.

12 Men zou verwachten dat in de voorbeelden van door de leerlingen gehanteerde strategieën het getal 35 steeds als eerste getal wordt genoemd omdat de situatie van '35 tasjes en voor elk tasje 27 cm band' zich het meest natuurlijk laat vertalen naar de som 35x27. Dit is evenwel niet het geval – het lijkt erop dat Murray c.s. de opgave eerder interpreteren als 27x35.

13 Wat hun argumenten daarbij zijn, is niet duidelijk. Men zou verwachten dat zij bijvoorbeeld de strategieën uit de categorie herhaald verdubbelen toch als strategieën van een wat lager niveau zouden aanmerken dan de strategieën uit de categorie 'splitsen van een van beide getallen'. In het eigen onderzoek waarvan de resultaten in hoofdstuk 7 van deze studie beschreven worden, bleken strategieën in de sfeer van (herhaald) verdubbelen over het algemeen omslachtiger, minder overzichtelijk en foutgevoeliger dan strategieën uit de meeste andere categorieën.

14 De Nederlandse onderzoekster D. van Eerde omschrijft dit als het 'parafraseren' van een door een leerling aangedragen strategie. Dit parafraseren kan zowel verbaal (in de eigen woorden navertellen) als visueel (via een bordtekening) plaatsvinden. Zie voor een aantal sprekende voorbeelden van parafraseren bijvoorbeeld het artikel *Interactie in diagnostiek en didactiek* (Van Eerde, 1995) in het Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs.

15 Volgens Gravemeijer (persoonlijke mededeling, sept. 2007) is de rol van de leraar in constructivistisch georienteerd onderwijs minder passief dan het hier wellicht enigszins wordt voorgesteld. Hij onderscheidt de volgende aspecten van de 'pro-actieve rol' van de leraar:

- Het vestigen van de gewenste sociale normen (waarbij leerlingen er vertrouwd mee raken dat ze verplicht zijn hun werkwijze goed uit te leggen voor medeleerlingen, hun oplossing te onderbouwen, om verheldering te vragen indien zij een oplossing niet goed begrijpen, en een oplossing ter discussie te stellen als ze denken dat deze niet klopt);
- Het vestigen van de gewenste sociaal-wiskundige normen (waarbij leerlingen zich bewust worden wat wel of niet een wiskundig probleem is, aan welke kenmerken een wiskundige oplossing moet voldoen, en wat een in wiskundig opzicht betere cq. handigere oplossing is);
- Het bevorderen van taak-motivatie in plaats van ego-motivatie (waarbij ze zich bewust worden dat het criterium voor succes niet zozeer gelegen is in de juistheid van de oplossing of het vergelijken met medeleerlingen, maar meer in de eigen progressie, in het plezier iets echt goed te begrijpen;
- Het cultiveren van wiskundige motivatie/interesse met het oog op het proces van verticaal mathematiseren (waarbij het belang steeds verder wordt doorzien van vragen als: waarom werkt dit? Werkt dit altijd? Kan ik dat bewijzen? Kan ik deze aanpak uitbreiden/generaliseren? Kan ik deze aanpak efficiënter maken?)
- Het kiezen en ontwikkelen van passende onderwijsactiviteiten (waarmee geanticipeerd wordt op mogelijke leerprocessen, en op het observeren, analyseren en evalueren daarvan).

Verder speelt, aldus Gravemeijer, het vaststellen van verschillen in niveau van denken en redeneren een rol, het maken van zulke verschillen tot gespreksonderwerp voor de hele groep, en het zodanig orkestreren van de discussie binnen de hele groep dat dit bijdraagt aan het gezamenlijke én het individuele leerproces.

16 Dat er tussen de laatste twee PPON-peilingen een periode van zeven jaar zat, heeft te maken met de invoering van de euro als nieuwe betaaleenheid in Nederland, en met het feit dat deze invoering gepaard ging met de introductie van nieuwe versies van reken-wiskundemethoden rond het eigenlijke peilingsjaar 2002.

17 In de kerndoelen voor rekenen-wiskunde is over de taalontwikkeling bijvoorbeeld een apart kerndoel opgenomen waarin het gebruik van hulpnotaties als een belangrijk aspect van deze taalontwikkeling wordt gememoreerd. Zie de meest recente versie van de kerndoelen met een uitwerking daarvan voor de verschillende leerjaren op de website van SLO (http://tule.slo.nl).

4 Opzet van het onderzoek

4.1 Inleiding: ontwikkelingsonderzoek als onderzoeksmethode

Nadat in hoofdstuk 1 het centrale onderzoeksgebied en de bijbehorende onderzoeksvragen van deze studie zijn vastgesteld, volgde in hoofdstuk 2 een beschrijving van het theoretisch kader en in hoofdstuk 3 een analyse van de voornaamste achtergronden bij het onderzoek. In dit vierde hoofdstuk ga ik nader in op de in het onderzoek gehanteerde onderzoeksmethode, die in z'n algemeenheid kan worden getypeerd als een vorm van ontwikkelingsonderzoek. In deze inleidende paragraaf wordt daartoe eerst beschreven wat ontwikkelingsonderzoek inhoudt, wat de voornaamste kenmerken van de daarbij gehanteerde onderzoeksmethode zijn en welke drie fasen gewoonlijk doorlopen worden: de voorbereidende fase, de experimentele fase en de retrospectieve fase. Tevens wordt kort ingegaan op de vraag waarom gekozen is voor ontwikkelingsonderzoek als onderzoeksmethode.

In de volgende drie paragrafen wordt beschreven hoe de drie genoemde fasen in het onderzoek zijn uitgewerkt, waarbij onder andere wordt ingegaan op de vraag hoe het signaleren van bepaalde problemen leidde tot het formuleren van de centrale onderzoeksvragen en hoe een aantal gedachte-experimenten leidden tot een eerste idee voor een beoogd onderwijsleertraject (de voorbereidende fase); op welke wijze het onderwijsexperiment opgezet en uitgevoerd werd en welke gegevens over het verloop daarvan verzameld werden (de experimentele fase); en hoe deze gegevens in een terugblik op het uitgevoerde experiment geanalyseerd en geëvalueerd werden om tot beantwoording van de onderzoeksvragen te komen en om een aangescherpte lokale onderwijstheorie te formuleren (de retrospectieve fase). In de vijfde en laatste paragraaf tenslotte sta ik stil bij de wijze waarop twee van de in deze inleidende paragraaf onderscheiden grondkenmerken van ontwikkelingsonderzoek in de onderzoeksopzet zijn uitgewerkt.

Bij de beschrijving van het theoretisch kader in hoofdstuk 2 heb ik reeds aangegeven hoe in het kielzog van de realistische onderwijsbenadering een vorm van onderzoek tot ontwikkeling kwam die veelal met de term ontwikkelingsonderzoek wordt aangeduid (Freudenthal, 1988; Streefland, 1988). Beschreven werd hoe deze vorm van onderzoek een belangrijke rol speelde bij de voortgaande ontwikkeling van realistisch reken-wiskundeonderwijs, zowel wat betreft de constructie van prototypen van

leergangen, hulpprogramma's en toetsen, als bij de verdere uitwerking van de theorie die uit het beproeven van die leergangen e.d. voortvloeide. Anders dan bijvoorbeeld bij evaluatieonderzoek richt deze vorm van onderzoek zich niet zozeer op het in kaart brengen van bepaalde aspecten van de bestaande situatie in het onderwijs, maar meer op het creëren van relatief nieuwe situaties. Streefland noemt dit het 'creëren van een nieuwe onderwijswerkelijkheid' en omschrijft het als volgt:

'In de reële onderwijsleersituatie wordt door onderzoekend speuren de gedurige wisselwerking tussen de leergang in ontwikkeling en de ermee teweeggebrachte individuele leerprocessen aan het licht gebracht.' (Streefland, 1988, p. 38)

Op basis van de overkoepelende domeinspecifieke onderwijstheorie wordt bij ontwikkelingsonderzoek dus een onderwijsleertraject ontworpen waarvan de leereffecten in de praktijk op een zodanig manier beproefd worden dat dit niet alleen leidt tot betrouwbare informatie over de betreffende leerprocessen en over de omstandigheden waaronder deze hun beslag krijgen, maar dat ook beargumenteerd kan worden waaróm het nieuwe traject nu precies tot deze leerprocessen heeft geleid (Freudenthal, 1991). Via de formulering van een lokale onderwijstheorie die gebaseerd is op een analyse van deze informatie, wordt een bijdrage aan verdere theorievorming geleverd die essentieel voor deze vorm van onderzoek is. Streefland omschrijft dit proces naar analogie van het idee van progressieve mathematisering als 'progressieve theoretisering'.

Zoals in hoofdstuk 2 reeds werd aangegeven, wordt ontwikkelingsonderzoek niet gekenmerkt door een strakke, uniforme onderzoeksmethode. Veeleer is sprake van, zoals Verschaffel het noemt, een 'brede waaier van onderzoeksmethoden' waarin onder meer introspectie, gedachte-experimenten, intuïtie, historisch onderzoek, persoonlijke ervaringen met instructiemethoden en observatie van leerlingen een rol kunnen spelen (Verschaffel, 1993). Gravemeijer (1994, 1998) heeft beschreven hoe dergelijke onderzoeksactiviteiten passen in een meer algemeen conceptueel kader voor ontwikkelingsonderzoek. Hij wees, in navolging van Freudenthal (1991), onder meer op het onderscheid tussen onderwijsontwikkeling en ontwikkelingsonderzoek, waarbij het eerste zich primair richt op het ontwikkelen van nieuwe leergangen, toetsvormen of hulpprogramma's als zodanig terwijl het tweede zich daarnaast ook richt op theorievorming. De laatste jaren wordt ontwikkelingsonderzoek, op een meer algemeen niveau aangeduid als 'ontwerponderzoek' (design research), in steeds bredere kring aanvaard als een geaccepteerde onderzoeksmethode (Van den Akker

e.a., 2006). Een centraal aspect van ontwerponderzoek bestaat uit het creëren van innovatieve leeromgevingen (learning ecologies). Daarbij kan een te ontwikkelen lokale onderwijstheorie het doel zijn zoals in het onderhavige onderzoek het geval is, maar het doel kan ook gelegen zijn in het onderzoeken van een bepaald aspect van de innovatieve leeromgeving, zoals de sociale normen of het gebruik van symbolen en modellen. Deze ontwikkeling maakt de behoefte aan nadere specificatie van deze methode alsmede aan een aantal kwaliteitsstandaarden des te prangender (Kelly, 2006).

Hoewel ontwikkelingsonderzoek als onderzoeksmethode vooralsnog dus nog niet een volledig uitgekristalliseerd en algemeen erkend theoretisch kader kent, zijn er in ieder geval drie fasen te onderscheiden waarin het onderzoek gewoonlijk plaatsvindt (Streefland, 1988; Freudenthal, 1991; Gravemeijer, 1998; Gravemeijer en Cobb, 2006): een voorbereidende fase, een experimentele fase en een retrospectieve fase. De volgende activiteiten kunnen daarin onder meer plaatsvinden (zie fig. 4.1).

(a) Voorbereidende fase	(b) Experimentele fase	(c) Retrospectieve fase
• Signaleren problemen en vaststellen onderzoeksvragen • Observeren bestaande leerprocessen • Gedachte-experimenten • Formuleren voorlopige opzet beoogde onderwijsleertraject • Vaststellen onderwijsdoelen en beginsituatie	• Ontwerpen opzet voor onderwijsexperiment • Uitwerken en beproeven beoogd onderwijsleertraject • Inscholing en begeleiding van leraren • Registreren van cruciale praktijkmomenten • Doorvoeren van bijstellingen	• Analyse resultaten onderwijsexperiment; koppeling aan cruciale onderwijsmomenten • Beantwoording centrale onderzoeksvragen • Formulering van een lokale onderwijstheorie • Bevindingen, discussie, aanbevelingen

Fig. 4.1: Overzicht van activiteiten uit de drie fasen waarin ontwikkelingsonderzoek zich veelal voltrekt.

Kenmerkend voor fase (a) is dat men problemen signaleert en dat er centrale onderzoeksvragen worden geformuleerd. Mede op basis van de overkoepelende onderwijstheorie worden met behulp van gedachte-experimenten vervolgens eerste ideeën ontwikkeld die kunnen bijdragen tot het oplossen van deze problemen. Ook het observeren van bestaande leerprocessen van individuele leerlingen of groepen leerlingen kan hierbij een rol spelen (Freudenthal, 1978; Streefland, 1983), evenals het analyseren van toetsgegevens met betrekking tot resultaten in de vigerende onderwijspraktijk (Van Eerde, 1996; Van den Heuvel-Panhuizen, 1996). Een en ander leidt tot de formulering van een voorlopige opzet van het beoogde onderwijsleertraject en

een aantal daarmee overeenstemmende verwachtingen ten aanzien van de progressie die de leerlingen verondersteld worden te boeken. In samenhang hiermee worden de onderwijsdoelen vastgesteld alsmede de beginsituatie waar bij het onderwijsexperiment vanuit wordt gegaan. Het beoogde onderwijsleertraject wordt naderhand in fase (b) uitgewerkt in concrete lesmaterialen en een bijbehorende vormgeving van het onderwijs die in de praktijk worden uitgeprobeerd. Voorafgaand daaraan wordt vastgesteld op welke wijze het daarmee gepaard gaande onderwijsexperiment plaatsvindt, hoe begeleiding van de betrokken leraren gebeurt, en welke gegevens tijdens het experiment verzameld worden. In de praktijk wordt vervolgens zo nauwkeurig mogelijk geregistreerd hoe het onderwijsleerproces verloopt, welke tegenvallers en successen zich voordoen, in hoeverre dit afwijkt van het verwachte verloop, hoe deze afwijkingen begrepen kunnen worden, enzovoorts. In fase (c) tenslotte worden de gegevens van het onderwijsexperiment kwalitatief en kwantitatief geanalyseerd, waarbij deze in verband gebracht worden met betekenisvolle praktijkmomenten en met de geformuleerde verwachtingen. Op basis daarvan worden de onderzoeksvragen beantwoord. Dit betreft onder meer de beschrijving van een lokale onderwijstheorie over de wijze waarop het onderwijsleerproces optimaal ingericht kan worden. Het geheel wordt afgesloten met de vaststelling van een aantal bevindingen, discussiepunten en aanbevelingen.

Hierbij dient nog opgemerkt te worden dat de fasen niet strikt gescheiden zijn. Zo zijn fase (a) en (b) veelal enigszins verweven waar het gaat om het uitwerken van het beoogde onderwijsleertraject. En hoewel fase (c) na de fasen (a) en (b) plaatsvindt, komen in fase (b) reeds aanzetten tot stand tot bijstelling van de in fase (a) geformuleerde opzet van het beoogde onderwijsleertraject.

Met deze globale indeling in drie fasen is ontwikkelingsonderzoek uiteraard nog niet adequaat getypeerd. Daarom breng ik in aanvulling hierop een vijftal grondkenmerken in kaart die in het voorgaande al enigszins besloten liggen en die als kern van de onderzoeksactiviteit binnen ontwikkelingsonderzoek kunnen worden aangemerkt. Daarbij worden met name Freudenthal (1979a; 1988; 1991), Streefland (1983; 1988), Treffers (1993), Gravemeijer (1994, 1998), en Gravemeijer en Cobb (2006) gevolgd. Geconstateerd kan worden dat de volgende vijf punten in hoge mate karakteristiek zijn:

(1) Gedachte-experimenten als basis voor het onderzoek;
(2 Cyclische afwisseling van ontwerpactiviteiten en experimenteeractiviteiten;
(3 Gedetailleerde beschrijving van het proces van ontwerpen en uitproberen, inclu-

sief de tegenvallers en meevallers die zich 'onderweg' voordoen;
(4) Theorievorming op grond van reflectie op het ontwikkelproces en op grond van analyse van de processen en resultaten van het uitgevoerde onderwijsexperiment in het licht van de overkoepelende onderwijstheorie;
(5) Betrouwbaarheid en validiteit op grond van (potentiële) navolgbaarheid.

Essentieel voor ontwikkelingsonderzoek is het houden van gedachte-experimenten waarbij, mede op basis van eerdere ontwikkelervaringen en in het licht van een domeinspecifieke onderwijstheorie, overwogen wordt hoe leerlingen in bepaalde probleemsituaties zouden kunnen redeneren, hoe het onderwijs op deze reacties zou kunnen inspelen, en tot welke leerresultaten het doorlopen van een globale opeenvolging van dergelijke probleemsituaties onder bepaalde condities kan leiden. Het op basis van deze gedachte-experimenten ontworpen beoogde onderwijsleertraject wordt in de praktijk uitgeprobeerd, waarbij zo nauwkeurig mogelijk wordt nagegaan en geregistreerd wat zich daadwerkelijk aan redeneringen en oplossingen van leerlingen voordoet, hoe onderwijsgevenden daar op inspelen, welke verwachte en onverwachte gebeurtenissen zich voordoen, welke obstakels er op de leerweg opdoemen, en zo meer. Evaluatie van de aldus verkregen gegevens leidt tot nieuwe gedachte-experimenten die opnieuw gevolgd kunnen worden door onderwijsexperimenten. Daarmee voltrekt zich een cyclisch proces van ontwerpen en beproeven dat een aantal keren doorlopen wordt. Belangrijk is dat dit proces zo nauwkeurig mogelijk beschreven wordt, inclusief verwachte en onverwachte gebeurtenissen die zich tijdens het proces voordoen, en inclusief de resultaten waartoe het proces leidt. Op basis van deze beschrijvingen vindt vervolgens retrospectie plaats, waarbij wordt nagegaan in hoeverre de geformuleerde vermoedens daadwerkelijk zijn uitgekomen, en tot welke theoretische bevindingen dit leidt. Doordat het gehele proces van ontwikkelen, uitproberen en reflecteren uitgebreid en van nabij beschreven wordt, wordt bewerkstelligd dat dit voor latere beoordelaars en mede-onderzoekers navolgbaar wordt en daarmee aan de criteria van betrouwbaarheid en validiteit voldoet. De term navolgbaar verwijst hier naar het feit dat leraren, ontwikkelaars en onderzoekers zoveel betrouwbare informatie over de essentie en het verloop van het beoogde onderwijsleerproces verkrijgen, dat ze het hele onderzoeksproces als een zelf ervaren proces kunnen beleven en dat dit een basis kan vormen voor het begrijpen van vergelijkbare onderwijsleerprocessen; en tevens dat ze, in het geval van andere onderwijsomstandigheden, in staat zijn om zodanige aanpassingen in het onderwijsleertraject aan te brengen dat het beoogde onderwijsleerproces gerealiseerd kan worden.

Zoals Gravemeijer (1994, 1998) stelt, wordt objectiviteit van met betrekking tot binnen het onderzoek vastgestelde bevindingen bij ontwikkelingsonderzoek dus bereikt via explicitering van het door de onderzoeker/ontwikkelaar doorgemaakte leerproces bij het ontwikkelen en uitproberen van de experimentele leergang, en door het formuleren van een lokale onderwijstheorie die het resultaat van dat leerproces vormt. En doordat deze bevindingen samen met de beschrijving van het proces dat ertoe leidde, aan de gemeenschap van onderzoekers wordt voorgelegd, worden deze verder gevalideerd en wordt tevens bijgedragen aan de algemene kennisontwikkeling op dit gebied.

Dat ontwikkelingsonderzoek een vorm van onderzoek is die zich bij uitstek leent om de in hoofdstuk 1 opgeworpen vragen te beantwoorden, ligt voor de hand. Achtergrond van deze vragen vormt immers de constatering dat bepaalde aspecten van de huidige onderwijspraktijk in het reken-wiskundeonderwijs te wensen overlaten. Zoals in hoofdstuk 3 is uiteengezet, valt er nogal wat aan te merken op de wijze waarop bij het vermenigvuldigen in gangbare leergangen de overstap wordt gemaakt van het meer flexibele, eigenlijke hoofdrekenen via een vorm van gestileerd hoofdrekenen naar het cijfermatige rekenen. En zoals in datzelfde hoofdstuk werd geconstateerd, lopen de resultaten op het gebied van het meercijferige vermenigvuldigen blijkens de PPON-onderzoeken van het Cito nogal terug, terwijl er tevens een substantiële categorie leerlingen blijkt te zijn die enerzijds de cijferprocedure niet beheerst en die zich anderzijds kennelijk niet bewust is van de mogelijkheid om met behulp van informele hulpnotaties via een vorm van gestileerd hoofdrekenen tot een oplossing te komen. Deze constateringen roepen de behoefte op aan een nieuw onderwijsleertraject waarbij het onderwijs zich in eerste instantie op de ontwikkeling van de genoemde informele notatieondersteunde hoofdrekenstrategieën richt. Door middel van ontwikkelingsonderzoek kan worden nagegaan hoe zo'n onderwijsleertraject eruit kan zien, tot wat voor resultaten dat traject leidt en in hoeverre die resultaten een bijdrage leveren aan het oplossen van het geconstateerde probleem.

4.2 De voorbereidende fase

Zoals in hoofdstuk 1 reeds is aangegeven, vormde een belangrijke overweging bij het opzetten van het onderzoek de vaststelling dat zich in het curriculum van de basisschool wezenlijke veranderingen voordoen doordat getalgevoel, hoofdrekenen

en schattend rekenen steeds meer centraal komen te staan terwijl het cijfermatige rekenen in toenemende mate van minder belang wordt geacht. Des te waardevoller is het dat er, zeker ook voor het gebied dat het centrale onderwerp van deze studie vormt, het meercijferige vermenigvuldigen, een goede overgang van het eigenlijke hoofdrekenen via een vorm van gestileerd hoofdrekenen in de richting van het cijfermatige rekenen plaatsvindt waarbij leerlingen die in het onderwijsleerproces niet tot volledige beheersing van het cijferalgoritme komen, de beschikking krijgen over informele, notatieondersteunde hoofdrekenstrategieën waarmee zij op een efficiënte manier tot een oplossing kunnen komen. Zoals in de laatste paragraaf van hoofdstuk 3 is getoond, is het juist op het punt van het gebruik van passende hulpnotaties, dat nogal wat leerlingen in Nederland blijkens de PPON-onderzoeken van het Cito tekort schieten. Geconstateerd werd dat er een tendens is waarbij steeds meer leerlingen die het standaardalgoritme niet beheersen, proberen om direct uit het hoofd rekenend tot een oplossing te komen bij opgaven zoals 56x23, met veelal ongunstige resultaten. Al met al leidden deze constateringen tot een bezinning op de doelstellingen van de te ontwikkelen leergang. Aan de ene kant diende deze zodanig van opzet te zijn dat leerlingen tot een goede vaardigheid zouden komen in het oplossen van vermenigvuldigopgaven met meercijferige getallen, waarbij ze gebruik zouden kunnen maken van verschillende, meer en minder verkorte varianten van een standaardprocedure. Aan de andere kant diende het proces dat tot deze vaardigheid leidde, zodanig ingericht te worden dat leerlingen op een natuurlijke manier tot de ontwikkeling van passende notatievormen zouden komen – notatievormen die ook in het geval dat een leerling niet tot beheersing van (het hoogste niveau van) de standaardprocedure zou komen, voldoende steun zouden kunnen bieden om tot adequate oplossingen te komen. Al met al leidde dit tot de in hoofdstuk 1 geformuleerde en in fig. 4.2 nog eens weergegeven onderzoeksvragen.

Als eerste voorbereiding op de ontwikkeling van een onderwijsleertraject dat de basis voor het beantwoorden van deze vragen zou kunnen vormen, werd vervolgens een analyse gemaakt van de hele leergang rond het vermenigvuldigen die door de auteursgroep van de methode Wis en Reken (waarvan de onderzoeker deel uitmaakte) in een eerder stadium was ontwikkeld[I]. Deze analyse betrof niet alleen de globale opzet van de leergang, maar ook de experimentele resultaten uit de try out van de methode, inclusief gegevens over aanpakgedrag en het gebruik van hulpnotaties.

Zo werd met name ook nagegaan in hoeverre leerlingen tijdens deze try outs tot de ontwikkeling van adequaat notatiegedrag kwamen. Vastgesteld werd onder meer

Centrale onderzoeksvragen bij het onderzoek:

(1) Hoe kan een onderwijsleertraject rond het vermenigvuldigen van meercijferige getallen worden vormgegeven dat aansluit bij de eigen, informele strategieën van leerlingen op dit gebied en waarin deze strategieën gaandeweg worden uitgebouwd tot efficiënte, notatie-ondersteunde hoofdrekenstrategieën in de sfeer van het gestileerde hoofdrekenen?

(2) Hoe ontwikkelt zich binnen zo'n leergang het aanpakgedrag en het notatiegedrag van de leerlingen? En in hoeverre biedt deze leergang ook zwakkere leerlingen voldoende houvast om tot de met het onderwijs beoogde efficiënte strategieën te komen?

(3) Wat zijn de voornaamste elementen van een lokale onderwijstheorie die de grondslag van zo'n leergang vormt?

Fig. 4.2: de centrale onderzoeksvragen bij het onderzoek nogmaals op een rij gezet.

dat in ieder geval in de experimenteerscholen van Wis en Reken een hoge mate van vertrouwdheid van leerlingen groeide met het gebruik van het 'kladblaadje' in de zin dat ze zich goed bewust waren dat ze in allerlei rekensituaties altijd enkele tussenstappen of –antwoorden op papier konden zetten om het oplossingsproces te ondersteunen, al dan niet gebruikmakend van een passende modelmatige ondersteuning[2]. Dit bleek niet alleen voor het gebied van het rekenen met hele getallen te gelden, maar ook voor gebieden zoals kommagetallen, procenten en verhoudingen (zie het voorbeeld in fig. 4.3). Uit deze analyse werd een aantal ideeën, vragen en overwegingen gedestilleerd met betrekking tot zaken als geschikte contexten, ontwikkeling van hulpnotaties op basis van schematische voorstellingen van situaties, gebruik van modellen, en zo meer.

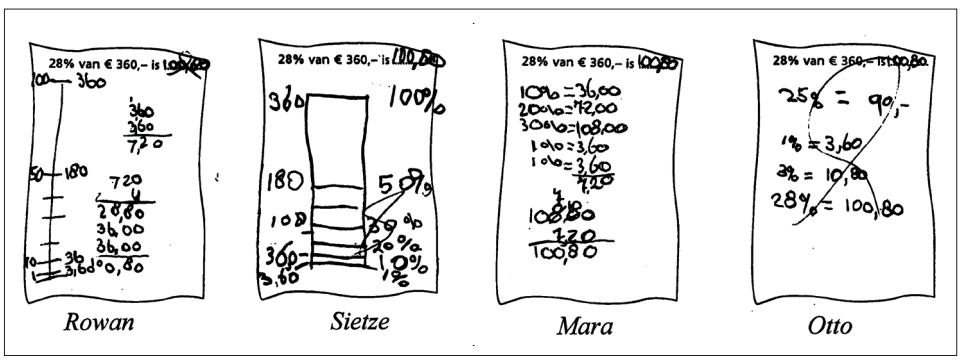


Fig. 4.3: Voorbeeld van het gebruik van hulpnotaties bij een toetsopgave rond procenten (28% van € 360,- is ...) eind groep 7, afkomstig uit het try outmateriaal van Wis en Reken. Bij de twee voorbeelden links wordt het model van de strook (cq. dubbele getallenlijn) gebruikt, rechts staat een berekening in rekentaal genoteerd.

Ongeveer tezelfdertijd vond een studie plaats naar andere, reeds eerder ontwikkelde didactische aanpakken op het gebied van het meercijferige vermenigvuldigen. Dit betrof onder meer de aanpakken die in verschillende wiskobas-publicaties worden beschreven, en de aanpakken zoals die in andere reken-wiskundemethoden worden gehanteerd. Ook werden de resultaten van een aantal internationale onderzoeken rond het meercijferige vermenigvuldigen bestudeerd, met name onderzoeken die zich richtten op het in kaart brengen van de informele eigen oplossingswijzen van leerlingen, en op de vraag hoe het onderwijs bij dergelijke oplossingswijzen zou kunnen aansluiten. In de hoofdstukken 2 en 3 werd over de resultaten van deze studie en over mogelijke consequenties voor het eigen onderzoek reeds uitgebreid gerapporteerd.

Op basis van deze eerste ideeën vond daarna een aantal gedachte-experimenten plaats waarbij overwogen werd hoe leerlingen op bepaalde probleemsituaties zouden kunnen reageren, en op welke wijze geschikte oplossingswijzen en notatievormen tot ontwikkeling zouden kunnen komen als resultaat van een samenspel van probleemoplossende activiteiten van leerlingen zelf, en van interactieve besprekings- en reflectiemomenten waarin dergelijke activiteiten onder leiding van de leraar met de hele groep doordacht en geanalyseerd zouden kunnen worden. Daarbij werd geprobeerd om een zo goed mogelijk beeld te vormen van de wijze waarop leerlingen bepaalde schematische voorstellingen van situaties (zoals een situatie waarbij in een rondvaartboot 36 passagiers zichtbaar zijn die allemaal € 37,50 betalen voor een rondvaart) zouden kunnen aangrijpen om tot geschikte oplossingen en daarbij passende notatievormen te komen. In hoofdstuk 5 van deze studie zal nader worden stilgestaan bij de vraag tot welke bevindingen dit in eerste instantie leidde en hoe een en ander tot eerste aanzetten voor een beoogd onderwijsleertraject leidde.

Om een beter idee te krijgen van de juistheid van deze eerste aanzetten, en om nieuwe, aanvullende ideeën te ontwikkelen, werd op een drietal scholen (waarvan twee aan het onderwijsexperiment zouden deelnemen) een vooronderzoek gehouden. Hierbij legde de onderzoeker groepjes van drie tot vijf leerlingen een aantal probleemsituaties voor die mogelijk aanleiding konden geven tot de ontwikkeling van de veronderstelde oplossingsstrategieën en notatievormen. In eerste instantie werden deze gesprekken open gehouden, in tweede instantie werd nagegaan wat het effect was van bepaalde interventies waarbij aangestuurd werd op het gebruik van beoogde oplossingsstrategieën en notatievormen. Zoals in hoofdstuk 5 nader zal worden beschreven, leverde dit waardevolle aanwijzingen op omtrent de vraag hoe

zwakkere leerlingen op weg geholpen zouden kunnen worden en welke misconcepties ten aanzien van te gebruiken oplossingsstrategieën er soms onder leerlingen leven. Zie het voorbeeld hieronder in fig. 4.4.

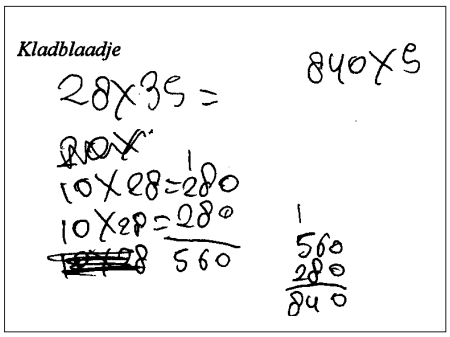


Fig. 4.4: Voorbeeld van een misconceptie bij een leerling die tijdens het vooronderzoek werd geconstateerd. De leerling rekent eerst correct 10x28 uit, nog eens 10x28 en nog eens 10x28. Daarna telt ze deze subtotalen op en wil ze het totaal nog eens met 5 vermenigvuldigen.

Naar aanleiding van deze eerste, kleinschalige onderwijsexperimenten vonden vervolgens nieuwe gedachte-experimenten plaats rond de vraag hoe het beoogde onderwijsleertraject het beste opgezet zou kunnen worden. Aansluitend volgde een nadere uitwerking daarvan in de vorm van in het onderwijs te gebruiken contexten en probleemsituaties, door de leerlingen te ontwikkelen oplossingswijzen en notatievormen, te gebruiken modellen, enzovoorts. Tevens werd een beschrijving van de globale opzet van het beoogde onderwijsleertraject gemaakt die aan de aan het naderhand uit te voeren grootschaligere en uitgebreidere onderwijsexperiment deelnemende scholen en leraren zou kunnen worden voorgelegd. Impliciet bevatte deze beschrijving, die herhaalde malen werd aangepast en bijgesteld, een voorlopige lokale onderwijstheorie die naderhand het aangrijpingspunt ging vormen voor reflectie op gebeurtenissen die zich in de praktijk voordeden, oplossingswijzen van leerlingen, interventies van leraren tijdens lesactiviteiten, en zo meer.

4.3 De experimentele fase

In het verlengde van deze activiteiten werd een opzet voor het eigenlijke onderwijsexperiment gemaakt. Allereerst werd overwogen hoe groot de groep deelnemende leerlingen zou moeten zijn. Aan de ene kant kon deze groep niet al te groot zijn vanwege het feit dat dit qua logistiek, begeleiding van leraren en verzamelen van praktijkgegevens moeilijk te behappen zou zijn. Aan de andere kant leek het gewenst

om op z'n minst meerdere scholen te laten deelnemen, zodat de resultaten van het experiment niet al te zeer afhankelijk zouden zijn van toevallige omstandigheden op een of twee scholen. Uiteindelijk werd besloten om te kiezen voor vijf scholen met bij voorkeur uiteenlopende populaties waaronder in ieder geval twee of drie scholen met nogal wat leerlingen uit sociaal zwakkere en allochtone milieus.

Een tweede keuze betrof de reken-wiskundemethode op de betreffende scholen. Overwogen werd dat het grote voordelen zou kunnen hebben om scholen te kiezen met een methode waarin hoofdrekenen en meer gestileerde varianten daarvan door het hele programma heen een voorname plaats innemen, en waarin ook het gebruik van informele hulpnotaties min of meer gemeengoed voor de leerlingen zou zijn. Op grond van deze overwegingen werd gekozen voor vijf scholen die met de methode Wis en Reken werkten. Deze methode besteedt veel aandacht aan de groep zwakkere leerlingen, is gericht op het voorkómen van afhakers, houdt een betrekkelijk laag leertempo aan, en maakt leerlingen grondig vertrouwd met het gebruik van het 'kladblaadje' als mogelijkheid voor het noteren van tussenstappen en –antwoorden. Qua leerstofinhoud is er door alle leerjaren heen centrale aandacht voor getalgevoel en hoofdrekenen. In samenspraak met de uitgever van deze methode en na contacten met enkele schoolbegeleidingsdiensten werden in totaal acht scholen aangezocht die zoveel mogelijk aan de gestelde criteria leken te voldoen. Daarvan stemden vijf scholen in met deelname aan het experiment, hetgeen uiteindelijk tot een onderzoekspopulatie van 112 leerlingen leidde. De vijf scholen in kwestie bevonden zich in uiteenlopende plaatsen in Nederland, te weten Dordrecht, Enkhuizen, Hoorn, Katwijk en Leiderdorp. Een van deze scholen betrof een school met een overwegend allochtone leerlingenpopulatie (school 300), terwijl de leerlingen op een andere school (school 200) voornamelijk uit (autochtone) sociaal zwakkere milieus kwamen. Zie fig. 4.5 voor een overzicht van het algemene vaardigheidsniveau van de leerlingen aan het eind van groep 6 voor rekenen-wiskunde zoals dat uit de toetsen van het leerlingvolgsysteem van het Cito naar voren kwam[3].

Om voldoende informatie te hebben over de stand van zaken bij de leerlingen op deze scholen voorafgaand aan het experiment, werd aan alle leerlingen een beginvoorwaardentoets afgenomen ongeveer drie maanden voor aanvang van het onderwijsexperiment. Tevens werden gegevens verzameld over het vaardigheidsniveau van de leerlingen zoals dat naar voren kwam in de Cito-gegevens van het leerlingvolgsysteem. Enerzijds zouden al deze gegevens gebruikt kunnen worden om een mogelijk verband te leggen tussen bijvoorbeeld sterk tegenvallende of juist heel gunstige

	Niveau A	Niveau B	Niveau C	Niveau D	Niveau E
School 100 (n=22)	11	8	3		
School 200 (n=28)	4	6	7	9	2
School 300 (n=18)	1	3	8	5	1
School 400 (n=19)	5	9	4	1	
School 500 (n=25)	9	11	3	2	
Alle scholen samen (n=112)	30	37	25	17	3

Fig. 4.5: Overzicht van het vaardigheidsniveau van de aan het onderwijsexperiment deelnemende leerlingen eind groep 6 volgens de gegevens van het leerlingvolgsysteem.

resultaten tijdens het experiment en een zeer laag dan wel hoog instapniveau van de leerlingen. Anderzijds zouden ze naderhand benut kunnen worden om de mate van progressie van de leerlingen tijdens het experiment te relateren aan het beginniveau om bijvoorbeeld te achterhalen in hoeverre de groep zwakkere leerlingen meer of juist minder profijt van het gevolgde onderwijs gehad zou hebben dan de groep betere leerlingen.

Om de alledaagse gang van zaken in het onderwijs op de vijf scholen zo min mogelijk te verstoren, werden de lessen uit de experimentele leergang zo goed mogelijk ingepast in het programma van de methode waarbij activiteiten in het programma die toch al betrekking hadden op het meercijferige vermenigvuldigen, vervangen werden door activiteiten uit de experimentele leergang. Hoewel dit in sommige gevallen tot een wat uitgebreidere activiteit op de betreffende dag leidde, werd ernaar gestreefd de omvang van de activiteiten zoveel mogelijk overeen te laten komen met die van de oorspronkelijke activiteiten. Ook het aantal activiteiten werd niet vergroot. Omdat in Wis en Reken in totaal ruim vijftien interactieve lesactiviteiten aan het vermenigvuldigen worden besteed in de periode voorafgaand aan de introductie van de cijferprocedure, betekende dit dat in het experiment ook ruimte was voor ongeveer vijftien lesactiviteiten. Via overzichten van deze activiteiten die aan de betrokken leraren werden verstrekt, werd inpassing in het reguliere onderwijsprogramma vergemakkelijkt. Voor een voorbeeld van zo'n overzicht zie fig. 4.6.

Een consequentie van deze opzet was overigens wel dat de leerstof rond het vermenigvuldigen met meercijferige getallen op een betrekkelijk laat tijdstip werd aangeboden, namelijk tijdens de maanden september tot en met december in groep 7.

OVERZICHT LESSEN BLOK 1 T/M 3 VOOR DE AANGEPASTE LEERLIJN 'VERMENIGVULDIGEN MET GROTERE GETALLEN'

	Blok 1	Blok 2				Blok 3	
Dagen met aangepaste lessen	dag 8	dag 2	dag 4	dag 8	dag 10	dag 3	dag 9/10

Blok 1, dag 8: Op de veemarkt (ipv. Even oefenen: het 'kleine algoritme')
Blok 2, dag 2: Z.W.: Criteriumtoets (1e afname; ipv. Z.W. sommen tot 1000/spiegelen)
Blok 2 dag 4: In het magazijn (ipv. Een groter schoolplein)
Blok 2, dag 8: In de boomgaard (ipv. Even oefenen: sommenspin bij 8x9)
Blok 2, dag 10: Posterpresentatie (ipv. Even proberen: getallen maken)
Blok 3, dag 3: Schoolboeken inkopen (ipv. Schoolboeken inkopen uit de Handleiding Wis en Reken)
Blok 3, dag 9/10: Welke som? (in aanvulling op Z.W.-activiteiten)

Fig. 4.6: Overzicht van het eerste deel van de vervangende lesactiviteiten dat aan de aan het experiment deelnemende leraren werd verstrekt. De blokken waarvan in het overzicht sprake is zijn de leerstofblokken van twee weken waarmee in Wis en Reken wordt gewerkt.

Met de scholen werd de mogelijkheid besproken om ter voorbereiding en evaluatie van het onderwijsexperiment met een zekere regelmaat met alle betrokken leraren bij elkaar te komen. In eerste instantie zouden zulke bijeenkomsten gebruikt kunnen worden voor voorscholing, naderhand zou het accent meer op het uitwisselen van ervaringen en het evalueren van resultaten kunnen komen te liggen. In de praktijk bleek zo'n intensieve opzet echter niet haalbaar omdat dit voor de leraren een veel te grote tijdsinvestering met zich mee zou brengen. Daarom werd volstaan met één inleidend gesprek van anderhalf uur op elke school, gevolgd door regelmatige observaties van de onderzoekers[4] tijdens de experimentele lessen. Na afloop van zo'n les zou er, als de tijd dit toeliet, dan af en toe nog een tussentijds evaluatiegesprek kunnen plaatsvinden. In de praktijk bleek zich dit veelal te beperken tot korte gesprekken tijdens de koffiepauze. Al naar gelang de voorkeur van de school werd ook afgesproken dat de onderzoekers van tijd tot tijd zelf een lesactiviteit met het experimentele materiaal konden verzorgen. Op twee van de vijf scholen is dit inderdaad gebeurd.

Het verzamelen van gegevens over het verloop van het experiment

Voorafgaand aan het experiment werd verder nadrukkelijk overwogen welke gegevens tijdens het experiment verzameld zouden worden. In grote lijnen werd voor de volgende categorieën gekozen:

- Gegevens uit drie voor dit doel ontwikkelde criteriumtoetsen (die aan het begin, halverwege en aan het eind van het experiment zouden worden afgenomen);
- Gegevens uit mondelinge een-op-een interviews met een aantal leerlingen direct na afloop van de toetsafnames, vast te leggen met een cassetterecorder;
- Gegevens over het lesverloop in de vorm van lesobservaties en video-opnamen, ook in het geval van een les die door de onderzoekers zelf werd gegeven ;
- Gegevens in de vorm van de door de leerlingen tijdens de experimentele lesactiviteiten gemaakte werkbladen, gebruikte kladblaadjes en beschreven posters;
- Additionele informatie verkregen in gesprekjes met de leraren, via foto's van uitwerkingen op het bord (zie fig. 4.7 voor een voorbeeld), informele gesprekjes met leerlingen, en zo meer.

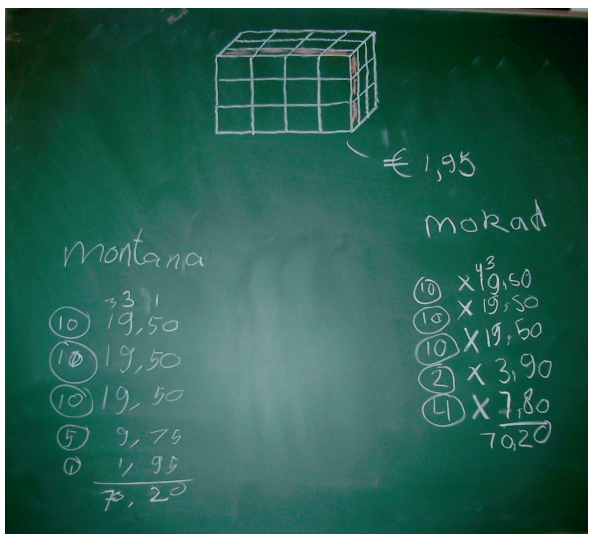


Fig. 4.7: Voorbeeld van twee door leerlingen zelf op het bord genoteerde oplossingswijzen, gefotografeerd tijdens een van de experimentele lessen. De betreffende opgave heeft betrekking op de totale kosten van een stapel met 36 pakjes boter van € 1,95 per pakje.

De drie criteriumtoetsen werden zo samengesteld dat de inhoud ervan een getrouwe afspiegeling vormde van de leerstof rond het meercijferige vermenigvuldigen die in het experimentele onderwijsleertraject aan de orde werd gesteld, waarbij een onderscheid werd aangebracht tussen opgaven waarbij alle objecten in kwestie gevisualiseerd zijn (zoals bij de repen en pakken koffie in fig. 4.8) en opgaven waarbij dat niet het geval was (zoals bij de boomgaard en het parkeerterrein in fig. 4.8). De getallen in de opgaven werden zo gekozen dat er zowel opgaven van het type tweecijferig maal tweecijferig als van het type driecijferig maal tweecijferig waren. Verder werden enkele opgaven opgenomen die sterk uitnodigen tot het gebruik van de compensatiestrategie zoals in het geval van 12 flessen limonade van € 1,95 per fles,

alsmede een opgave waarbij de leerlingen zelf een vermenigvuldigstructuur moesten bedenken rond de vraag hoe lang en hoe breed een rechthoekig tegelplein zou kunnen zijn met in totaal 1200 tegels. Als beginopgave in de toetsen werd steeds een eenvoudigere opgave genomen die niet tot de eigenlijke leerstof behoorde maar die de leerlingen gelegenheid gaf om er 'even in te komen'. Zie voor een voorbeeld van een criteriumtoets Bijlage 1.

Om de resultaten van alle drie de toetsen optimaal vergelijkbaar te maken, werd ervoor gekozen om de getallen in de drie toetsen steeds hetzelfde te houden maar daarbij wel de context te variëren. Zo betrof opgave 2b steeds de som 24x68 met zichtbare objecten, maar de ene keer ging het om repen chocolade, en de andere keer om pakken koffie. Evenzo betrof opgave 4c steeds de som 45x128, maar de ene keer werd een context van een boomgaard gebruikt, de andere keer een context van een parkeerterrein. Zie de opgaven in fig. 4.8.

Een overweging om de leerlingen reeds in de eerste criteriumtoets te confronteren met opgaven waarvan ze eigenlijk verondersteld werden deze pas tegen het einde van de leergang vlot en efficiënt te kunnen oplossen, bestond erin dat de leerstof op een betrekkelijk laat tijdstip werd aangeboden, en dat er dus van meet af aan waarschijnlijk een categorie leerlingen zou zijn die al tot correcte oplossingen zou komen[6].

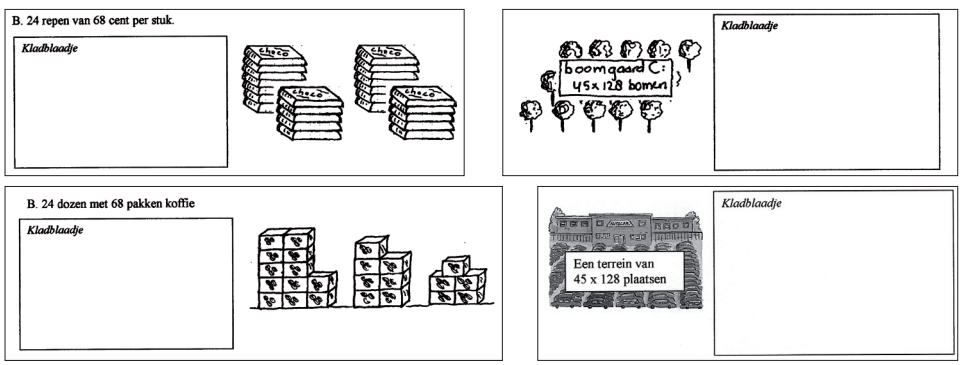


Fig. 4.8: Vier voorbeelden van toetsopgaven uit de Criteriumtoetsen 2 en 3. De bovenste twee zijn afkomstig uit toets 2, de onderste twee uit toets 3. Bij de linker opgaven zijn de objecten in kwestie nog helemaal zichtbaar, bij de rechter opgaven is dat niet het geval. De getallen in de linkeropgaven zijn identiek, alleen de context verschilt. Hetzelfde geldt voor de twee rechter opgaven.

De verwachting was dat het aan de hand van de gegevens uit de drie criteriumtoetsen mogelijk zou zijn een goed beeld van de progressie te krijgen die de leerlingen zouden doormaken op het punt van goedscores, aanpakgedrag en notatiegedrag. In aanvulling hierop zouden lesobservaties en video-opnamen informatie kunnen geven over de begripsmatige problemen waar leerlingen mogelijk tegenaan zouden lopen, de notatievormen die zij wellicht zelf zouden ontwikkelen, de interventies die leraren in de loop van een les zouden doen, de interactie die zich tijdens een les zou afspelen, de samenwerking tussen leerlingen in het geval er in een groepje een gezamenlijke oplossingswijze op een poster weergegeven diende te worden, en zo meer.

Tegelijk met het opzetten en voordenken van het onderwijsexperiment werd het eerste deel van het beoogde onderwijsleertraject uitgewerkt in concrete werkbladen, lesbeschrijvingen, en overzichten in verband met de planning van het onderwijs. Naderhand, toen een flink aantal praktische ervaringen waren opgedaan met dit eerste deel van de leergang, werd het tweede en laatste deel van de leergang ontworpen. Dit had het voordeel dat nog een aantal bevindingen uit de praktijk meegenomen konden worden bij het ontwikkelen van dit tweede deel. In hoofdstuk 5 zal deze ontwikkeling van de leergang nader beschreven worden.

Tijdens het experiment werden de hierboven genoemde gegevens op drie van de vijf scholen door de ene onderzoeker verzameld, en op de twee overige scholen door de andere. Steeds werden tamelijk uitvoerige lesverslagen opgesteld om de feitelijke gang van zaken te registreren en om eventuele bijstellingen van het nog te ontwikkelen deel van het onderwijsleertraject aan te kunnen brengen. Van tijd tot tijd vonden voorts in breder verband bezinningsmomenten plaats waarbij de ontwikkeling van het aanpakgedrag besproken werd, gereflecteerd werd op begripsmatige problemen die zich voordeden, enzovoorts. In hoofdstuk 6 zijn een aantal van de meest pregnante praktijkvoorvallen bijeengebracht zoals die tijdens het experiment gesignaleerd werden.

4.4 De retrospectieve fase

Na afloop van het experiment werd in de eerste plaats een analyse gemaakt van de resultaten zoals die in de drie gemaakte criteriumtoetsen tot uitdrukking kwamen. Van alle leerlingen die volledig aan het experiment hadden deelgenomen werden de goedscores en het aanpakgedrag in kaart gebracht. Om dat laatste mogelijk te

maken, werd een overzicht samengesteld van alle soorten oplossingsstrategieën die in de loop van het experiment door leerlingen gebruikt werden, ingedeeld in een aantal hoofdcategorieën en geïllustreerd met voorbeelden. De indeling die daarbij werd aangehouden komt grotendeels overeen met de indeling die in verschillende internationale onderzoeken wordt gehanteerd, zoals in de onderzoeken van Ambrose c.s. (2003) en Murray c.s. (1994) die in hoofdstuk 3 van deze studie besproken zijn. Soms werd ervoor gekozen om sterk verwante soorten strategieën in één categorie onder te brengen. Dit was bijvoorbeeld het geval voor de strategieën herhaald optellen en verdubbelen. Zie de beide voorbeelden in fig. 4.9.

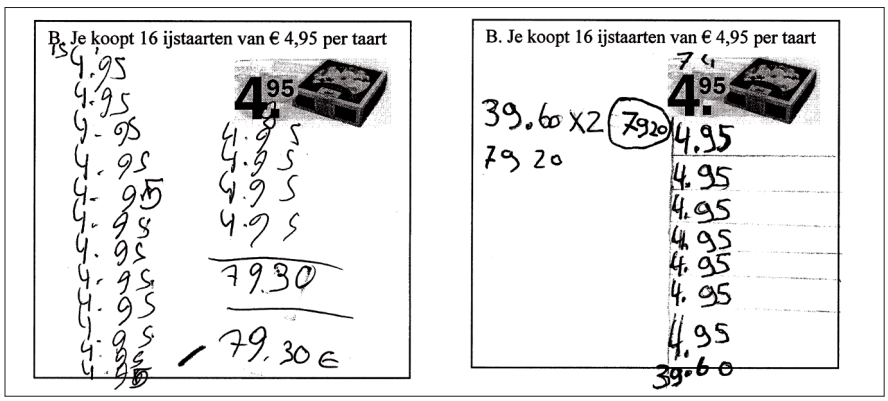


Fig. 4.9: Illustratie van de categorie strategieën 'herhaald optellen en verdubbelen' aan de hand van twee voorbeelden. In het linker voorbeeld is sprake van zuiver herhaald optellen, in het rechter voorbeeld van een combinatie daarvan met verdubbelen.

In samenhang hiermee vond een contrastanalyse plaats waarbij de ontwikkeling van de goedscores van de 25% zwakste leerlingen geplaatst werd tegenover die van de 25% beste leerlingen. De uitkomsten van deze analyses worden in hoofdstuk 7 besproken. Daarnaast wordt in dat hoofdstuk een analyse besproken die werd gemaakt van de verschillen tussen jongens en meisjes. Een andere belangrijke graadmeter voor de mate van succes van de experimentele leergang vormde de ontwikkeling van het notatiegedrag van de leerlingen. Om deze goed te kunnen beoordelen, werd een speciaal instrument ontwikkeld aan de hand waarvan het notatiegedrag op twee essentiële criteria, te weten de mate van compactheid en de mate van overzichtelijkheid van de gehanteerde notatievormen, beoordeeld kon worden. Nadat de bruikbaarheid en eenduidigheid van dit instrument enkele malen beproefd was, werd onderzocht in hoeverre op het gebied van het notatiegedrag sprake was van

een positieve ontwikkeling. De resultaten van dit deel van het onderzoek worden in hoofdstuk 8 beschreven.

Op basis van de complete verzameling van gegevens werd vervolgens een retrospectieve analyse uitgevoerd waarbij geprobeerd werd te achterhalen op welke punten de in de voorbereidende fase geformuleerde verwachtingen met betrekking tot het verloop en de leereffecten van het beoogde onderwijsleertraject waren uitgekomen. De aandacht ging hier met name ook uit naar zaken die juist niet volgens verwachting waren gelopen, alsmede naar gebeurtenissen en ontwikkelingen tijdens het doorlopen traject die moeilijk te duiden waren en die aanleiding gaven tot nadere bezinning op bepaalde aspecten van het traject. De bevindingen waartoe deze retrospectieve analyse leidde, werden vervolgens in een breder perspectief geplaatst door ze te verbinden met de overkoepelende onderwijstheorie en met de bevindingen uit andere onderzoeken die betrekking hebben op het onderhavige leerstofgebied. Op basis hiervan werd een aangescherpte en nader uitgewerkte lokale onderwijstheorie geformuleerd. Daarbij werd speciaal ingegaan op een aspect dat van cruciaal belang geacht wordt voor op realistische leest geschoeide onderwijsleerprocessen dat juist in de hoogste leerjaren van het basisonderwijs nog enigszins onderbelicht is gebleven: het niveaukarakter van de leergang. In hoofdstuk 9 wordt over deze zaken nader gerapporteerd.

Ontwikkelwerk zoals dat in het kader van deze studie plaatsvindt is uiteraard nooit af. Er blijven altijd twijfels over bepaalde zaken bestaan terwijl er in de loop van het onderzoek ook weer nieuwe vragen zijn die naar voren komen, alternatieven die zich aandienen, aanknopingspunten die gevonden worden, en zo meer. In de afsluitende paragrafen van hoofdstuk 9 van deze studie zijn daarom behalve de voornaamste bevindingen ook een aantal discussiepunten en aanbevelingen opgenomen die voortvloeiden uit het doorgemaakte onderzoeksproces.

4.5 Enkele grondkenmerken van ontwikkelingsonderzoek nader uitgewerkt

In deze laatste paragraaf licht ik de gehanteerde onderzoeksmethode verder toe door te laten zien op welke wijze twee van de grondkenmerken die in de eerste paragraaf zijn onderscheiden, in het onderzoek zijn uitgewerkt. Dit betreft het kenmerk van de rol van gedachte-experimenten en dat van het cyclische karakter van het

onderzoeksproces. Van de andere drie genoemde kenmerken zijn het kenmerk met betrekking tot de gerichtheid op het beschrijven van het proces en het kenmerk aangaande de gerichtheid op theorievorming hierboven reeds voldoende uitgewerkt. Op het kenmerk van de betrouwbaarheid van de gehanteerde onderzoeksmethode via navolgbaarheid kom ik in het afsluitende hoofdstuk in een meer algemene reflectie op de mogelijkheden en moeilijkheden van ontwikkelingsonderzoek nog terug.

De rol van gedachte-experimenten

Over de wijze waarop het eerste hierboven onderscheiden grondkenmerk van ontwikkelingsonderzoek in het onderzoek is uitgewerkt, namelijk dat van de rol van gedachte-experimenten, kan het volgende gezegd worden. Gedachte-experimenten zijn bepaald geen nieuw fenomeen. Zoals Freudenthal (1988) stelt[7], begint elke serieuze vorm van onderwijs met het van tevoren overdenken van de mogelijkheden die bepaalde probleemsituaties, vragen of instructievormen met zich mee kunnen brengen om leerlingen beoogde kennis, vaardigheden of inzichten te doen verwerven. In het kader van ontwikkelingsonderzoek gaan zulke experimenten echter verder doordat ze zo bewust mogelijk worden uitgevoerd en zo expliciet mogelijk worden beschreven. Dat maakt het immers mogelijk om er naderhand, nadat de in gedachten uitgevoerde experimenten in de praktijk zijn getoetst, op terug te komen en de juistheid van aannames die in de gedachte-experimenten besloten lagen, te heroverwegen en aan te scherpen. Zodoende kan een proces van afwisselende gedachte-experimenten en onderwijsexperimenten bijdragen aan theorievorming.

Een eerste voorbeeld dat typerend is voor de manier waarop gedachte-experimenten in het onderhavige onderzoek een rol hebben gespeeld, heeft betrekking op de vraag op welke wijze leerlingen optimaal gestimuleerd zouden kunnen worden tot het zelf ontwikkelen van informele notatievormen. Overwogen werd dat met name vermenigvuldigsituaties met een sterk visueel element, waarin op een voor de hand liggende manier via allerlei vormen van herhaald optellen en verdubbelen subtotalen bepaald en tussenstappen genoteerd worden, hiertoe aanleiding zouden kunnen geven. Er werd een inventarisatie gemaakt van in aanmerking komende typen situaties, zoals rechthoeksituaties (een plein van 28 keer 35 tegels), groepjessituaties (28 dozen met 35 pakken koffie), lijnsituaties (een pijpleiding bestaande uit 28 pijpen met een lengte van 35 meter), en verhoudingssituaties (28 boeken van 35 euro). Vastgesteld werd dat al deze situaties in principe goede mogelijkheden leken te bieden tot het uitlokken van de beoogde informele notatievormen, maar dat nog afgewacht moest worden in hoeverre dit in de praktijk daadwerkelijk het geval

zou zijn. Om meer aan de weet te komen over de aanpakken en reacties die dergelijke situaties in de praktijk oproepen, werd de leerlingen in het vooronderzoek dat daarna plaatsvond, een aantal situaties in visuele vorm voorgelegd. Daarbij bleek dat rechthoeksituaties in zoverre niet het gewenste effect opleverden, dat leerlingen sterk geneigd leken om zulke situaties direct als een vermenigvuldiging op te vatten die op een formeel niveau, los van de tekening, opgelost werd. Dit in tegenstelling tot verhoudings- en groepjessituaties die meer leken uit te lokken tot elementaire strategieën in de sfeer van herhaald optellen en verdubbelen, en tot het gebruik van bij de tekening passende hulpnotaties. Zie figuur 4.10 voor twee voorbeelden van situaties die al dan niet het gebruik van hulpnotaties uitlokten.

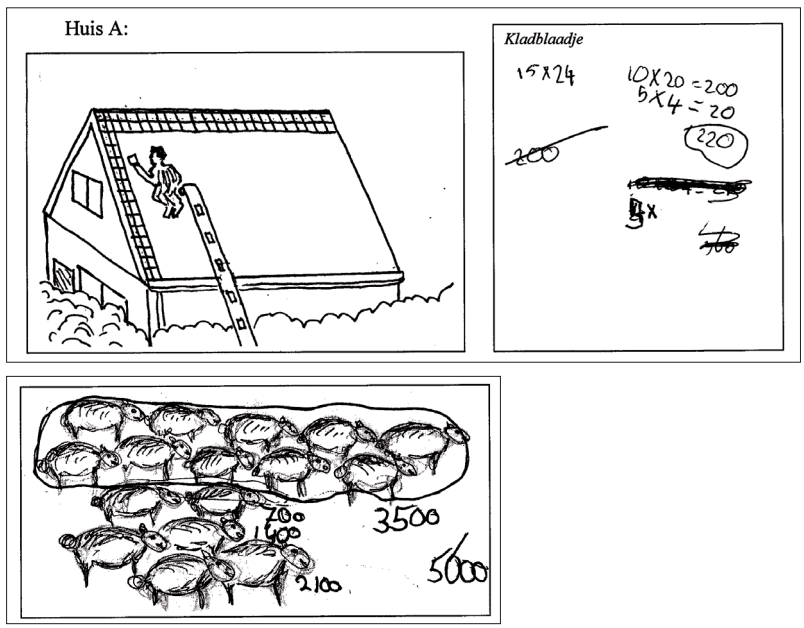


Fig. 4.10: Twee voorbeelden van situaties en oplossingen uit het vooronderzoek. Boven een rechthoeksituatie (hoeveel pannen op een dak met 15 rijen van 24 dakpannen?) die door een leerling op een formeel niveau aangepakt wordt via de onjuiste strategie van het 'verkeerd splitsen'.Onder een verhoudingssituatie (hoeveel kosten 16 schapen van 350 euro?) waarbij een leerling gebruik makend van de tekening tot een (correcte) oplossing is gekomen.

Op grond van deze empirische bevindingen (die in hoofdstuk 5 uitgebreid besproken worden) werd besloten om de nadruk in het eerste deel van het onderwijsleertraject vooral te leggen op de twee typen situaties (verhoudings- en groepjessituaties)

die het gebruik van passende hulpnotaties het meest leken uit te lokken. Op deze wijze werd in een betrekkelijk korte tijdsspanne via de combinatie van een gedachte-experiment gevolgd door een onderwijsexperiment (cq. een korte reeks daarvan) kennis ontwikkeld over een cruciaal element in de experimentele leergang. Het ligt voor de hand dat juist in dit stadium van het onderzoek, tijdens de voorbereidende fase, gedachte-experimenten van doorslaggevend belang waren om (een deel van) het fundament voor de leergang te leggen.

Een tweede typerende voorbeeld van een gedachte-experiment heeft betrekking op de experimentele fase. Toen bij de uitvoering van lesactiviteiten uit de leergang steeds meer informatie beschikbaar kwam over de wijze waarop aanpakgedrag en notatiegedrag zich in de praktijk ontwikkelden, bleek dat bepaalde elementen uit de leergang minder goed functioneerden dan vooraf was ingeschat[8]. Een daarvan had betrekking op het doorzien van de nulregel[9]. Van tevoren was overwogen dat het voor de progressie van de leerlingen belangrijk was dat ze deze regel goed doorzagen en bijgevolg in staat waren om opgaven als 10x48, 10x350 en 10x€4,95 via het plaatsen van een nul cq. het verschuiven van de komma vlot op te lossen. In het vooronderzoek was al gebleken dat sommige leerlingen deze regel, ondanks het feit dat deze in groep 6 enkele keren expliciet in het onderwijs aan de orde was geweest, niet volledig doorzagen. Om het inzicht te versterken waren daarom in de eerste periode van de leergang enkele specifieke activiteiten opgenomen. Tijdens het onderwijsexperiment bleek echter dat deze activiteiten maar ten dele hun doel bereikten. Sommige leerlingen bleken tamelijk lang vast te houden aan betrekkelijk primitieve strategieën waarbij met kleine groepjes werd gewerkt in plaats van met de beoogde groepjes van 10. Dit deed zich in het bijzonder nogal eens voor in geldsituaties waarin bijvoorbeeld de prijs van 14 pakken koffie van € 4,95 bepaald moest worden. Een deel van de leerlingen bleek hier de nulregel te omzeilen door herhaald op te tellen of te verdubbelen, of door met kleine groepjes te werken. Ook het onjuist gebruiken van de nulregel door 10 x € 4,95 is € 40,95 te doen, kwam voor. Zie de voorbeelden in figuur 4.11[10].

Ook enkele lessen later, bij de afname van de tweede criteriumtoets, bleek dat bij sommige leerlingen fouten optraden waarbij het niet doorzien van de nulregel vermoedelijk een rol speelde. Al met al leidden deze bevindingen tot de constatering dat de noodzaak niet voldoende was onderkend om de algemene geldigheid van de nulregel expliciet als probleem aan de orde te stellen. Overwogen werd op welke wijze dit alsnog het beste zou kunnen gebeuren. Een mogelijkheid zou kunnen zijn

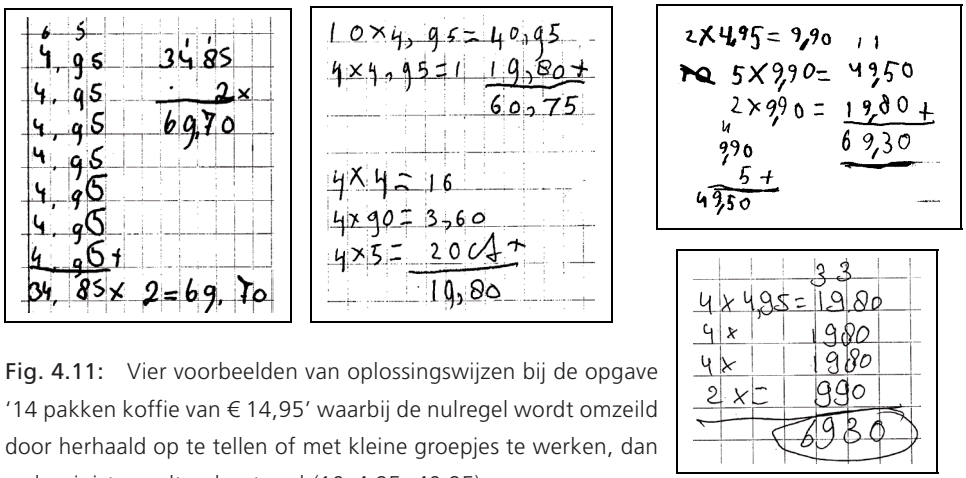


Fig. 4.11: Vier voorbeelden van oplossingswijzen bij de opgave '14 pakken koffie van € 14,95' waarbij de nulregel wordt omzeild door herhaald op te tellen of met kleine groepjes te werken, dan wel onjuist wordt gehanteerd (10x4,95=40,95).

om een specifieke context op te roepen waarin bijvoorbeeld de prijs van steeds 10 objecten tegelijk bepaald diende te worden. Een andere mogelijkheid was om de strategieën van leerlingen die wel met groepjes van 10 werkten (en dus de nulregel zonder problemen hanteerden) te vergelijken met de strategieën van leerlingen die nog altijd met kleine groepjes werkten. Naar aanleiding daarvan zou dan besproken kunnen worden of dat nu zo maar mag, een nul achter een getal plaatsen; en hoe dit dan met geldgetallen zit. Kortom: een soort onderzoekje naar 'wat er met de getallen gebeurt als je deze met 10 vermenigvuldigt'. Daarbij zou nader aan het licht kunnen treden hoe de nulregel onderbouwd kan worden door naar de positiewaarden in een getal te kijken (de eenheden worden tientallen, de tientallen honderdtallen, enzovoorts; er blijven dus automatisch 'nul eenheden' over). Uiteindelijk werd voor deze laatste insteek gekozen waarbij enkele hulpgesprekken plaatsvonden met groepjes leerlingen die in de tweede criteriumtoets (te) weinig progressie getoond hadden. De resultaten daarvan bleken in hoge mate bevredigend te zijn doordat veel van deze leerlingen in de reguliere lessen die daarna volgden, de nulregel duidelijk beter leken te doorzien en toe te passen.

Aldus gebeurde het dus dat enkele opmerkelijke praktijkvoorvallen aanleiding gaven om aanvankelijke aannames te heroverwegen en om op basis van reflectie in combinatie met aanvullende nieuwe gedachte-experimenten, enkele hulpactiviteiten met groepjes leerlingen in te lassen om een omissie in de experimentele leergang te corrigeren.

Het cyclische karakter van het onderzoeksproces

In de hierboven gegeven beschrijving van activiteiten in de drie fasen tekent zich al enigszins af hoe de cyclische opeenvolging van ontwerpen en uitproberen in het onderzoek gestalte heeft gekregen. Voor ik daar nader op inga, volgen eerst enkele inleidende opmerkingen over dit punt. Freudenthal (1991) betoogde dat de cyclische afwisseling van gedachte-experimenten en onderwijsexperimenten als een wezenlijk kenmerk van ontwikkelingsonderzoek opgevat dient te worden. Hij stelde daarbij dat deze afwisseling des te efficiënter is naarmate de cyclus korter is:

'Practice, at least in education, requires a cyclic alternation of research and development, which can be more efficient the shorter the cycle. What was developed behind the desk is put to the test in the classroom in order to be analysed, and development is resumed with the results of this analysis'. (Freudenthal, 1991, p.159)

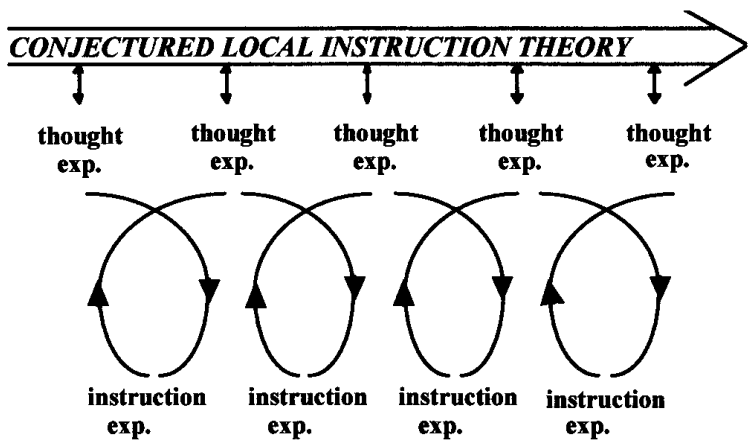


Fig. 4.12: Schematisch overzicht van de opzet van het onderzoeksproces bij ontwikkelingsonderzoek (afkomstig uit Gravemeijer en Cobb, 2006, p. 28)

Gravemeijer (1994) stelde in aanvulling hierop dat het juist het zo bewust mogelijk doorlopen van deze cyclische opeenvolging van ontwikkelen en experimenteren is, die tot theorievorming kan leiden. In een meer recente publicatie (Gravemeijer en Cobb, 2006) bracht hij deze opzet schematisch als volgt in beeld (zie fig. 4.12).

Wellicht is het zinvol om aan dit schema nog een element toe te voegen in de vorm van een activiteitenreeks gericht op de voortgaande constructie van de experimentele leergang.

Een praktisch probleem dat zich ook bij de opzet van het onderhavige onderzoek voordeed, is gelegen in het feit dat het, naarmate een onderwijsexperiment grootschaliger wordt en betrekking heeft op een langere tijdsperiode, steeds lastiger wordt om met korte cycli te werken. Zo lang gewerkt wordt met een kleine onderzoekspopulatie is het natuurlijk goed mogelijk om dit te doen. Gaat het echter om een onderzoek zoals in het onderhavige geval waarbij met vijf klassen tegelijk met in totaal 112 leerlingen gewerkt wordt en waarbij onderwijs verzorgd wordt over een periode voor zo'n drie tot vier maanden, dan is dat veel gecompliceerder en in de praktijk moeilijker uitvoerbaar. Daarom is gekozen voor een opzet waarbij in feite sprake was van drie cycli, namelijk die rond het vooronderzoek, rond het eerste deel van de leergang en rond het tweede deel van de leergang. Zie fig. 4.13 hieronder.

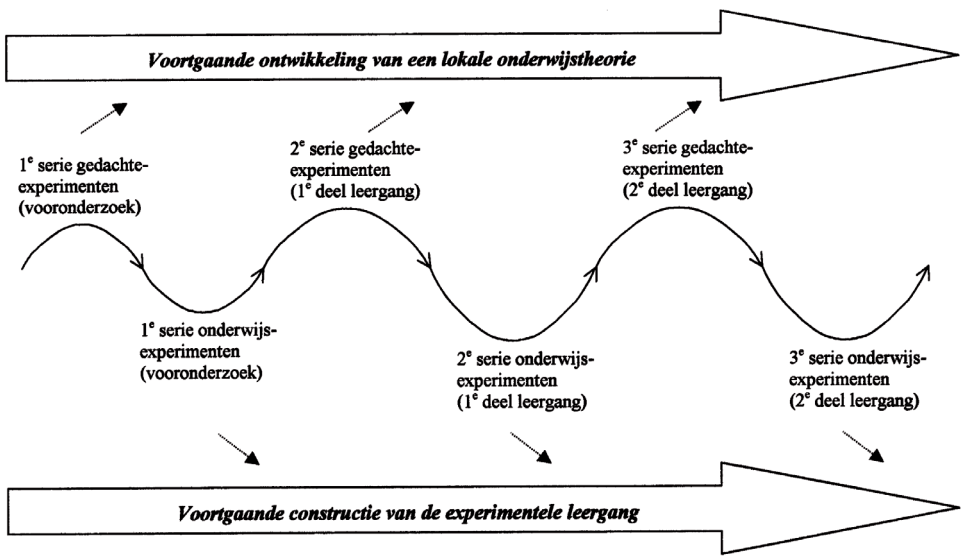


Fig. 4.13: Overzicht van de wijze waarop drie cycli van gedachte- en praktijkexperimenten in het onderzoek zijn opgenomen.

Een nadeel van een dergelijke grote 'golflengte' vormt het feit dat het niet goed mogelijk is om tamelijk direct in te spelen op wat zich in de praktijk aan ontwikkelingen voordoet omdat de onderwijsmaterialen die betrekking hebben op aansluitende lesactiviteiten, al geconstrueerd en geproduceerd zijn. Dat brengt ook het gevaar met zich mee dat wat zich daadwerkelijk in de praktijk voordoet, steeds verder gaat afwijken van wat van tevoren bedacht was en dat de uitvoerbaarheid en

relevantie van latere lessen steeds meer in het geding komt. De hierboven beschreven gebeurtenissen rond het niet goed doorzien van de nulregel door leerlingen laten zien dat dit gevaar zeker niet denkbeeldig is.

Daar staat tegenover dat het werken met een kleine onderzoekspopulatie waarbij de onderzoeker als het ware voortdurend over de schouder van de onderwijsgevende mee kan kijken naar het wel en wee van een beperkt groepje leerlingen, ook bezwaren heeft. Het risico bestaat dan dat de kennis die verkregen wordt met betrekking tot het beoogde onderwijsleerproces, te situatiespecifiek en te weinig algemeen bruikbaar is[11]. Ook kan het zijn dat de leraar in kwestie over dermate bijzondere kwaliteiten beschikt, dat de resultaten van het leerproces moeilijk als algemeen geldend gepresenteerd kunnen worden. Een opzet waarbij met betrekkelijke grote ontwikkelcycli wordt gewerkt bij een redelijk grote omvang van de onderzoekspopulatie, is derhalve zeker te rechtvaardigen.

voetnoten

1 Het materiaal voor de leerjaren 5 en 6 van deze methode werd voor een belangrijk deel door N. Boswinkel en F. Moerlands ontwikkeld, het materiaal voor de leerjaren 7 en 8 voornamelijk door C. Bergmans, K. Buijs en M. Torn.

2 De term 'kladblaadje' is een in Nederland vrij algemeen gebruikte term die verwijst naar het gebruik van hulpnotaties waarmee een leerling het eigen denken kan ondersteunen in situaties waarin helemaal uit het hoofd werken nog moeilijk is. Deze term heeft het voordeel dat hij voor leerlingen eenvoudig te begrijpen is. Daar staat tegenover dat hij wellicht negatieve associaties kan oproepen met 'kladwerk' en 'kladderen' als aanduidingen voor zeer slordig werk(en). Terwijl het gebruik van de bedoelde hulpnotaties juist bedoeld is als een belangrijke, positief te waarderen verworvenheid in de ontwikkeling van leerlingen. In Engeland is over het Britse equivalent van de term ('jottings') zelfs een verhitte discussie op internet ontstaan. Zie bijvoorbeeld het artikel '*To jot or not to jot*' van I. Thompson in Mathematics in school, 33(3), p. 6.

3 De gegevens uit deze tabel, verstrekt door de deelnemende scholen, laten zien dat de categorie betere leerlingen (De A- en B-leerlingen die samen 50% van de populatie dienen te omvatten) iets oververtegenwoordigd is. Interessant is verder dat er qua heterogeniteit grote verschillen zijn. Zo zijn er twee scholen met een sterk heterogene populatie waar juist de zwakkere leerlingen wat oververtegenwoordigd zijn (school 200 en 300) terwijl er ook twee scholen zijn (school 100 en 500) die veel homogener zijn en waarin de betere leerlingen enigszins domineren. Bij de analyse van de resultaten van het onderwijsexperiment in hoofdstuk 7 wordt nader ingegaan op deze verschillen.

4 Er wordt hier in meervoud over de onderzoekers gesproken omdat M. Beishuizen bij het observeren van de lessen, het begeleiden van de leerkrachten en het analyseren van de resultaten van het onderwijs tijdens het onderwijsexperiment op twee van de vijf scholen een belangrijke rol heeft gespeeld.

5 Het streven was om van elke les uit de leergang minimaal een of twee schriftelijke observaties te verkrijgen met daaraan toegevoegd voorbeelden van leerlingenmateriaal. In de praktijk waren het vooral de eerste acht tot tien lessen waarvan veel observaties werden gemaakt (bijvoorbeeld: van les 1 en 2 kwamen beide vier observaties tot stand). Video-opnamen werden aanzienlijk minder frequent gemaakt (eens per drie tot vier lessen); dit had vooral ook te maken met het feit dat het maken van dergelijke opnamen veelal de nodige reuring in de klas teweeg bracht die een rustig lesverloop soms in de weg kon staan.

6 Doordat er steeds een periode van 6 tot 8 weken tussen de toetsafnamen lag, werd de kans dat leerlingen opgaven (cq. getallen) uit een vorige toetsafname zouden herkennen, minimaal geacht.

7 Freudenthal baseerde zich hierbij onder andere op de wijze waarop gedachte-experimenten in het onderzoek van de natuurkundige Mach een rol speelden.

8 Zie voor een meer volledig overzicht van zaken die in de praktijk anders bleken te lopen dan vooraf was ingeschat, hoofdstuk 6 van deze studie.

9 Deze regel, ook wel tienregel genoemd, heeft betrekking op het feit dat er een nul achter een (heel) getal geplaatst kan worden indien dat getal met 10 wordt vermenigvuldigd. Zoals in hoofdstuk 7 verder zal worden besproken, leek deze regel voor een aantal leerlingen in eerste instantie niet meer dan een soort ervaringsgegeven waarvan maar afgewacht moest worden in hoeverre het in een gegeven situatie van toepassing was.

10 De strategie rechtsboven in fig. 4.11, waarbij een leerling eerst de prijs van 2 pakken koffie bepaalt en op basis daarvan de prijs van 10 pakken en van 4 pakken, vertoont sterke overeenkomst met de strategie van Bob in het Amerikaanse onderzoek van Ambrose c.s. dat in hoofdstuk 3 is besproken. Deze strategie werd door Ambrose c.s. bestempeld als het 'opbouwen met andere factoren' (building up by other factors).

11 Het gevaar bestaat met name dat de afstand tussen de experimentele onderwijssituatie en het gewone, alledaagse onderwijs dermate groot wordt, dat datgene wat zich in de experimentele situatie aan leerprocessen voordoet, niet zonder meer op dezelfde wijze tot stand komt in de gewone situatie. Kelly (2006, p.110) pleit er in dat verband in navolging van Brown (1992) voor om bij ontwikkelingsonderzoek de afstand tussen de ene en de andere soort situatie fasegewijs groter te maken en daarbij nauwlettend in het oog te houden in hoeverre zich veranderingen voordoen in leerprocessen en –resultaten.

5 Ontwikkeling van de leergang

5.1 Recapitulatie; drie aandachtspunten voor de leergang

In het voorgaande is een eerste basis voor het onderzoek gelegd via de beschrijving van de aanleiding tot het onderzoek en het formuleren van de onderzoeksvragen, het vaststellen van het theoretisch kader, het schetsen van een aantal belangrijke achtergronden en het toelichten van de gehanteerde onderzoeksmethode. Bij dat laatste werden ook de drie fasen belicht waarin het onderzoek ten uitvoer wordt gebracht. Zoals in het betreffende hoofdstuk al werd aangekondigd, worden in de komende vier hoofdstukken deze drie fasen nader onder de loep genomen. Hoofdstuk 5 beschrijft de ontwikkeling van de experimentele leergang. In hoofdstuk 6 wordt vervolgens een aantal cruciale onderwijsmomenten beschreven die zich tijdens het onderwijsexperiment rond deze leergang voordeden. En in hoofdstuk 7 en 8 worden de resultaten waartoe dit onderwijsexperiment leidde, geanalyseerd voor wat betreft goedscores, aanpakgedrag en notatiegedrag. In hoofdstuk 9 tenslotte vindt een retrospectieve analyse plaats die uitmondt in de formulering van een lokale onderwijstheorie en een aantal algemene bevindingen die het onderzoek heeft opgeleverd.

Zoals in hoofdstuk 4 reeds is aangegeven, beslaat de ontwikkeling van de leergang, het centrale onderwerp van dit hoofdstuk, een groot deel van de voorbereidende fase maar ook nog een deel van de experimentele fase. In grote lijnen werd daarbij de volgende reeks activiteiten ontplooid:

(1) Analyse van bestaande leergangen, in het bijzonder die van de methode *Wis en Reken*; reflectie daarbij op eerdere ontwikkelervaringen;
(2) Bestudering van vakinhoudelijke literatuur over lokale onderwijstheorieën op het gebied van het meercijferige vermenigvuldigen, alsmede over belangrijke internationale onderzoeken op dat gebied;
(3) Eerste ideevorming over opzet en inhoud van de experimentele leergang;
(4) Een vooronderzoek om enkele van deze ideeën op kleine schaal uit te proberen;
(5) Uitwerking van het eerste deel van de leergang in de vorm van concreet onderwijsleermateriaal zoals werkbladen, lesbeschrijvingen, toetsmateriaal en leerlijnbeschrijvingen;
(6) Analyse van de ervaringen die werden opgedaan tijdens het eerste deel van het eigenlijke onderwijsexperiment rond de leergang;

(7) Uitwerking van het tweede deel van de leergang in onderwijsleermateriaal mede naar aanleiding van deze analyse.

In de voorgaande hoofdstukken is reeds uitgebreid gerapporteerd over de eerste twee activiteiten uit deze reeks, terwijl in hoofdstuk 6 verslag zal worden gedaan van de activiteiten (6) en (7). In dit hoofdstuk beperk ik mij dan ook in hoofdzaak tot de activiteiten (3), (4) en (5), waarbij de nadruk ligt op de momenten waarop belangrijke ideeën tot ontwikkeling kwamen, keuzes gemaakt werden, doorslaggevende overwegingen en argumenten naar voren kwamen, enzovoorts.

Om te beginnen ga ik nog even terug naar het probleem dat de aanleiding voor het onderzoek vormde. Zoals in hoofdstuk 1 werd aangegeven, ligt de kern van dit probleem in het feit dat het tot op heden niet goed gelukt is om een leergang rond het meercijferige vermenigvuldigen te ontwikkelen die aansluit bij de eigen informele ideeën en strategieën van leerlingen en waarin deze strategieën gaandeweg worden uitgebouwd tot efficiënte, notatieondersteunde hoofdrekenstrategieën in de sfeer van het gestileerde hoofdrekenen. Weliswaar is er een steeds duidelijker tendens om aan hoofdrekenen en gestileerde vormen daarvan een centrale plaats in het curriculum toe te dichten, maar, zoals in hoofdstuk 2 en 3 is betoogd, heeft dat vooralsnog niet geleid tot algemeen geaccepteerde en succesvolle leergangen op het gebied van het vermenigvuldigen met meercijferige getallen. Dat dit het geval is, komt onder meer tot uitdrukking in het feit dat de onderwijsresultaten op dit gebied in twee opzichten nogal te wensen overlaten. Zoals in de laatste paragraaf van hoofdstuk 3 is getoond, is er in de goedscores een duidelijk neerwaartse tendens waar te nemen terwijl bovendien opmerkelijk is dat van de groep leerlingen die een hoofdrekenstrategie hanteert, slechts een gering percentage gebruik maakt van hulpnotaties. Omdat er inmiddels meer bekend is over de informele eigen noties en strategieën van leerlingen en omdat er bovendien meer ideeën tot ontwikkeling zijn gekomen over de wijze waarop deze strategieën in het onderwijs uitgebouwd en op een hoger niveau gebracht kunnen worden, lijken er goede kansen te zijn om tot een betere leergang te komen.

Nu zou een oorzaak voor de tegenvallende prestaties op het gebied van het meercijferige vermenigvuldigen ook gelegen kunnen zijn in het feit dat er weliswaar goede leergangen zijn ontwikkeld, maar dat de implementatie daarvan nog achterblijft. Wellicht dat deze implementatie inderdaad nog te wensen overlaat gezien het relatief nieuwe karakter van het gestileerde hoofdrekenen. Maar, zoals in hoofdstuk 2 en 3

is betoogd, zijn er toch ook duidelijke aanwijzingen dat er in de leergangen zelf het nodige te verbeteren valt. Aandachtspunten daarbij zijn onder meer:
(a) Aansluiting bij eigen informele strategieën komt niet altijd goed tot stand (zie bijvoorbeeld de wijze waarop dit in de methode *De Wereld in Getallen* gebeurt)
(b) De ontwikkeling van passende notatievormen laat nogal eens te wensen over (zie bijvoorbeeld de methoden *Rekenen & Wiskunde* en *Pluspunt*)
(c) Het proces van verkorting lijkt soms nogal gekunsteld waarbij de verschillende stappen niet altijd even logisch op elkaar volgen en vooral ook gericht zijn op het bereiken van het eindalgoritme (zie bijvoorbeeld de methode *Wis en Reken*).

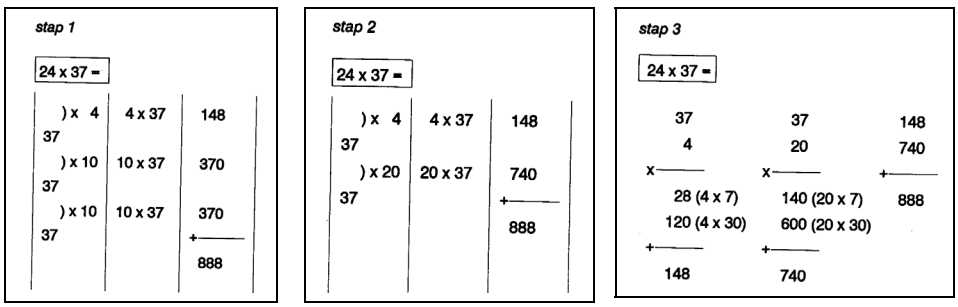


Fig. 5.1: De drie voornaamste fasen in het leerproces zoals die in de methode Pluspunt (Van Beusekom e.a., 1998) worden doorlopen. Het valt op dat bij stap 3 de notatievorm in vergelijking met de eerste twee stappen alleen maar uitgebreider is geworden.

Wat betreft punt (a) kan gesteld worden dat dit bezwaar in feite ook al voor de door wiskobas voorgestelde aanpak via het herhaald optellen-model geldt. Het komt erop neer dat de wijze waarop de overgang van herhaald optellen naar de 10-keer-strategie plaatsvindt, nogal krampachtig aandoet. Zoals in het onderzoek van Ambrose, Baek en Carpenter (2003) is getoond, zijn er allerlei verkorte vormen van herhaald optellen (zoals verdubbelen, herhaald verdubbelen, 'opbouwen met andere factoren') die leerlingen uit zichzelf gebruiken en waarmee op een natuurlijke manier de brug geslagen kan worden naar de 10-keer-strategie. Een nieuwe leergang zou leerlingen de ruimte moeten geven om dergelijke verkorte vormen te beproeven en te overdenken en om, op basis daarvan, de 10-keer-strategie te (re-)construeren. In samenhang daarmee (punt (b)) zouden ze notatievormen kunnen ontwikkelen waarmee de uitgevoerde handelingen steeds compacter en overzichtelijker worden weergegeven, zonder dat er bij de overgang naar een hoger niveau van handelen (bijvoorbeeld als de 10-keer-strategie verder verkort wordt) ineens sprake is van uitgebreidere notaties

zoals bij de methode Pluspunt het geval is (zie fig. 5.1 hierboven). Verder zouden de verschillende te doorlopen fasen minder rechtstreeks afgestemd kunnen worden op het bereiken van de fase van het standaardalgoritme, en meer op het bereiken van een efficiënte vorm van gestileerd hoofdrekenen als einddoel. Daardoor kan het proces van verkorting en niveauverhoging minder gekunsteld worden dan thans soms het geval is (punt (c)).

Juist in deze drie opzichten zou de experimentele leergang, geschoeid op de algemene leest van de realistische onderwijsbenadering, een stap verder moeten gaan of een nieuwe richting moeten inslaan. In het volgende wordt beschreven hoe dat zou kunnen.

5.2 Situaties en strategieën

Zoals in hoofdstuk 3 is aangegeven, werd het startpunt voor de ontwikkeling van de leergang onder meer gevormd door een reflectie op eerder opgedane ontwikkelervaringen in het kader van de methode *Wis en Reken*. Geschetst werd hoe zich tijdens de try out van deze methode min of meer onverwachte verschijnselen voordeden doordat leerlingen weliswaar veelal tot een goede oplossing kwamen maar daarbij andere oplossingswijzen hanteerden dan was voorzien. Als gevolg daarvan kwam de zin van een aantal voorbereidende activiteiten die in het voorafgaande hadden plaatsgevonden (en daarmee ook de zin van de aangehouden fasering van de leergang), enigszins op losse schroeven te staan. Om nu in het kader van het onderhavige onderzoek tot een betere opzet van de leergang te komen, werd eerst nog eens een fenomenologische analyse van het betreffende leerstofdomein gemaakt, waarbij werd nagegaan wat voor reële situaties zoal aanleiding kunnen geven tot een vermenigvuldiging met meercijferige getallen, en wat voor strategieën daarbij zoal gebruikt kunnen worden door leerlingen. Uiteraard hoefde daarbij niet op nul begonnen te worden. Belangrijke bronnen vormden onder meer het werk van Scholten e.a. (1983), Ter Heege (1985) , Treffers & De Moor (1990), Treffers e.a. (red.; 1999), en Van den Heuvel-Panhuizen e.a. (red.; 2001). In deze bronnen worden in hoofdzaak de volgende vijf typen vermenigvuldigsituaties onderscheiden[1]:

- groepjessituaties, zoals: 12 dozen met in elke doos 48 pakken koffie;
- lijnsituaties, zoals: een 18-daagse fietsvakantie waarbij per dag 45 km wordt gefietst;
- rechthoeksituaties, zoals: een parkeerterrein met 25 rijen van 64 parkeerplaatsen;

- verhoudingssituaties, zoals: een kudde van 36 schapen die voor € 240,- per schaap verkocht worden;
- combinatorische situaties, zoals: in een restaurant heeft men 14 verschillende hoofdgerechten en 12 verschillende nagerechten.

In de genoemde voorbeelden gaat het steeds om opgaven met twee getallen (12x48, 18x45, ...). Maar er zijn natuurlijk uitbreidingen mogelijk naar situaties met drie of vier getallen, zoals: een parkeergarage met 6 verdiepingen en op elke verdieping 25 rijen van 64 parkeerplaatsen; een restaurant met 7 soorten voorgerechten, 14 verschillende hoofdgerechten en 12 verschillende nagerechten; een stapel tegels met 8 lagen van 15 bij 24 tegels van € 7,50 per stuk; enzovoorts. Een andere variatie kan zitten in de aard van de getallen: het kan om hele getallen gaan, maar ook om geldgetallen of meetgetallen. Een verschil kan verder nog gelegen zijn in het al dan niet zichtbaar zijn van de objecten in kwestie, en de structuur waarvan deze mogelijk deel uitmaken. Met name Ter Heege heeft laten zien dat het, in het geval van vermenigvuldigingen met kleinere getallen, nogal wat uitmaakt of de betreffende objecten zichtbaar en dus telbaar zijn. Hij liet ook zien dat het vooral situaties zijn waarin deze objecten slechts ten dele zichtbaar zijn, die kunnen uitlokken tot strategieën van een hoger niveau (Ter Heege, 1986). Zie voor een voorbeeld van een elementaire situatie waarin de objecten slechts ten dele zichtbaar zijn, fig. 5.2.

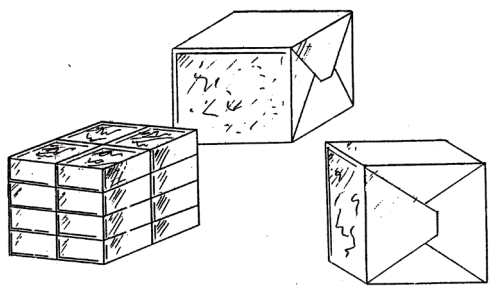


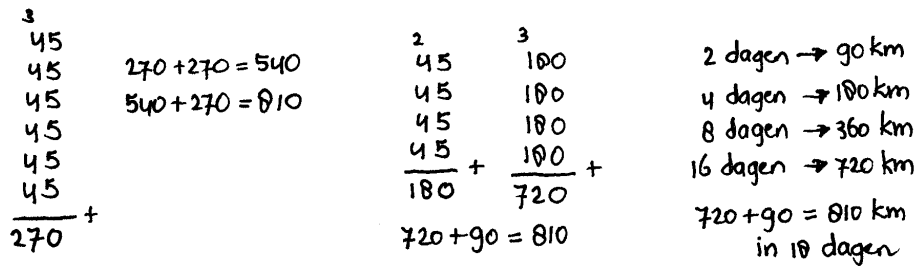
Fig. 5.2: Voorbeeld van een elementaire vermenigvuldigsituatie waarin de objecten in kwestie slechts ten dele zichtbaar zijn. (Afkomstig uit Ter Heege, 1986, p.151)

Het was duidelijk dat de meeste van deze verschillende typen situaties aan bod dienden te komen, maar in welke volgorde en op wat voor manier diende nog nader onderzocht te worden.

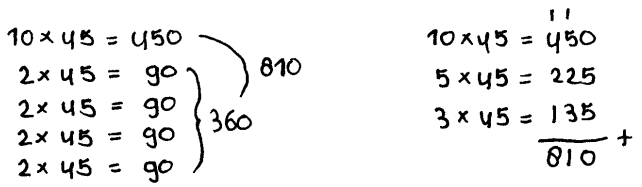
Ook ten aanzien van de aard van de mogelijk gehanteerde oplossingsstrategieën en de gebruikte hulpnotaties waren er reeds de nodige aanknopingspunten. Zoals in hoofdstuk 3 is beschreven, boden met name de onderzoeken van Ambrose, Baek en Carpenter (2003) en van Murray, Olivier en Human (1994) veel informatie over informele, zelf geconstrueerde oplossingswijzen van leerlingen. In overeenstemming

hiermee zouden de volgende typen strategieën zich naar alle waarschijnlijkheid in de loop van de leergang kunnen aandienen[2]:

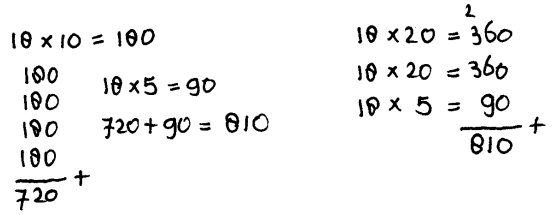
(1) Herhaald optellen, verdubbelen, groepjes maken.
Bijvoorbeeld, in het geval van de situatie rond de fietsvakantie (18x45):



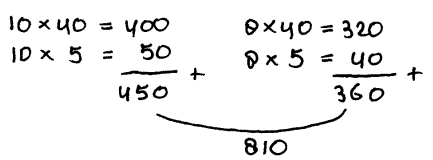
(2) Redeneren via '10 keer' en veelvouden daarvan (waarbij dus alleen het eerste getal decimaal gesplitst wordt). Bijvoorbeeld:



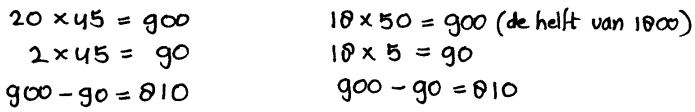
(3) Redeneren via 'keer 10' en veelvouden daarvan (waarbij alleen het tweede getal decimaal gesplitst wordt). Bijvoorbeeld:



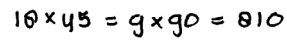
(4) Beide getallen decimaal splitsen. Bijvoorbeeld:



(5) Compenseren. Bijvoorbeeld:



(6) Halveren-verdubbelen. Bijvoorbeeld:



De inschatting was dat van deze verschillende typen strategieën die van het herhaald optellen, verdubbelen en groepjes maken, de meest basale was. Ook in de genoemde bronnen (zie bijvoorbeeld ook Dekker e.a. (red.), 1982 en De Moor, 1983) wordt deze strategie als zodanig aangemerkt[3]. Zeker voor leerlingen die nog niet zoveel inzicht in de nulregel hebben, leek dat in eerste instantie de meest aannemelijke werkwijze. Het redeneren via 10 keer leek eveneens een voor de hand liggende aanpak die ook weer in diverse varianten en graden van verkorting kan optreden. Bovendien kan, zoals hierboven in navolging van Ambrose, Baek en Carpenter (2003) reeds werd gesuggereerd, de 10-keer-aanpak als een verkorting van het herhaald optellen en verdubbelen naar voren treden – een verkorting die door de leerlingen zelf ge(re)construeerd zou kunnen worden op basis van hun groeiend inzicht in de nulregel. De beide andere typen strategieën waarbij sprake is van decimaal splitsen, namelijk die waarbij het tweede getal gesplitst wordt, en die waarbij beide getallen gesplitst worden, lijken eveneens aannemelijke strategieën die echter, zoals Ambrose c.s. opmerken, wat abstracter zijn in de zin dat deze veelal minder rechtstreeks voortvloeien uit de concrete situatie en meer het resultaat zijn van het redeneren op basis van de decimale getalstructuur der getallen. Daarnaast zou, zoals ook Murray c.s. (1994) constateerden, een onjuiste variant van de strategie waarbij beide getallen gesplitst worden kunnen optreden, namelijk die waarbij alleen de tientallen van beide getallen met elkaar vermenigvuldigd worden, en de eenheden.

Ook de strategieën uit de categorieën (5) en (6) leken, hoewel in bepaalde situaties tamelijk voor de hand liggend, van een wat hoger abstractieniveau doordat deze strategieën berusten op niet zo eenvoudig te doorziene rekeneigenschappen en getalrelaties. Samenvattend werd vastgesteld dat er in grote lijnen drie hoofdcategorieën van strategieën onderscheiden kunnen worden, te weten:

- Categorie A: herhaald optellen, verdubbelen, groepjes maken (hieronder valt type (1))
- Categorie B: redeneren op basis van het decimaal splitsen van getallen (type (2) t/m (4))
- Categorie C: redeneren op basis van andere getalrelaties en bewerkingseigenschappen (type (5) en (6)).

Deze categorisering sloot aan bij andere indelingen zoals die met name in het TAL-project zijn aangebracht, in het bijzonder wat betreft het onderscheid in rijgen, splitsen en varia-rekenen dat voor het hoofdrekenen in algemene zin wordt gemaakt (Buijs, 2001, p.39). Bij categorie A spelen (net als bij rijgen) de handelingen zich af op het niveau van 'langs de telrij bewegen' (met gelijke sprongen en verkortingen daarvan), terwijl bij categorie B de decimale structuur der getallen het aangrijpingspunt voor het handelen vormt. En bij categorie C vormen allerlei andere structureringsvormen (zoals: 18 opvatten als 20-2; 45 opvatten als 50-5; 45 opvatten als de helft van 90; enzovoorts) alsmede bijpassende bewerkingseigenschappen (zoals, bij halveren-verdubbelen: als je bij een vermenigvuldiging de ene term verdubbelt en de andere halveert, blijft de uitkomst hetzelfde). De drie categorieën impliceren dan ook, tot op zekere hoogte, een verschil in abstractieniveau zoals dat ook binnen het TAL-project is aangeduid[4]. Echter, zoals verderop in dit hoofdstuk zal worden toegelicht, met deze categorisering is lang niet het hele verhaal van niveauverhoging verteld.

Verder dient nog aangetekend te worden dat de beschreven indeling niet altijd even scherp te maken is. Zo kan het maken van groepjes van 10 ook als een elementaire vorm van de 10 keer-aanpak opgevat worden. Ook leek het aan te bevelen om binnen de categorie van het redeneren op basis van het decimaal splitsen van getallen, een onderscheid te maken tussen het type aanpak waarbij alleen het eerste getal decimaal wordt gesplitst (bijvoorbeeld: 23x56 via 10x56, 10x56 en 3x56 of varianten daarop), en het type aanpak waarbij alleen het tweede getal (23x56 via 23x10, 23x10, 23x10, 23x10, 23x10 en 23x6 of varianten daarop) of beide getallen (23x56 via 20x50, 20x6, 3x50 en 3x6) gesplitst worden. Zoals hierboven reeds werd gememoreerd, leek eerstgenoemde type aanpak immers goed aan te sluiten bij allerlei vormen van herhaald optellen en verdubbelen en dus direct verbonden te kunnen worden met de oorsprong van vermenigvuldigen als herhaald optellen, terwijl dit bij de twee laatstgenoemde typen aanpakken veel minder het geval leek te zijn – deze zouden beschouwd kunnen worden als de meer formele varianten van het decimaal splitsen.

Hiermee tekende zich voor de globale opzet van de leergang een eerste structurering af. Het onderwijs zou zich erop kunnen richten om de aandacht in eerste instantie op strategieën uit categorie A te vestigen als zijnde de meest basale, eenvoudig te begrijpen strategieën. Vervolgens zou uitbreiding naar strategieën uit categorie B kunnen plaatsvinden, en dan in de eerste plaats in de vorm van de 10 keer-aanpak en verkorte vormen daarvan. Daarna zou uitgebreid kunnen worden naar strategieën uit categorie C, als zijnde een type dat in het algemeen nog wat complexer van aard is. Binnen de drie onderwijsfasen die zich aldus aftekenen, zouden in principe alle soorten onderscheiden vermenigvuldigsituaties aan bod kunnen komen met dien verstande dat niet elk type situatie zich even makkelijk leent voor elk type strategie. In verband daarmee was het ook belangrijk om na te gaan welke modellen beschikbaar gemaakt zouden kunnen worden om bepaalde typen strategieën uit te lokken en om de overgang van het ene type naar het andere type strategie te vergemakkelijken. Modellen hebben binnen de realistische onderwijstheorie immers vooral een brugfunctie (Treffers, 1987; Goffree, 1982) om de overgang naar een hoger, verkort niveau van handelen beter mogelijk te maken, en om de leerlingen beter in staat te stellen tot formeel-wiskundig redeneren (Gravemeijer, 1994). Daarbij diende ook een eerste inschatting gemaakt te worden, op welke wijze passende notatievormen door de leerlingen ontwikkeld zouden kunnen worden. Zoals de resultaten van het PPON-onderzoek laten zien (zie de laatste paragraaf van hoofdstuk 3), is het juist op dit punt dat zwakkere leerlingen tekort lijken te schieten. Waarbij overigens nog de kanttekening geplaatst dient te worden, dat de wijze waarop de PPON-toetsen worden afgenomen, wellicht in de hand werkt dat leerlingen geen hulpnotaties gebruiken[5]. Hoe dit ook zij, een nieuwe leergang zou in ieder geval aandacht moeten schenken aan zorgvuldige notatieontwikkeling.

5.3 Modellen en notatievormen

In principe zijn er verschillende modellen inzetbaar om het gebruik van de genoemde typen strategieën te ondersteunen. Dit betreft in de eerste plaats de volgende drie in de literatuur veelvuldig genoemde modellen (zie bijvoorbeeld: De Moor, 1983; Ter Heege, 1987; Treffers e.a. (red.), 1999):

- het groepjesmodel
- het lijnmodel
- het rechthoekmodel

Deze drie modellen kunnen als schematische voorstelling vanuit verschillende situaties naar voren treden. Zo kan het groepjesmodel vanuit situaties rond verpakkingen geïntroduceerd worden, het lijnmodel vanuit het springen met sprongen van gelijke grootte, en het rechthoekmodel vanuit situaties rond parkeerterreinen of tegelpleintjes. Naast deze drie meest elementaire modellen worden soms ook nog andere modellen genoemd, zoals de verhoudingstabel[6]. Maar eigenlijk is dit eerder een rekenschema te noemen dan een model dat een duidelijke brugfunctie kan vervullen bij het streven naar verkorting en niveauverhoging.

Al deze modellen zouden in principe benut kunnen worden om de overgang van het gebruik van strategieën uit categorie A naar het gebruik van strategieën uit categorie B en (naderhand) categorie C te stimuleren. Maar er zijn een aantal beperkingen. Zo leent het lijnmodel zich niet zo goed om de werkwijze van het halveren-verdubbelen te verduidelijken – dit in tegenstelling tot het rechthoekmodel dat daar juist bij uitstek geschikt voor is (Zie het voorbeeld in fig. 5.3).

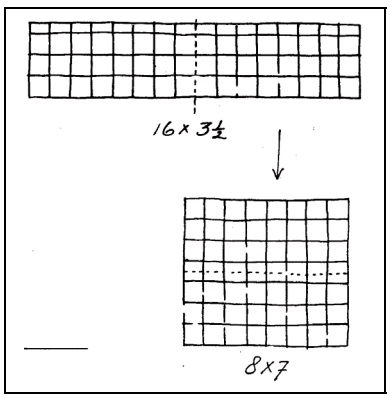


Fig. 5.3: Afbeelding van het rechthoekmodel als hulpmiddel om de strategie van het halveren-verdubbelen (16x3½ is evenveel als 8x7) te onderbouwen. (afkomstig uit De Moor, 1983, p.24)

Evenzo biedt het groepjesmodel net als het rechthoekmodel goede mogelijkheden om allerlei vormen van verdubbelen goed te leren doorzien, maar lenen deze modellen zich niet zo om het compenseren beter te doorgronden.

Ook waar het gaat om de drie fundamentele wiskundige eigenschappen die bij het leren vermenigvuldigen een rol spelen, te weten de commutatieve, distributieve en associatieve eigenschap[7], lijken de drie modellen elkaar aanvullende mogelijkheden tot verduidelijking te hebben. Zo leent het rechthoekmodel zich uitstekend om de commutatieve en distributieve eigenschap zichtbaar te maken (zie voor wat betreft de laatste eigenschap het voorbeeld in fig. 5.4), terwijl een driedimensionale variant daarvan in de vorm van het 'stapelmodel'[8] geschikt is om de (minder cruciale) asso-

ciatieve eigenschap te verduidelijken. Verder is het groepjesmodel minder geschikt om de commutatieve eigenschap te verhelderen, maar daarentegen zeer geschikt ter verduidelijking van de distributieve eigenschap. Dat laatste geldt ook voor het lijnmodel.

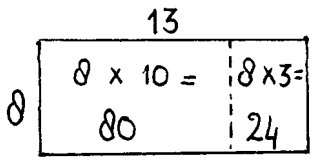


Fig. 5.4: Afbeelding van het rechthoekmodel als hulpmiddel om de distributieve eigenschap inzichtelijk te maken in het geval van de opgave 8x13. (afkomstig uit Scholten e.a., 1985, p.15)

Gezien al deze constateringen leek het op het eerste gezicht aan te bevelen om bij het opzetten van de leergang niet voor één centraal model te kiezen, maar om verschillende modellen op verschillende momenten binnen de leergang een rol te laten spelen. Ook in verband met het feit dat de leerlingen deze modellen over het algemeen al kenden, leek dit een goede optie.

Maar er diende zich nog een andere vraag aan. Van belang is namelijk ook de vraag hoe kinderen tot modelvorming komen. Hoe krijgt een schematische of visuele voorstelling van een vermenigvuldigsituatie voor leerlingen de status van model? Niet door zo'n model kant en klaar aan te bieden, maar bij voorkeur als resultaat van de eigen schematiserende en 'modellerende' activiteit van de leerling. Zoals in hoofdstuk 3 is betoogd, dient het model bij voorkeur naar voren te komen als *een model van* de betreffende probleemsituatie en de in die situatie gehanteerde oplossingsmanier(en) en dient dit vervolgens uit te groeien tot een *model voor* allerlei andere probleemsituaties en voor het op een meer formeel-getalsmatig niveau redeneren van leerlingen. Daarmee diende de vraag zich aan welke van de genoemde modellen zich het beste leent om de status van model te krijgen via de eigen, schematiserende activiteit van de leerlingen. In principe, zo werd overwogen, zouden alle drie de genoemde modellen in aanmerking kunnen komen om de zo belangrijke overgang van categorie A naar categorie B als resultaat van de eigen schematiserende activiteit van leerlingen uit te lokken. Bij wijze van vingeroefening werd 'voorgedacht' hoe kinderen voor de verschillende typen situaties (en dus met het oog op verschillende modellen) al schematiserend tot een oplossing zouden kunnen komen in het geval van een opgave 36x240. Zie fig. 5.5.

Op basis van dergelijke 'picturaal-schematische voorstellingen' zou het mogelijk moeten zijn, zo was de gedachte, om de leerlingen zelf passende notatievormen te laten ontwikkelen waarmee de betreffende strategieën op een hoger, meer formeel

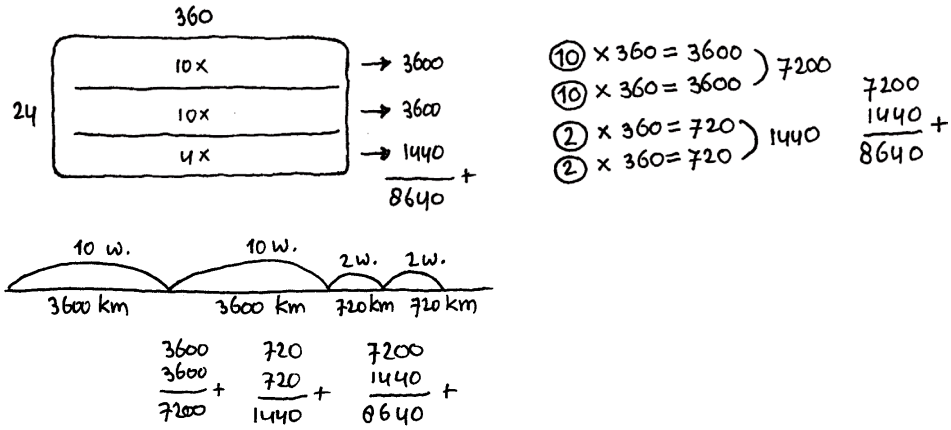


Fig. 5.5: Drie mogelijke picturaal-schematische oplossingswijzen voor de opgave 36x240, in de context van resp. een tegelplein met 24 rijen van 360 tegels, een kudde van 24 schapen die elk € 360,- kosten, en het aantal verreden kilometers in het geval dat 24 weken lang 360 km gereden is.

niveau uitgevoerd zouden kunnen worden. Daarmee zou geleidelijk aan steeds verder de weg richting het gestileerde hoofdrekenen ingeslagen kunnen worden dat als een belangrijk doel van de leergang beschouwd werd. Welke notatievormen dit precies zouden kunnen zijn, was nog een punt van nadere doordenking. Bovendien was uit de PPON-resultaten gebleken dat veel leerlingen nauwelijks vertrouwd zijn met het gebruik van hulpnotaties. Het zou dan ook wel eens niet zo eenvoudig kunnen zijn om ze zelf de beoogde picturaal-schematische voorstellingen te laten ontwikkelen. Om hierover meer uitsluitsel te krijgen, werd besloten tot een vooronderzoek waarbij leerlingen een aantal concrete, visueel uitgebeelde vermenigvuldigsituaties kregen voorgelegd en waarbij onderzocht zou worden in hoeverre de eigen schematiserende activiteit van de leerlingen de basis zou kunnen vormen voor strategie- en notatieontwikkeling, en welk model daarbij het meest in aanmerking zou kunnen komen.

5.4 Het vooronderzoek

In de periode voorafgaand aan de feitelijke ontwikkeling van de experimentele leergang werd een drietal kleine, informele onderzoekjes onder groepjes van drie à vier leerlingen gehouden van in totaal drie scholen. Twee daarvan waren scholen die

ook aan het onderwijsexperiment zouden deelnemen, de derde school was dat niet. In deze onderzoekjes, die in de laatste periode van groep 6 (april-mei) plaatsvonden, kregen de leerlingen een aantal probleemsituaties voorgelegd rond het meercijferige vermenigvuldigen zoals die hierboven zijn aangegeven. Over het algemeen hadden de leerlingen dergelijke opgaven nog niet eerder onder ogen gehad. Er was in de klas dan ook geen instructie over gegeven. Getallen en contexten werden zodanig gevarieerd dat een zo breed mogelijk beeld zou ontstaan over aanpakgedrag en notatiegedrag. Zie fig. 5.6 voor een voorbeeld van een opgave met een door een leerling bedachte oplossing.

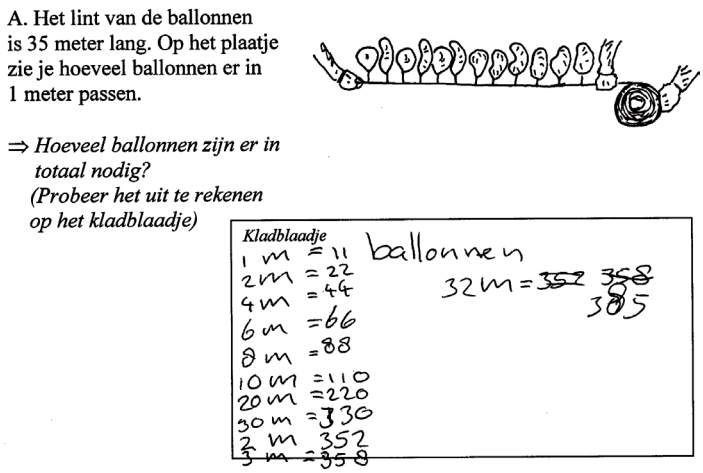


Fig. 5.6: Voorbeeld van een opgave uit het vooronderzoek (rond een lint met 35x11 ballonnen) met daarbij de door een leerling genoteerde oplossingswijze. Aanvankelijk werkt zij via herhaald optellen, maar schakelt naderhand over op een grotere 'eenheid'. Ze lijkt uiteindelijk enigszins te verdwalen, maar komt toch tot een goede oplossing.

De gang van zaken was steeds zodanig dat het betreffende probleem eerst met het hele groepje kort werd besproken en dat de leerlingen daarna individueel of in tweetallen probeerden een oplossing te bedenken. Ze werden daarbij nadrukkelijk uitgenodigd om hun 'denkstappen' en redeneringen zo goed mogelijk op papier te zetten. Na enige tijd volgde dan een nabespreking waarbij de onderzoeker zich erop richtte de door de leerlingen gehanteerde oplossingswijzen zo natuurgetrouw mogelijk op het bord weer te geven. Op basis daarvan werd vervolgens een gesprekje gehouden waarin leerlingen eerst hun eigen oplossingswijze toelichtten en waarin deze vervolgens gezamenlijk besproken en doordacht werden. Soms leidde dit tot

het vaststellen van een juiste uitkomst en van aanpakken die daartoe konden leiden. Soms legde de onderzoeker de leerlingen nog enkele aanvullende vragen voor waarin ze werden uitgenodigd de juistheid van een aanpak nader te onderbouwen, de (al dan niet vermeende) onjuistheid van een aanpak te beargumenteren, enzovoorts.

Meestal waren de gesprekjes sterk open van karakter zonder dat er van de kant van de onderzoeker sprake was van sturing of instructie. In enkele gevallen lag de nadruk iets meer op een door de onderzoeker gestuurde gespreksvorm, met name in het geval leerlingen te kennen gaven dat ze met een opgave eigenlijk niet goed raad wisten. Zoals in fig. 5.6 is te zien, stonden de opgaven die de leerlingen kregen voorgelegd, steeds op een werkblad weergegeven vergezeld van een bijpassende tekening en een uitgebreide uitrekenruimte (het 'kladblaadje'). Van de onderzoekjes werden gedetailleerde verslagen gemaakt, inclusief foto's van op het bord weergegeven aanpakken en kopieën van door leerlingen zelf genoteerde aanpakken. Hieronder worden in kort bestek per onderzoekje de voornaamste wederwaardigheden en bevindingen weergegeven.

Eerste onderzoekje

Achtereenvolgens kregen de leerlingen een rechthoeksituatie (rond dakpannen op een rechthoekig dak; zie fig. 5.7), een groepjessituatie (rond verpakkingen) en een lijnsituatie (rond een snoer met ballonnen) voorgelegd. Over het algemeen herkenden ze in deze situaties vrijwel onmiddellijk een vermenigvuldiging. Opmerkelijk was in de eerste plaats de geneigdheid van verreweg de meeste leerlingen om bij deze opgaven geen gebruik te maken van de tekening en om op een meer formeel niveau te proberen tot een oplossing te komen door de getallen in kwestie decimaal te splitsen. Dit deed zich met name bij de rechthoeksituatie sterk voor. Zie fig. 5.7 voor vier voorbeelden van dergelijke splitsaanpakken bij de opgave rond de dakpannen (16 rijen van 32 dakpannen).

Tijdens de gesprekjes over dergelijke aanpakken blijkt het niet eenvoudig om te achterhalen welke daarvan nu correct zijn, en welke niet. De leerlingen zijn ook in hoge mate onzeker over de juistheid van hun strategie. Vaak heeft men echter wel een idee van de orde van grootte van de uitkomst, en stelt op grond daarvan de waarschijnlijke onjuistheid van sommige aanpakken vast. Zo werd de aanpak van Floris in het voorbeeld hierboven als onjuist aangemerkt omdat volgens iedereen het aantal van 332 dakpannen 'veel te weinig' was. In een poging een mogelijkheid aan te reiken om de (on)juistheid van een aanpak beter te kunnen beargumenteren, tekende de onderzoeker enkele keren een situatie schematisch op het bord (zie het

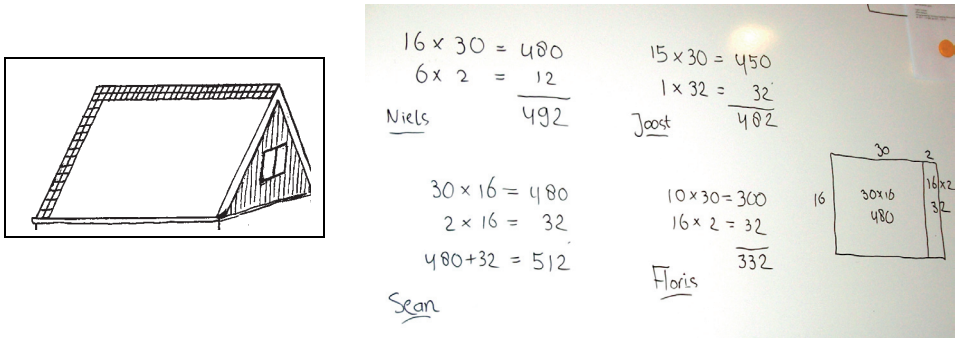


Fig. 5.7a en 5.7b: De opgave rond een dak met 16 rijen van 32 dakpannen (links) en vier door leerlingen gehanteerde oplossingswijzen zoals die op het bord kwamen te staan (rechts). Helemaal rechts is een door de onderzoeker gemaakte tekening te zien bedoeld ter verduidelijking van de redenering van een leerling.

voorbeeld rechts in fig. 5.7). Dit leek echter lang niet altijd tot een beter begrip van de gehanteerde strategieën te leiden.

Ook in de opgaven rond verpakkingen (groepjessituatie) en het snoer met ballonnen (lijnsituatie) kozen de leerlingen veelal voor een formele aanpak in de sfeer van het decimaal splitsen. Een uitzondering hierop vormt de in fig. 5.6 weergegeven aanpak van een leerling bij de ballonnenopgave. Ook nu was er nogal wat onzekerheid over de juistheid van aanpakken en oplossingen.

Tweede onderzoekje

Nadat in een reflectie op het eerste onderzoekje was vastgesteld dat de aangeboden probleemsituaties wellicht nog wat weinig uitlokten tot eigen schematiseringen en berekeningen aan de hand van de tekening, werd er in het tweede onderzoekje voor gekozen om de objecten waarop een probleem betrekking had, wat nadrukkelijker zodanig weer te geven, dat 'tekenen en rekenen' meer voor de hand zou liggen. Zie fig. 5.8 voor een voorbeeld van een opgave die betrekking heeft op de totale prijs van 16 schapen van 350 euro per schaap. Verder werd de volgorde van aanbieding gewijzigd: begonnen werd nu met de hieronder weergegeven verhoudingssituatie, daarna volgde een rechthoeksituatie. Bij deze laatste situatie kregen de leerlingen een probleem rond een bloemperk met 15 rijen van 24 bloemen voorgelegd.

Onder de leerlingen bij dit onderzoekje bleek in eerste instantie meer onzekerheid te bestaan over de vraag hoe je dergelijke problemen kunt aanpakken. Om ze enigszins op gang te helpen, deed de onderzoeker enkele keren een suggestie om eerst eens de

prijs van een klein aantal schapen te bepalen, gebruik makend van de tekening. Dit was blijkbaar net het zetje dat sommige leerlingen nodig hadden, want het leidde al gauw tot oplossingen zoals in fig. 5.9 staan weergegeven waarbij gewerkt wordt via verdubbelen en groepjes maken.

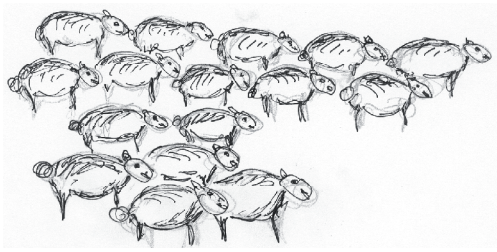
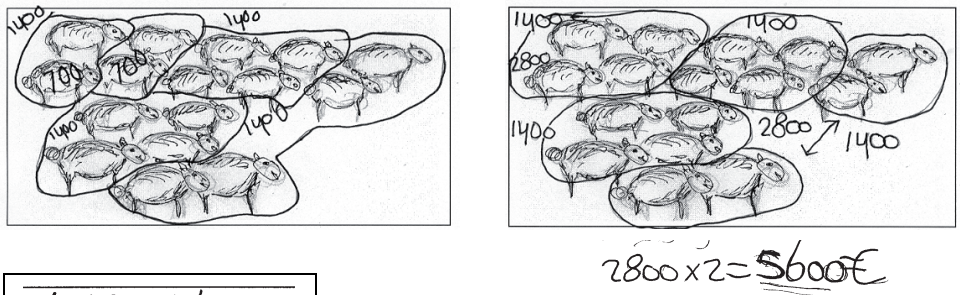


Fig. 5.8: Voorbeeld van een opgave rond de totale prijs van 16 schapen van 350 euro per schaap. De schapen zijn zodanig weergegeven dat eigen berekeningen in de tekening meer voor de hand zouden liggen.



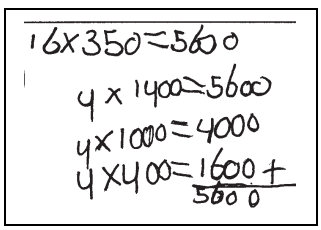


Fig. 5.9: Twee voorbeelden van aanpakken waarbij leerlingen via het maken van groepjes in de tekening tot een oplossing komen bij het schapenprobleem.

Opmerkelijk was verder de gang van zaken bij een leerling die eerst een poging deed om cijferend tot een oplossing te komen (zie rechtsboven in fig. 5.10), en vervolgens door het tweede getal te splitsen (zie rechtsonder in fig. 5.10). Hij bleef echter ernstig twijfelen over de resultaten van zijn werk, en als de onderzoeker de suggestie doet om eerst eens de prijs van een klein groepje schapen te bepalen, tekent hij spontaan een rondje om 10 schapen en meldt: 'dat is 3500 euro, een nulletje erachter'. Vervolgens rekent hij in de tekening de prijs van de resterende zes schapen uit via een vorm van herhaald optellen en bepaalt uit z'n hoofd het totaalbedrag van 5600 euro door 3500 en 2100 op te tellen (zie links in fig. 5.10).

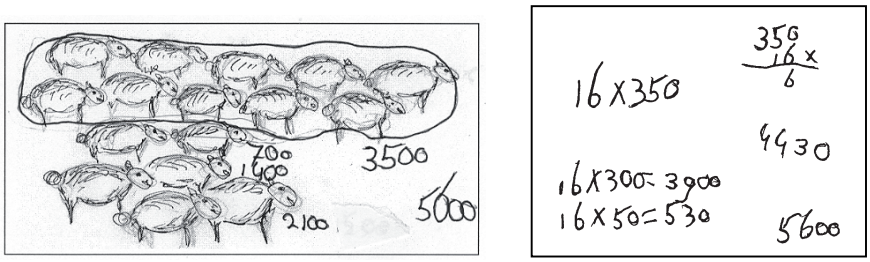


Fig. 5.10: De oplossing van een leerling die bij het schapenprobleem eerst probeert cijferend tot een oplossing te komen en daarna via splitsen van het tweede getal. Tenslotte probeert hij het, na een hint van de onderzoeker, via het maken van groepjes: een groepje van 10, en drie groepjes van 2 schapen.

Een en ander laat zien dat deze leerling net als sommige andere leerlingen aanvankelijk z'n toevlucht tot betrekkelijk formele aanpakken neemt waarvan hij zich realiseert dat hij ze niet goed begrijpt, terwijl hij in tweede instantie naar aanleiding van een suggestie van de onderzoeker, met groepjes in de tekening werkt en daarbij wel tot een goed begrepen oplossing komt. Deze is van een wat hoger niveau dan de oplossingen waarbij met kleine groepjes wordt gewerkt (fig. 5.9) doordat een groepje van 10 wordt gemaakt en de nulregel wordt gebruikt.

Bij de tweede situatie die onder de loep genomen werd, de rechthoeksitatie (een bloemperk met 15 rijen van 24 bloemen; zie fig. 5.11), blijken veel leerlingen net als in het eerste onderzoekje hun toevlucht te nemen tot een formele aanpak waarbij beide getallen decimaal gesplitst worden, of waarbij gecijferd wordt. Het lijkt er soms op dat leerlingen bij deze laatste aanpak proberen te achterhalen hoe het (nog onbekende) algoritme voor dit soort situaties zou kunnen werken.

Interessant is de werkwijze van een leerling die het bloemperk in eerste instantie in twee gelijke stukken van 12x15 bloemen verdeelt. De beide aldus ontstane vermenigvuldigingen 12x15 rekent zij vervolgens uit via de onjuiste methode waarbij 10x10 en 2x5 wordt gedaan, met als uitkomst 220 (zie links in fig. 5.11).

Omdat deze uitkomst haar bij nader inzien toch onwaarschijnlijk lijkt, gaat ze ertoe over om het linker deel van het bloemperk in groepjes van 5 in te delen, en tellend met sprongen van 5 achterhaalt ze dat er in dat deel in totaal 180 bloemen staan (zie rechts in fig. 5.11). Het totaal wordt dan bepaald via verdubbelen (zie links in fig. 5.11). Ook andere leerlingen blijken, na een eerste poging om op formeel niveau tot

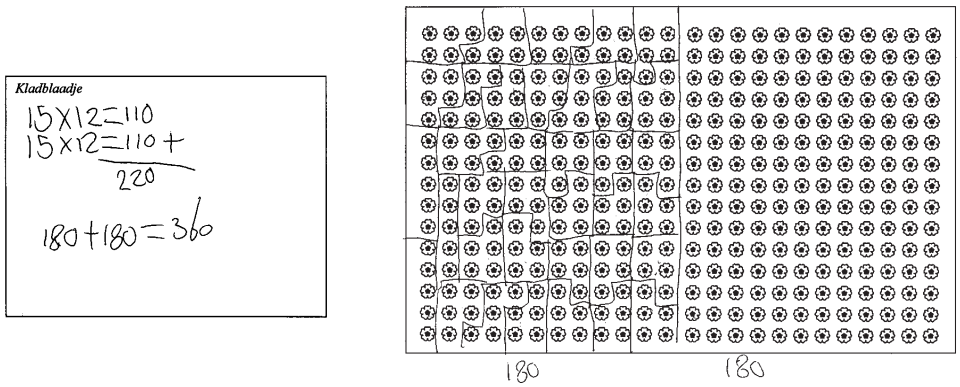


Fig. 5.11: De oplossing van een leerling die bij het bloemperkprobleem (15x24) eerst het perk in twee gelijke stukken verdeelt en de beide aldus ontstane vermenigvuldigingen 12x15 oplost via 'verkeerd splitsen', en die vervolgens het linker deel in groepjes van 5 indeelt en tellend met sprongen van 5 bepaalt dat dit er in totaal 180 zijn. Het totaal bepaalt ze dan via verdubbelen.

een (veelal niet goed begrepen) oplossing te komen, ertoe over te gaan om tellend en rekenend in de tekening tot een wel begrepen maar veel omslachtigere oplossing te komen. Tijdens dit tweede onderzoekje is er nauwelijks tijd geweest voor gemeenschappelijke uitwisseling en overdenking van strategieën.

Derde onderzoekje

Na de gebeurtenissen in het tweede onderzoekje werd ervoor gekozen om wederom met een verhoudingssituatie met betrekkelijk grote getallen (rond de prijs van een aantal schapen en varkens) te beginnen. Vervolgens werd een groepjessituatie aan de orde gesteld (rond verpakkingen) en een rechthoeksituatie (rond een bloemperk).

Wederom doet zich bij de verhoudingssituatie het verschijnsel voor dat leerlingen in eerste instantie hun toevlucht nemen tot een aanpak op formeel niveau, maar dat ze zelf ernstig twijfelen aan de juistheid van hun (nogal sterk uiteenlopende) uitkomsten. In tweede instantie gebruiken ze, daartoe enigszins uitgenodigd door de onderzoeker, allerlei vormen van herhaald optellen en groepjes maken. De meeste leerlingen beperken zich daarbij tot het maken van kleine groepjes, met als gevolg dat het rekenwerk soms omslachtig is. Zie fig. 5.12 voor een voorbeeld (25x480).

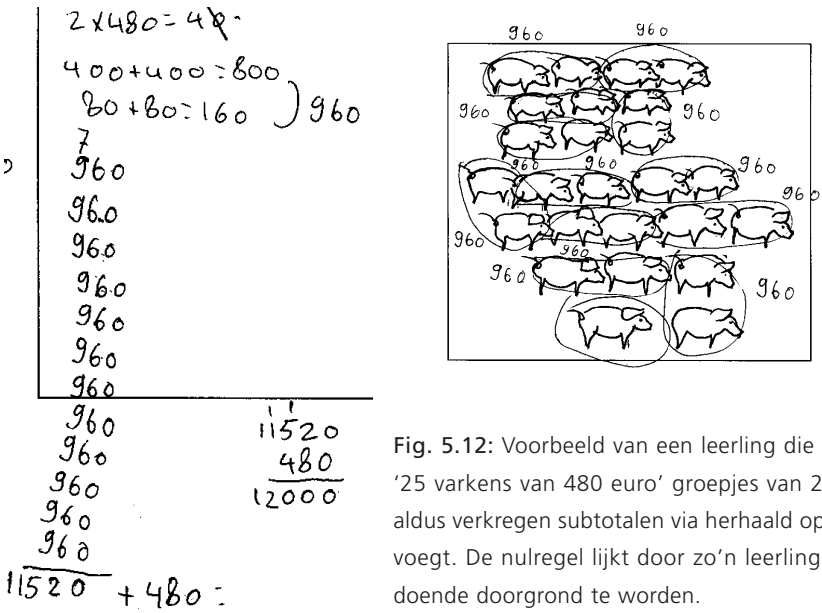


Fig. 5.12: Voorbeeld van een leerling die bij de opgave '25 varkens van 480 euro' groepjes van 2 maakt en de aldus verkregen subtotalen via herhaald optellen samenvoegt. De nulregel lijkt door zo'n leerling nog niet voldoende doorgrond te worden.

Kennelijk doorzien dergelijke leerlingen nog niet dat de berekening aanzienlijk korter en efficiënter gemaakt kan worden door de nulregel te gebruiken (cq. door groepjes van 10 te maken). Bij de verkenning van de eerste groepjessituatie (20 dozen met 48 pakken koffie) is er evenwel een leerling die meteen opmerkt dat je deze opgave makkelijk kunt oplossen door 10 keer te doen ('een nulletje erachter') en nog eens 10 keer (zie fig. 5.13), en dit leidt ertoe dat alle leerlingen deze werkwijze bij de betreffende opgave overnemen.

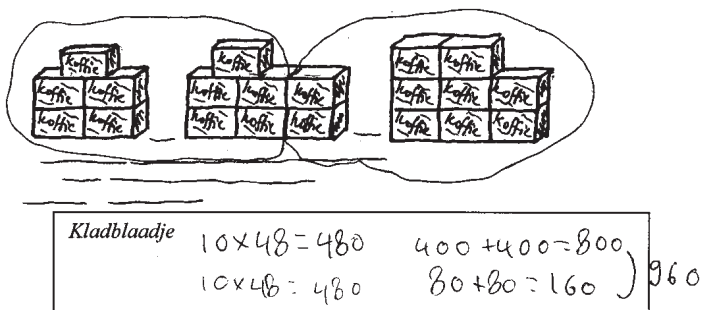


Fig. 5.13: Voorbeeld van een oplossing bij de opgave '20 dozen met 48 pakken koffie' waarbij een leerling 2 groepen van 10 maakt en dus de nulregel hanteert.

Bij de volgende opgave, waarbij het aantal rollen beschuit in 24 dozen van 36 rollen moet worden bepaald, blijken ze deze werkwijze over het algemeen te blijven volgen. Zie fig. 5.14 voor twee voorbeelden. Dit lijkt erop te wijzen dat als het efficiënte van het werken met groepjes van 10 eenmaal doorzien wordt, deze oplossingswijze vrij snel door de leerlingen wordt toegepast.

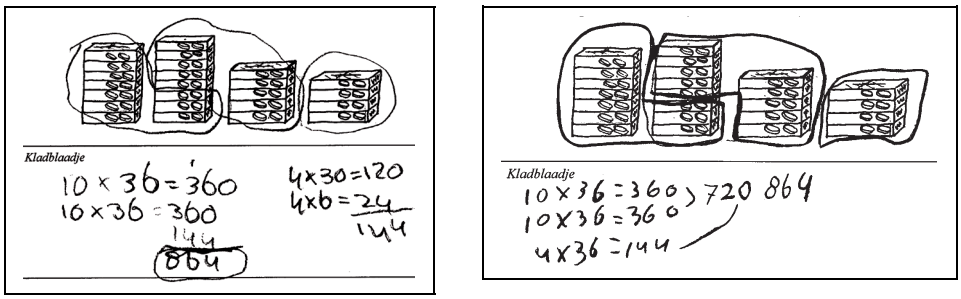


Fig. 5.14: Twee voorbeelden van oplossingswijzen waarbij leerlingen de bij de koffieopgave (20x48) verkende werkwijze van het werken met groepjes van 10, toepassen in een wat complexere situatie.

Opvallend is verder dat deze strategie in de rechthoeksituatie die daarna aan de orde komt, namelijk die rond een bloemperk met 15 rijen van 24 bloemen, niet zonder meer wordt overgenomen. Nogal wat leerlingen nemen hier hun toevlucht toch weer tot het maken van groepjes van 2 of 4 rijen. Zie het voorbeeld links in fig. 5.15. Daarnaast zijn er enkele leerlingen die wel met groepjes van 10 blijven werken zoals in het voorbeeld rechts in fig. 5.15 is te zien.

Voornaamste bevindingen uit de onderzoekjes

Door het kleinschalige karakter van de onderzoekjes was het natuurlijk niet mogelijk er al te verstrekkende conclusies aan te verbinden. Dat neemt niet weg dat er enkele duidelijke 'trends' zijn waar te nemen die van belang zijn voor de te ontwikkelen leergang. Zo was in de eerste plaats opvallend dat er onder de leerlingen een vrij sterke geneigdheid was om de opgaven in eerste instantie op een formeel niveau aan te pakken, zonder gebruik te maken van de tekening. Veelal werden beide getallen daarbij decimaal gesplitst, maar zoals de voorbeelden hierboven laten zien, leidde dit al gauw tot allerlei fouten doordat de splitsing niet volledig werd doorgevoerd of doordat factoren weggelaten werden. Daarnaast werden soms ook pogingen ondernomen om cijfermatig tot een oplossing te komen. Men leek daarbij op zoek te gaan naar een werkwijze die overeenkwam met wat men bij optellen en aftrekken

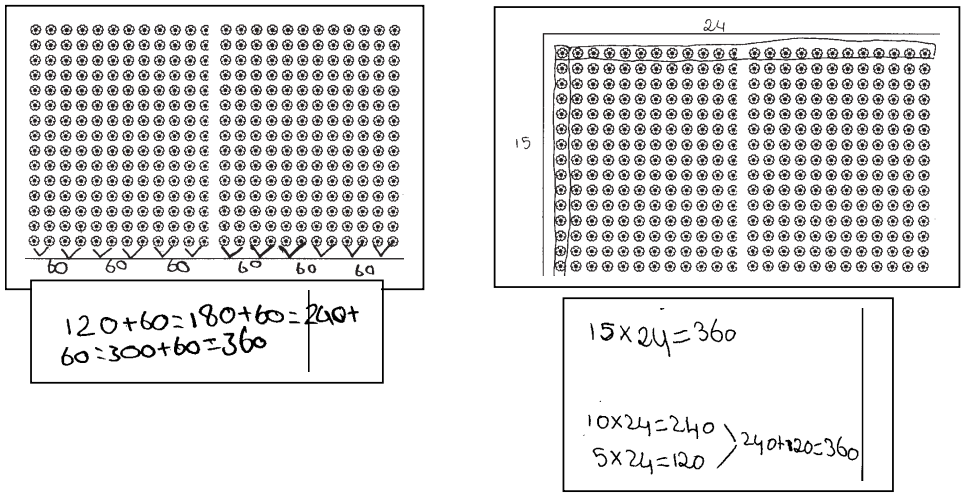


Fig. 5.15: Links een voorbeeld van een leerling die bij het dozenprobleem op voorspraak van een medeleerling de nulregel gebruikte en met groepen van 10 werkte, maar vervolgens bij het bloemenprobleem toch weer met kleine groepjes werkt. Rechts een voorbeeld van een leerling die ook bij het bloemenprobleem met groepjes van 10 blijft werken.

al gewend was te doen. Er was veel onzekerheid over de juistheid van al dergelijke oplossingen.

Bij veel leerlingen bleek er voorts een grote mate van bereidheid te bestaan om, op voorspraak van de onderzoeker, op een minder formeel niveau tot een oplossing te proberen te komen door met groepjes te werken. Aldus bleken ze vrij snel tot een beter begrepen en beter te beargumenteren oplossing te komen die evenwel soms nogal omslachtig was als de getallen wat complexer waren en als er louter met kleine groepjes werd gewerkt. Er bleken echter ook leerlingen te zijn die betrekkelijk geruisloos en uit zichzelf op het werken met groepjes van 10 overschakelden en daarbij de nulregel hanteerden. De voorbeelden laten echter zien dat dit lang niet altijd het geval was; blijkbaar was de nulregel in dit soort situaties voor sommige leerlingen bepaald geen vanzelfsprekendheid, ondanks het feit dat deze op een lager niveau (10x9, 10x30, 20x40, ...) in het voorafgaande al uitgebreid verkend en besproken was.

Wat betreft de verschillende soorten vermenigvuldigsituaties die aan de orde werden gesteld, lijkt het aan te bevelen om de volgorde die in het derde onderzoekje werd

gehanteerd, ook in de leergang aan te houden. Dat betekent dat begonnen zou kunnen worden met verhoudingssituaties zoals rond de prijs van schapen en varkens, waarbij de leerlingen ertoe uitgenodigd zouden kunnen worden om te proberen gebruik te maken van de tekening en van het maken van kleinere of grotere groepjes om tot een oplossing te komen. Daarna zou uitgebreid kunnen worden naar groepjessituaties en naar rechthoeksituaties, waarbij de gemaakte groepjes op een soortgelijke manier in de tekening aangegeven zouden kunnen worden als in de verhoudingssituatie. Met het oog op deze keuze lijkt het wat betreft het modelgebruik aan te bevelen om in eerste instantie het groepjesmodel een rol te laten spelen bij de verkenning van het werken met groepjes en bij de overgang naar de 10-keer-strategie. Naderhand, als het decimaal splitsen in meer algemene zin onder de aandacht komt, zou het rechthoekmodel ingezet kunnen worden. Door tijdens de fase dat het werken met groepjes steeds verder verkend wordt, de nulregel enkele keren expliciet aan de orde te laten komen, zou het efficiënte van het maken van groepjes van 10 bewust gemaakt kunnen worden, en daarmee zou het perspectief op de 10-keer-strategie zich steeds verder kunnen openen. Op de een of andere manier zou er vervolgens een overgang tot stand moeten komen waarbij het visuele element in de opgaven steeds verder gereduceerd wordt en waarbij datgene wat in eerste instantie via het tekenen van rondjes in de tekening werd aangegeven, op een hoger, meer symbolisch niveau gaat plaatsvinden.

5.5 Globale opzet van het beoogde onderwijsleertraject

5.5.1 Drie didactische 'parameters'

Indien alle overwegingen, bevindingen en gegevens uit het voorgaande op een rij gezet worden, dan lijken er in ieder geval drie didactische 'parameters' te onderscheiden die bepalend zijn voor de globale opzet van de leergang:

(a) De soorten van strategieën die achtereenvolgens aan de orde komen;
(b) De soorten van situaties die de revue passeren;
(c) De soorten van schematiseringen en notatievormen (en de daarmee gepaard gaande modellen) die door de leerlingen gebruikt worden.

Ad (a):

Zoals hierboven reeds is aangegeven lijkt het voor de hand te liggen om een opzet aan te houden waarbij de aandacht in eerste instantie uitgaat naar de categorie meest basale strategieën, te weten die van het herhaald optellen, verdubbelen, werken met groepjes en verkorte vormen daarvan waarbij op een hogere eenheid wordt

overgeschakeld. De leerlingen zouden in de gelegenheid gesteld kunnen worden om dergelijke strategieën op velerlei manieren te beproeven, te overdenken en te verkorten. Vervolgens kan de aandacht geleidelijk aan verschuiven naar strategieën uit de categorie waarbij de getallen decimaal gesplitst worden. In eerste instantie kan een duidelijke nadruk liggen op de 10-keer-strategie waarbij alleen het eerste getal wordt gesplitst, omdat deze strategie op een logische manier voortvloeit uit het werken met groepjes van 10. Naderhand kan de aandacht ook uitgaan naar het gebruik van andere strategieën uit deze categorie, zoals die waarbij beide getallen decimaal gesplitst worden. In het verlengde daarvan kan er van tijd tot tijd aandacht zijn voor strategieën uit de categorie waarbij sprake is van compenseren of halveren-verdubbelen (in termen van de TAL-indeling voor hoofdrekenen: de varia-strategieën). In een overzicht ziet deze opzet er als volgt uit (zie fig. 5.16):



Fig. 5.16: Overzicht van de drie categorieën van oplossingsstrategieën die in de loop van de leergang achtereenvolgens aan de orde gesteld kunnen worden.

Deze opzet zou met zich meebrengen dat leerlingen na verloop van tijd in ieder geval in staat zijn om op een redelijk efficiënte manier gebruik makend van de 10-keer-strategie en verkorte vormen daarvan tot een oplossing te komen, terwijl ze daarnaast, al naar gelang de eigen voorkeur, in voorkomende gevallen het compenseren of halveren-verdubbelen als strategie hanteren, alsook andere vormen van decimaal splitsen.

Ad (b):
Om de hierboven geschetste progressie mogelijk te maken, lijkt het op grond van de ervaringen tijdens het vooronderzoek aan te bevelen om het vertrekpunt van de leergang te kiezen in situaties met het karakter van een verhoudingssituatie. Als de leerlingen zich bewust zijn geworden hoe je gebruik makend van de tekening via het afbakenen van kleinere of grotere groepjes tot een oplossing kunt komen, kan uitgebreid worden naar groepjessituaties en rechthoeksituaties. Vooral in het begin

lijkt het wenselijk om al dergelijke situaties zodanig visueel weer te geven, dat de leerlingen in hoge mate uitgelokt worden om 'tekenend en rekenend' een oplossing te bepalen. Naderhand, als ze zich bewust worden van het efficiënte van het werken met groepen van 10, kan het visuele element steeds verder teruggebracht worden. Bij dit alles lijkt het ook aanbeveling te verdienen de getallen op verschillende manieren te variëren. Vooral in het begin zou het nuttig kunnen zijn om met name het vermenigvuldigtal relatief groot te kiezen, zodat het voor de leerlingen lonend is om groepjes te maken. Geleidelijk aan kunnen ook situaties met benoemde kommagetallen hun intrede doen, met name geldsituaties (24 leerlingen die allemaal € 16,50 moeten betalen) en meetsituaties (18 pijpen van 4,65 m). Daarnaast kunnen vanaf een zeker moment natuurlijk ook kale opgaven aan de orde gesteld worden. Door de moeilijkheidsgraad daarbij te variëren, kan bereikt worden dat leerlingen alert blijven op gevallen waarbij een hoofdrekenstrategie direct uit het hoofd sterk voor de hand ligt.

Ad (c):
Naarmate de nulregel door de leerlingen beter doorzien wordt en dus het werken met groepen van 10 steeds meer gemeengoed wordt, dient er een overgang tot stand te komen waarbij het feitelijke omcirkelen van groepjes achterwege blijft en de leerlingen er steeds meer toe overgaan zich in gedachten voor te stellen hoe ze de betreffende hoeveelheid in groepen van 10 of veelvouden daarvan zouden kunnen indelen. Dit zou in de hand gewerkt kunnen worden door de objecten in kwestie (schapen, dozen, bloemen, ...) niet meer concreet af te beelden, maar in 'bedekte vorm', bijvoorbeeld via een tekening van de rondvaartboot waarin de passagiers zich bevinden, of de vrachtwagen waarin de dozen geladen zijn. Ter ondersteuning zouden de leerlingen in eerste instantie het omcirkelen van groepen objecten op een symbolisch niveau kunnen aangeven door een rondje om de betreffende getallen te zetten. In grote lijnen zou deze overgang er in het geval van een opgave als '26 dozen met 65 blikken appelmoes' dan uit kunnen zien zoals in fig. 5.17.

Uiteraard zullen er ook leerlingen zijn voor wie deze ondersteuning minder nodig is doordat zij de structuur van de opgave al dermate goed doorzien dat ze de betreffende handelingen op een meer formeel niveau of in verkorte vorm kunnen uitvoeren. Zulke leerlingen dienen daarvoor natuurlijk de ruimte te krijgen, en zouden bij dezelfde opgave bijvoorbeeld tot de in fig. 5.18 weergegeven oplossingswijzen en notatievormen kunnen komen.

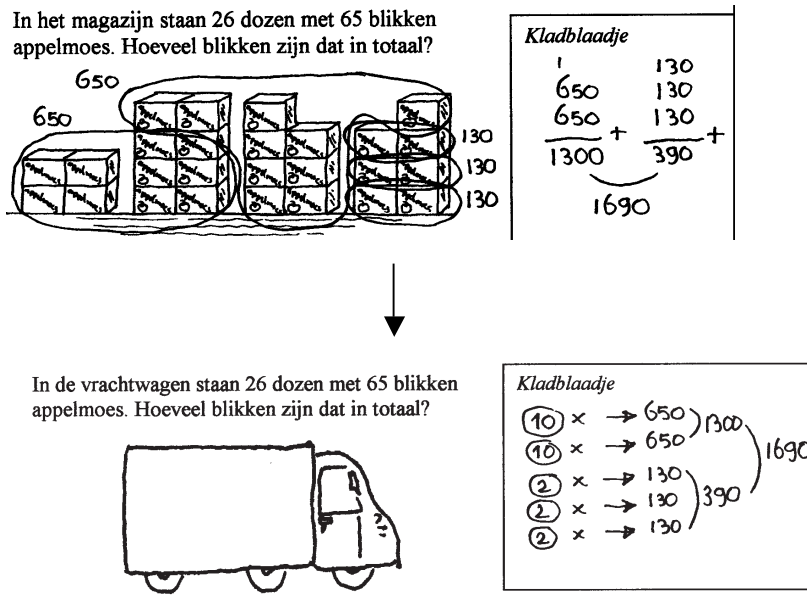


Fig. 5.17 Oplossingen via 'tekenen en rekenen' (boven) en via 'symboliseren en rekenen' (onder). Boven bakent de leerling in de tekening 2 groepen van 10 en 3 groepjes van 2 af, noteert de bijbehorende subtotalen en bepaalt het totaal aantal blikken op het kladblaadje. Onder rekent de leerling de opgave op het kladbaadje uit en stelt de groepen van 10 daarbij symbolisch voor met een rondje.

Maar door in eerste instantie de rondjesnotatie ruimschoots onder de aandacht te brengen, kan bereikt worden dat het inzicht in de 10-keer-strategie en verkorte vormen daarvan zich optimaal kan ontwikkelen. Ook de wiskundige eigenschap die aan deze oplossingswijze ten grondslag ligt, de distributieve eigenschap, zal op deze wijze door de leerlingen beter doorzien worden. Een gevolg daarvan zou ook kunnen zijn dat de strategie van het 'verkeerd splitsen' (waarbij deze opgave wordt opgelost via 20x60 en 4x5), veel minder gaat optreden.

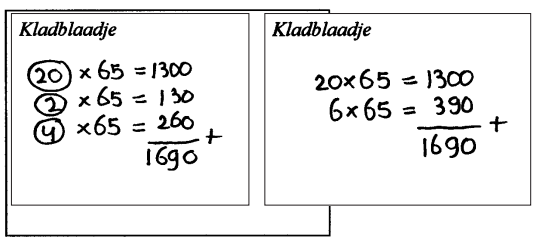


Fig. 5.18: Twee oplossingswijzen op een meer formeel niveau bij dezelfde opgave (26x65).

Bij dit alles lijkt het aan te bevelen om de leerlingen tot op zekere hoogte de ruimte te geven om eigen notatievormen te ontwikkelen en gebruiken. Een vast voorgeschreven, uniforme notatievorm lijkt niet wenselijk. Door dit binnen zekere grenzen open te laten, zou namelijk bevorderd kunnen worden dat de leerlingen zich actief betrokken voelen bij het zo overzichtelijk en efficiënt mogelijk noteren van hun oplossingen, en dat ze actief op zoek gaan naar verkorte oplossingswijzen en compactere notatievormen. Via de onderlinge uitwisseling daarvan tijdens klassikale momenten zou bevorderd kunnen worden dat de leerlingen in dat opzicht tot gezamenlijke progressie komen en steeds meer van elkaar gaan leren.

5.5.2 Het beoogde onderwijsleertraject in vogelvlucht

Op grond van de hierboven ontvouwen ideeën kan een voorlopige opzet voor het beoogde onderwijsleertraject worden samengesteld waarbij wordt uitgegaan van drie fasen of stappen in het traject die achtereenvolgens door de leerlingen doorlopen worden. Hieronder worden deze fasen beknopt beschreven en geïllustreerd met voorbeelden van probleemsituaties[9].

(1) Leg de leerlingen in eerste instantie een aantal situaties voor waarin de betreffende objecten (dieren, dozen, bloemen, ...) visueel uitgebeeld staan en lok in deze situaties elementaire strategieën zoals herhaald optellen, verdubbelen en groepjes maken op een zodanige manier uit dat:

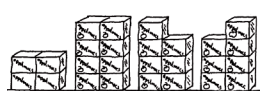
- ze zich bewust worden dat je via dergelijke strategieën op een weliswaar nog wat bewerkelijke maar wel goed te begrijpen manier tot een oplossing kunt komen;
- ze zich steeds meer gaan realiseren dat het werken met groepjes van een geschikte omvang (van 4, van 5, van 10) goede mogelijkheden biedt om tot verkorting te komen, zeker als daarbij gebruik wordt gemaakt van passende notatievormen;
- ze zich geleidelijk aan bewust worden dat het werken met groepen van 10 een efficiënte oplossingswijze vormt die op uiteenlopende manieren en in verschillende graden van verkorting gebruikt kan worden.

Op de veemarkt



Hoeveel kosten 18 schapen van 350 euro bij elkaar?

In het magazijn



Hoeveel blikken zitten er in 26 dozen met 65 blikken appelmoes?

Schoolboeken inkopen

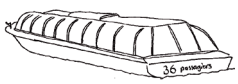


Reflectie: wat zijn handige groepjes als je de prijs van 32 schoolatlassen van € 48,- wilt uitrekenen?

(2) Leg ze vervolgens een aantal situaties voor waarin de objecten niet meer zichtbaar aanwezig zijn en stimuleer dat het maken van groepen van 10 op een meer symbolisch niveau gaat plaatsvinden, op een zodanige manier uit dat:

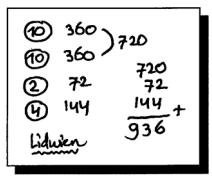
- ze ervaren dat je in zulke situaties via symbolische hulpnotaties zoals hierboven zijn aangeduid, tot een oplossing kunt komen die overeenkomt met het werken met groepen zoals ze dat al eerder hebben leren kennen;
- ze steeds bedrevener raken in het werken met groepen van 10 en veelvouden daarvan (de 10-keer-strategie) als een mogelijkheid om het oplossingsproces steeds efficiënter te maken;
- ze zich bewust worden van het feit dat er ook nog andere vormen van decimaal splitsen zijn die eveneens tot efficiënte oplossingen kunnen leiden.

De rondvaartboot



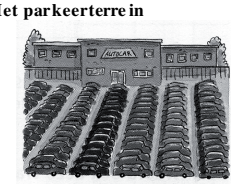
Er zitten 36 mensen in de boot die allemaal € 47,50 betalen. Hoeveel komt er in totaal aan geld binnen?

De kaarsenwinkel



Reflectie: Lidwien heeft een opgave rond pakken met 36 kaarsen opgelost. Wat was de opgave? Had het nog handiger gekund?

Het parkeerterrein



Hoeveel auto's op een terrein met 45 rijen van 128 auto's?

(3) Leg ze tenslotte een aantal situaties voor (zowel kale opgaven als contextproblemen; zie p. 152) waarin:

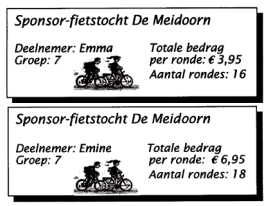
- ze steeds bedrevener raken in het efficiënt uitvoeren van allerlei berekeningen op basis van decimaal splitsen, onder gebruikmaking van steeds beknoptere hulpnotaties;
- ze steeds gevoeliger worden voor specifieke getalkenmerken van de getallen in kwestie en het mede op grond daarvan kiezen voor een passende strategie, inclusief enkele hoger niveau-strategieën zoals compenseren en halveren-verdubbelen;
- ze ervaring opdoen met het 'bewijzen' van de (on-)juistheid van verschillende aanpakken en denkwijzen.

Een nieuwe keukenvloer
In de keuken komt een nieuwe vloer met 14 rijen van 25 tegels.



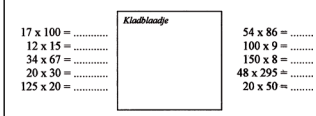
Reflectie: kunnen we 'bewijzen' waarom dit wel of niet een goede manier is?

De sponsortocht



Hoeveel geld halen deze twee deelnemers binnen?

Kale sommen



Reken uit je hoofd uit, of op het kladblaadje.

Tot zover de globale opzet van het beoogde onderwijsleertraject. Deze opzet is uiteraard nog tamelijk summier en geeft niet meer dan enkele hoofdlijnen in het traject aan. Bovendien geven de voorbeeldopgaven uiteraard maar een zeer beperkt beeld van de globale opeenvolging van probleemsituaties die in het leertraject kunnen worden opgenomen. Zo lijkt het nu alsof rechthoeksituaties pas op een betrekkelijk laat tijdstip (tegen het einde van de tweede fase) aan de orde komen. Dat is natuurlijk niet het geval – ook in de eerste fase zullen dergelijke situaties van tijd tot tijd al aan bod komen. Verder dienen bij de verdere uitwerking natuurlijk nog allerlei nuanceringen aangebracht te worden. Zo is het enigszins te verwachten dat een deel van de leerlingen al in een vroeg stadium op een veel hoger niveau tot een oplossing zal komen via meer formele werkwijzen zoals die van tijd tot tijd in het vooronderzoek naar voren kwamen. Voor zover het hier om wel doordachte en correct uitgevoerde werkwijzen gaat, dienen leerlingen hiervoor uiteraard volop de ruimte te krijgen. Te hopen valt dat de leraar zulke leerlingen ook een positieve rol kan laten spelen bij het 'ontdekken' van het handige van het werken met groepen van 10, en van het gebruik van de distributieve eigenschap en de nulregel daarbij. Evenzo zou het kunnen zijn dat zich in een vroeg stadium gevallen voordoen waarbij het verkeerd splitsen als strategie gebruikt wordt. Mocht dat inderdaad gebeuren, dan is het belangrijk dat de leraar dit snel signaleert, en dat deze erop toeziet dat het onjuiste van deze aanpak besproken en doordacht wordt. Van belang lijkt het verder om in de leergang optimale mogelijkheden te creëren voor onderlinge uitwisseling van notatievormen en strategieën. Wellicht kan het zelf op het bord laten zetten door leerlingen een rol spelen, maar ook kan de leraar zelf van tijd tot tijd een aantal voorbeeldoplossingen op het bord weergeven. Daarnaast zou het een mogelijkheid kunnen zijn om de leerlingen op gezette tijden in twee- of drietallen te laten werken en ze een gezamenlijke oplossing op een poster te laten beschrijven. Aan de hand van dergelijke posters kan dan ook een uitwisseling plaatsvinden waarbij notatievormen vergeleken worden, strategieën tegen elkaar afgewogen worden, enzovoorts.

Van belang is het verder nog om vast te stellen waar de met het leertraject beoogde niveauverhoging nu precies in gelegen is. Deze heeft in de eerste plaats betrekking op het feit dat een bepaald type strategie, namelijk die van het herhaald optellen, verdubbelen en werken met groepjes op een steeds efficiëntere manier én op een steeds hoger niveau door de leerlingen ingezet gaat worden doordat deze overgaat in het werken met groepen van 10 en daarmee in de 10-keer-strategie uit de categorie van het decimaal splitsen. In de tweede plaats, samenhangend met het voorgaande, is er sprake van niveauverhoging doordat de door de leerlingen gehanteerde hulpnotaties steeds beknopter en 'wiskundiger' worden. Daarbij maakt het daadwerkelijke aangeven van groepen van 10, zoals hierboven is beschreven, steeds meer plaats voor symbolische notaties waarbij nog slechts summier verwezen wordt naar die groepen van 10; en op termijn natuurlijk naar formele notaties zoals die ook voor de andere bewerkingen gebruikt worden. In de derde plaats is er sprake van niveauverhoging doordat de leerlingen kennismaken met een steeds breder arsenaal aan oplossingsstrategieën en daarvan al naar gelang de situatie en al naar gelang de eigen voorkeur gebruik leren maken.

5.5.3 Bredere inbedding van het onderwijsleertraject

Het hierboven beschreven traject staat uiteraard niet op zichzelf. Er zijn allerlei relaties met verwante en minder verwante leerlijnen die in de loop van groep 6 en 7 doorlopen worden. De samenhang met deze leerlijnen is een belangrijk aandachtspunt bij de verdere uitwerking van het beoogde traject. Twee aspecten van deze samenhang lijken van primair belang. In de eerste plaats dient bedacht te worden dat er naast de leerlijn van het meercijferige vermenigvuldigen een leerlijn rond het gevarieerde hoofdrekenen in het curriculum is opgenomen die onder meer betrekking heeft op het vermenigvuldigen met ronde getallen. Zie fig. 5.19 voor twee voorbeeldopgaven uit deze leerlijn.

Verwacht mag worden dat er van deze leerlijn een positieve invloed kan uitgaan op het vlot uit het hoofd uitrekenen van onderdelen van opgaven in het kader van het meercijferige vermenigvuldigen.

In de tweede plaats dient bedacht te worden dat de experimentele leergang weliswaar een aanzienlijk deel van het totale onderwijsleerproces rond het meercijferige vermenigvuldigen beslaat, maar niet het geheel. Zoals hierboven reeds is aangegeven, wordt er in de ongeveer vijftien lessen die in de leergang zullen zijn opgenomen, vooral op gemikt dat de leerlingen efficiënte notatieondersteunde strategieën in de

sfeer van het gestileerde hoofdrekenen zullen verwerven. Dat betekent dat in de periode daarna, die in het onderzoek grotendeels buiten beschouwing blijft, nog een overgang zal dienen plaats te vinden naar een meer gestandaardiseerde procedure rond het kolomsgewijze hoofdrekenen, en eventueel nog een overgang naar de standaard-cijferprocedure. Al met al leidt dit tot het volgende overzicht van de directe 'omgeving' van het beoogde onderwijsleertraject (zie fig. 5.20).

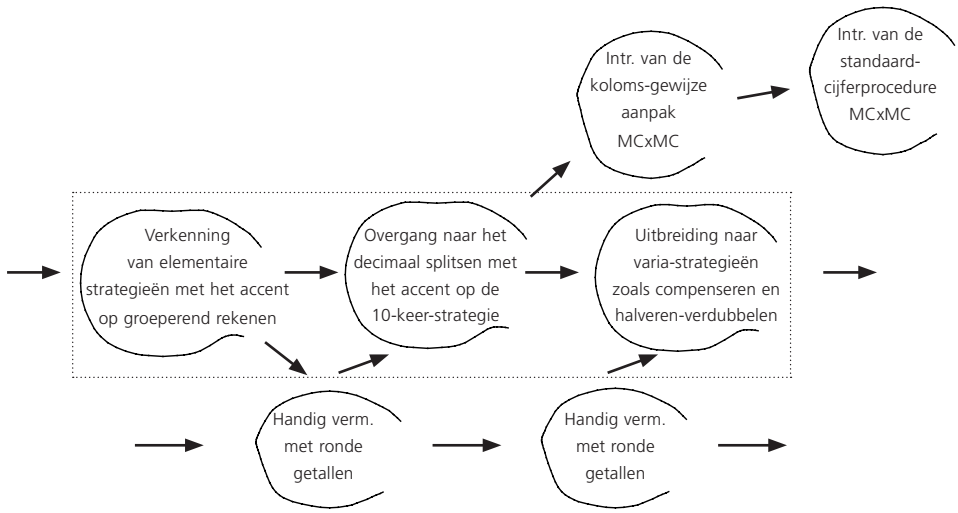


Fig. 5.20: Overzicht van de omgeving waarin het beoogde onderwijsleertraject rond het meercijferige vermenigvuldigen zich bevindt. Via de pijlen worden relaties met verwante leerlijnen aangegeven. Het gebied binnen het gestippelde kader geeft de kern van het onderzoeksgebied aan.

5.6 Verwachtingen met betrekking tot de beoogde progressie van de leerlingen

Om uiteindelijk tot een aantal gefundeerde uitspraken te kunnen komen over de leereffecten van de experimentele leergang en de factoren die daarbij van beslissende invloed zijn, is het belangrijk dat nader in kaart wordt gebracht wat de voornaamste verwachtingen zijn die in het beoogde onderwijsleertraject zoals het hierboven beschreven is, besloten liggen. Het gaat dan om verwachtingen die betrekking hebben op cruciale elementen van de beoogde progressie waarvan aangenomen wordt

dat deze zich in de loop van het feitelijke onderwijsleerproces voltrekken gaat. Door deze elementen van tevoren te identificeren en aan te geven wat de verwachtingen daaromtrent zijn, wordt het mogelijk om er naderhand, als het onderwijsexperiment is afgerond, op terug te komen en te analyseren in hoeverre deze verwachtingen daadwerkelijk zijn uitgekomen. Deze analyse vormt een belangrijk aspect van de bewijskracht van ontwikkelingsonderzoek. Het zijn immers niet alleen de resultaten van het experimentele onderwijsleerproces die 'bewijzen' dat bepaalde leereffecten tot stand komen, maar evenzeer de analyse van wat de cruciale elementen vormen die aan deze leereffecten hebben bijgedragen. Hieronder wordt een zestal verwachtingen geformuleerd die betrekking hebben op dergelijke cruciale elementen.

(1) Het laten uitgroeien van het groeperend rekenen tot een elementaire basisstrategie

Het lijkt, mede gelet op de resultaten van het uitgevoerde vooronderzoek, aannemelijk dat er in de eerste fase van het onderwijsleerproces enerzijds een groep leerlingen zal zijn die nog niet zo goed raad weten met de voorgelegde opgaven en die, zeker in het geval de getallen in kwestie betrekkelijk groot zijn, geneigd zijn om deze op een relatief laag niveau aan te pakken en te proberen via allerlei vormen van herhaald optellen, verdubbelen en groepjes maken tot een oplossing te komen. Vaak zullen dergelijke oplossingen vooral in het begin nog omslachtig zijn. Anderzijds zal er een groep leerlingen zijn die geneigd zijn om in eerste instantie hun toevlucht te zoeken in min of meer formele oplossingswijzen waarbij de getallen decimaal gesplitst worden op een manier die vergelijkbaar is met de wijze waarop dat bij soortgelijke reeds verworven procedures bij het optellen en aftrekken gebeurt. Waarschijnlijk zal daarbij tamelijk wat onzekerheid bestaan over de juistheid van dergelijke oplossingswijzen en de daarmee verkregen antwoorden. Nogal wat leerlingen zullen ook niet goed in staat zijn om te beargumenteren waaróm een bepaalde aanpak al dan niet correct is.

Door nu enerzijds te benadrukken dat de meer formele aanpakken nog moeilijk te doorgronden zijn en tot resultaten leiden waarvan de juistheid soms te betwijfelen valt, en anderzijds te laten onderzoeken onder welke voorwaarden het werken met groepjes tot een redelijk efficiënte oplossing kan leiden, zou een onderwijsleerproces in gang gezet kunnen worden waarvan verwacht mag worden dat het groeperend rekenen voor alle leerlingen tot een soort elementaire, goed te begrijpen basisstrategie kan uitgroeien die in verschillende graden van verkorting is te gebruiken.

(2) Het doordacht leren inzetten van de nulregel
Het lijkt verder aannemelijk dat er zich bij het gebruik van het groeperend rekenen flinke niveauverschillen zullen voordoen. Enerzijds zullen er leerlingen zijn die op een laag niveau, werkend met kleine groepjes op een enigszins omslachtige wijze tot een oplossing komen die lang niet altijd goed is. Anderzijds zullen er leerlingen die het handige van het maken van groepen van 10 en het daarbij inzetten van de nulregel al snel doorzien, en die als gevolg daarvan op een betrekkelijk efficiënte wijze en met meer succes tot een oplossing komen. Verwacht zou mogen worden dat het naast elkaar plaatsen van deze sterk in niveau variërende oplossingswijzen en het reflecteren op de overeenkomsten en verschillen daartussen, kan leiden tot een bezinning op het efficiënte van het werken met groepen van 10, en dus op de nulregel die daarbij in het geding is. Een dergelijke bezinning kan resulteren in een beter inzicht in het waarom achter de nulregel en in de algemene geldigheid van deze regel. Groeit de nulregel aldus uit tot een algemeen gedeeld inzicht, dan zou verwacht mogen worden dat veel leerlingen die tot dan toe met kleine groepjes hebben gewerkt, er betrekkelijk eenvoudig toe zullen overgaan om met groepen van 10 te gaan werken en aldus op een veel efficiëntere werkwijze over te schakelen.

(3) De ontwikkeling van picturaal-schematisch notatiegedrag
Wellicht zal het aanvankelijk enige moeite kosten om de leerlingen actief gebruik te laten maken van de afbeeldingen van objecten waarvan de betreffende opgaven vergezeld gaan. Maar als ze ervaren hebben hoe je door dit wel te doen en door in de tekening aan te geven wat voor groepjes je maakt, het overzicht over de betreffende handelingen kunt bewaren en dus ook de draad van de eigen redenering beter kunt vasthouden, dan zou verwacht mogen worden dat veel leerlingen de overstap naar dergelijke picturaal-schematische notatievormen betrekkelijk vlot maken.

Het lijkt aannemelijk dat zich daarbij aanvankelijk een grote verscheidenheid van notatievormen zal voordoen. Aan de ene kant zullen er leerlingen zijn bij wie de gehanteerde notatievorm van meet af aan tamelijk overzichtelijk is doordat er systematisch wordt aangegeven om wat voor groepjes het gaat en hoeveel euro, blikken of pakken dergelijke groepjes omvatten. Maar er zullen ook leerlingen zijn bij wie alles aanvankelijk voor medeleerlingen of de leraar nog moeilijk te doorgronden is doordat de groepjes niet nauwkeurig staan aangegeven, de aantallen per groepje niet duidelijk vermeld staan of doordat het optellen van de subtotalen nogal rommelig gebeurt.

Verwacht zou mogen worden dat er over de hele linie een zekere verbetering in het notatiegedrag gaat optreden als dergelijke notatievormen regelmatig onderling uitgewisseld worden en als daarbij niet alleen naar de betreffende oplossingsstrategieën wordt gekeken, maar ook naar de mate van overzichtelijkheid en begrijpelijkheid van de gebruikte notatievorm. Zo kan besproken worden bij welke notatievorm je makkelijk kunt zien wat er gedaan is, in welke volgorde handelingen zijn uitgevoerd en wat het uiteindelijke resultaat was. Aldus kunnen de leerlingen gestimuleerd worden om hun eigen notatievorm zo overzichtelijk en begrijpelijk mogelijk te maken, met als resultaat een zekere uniformering daarvan waardoor de onderlinge communicatie alsmede verdere verkorting en niveauverhoging bevorderd wordt.

(4) De overgang naar meer symbolische notatievormen
Een cruciaal punt in de verdere ontwikkeling van het notatiegedrag wordt gevormd door de overgang van notatievormen waarbij 'getekend en gerekend' wordt (en dus groepjes in de tekening worden omcirkeld) naar notatievormen waarbij het groeperen op een meer symbolisch niveau gaat plaatsvinden. Zoals hierboven is aangegeven, zou dat kunnen via de introductie van een verwijzende notatie waarbij door middel van een rondje om een getal gerefereerd wordt aan het omcirkelen dat eraan ten grondslag ligt. Zie fig. 5.21 voor een voorbeeld zoals dat werd 'voorgedacht'.

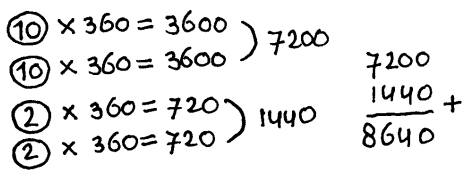


Fig. 5.21: Voorbeeld van een mogelijke manier waarop in het geval van de opgave '24 schapen van 360 euro' op symbolisch niveau wordt aangegeven dat met 2 groepjes van 10 en 2 groepjes van 2 wordt gewerkt.

Het lijkt aannemelijk dat leerlingen niet zo snel uit zichzelf op dergelijke symbolische notatievormen zullen komen. Verwacht zou evenwel mogen worden dat als leerlingen voorbeelden daarvan voorgelegd krijgen die zowel qua notatievorm als qua strategiegebruik direct aansluiten op wat ze zelf hebben gedaan, dergelijke notatievormen vlot door hen overgenomen en verder verkort en 'gestroomlijnd' zullen worden.

(5) Doordacht distributief leren redeneren

Het lijkt aannemelijk dat er in de eerste fase van het onderwijsleerproces met een zekere regelmaat leerlingen zullen zijn die de neiging hebben om opgaven op een formeel niveau aan te pakken door de getallen in kwestie decimaal te splitsen en die daarbij tot een onjuiste oplossing komen doordat alleen de tientallen met de tientallen en de eenheden met de eenheden vermenigvuldigd worden. Zie het voorbeeld hieronder uit het vooronderzoek (fig. 5.22). Men zou de hierbij gevolgde redenering een vorm van 'quasi-distributief redeneren' kunnen noemen. Het is duidelijk dat het inzicht in de distributieve eigenschap hier nog tekort schiet. Het gebruik van deze onjuiste strategie zou in eerste instantie ontmoedigd kunnen worden door te laten zien dat deze tot een onjuiste uitkomst leidt. Ook zou op een zeker moment naar voren kunnen komen dat het veiliger en beter te begrijpen is als een strategie gehanteerd wordt waarbij alleen het eerste getal decimaal gesplitst wordt (cq. als de 10-keer-strategie wordt gebruikt).

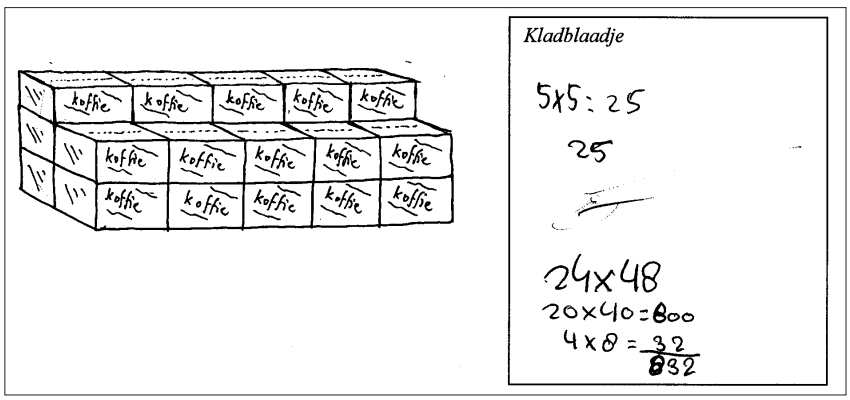


Fig. 5.22: Voorbeeld van een zelf bedachte oplossing uit het vooronderzoek bij de opgave '25 dozen met 48 pakken koffie'. De leerling heeft eerst het totaal aantal dozen bepaald en vervolgens 24x48 uitgerekend via 20x40 en 4x8. Waarom hij daarbij van 24 in plaats van 25 dozen is uitgegaan, is niet duidelijk.

Naderhand, als er een niveauverhoging is opgetreden waarbij de 10-keer-strategie steeds meer gemeengoed is geworden, lijkt het aannemelijk dat sommige leerlingen ertoe zullen overgaan het decimaal splitsen ook in meer algemene zin te gebruiken. Verwacht zou mogen worden dat als er op dat moment een zekere nadruk op rechthoeksituaties komt te liggen (die in het voorgaande natuurlijk al enkele keren eerder aan bod zijn gekomen) en als aan de hand van schematische voorstellingen daarvan wordt verduidelijkt hoe je het distributief redeneren op een doordachte manier kunt

uitvoeren, de leerlingen beter zullen gaan doorzien hoe je het decimaal splitsen op verschillende manieren correct kunt uitvoeren. Zie het voorbeeld hieronder van een passende schematisering in fig. 5.23.

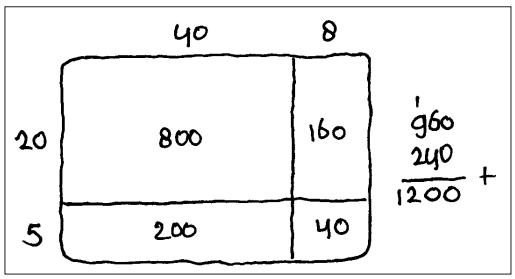


Fig. 5.23: Voorbeeld van een schematisering bij de opgave '25 rijen van 48 tegels' aan de hand waarvan het correct distributief redeneren nader verduidelijkt en doordacht kan worden.

(6) De toenemende behoefte aan standaardisering

Het lijkt aannemelijk dat er, indien het voorgaande goeddeels z'n beslag heeft gekregen, in de tweede en derde fase van het onderwijsleerproces gaandeweg een zekere homogenisering zal optreden waarbij steeds meer leerlingen op een betrekkelijk hoog niveau gebruik zullen maken van de 10-keer-strategie en verkorte vormen daarvan, terwijl sommige leerlingen daarnaast andere vormen van decimaal splitsen alsmede varia-strategieën zoals compenseren als strategie zullen hanteren. Verwacht zou mogen worden dat, naarmate het aantal en de moeilijkheidsgraad van de opgaven groter wordt, veel leerlingen steeds meer routine zullen ontwikkelen om dergelijke opgaven op een betrekkelijk standaardmatige manier aan te pakken, zonder steeds weer te hoeven bedenken welke stappen er precies uitgevoerd gaan worden. Dit zou ertoe kunnen leiden dat de behoefte aan een gestandaardiseerde vorm van gestileerd hoofdrekenen steeds sterker wordt ervaren. Deze behoefte zou in het onderwijs aangegrepen kunnen worden om een standaardprocedure te introduceren die enerzijds grote verwantschap vertoont met de strategieën die de leerlingen al hanteren en anderzijds uitzicht biedt op de cijferprocedure die ter afsluiting van het onderwijsleerproces geïntroduceerd kan worden.

voetnoten

1 De hier weergegeven terminologie is de meest gangbare zoals die in de genoemde bronnen wordt gebruikt. Deze terminologie is evenwel niet strikt eenduidig. Met name de term verhoudingssituatie voor situaties waarin bijvoorbeeld sprake is van het bepalen van de prijs van een aantal objecten, is enigszins arbitrair. Lijnsituaties zouden in wezen met evenveel recht als verhoudingssituatie aangemerkt kunnen worden.

2 Cijferen zou in principe in dit overzicht ook nog als strategie genoemd kunnen worden. Het gaat hier echter om strategieën die door de leerlingen zelf bedacht kunnen worden, en dat geldt eigenlijk niet voor het cijferen. Wel komt het uiteraard voor dat een leerling deze strategie thuis al geleerd heeft (bijvoorbeeld van een oudere broer of zus).

3 In het Pluspunt Handboek (NOT) schrijft De Moor (1983) hierover: 'Bij deze aanpak ontspruit de vermenigvuldiging heel natuurlijk aan het optellen'.

4 Zie de beschrijving van het 'vermenigvuldigen met grotere getallen' in het hoofdstuk over hoofdrekenen in de TAL-brochure Kinderen leren rekenen, p.47-50 (Van den Heuvel-Panhuizen e.a. (red.), 2001).

5 In hun analyse van de PPON-resultaten uit 2004 met betrekking tot het delen constateren Van Putten en Hickersdorff een discrepantie tussen het gebruik van hulpnotaties in de standaardafname van PPON (waar 32% van de leerlingen geen hulpnotaties gebruikt en waarbij bovendien nog 20% van de leerlingen een opgave overslaan of in de categorie vallen van 'onduidelijk of er een hulpnotatie is gebruikt') en de individuele afname (waarbij deze percentages respectievelijk slechts 1% en 3% bedragen). Ook de goedscores zijn in het geval van de individuele afname beduidend hoger. Dit lijkt erop te wijzen dat de condities waaronder de toets wordt afgenomen, mede bepalend zijn voor het al dan niet gebruiken van hulpnotaties. Zie Van Putten & Hickendorff, 2006, p. 22/23. In hoeverre een vergelijkbare discrepantie geldt voor het meercijferige vermenigvuldigen, is niet duidelijk.

6 In het hierboven reeds gememoreerde Pluspunt Handboek (NOT) worden maar liefst tien verschillende modellen genoemd, waaronder bijvoorbeeld ook het machientje en het boomdiagram. Zie De Moor 1983, p.23. Van een aantal van deze modellen kan echter moeilijk gezegd dat deze de brugfunctie met het oog op het verticale mathematiseren vervullen die kenmerkend voor echte modellen wordt geacht.

7 De eerste twee van deze eigenschappen worden in Nederland ook wel aangeduid met de termen 'verwisseleigenschap' en 'verdeeleigenschap'. Zie bijvoorbeeld Treffers A. & K. Buys: Rekenen tot 100 in: *Jonge kinderen leren rekenen* (p.61).

8 Hiermee wordt bedoeld een schematische tekening van een rechthoekige stapel blokken of blikken waarmee op eenvoudige wijze is in te zien dat bijvoorbeeld een opgave als (9x6)x15 ook makkelijk is uit te rekenen via 9x(6x15).

9 In iets aangepaste vorm en geïllustreerd met voorbeelden van strategieën die zich tijdens het vooronderzoek voordeden, is deze beschrijving van het beoogde onderwijsleertraject ook aan de leraren voorgelegd die aan het onderwijsexperiment deelnamen.

6 Cruciale momenten uit het experimentele onderwijsleerproces

6.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt gerapporteerd over het onderwijsexperiment dat in het kader van het onderzoek werd uitgevoerd. Dat gebeurt in de vorm van de beschrijving van een aantal cruciale onderwijsmomenten die zich tijdens het experiment voordeden. Uit de totale verzameling van gegevens die bijeengebracht en geanalyseerd werd, zijn een zevental van dergelijke momenten geselecteerd die voor de voortgang van het onderwijsleerproces (cq. het ontbreken van voortgang) van doorslaggevend belang worden geacht. Omdat de betreffende momenten tijdens het experiment gepaard gingen met reflectie op de gang van zaken zoals die zich in de verschillende scholen voordeed, worden ook de bijbehorende reflectiemomenten in kort bestek weergegeven.

Gezien in het licht van de totaliteit van het onderzoek wordt in dit hoofdstuk de grens tussen de experimentele fase en de retrospectieve fase overschreden. Het vertrekpunt is gelegen in eerstgenoemde fase via de beschrijving van gebeurtenissen die zich tijdens het onderwijsexperiment voordeden en die als mogelijk betekenisvol werden aangemerkt met het oog op de progressie van de leerlingen. Maar de analyse van deze gebeurtenissen en de zoektocht naar soortgelijke voorvallen zoals die vervolgens in dit hoofdstuk beschreven worden, maken duidelijk deel uit van de retrospectieve fase en kunnen beschouwd worden als het eerste deel van de retrospectieve analyse die in de komende hoofdstukken verder z'n beslag zal krijgen.

Voorafgaand aan de beschrijving van de genoemde cruciale onderwijsmomenten wordt in paragraaf 2 van dit hoofdstuk een beeld geschetst van de gang van zaken tijdens het experiment, en van de wijze waarop gegevens werden verzameld. Daarbij wordt onder meer ingegaan op de verschillende soorten gegevens die werden bijeengebracht, en op de frequentie waarmee dit gebeurde. Als in paragraaf 3 vervolgens is verduidelijkt wat in het kader van deze studie onder cruciale onderwijsmomenten wordt verstaan, volgt in paragraaf 4 de beschrijving van deze momenten zoals die zich tijdens het experiment voordeden. Het hoofdstuk sluit af met een paragraaf waarin enkele opmerkingen worden gemaakt over de relatie van de beschreven onderwijsmomenten met de voorafgaand aan het experiment

geformuleerde verwachtingen met betrekking tot het beoogde verloop van het onderwijsleerproces.

Vooruitlopend op wat in paragraaf 3 wordt geconstateerd, dient nu reeds opgemerkt te worden dat de term 'onderwijsmomenten' wellicht niet helemaal de juiste associaties oproept en daarom enige toelichting behoeft. Deze term wordt in het kader van dit hoofdstuk namelijk gebruikt in de betekenis van 'gewichtige onderwijsgebeurtenis', of liever van een *opeenvolging van gewichtige onderwijsgebeurtenissen* – en dan in het bijzonder een opeenvolging van gebeurtenissen door het signaleren en analyseren waarvan een bepaald patroon aan het licht komt dat als maatgevend kan worden beschouwd voor de wijze waarop progressie tijdens het onderwijsleerproces tot stand komt (cq. achterwege blijft). Kenmerkend voor dit aan het licht komen is het feit dat niet alleen gebeurtenissen in de klas worden waargenomen en geregistreerd van door leraar en leerlingen vertoond gedrag (mondeling, maar ook schriftelijk in de vorm van bordnotaties en door leerlingen geproduceerd materiaal), maar dat deze gebeurtenissen tevens in een breder kader worden geplaatst en met elkaar in verband gebracht worden tegen de achtergrond van de vooraf geformuleerde verwachtingen met betrekking tot het beoogde onderwijsleerproces. Voornaamste doel van het hoofdstuk is dan ook om dergelijke patronen op een beredeneerde manier aan het licht te brengen en daarmee de basis te leggen voor de retrospectieve analyse in de hoofdstukken daarna.

6.2 Het verzamelen van gegevens tijdens het onderwijsexperiment

Zoals in hoofdstuk 4 reeds is aangegeven, vond het onderwijsexperiment dat in het kader van deze studie werd uitgevoerd, op vijf scholen plaats in de periode augustus-december in groep 7. De ruim vijftien lessen op deze scholen werden min of meer tegelijkertijd gegeven, al lag er soms wel een periode van enkele weken tussen het moment waarop een les op de ene school gegeven werd, en het moment waarop dat op een andere school gebeurde. Over het algemeen werden er per week zo'n twee tot drie lessen uit de experimentele leergang gegeven. Soms bleef dit beperkt tot één les per week. Ook de drie criteriumtoetsen waarmee werd onderzocht hoe de stand van zaken op het gebied van het meercijferige vermenigvuldigen respectievelijk aan het begin, halverwege en aan het eind van de leergang was, werden ongeveer tezelfdertijd afgenomen. Steeds werd direct na de toetsafname een aantal leerlingen op elke school geïnterviewd over de zojuist gemaakte toets[1].

Zoals eveneens reeds in hoofdstuk 4 is gememoreerd, werd de gang van zaken op alle vijf de scholen zo nauwkeurig mogelijk van les tot les gevolgd. Van het overgrote deel van de lessen werden lesobservaties gemaakt terwijl tevens op uitgebreide schaal leerlingenmateriaal werd verzameld dat door de leerlingen tijdens de betreffende les was geproduceerd. Zie fig. 6.1 voor een voorbeeld van dergelijk leerlingenmateriaal. Daarnaast werden met een zekere regelmaat foto's van bijvoorbeeld bordnotaties gemaakt, alsmede video-opnamen van belangrijke lesmomenten. Ook van enkele van de hulpactiviteiten die na de tweede afname van de criteriumtoets op de meeste scholen plaatsvonden, werden video-opnamen gemaakt.

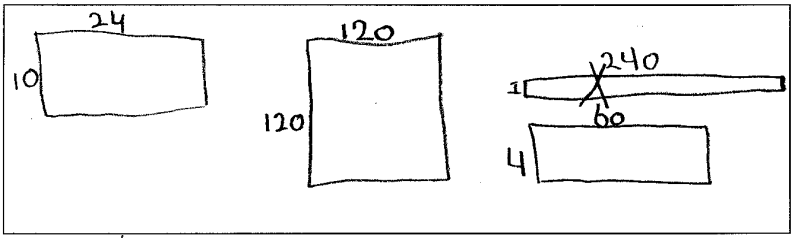
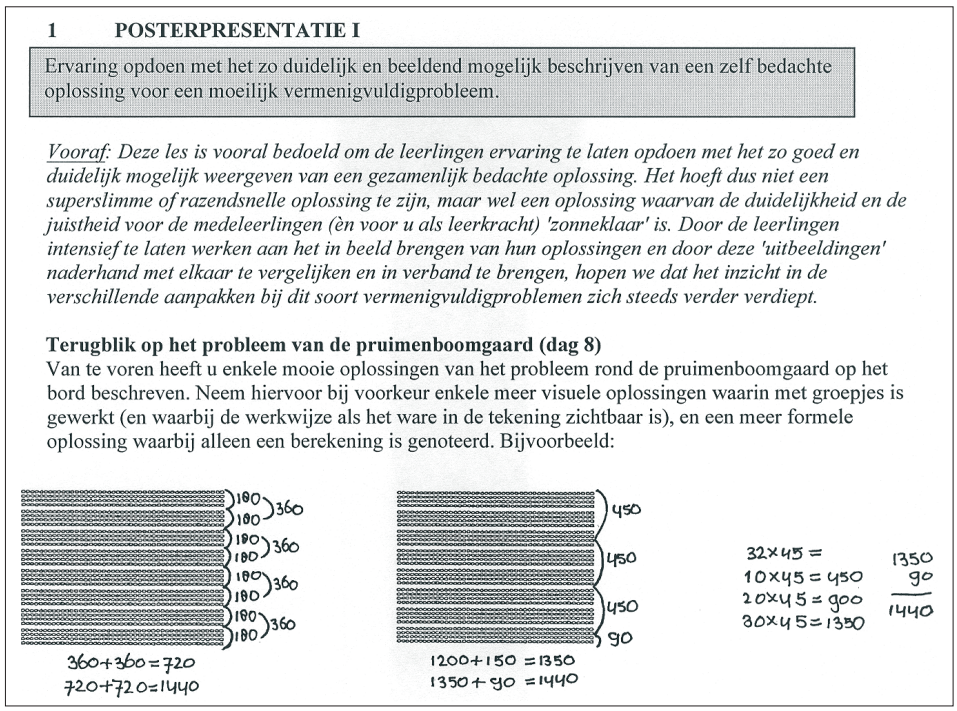


Fig. 6.1: Voorbeeld van door een leerling bedachte oplossingen bij de vraag om rechthoekige terrasjes van 240 tegels te bedenken. Bij de middelste oplossing wordt de bekende fout gemaakt waarbij oppervlakte en omtrek verward worden. Bij de oplossing rechtsboven vond de leerling zelf kennelijk dat dit niet echt een rechthoek is.

Naar aanleiding van de aldus steeds aangroeiende verzameling gegevens vonden regelmatig reflectiemomenten plaats waarop getracht werd een meer globaal beeld te vormen van de stand van zaken bij het experiment, en van de (al dan niet geboekte) progressie van de leerlingen. De aandacht ging daarbij speciaal uit naar gebeurtenissen die niet verwacht waren, en gebeurtenissen die in eerste instantie moeilijk te duiden waren. Tevens werd tijdens deze reflectiemomenten (die veelal schriftelijk werden vastgelegd) gepoogd implicaties voor het vervolg van het onderwijsleerproces op het spoor te komen. Dit leidde in enkele gevallen tot bijstelling van de inhoud die reeds voor de navolgende lessen was uitgestippeld.

Verder was een belangrijk punt van aandacht om tijdens de lessen zo goed mogelijk te registreren hoe deze door de leraar werden uitgevoerd. Weliswaar kreeg hij/zij ruim van tevoren de beschikking over een lesbeschrijving waarin tamelijk gedetailleerd beschreven stond hoe het onderwijs zou kunnen verlopen, inclusief informatie over te verwachten aanpakken, mogelijke begripsmatige complicaties en suggesties

voor bordgebruik[2]. Maar daarbij was ook volop de ruimte voor eigen interpretaties en uitwerkingen, om uitwisselingsmomenten naar eigen goeddunken gestalte te geven, enzovoorts. Zie voor een voorbeeld van het eerste deel van een lesbeschrijving fig. 6.2.



1 POSTERPRESENTATIE I

Ervaring opdoen met het zo duidelijk en beeldend mogelijk beschrijven van een zelf bedachte oplossing voor een moeilijk vermenigvuldigprobleem.

Vooraf: Deze les is vooral bedoeld om de leerlingen ervaring te laten opdoen met het zo goed en duidelijk mogelijk weergeven van een gezamenlijk bedachte oplossing. Het hoeft dus niet een superslimme of razendsnelle oplossing te zijn, maar wel een oplossing waarvan de duidelijkheid en de juistheid voor de medeleerlingen (èn voor u als leerkracht) 'zonneklaar' is. Door de leerlingen intensief te laten werken aan het in beeld brengen van hun oplossingen en door deze 'uitbeeldingen' naderhand met elkaar te vergelijken en in verband te brengen, hopen we dat het inzicht in de verschillende aanpakken bij dit soort vermenigvuldigproblemen zich steeds verder verdiept.

Terugblik op het probleem van de pruimenboomgaard (dag 8)
Van te voren heeft u enkele mooie oplossingen van het probleem rond de pruimenboomgaard op het bord beschreven. Neem hiervoor bij voorkeur enkele meer visuele oplossingen waarin met groepjes is gewerkt (en waarbij de werkwijze als het ware in de tekening zichtbaar is), en een meer formele oplossing waarbij alleen een berekening is genoteerd. Bijvoorbeeld:

Fig. 6.2: Voorbeeld van het eerste deel van een lesbeschrijving. Bij deze les wordt eerst teruggeblikt op de oplossingswijzen die leerlingen in de vorige les hebben gehanteerd bij een probleem rond het aantal bomen in een boomgaard, en vervolgens beschrijven ze op een poster hoe ze een probleem rond een bloemperk oplossen.

Voorts was het natuurlijk nog maar de vraag in hoeverre de leraren de bedoelingen die met de onderwijsactiviteiten nagestreefd werden, altijd even goed doorzagen. Het zou kunnen zijn dat dit soms niet het geval was en dat men een eigen 'draai' aan een les zou geven waardoor deze niet meer overeenkwam met de beoogde les. Daarnaast zou het kunnen zijn dat een leraar op een zeker moment een eigen idee in de les zou verwerken waardoor de bedoelingen juist beter tot hun recht zouden komen dan wanneer de beoogde opzet was aangehouden. In al zulke situaties zou het

waardevol kunnen zijn om te registreren wat zich allemaal voordeed en om een zo uitgebreid mogelijke verzameling gegevens aan te leggen in de vorm van lesverslagen, leerlingenmateriaal, verslagen van interviews met leerlingen, foto's, video-opnamen, enzovoorts.

Inbreng van de onderzoekers tijdens de lessen
Voor een goed beeld van de gang van zaken is het verder nog van belang om te vermelden dat de onderzoekers[3] van tijd tot tijd een zekere invloed op het feitelijke lesgebeuren uitoefenden doordat een les door een onderzoeker zelf werd gegeven of doordat de onderzoeker op een gegeven moment een les onderbrak om deze een bepaalde wenselijk geachte wending te geven. Dat deed zich bijvoorbeeld in een van de scholen een keer voor aan het begin van les 2, toen een leerling op de vraag van de leraar hoe je een opgave rond 24 dozen van 35 pakjes boter handig kunt oplossen, met de suggestie kwam om dit te doen via de onjuiste V.S.-strategie – de strategie van het verkeerd splitsen waarbij geredeneerd wordt via 20x30 en 4x5, met 620 als uitkomst. De leraar in kwestie merkte op dat moment enigszins korzelig op dat 'we de vorige les ook al hadden gezien dat dit fout was' en dat 'het beter was om met groepjes te werken'. Op dat moment volgde een korte onderbreking van de les door de onderzoeker waarbij deze aan de leerlingen vroeg of ze misschien ook zélf konden verklaren waarom dit een verkeerde manier was. Verschillende leerlingen kwamen nu met de opmerking dat 624 'nooit goed kon zijn omdat 20x35 al 700 is'. Nadat de leraar de betreffende leerlingen had gevraagd om te verduidelijken wat zij bedoelden, hernam de les vervolgens weer het geplande verloop.

Ondanks dergelijke ingrepen kan gesteld worden dat de lessen over het algemeen tamelijk goed conform de bedoelingen werden uitgevoerd, en dat zich in de ontwikkeling van het aanpakgedrag en het notatiegedrag waarschijnlijk geen sterk afwijkende verschijnselen hebben voorgedaan doordat er door de leraren op bepaalde punten werd afgeweken van het beoogde lesverloop[4].

In overeenstemming hiermee kan gesteld worden dat ook de 'klassecultuur' die bijvoorbeeld door Gravemeijer (1998) en Cobb e.a. (1993) als een belangrijk aspect van de kwaliteit van het onderwijs wordt gezien, erop gericht was dat de leerlingen zo goed mogelijk hun ideeën en aanpakken probeerden te verwoorden, dat ze naar elkaar luisterden en met elkaar mee trachtten te denken, enzovoorts[5].

6.3 Wat zijn cruciale onderwijsmomenten?

Alvorens over te gaan tot de beschrijving van wat in het kader van het onderzoek beschouwd worden als cruciale onderwijsmomenten, is het van belang om, in het verlengde van wat daarover in de inleidende paragraaf reeds is opgemerkt, aan te geven wat precies verstaan wordt onder een cruciaal onderwijsmoment. Zoals Gravemeijer en Cobb (2006, p. 24) vaststellen, gaat het bij ontwikkelingsonderzoek in belangrijke mate om het testen en, zo mogelijk, verbeteren van de veronderstelde lokale onderwijstheorie op grond van een analyse van wat in het onderwijs wordt waargenomen. Mede met het oog daarop achten zij het van essentieel belang om een zo goed mogelijk begrip te krijgen van hoe het onderwijsleerproces in z'n werk gaat, wat belangrijke factoren zijn bij het al dan niet tot stand komen van niveauverhoging, bij het al dan niet overwinnen van mogelijke begripsmatige moeilijkheden door leerlingen, en zo meer. De overkoepelende domeinspecifieke onderwijstheorie fungeert daarbij als een 'interpretatief kader' (ibid., p. 30) op basis waarvan gebeurtenissen en verschijnselen die zich tijdens het onderwijsexperiment voordoen, geanalyseerd en geïnterpreteerd worden. De voorafgaand aan het experiment geformuleerde verwachtingen ten aanzien van het verloop van het beoogde onderwijsleerproces, vervullen daarbij de rol van een soort ijkpunt: door gebeurtenissen die zich in het onderwijs voordoen in verband te brengen met deze verwachtingen en na te gaan in hoeverre deze gebeurtenissen beantwoorden aan deze verwachtingen, kan de juistheid van bepaalde elementen in de veronderstelde lokale onderwijstheorie onderzocht worden. Dat betekent dus dat tegen de achtergrond van de overkoepelende domeinspecifieke onderwijstheorie en in het licht van de vooraf geformuleerde verwachtingen met betrekking tot het beoogde verloop van het onderwijsleerproces, gezocht wordt naar momenten die als een aanwijzing beschouwd kunnen worden van het al dan niet uitkomen van deze verwachtingen. Worden die grotendeels of geheel bewaarheid, dan geeft dat een belangrijke aanwijzing voor de juistheid van bepaalde verwachtingen en dus voor de opzet van het beoogde onderwijsleertraject. Komen de verwachtingen niet of slechts zeer ten dele uit, dan is er aanleiding tot heroverweging en bijstelling van het beoogde onderwijsleertraject en, in samenhang daarmee, van de lokale onderwijstheorie-in-ontwikkeling.

Zoals hierboven al is aangegeven, en zoals ook blijkt uit de in het vorige hoofdstuk beschreven verwachtingen, hebben deze niet alleen betrekking op het leerproces dat de leerlingen verondersteld worden te doorlopen, maar ook op het onderwijs waarbinnen dit leerproces zich voltrekt. Het gaat dan onder meer om verwachtingen ten aanzien van het didactisch handelen van de leraar, zoals:

- de wijze waarop deze bepaalde lessuggesties en beschrijvingen van onderwijsscenario's interpreteert en in de praktijk gestalte geeft;
- de mate waarin deze erin slaagt de door de leerlingen gehanteerde aanpakken te inventariseren op een manier waarbij niveauverschillen goed tot hun recht komen;
- de wijze waarop zulke aanpakken door leerkracht of leerlingen op het bord worden weergegeven;
- de mate waarin de leraar erin slaagt om de leerlingen tot een gezamenlijke doordenking en onderbouwing van de vertoonde oplossingswijzen te doen komen;
- de wijze waarop en de mate waarin de leerkracht sturing in het onderwijsleerproces aanbrengt en bepaalde bewustmakingsmomenten tot stand probeert te brengen;
- enzovoorts.

Ook in dit opzicht kan de onderzoeker in zijn verwachtingen bevestigd dan wel teleurgesteld worden, en in beide gevallen dienen de consequenties daarvan doordacht en in het ontwerp van de leergang en de daarmee verbonden lokale onderwijstheorie verwerkt te worden.

Verder dient nog overwogen te worden dat het, zoals in de inleidende paragraaf van dit hoofdstuk reeds werd vastgesteld, bij het opsporen van cruciale onderwijsmomenten niet om incidentele gebeurtenissen gaat die zich op enigerlei moment in een van de groepen voordoen waarin het experiment plaatsvindt. Hoe betekenisvol zo'n gebeurtenis op het eerste gezicht wellicht ook mag lijken, er dient uitdrukkelijk nagegaan te worden in hoeverre in de andere groepen vergelijkbare gebeurtenissen optreden. Pas als blijkt dat dit inderdaad tot op zekere hoogte het geval is, kan gesproken worden van een *patroon van gebeurtenissen* dat opgevat kan worden als aanwijzing voor het al dan niet tot stand komen van de beoogde progressie van leerlingen. Ter verduidelijking hiervan volgt hieronder een voorbeeld van een gebeurtenis die in eerste instantie weliswaar direct te denken gaf, maar daarmee nog niet onmiddellijk als cruciaal kon worden aangemerkt. Pas naderhand, nadat steeds meer gegevens uit andere scholen beschikbaar kwamen en geanalyseerd waren, kon echt geconstateerd worden dat het inderdaad om een cruciaal moment gaat.

Voorbeeld van een cruciaal moment uit les 7: Edwin en de nulregel
In les 7 is ter inleiding van de les de opgave '12 flessen van € 2,95' uitgebreid besproken (school 200). Daarbij zijn diverse aanpakken naar voren gekomen, zoals aanpakken in de sfeer van herhaald optellen en groepjes van 2 en 4 maken (waarbij de

kanttekening is geplaatst dat dit vaak nogal omslachtige aanpakken zijn); aanpakken waarbij gewerkt wordt met een groepje van 10 en van 2; en aanpakken waarbij via compenseren wordt gewerkt (12x2,95 via 12x3). Het gebruik van de nulregel heeft bij deze bespreking de nodige aandacht gekregen, in het bijzonder waar het gaat om het handig gebruik daarvan om 10 x € 2,95 uit te rekenen. Aansluitend volgt een verwerking waarbij de leerlingen zich onder meer buigen over de opgave '14 flessen van € 4,95'.

Als de onderzoeker bij Edwin langskomt, ziet hij het volgende staan (zie fig. 6.3).

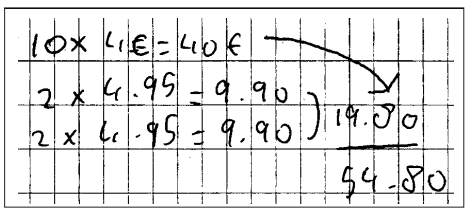


Fig. 6.3: de berekening die Edwin bij de opgave '14 flessen van € 4,95' uit zichzelf reeds op papier had gezet.

Ond.: Aha, jij doet eerst 10 keer 4 euro, en dan nog eens 2 keer 4,95 en nóg eens 2 keer 4,95? (Edwin bevestigt dit). Zou dat goed zijn?
Edwin: Nee! (Ond.: waarom dan niet?) Nou, ik heb hier 2 keer 4,95 gedaan, en hier ook. Maar daar (wijzend op 10x4) heb ik 10 keer 4 gedaan; dat moest ook 10 keer 4,95 zijn...
Ond.: Ja, dat lijkt mij ook. Zullen we het samen proberen te verbeteren?
Edwin: Goed. Eerst 10 keer 4,95, dat is ... Dat weet ik zo niet...
Ond.: Hoe zouden we dat kunnen aanpakken?
Edwin: Eerst 10 keer 4, dat is 40. En dan 10 keer 95 cent, dat is ...; dat weet ik niet...
Ond.: Is dat nog moeilijk? (Edwin knikt) Hoe zat dat ook alweer, als je 10 keer iets doet? Als je nu 10 keer 20 doet?
Edwin (bijna direct): Dat is 200.
Ond.: En 10 keer 40?
Edwin (idem): Dat is 400.
Ond.: En 10 keer 15?
Edwin: ... 1500. Nee, 150.
Ond.: En 10 keer 95?
Edwin: 950. Dan moet je dus die 40 optellen bij 950; nee, bij 9 euro 50. Dat is bij elkaar 49 euro 50.
Ond.: Prima. En wat nu nog?
Edwin: Nu nog 4 keer 4,95; maar dat had ik hier al uitgerekend (wijst op de al gemaakte berekening), dat is 19,80. En nou die twee bij elkaar (wijst op 49,50 en 19,80, en telt beide bedragen cijferend bij elkaar op).

Op z'n kladblaadje staan nu naast elkaar de volgende twee berekeningen (zie fig. 6.4).

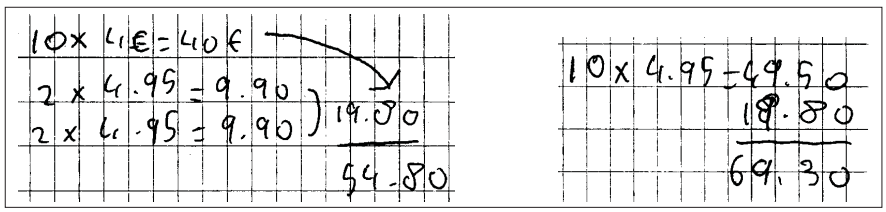
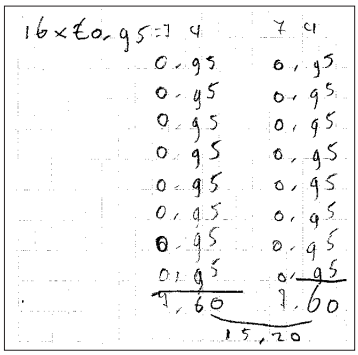


Fig. 6.4: Links de oorspronkelijke, door Edwin zelf afgekeurde berekening en rechts de gezamenlijk gecorrigeerde berekening.

Tot zo ver deze onderwijsleersituatie. Duidelijk blijkt dat zich hier een verschijnsel voordoet dat te denken geeft. De leerling in kwestie, een middelmatige maar zeker geen uitgesproken zwakke leerling, laat namelijk zien dat hij de nulregel nog niet goed begrijpt: het kost hem moeite om betrekkelijk eenvoudige opgaven zoals 10x4,95 en zelfs 10x15 en 10x95 met gebruikmaking van deze regel uit te rekenen. Weliswaar lukt dit met enige hulp van de onderzoeker wel, maar vooralsnog beperkt deze hulp zich ertoe om de leerling enig extra houvast te bieden bij het bedenken van een toepasselijke oplossingswijze door te redeneren via 10x4 euro en 10x95 cent. De meer fundamentele onderliggende wetmatigheid van het feit dat bij vermenigvuldigen met 10 de eenheden tientallen worden, de tientallen honderdtallen, enzovoorts, blijft nog buiten beschouwing. Weliswaar was deze wetmatigheid in het voorafgaande deel van het onderwijsleertraject enige keren aan de orde gekomen. Maar kennelijk was dit in het geval van Edwin niet diepgaand genoeg geweest. Het leek zeker niet denkbeeldig dat Edwin, en met Edwin nogal wat andere leerlingen die de nulregel mogelijk niet goed doorzagen, in volgende probleemsituaties toch weer tegen soortgelijke moeilijkheden zouden aanlopen als in de onderhavige situatie het geval was.

Nu zou het kunnen zijn (zo werd na afloop van de les overwogen) dat de begripsmatige moeilijkheid die zich hier voordoet, door het overgrote deel van de leerlingen allang overwonnen was. Naarmate meer gegevens beschikbaar kwamen over de gang van zaken in de andere scholen, bleek echter dat dit bepaald niet altijd het geval was. Dit kwam bijvoorbeeld tot uitdrukking in het feit dat veel zwakkere leerlingen bij het soort opgaven waar het hier om gaat, bleven volharden in allerlei vormen van herhaald optellen en verdubbelen, ondanks dat het handige van het werken met groepjes van 10 enkele keren aan de orde was gesteld. Doordat zij de nulregel niet goed doorzagen, zo diende achteraf geconstateerd te worden, ervaarden zij het werken met groepen van 10 klaarblijkelijk helemaal niet als handig. Zie fig. 6.5 voor

twee voorbeelden van zo'n aanpak van laag niveau bij een nog wat eenvoudigere opgave (16 flessen van € 0,95) uit dezelfde les 7 (school 300).



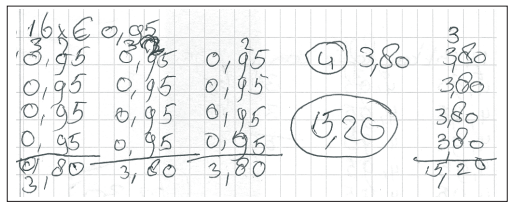


Fig. 6.5: Twee voorbeelden van omslachtige oplossingswijzen bij de opgave '16 x € 0,95'. In beide gevallen wordt het handige van het werken met een groepje van 10 (en dus de nulregel) niet voldoende doorzien om tot een efficiëntere oplossing te komen.

In principe zou het ook nog kunnen zijn dat het probleem van het niet goed doorzien van de nulregel zich vooral bij geldgetallen en andere soorten kommagetallen (zoals meetgetallen) voordeed. Enkele lessen na de hierboven beschreven les 7 bleek bij de tweede afname van de criteriumtoets echter dat ook in situaties waarin het gaat om hele getallen (zoals in het geval van een opgave rond een boomgaard met 34 rijen van 68 bomen), nogal wat leerlingen strategieën in de sfeer van herhaald optellen en verdubbelen bleven gebruiken. Ook het verkeerd splitsen (de V.S.-strategie waarbij 34x68 wordt opgelost via 30x60 en 4x8) bleek nog herhaaldelijk voor te komen. De interviews die na afloop van de tweede toetsafname op alle scholen met een aantal leerlingen werden gehouden, wezen uit dat er inderdaad nog heel wat leerlingen onzeker waren over de vraag hoe en waarom je opgaven als 10x68 of 10x128 handig kunt uitrekenen.

Door al deze gegevens aldus met elkaar in verband te brengen, kwam dan ook definitief vast te staan dat het hier inderdaad om een cruciaal onderwijsmoment gaat en dat de nulregel, een van de fundamentele regels van ons decimaal-positionele rekensysteem, een obstakel voor het denken kan vormen dat eerst goed overwonnen moet worden voordat verdere progressie mogelijk is. Het cruciale van het moment zit hem dan met name in het feit dat dit van tevoren niet voldoende als zodanig was ingeschat en dat er voor sommige leerlingen te weinig gelegenheid in het

experimentele onderwijsleertraject was om deze wiskundige wetmatigheid goed te leren doorzien.

Cruciale onderwijsmomenten worden dus eerst en vooral gekenmerkt door het feit dat een patroon van gebeurtenissen aan het licht wordt gebracht die zich tijdens het onderwijsexperiment voordoen en die een aanwijzing geven dat een van de vooraf geformuleerde verwachtingen die de kern van het beoogde onderwijsleertraject raken, niet of maar ten dele bewaarheid wordt.

6.4 Cruciale onderwijsmomenten

In deze paragraaf wordt een zevental momenten beschreven die op grond van het hierboven geformuleerde als cruciaal voor de voortgang van het beoogde onderwijsleerproces kunnen worden aangemerkt. Steeds zal worden aangegeven waaruit een moment precies bestaat, en hoe dat moment als zodanig werd achterhaald. Omdat het signaleren van een cruciaal moment in sommige gevallen tamelijk direct aanleiding gaf tot het aanbrengen van aanpassingen in het op dat tijdstip nog te doorlopen gedeelte van het onderwijsleertraject, wordt op enkele plaatsen ook aangegeven om wat voor aanpassingen het gaat. Achtereenvolgens komen de volgende zeven momenten aan de orde:

(1) Introductie van het groeperend rekenen
(2) Overzicht leren houden
(3) Basale rekenvaardigheid als voorwaardelijke kennis
(4) Leren werken met groepjes van 10; de nulregel
(5) Ontwikkeling van adequate hulpnotaties: het picturaal-schematische aspect
(6) Inzichtelijk distributief redeneren
(7) Ontwikkeling van adequate hulpnotaties: voortgaande schematisering

Deze momenten corresponderen grotendeels met de in het vorige hoofdstuk geformuleerde verwachtingen. Het eerste moment is verbonden met verwachting (1), het vierde moment met verwachting (2), het vijfde met verwachting (3), het zesde met verwachting (5) en het zevende met verwachting (4).

6.4.1 Introductie van het groeperend rekenen

Zoals in hoofdstuk 5 is beschreven, bleek tijdens het vooronderzoek een zekere

aansturing gewenst om de leerlingen ervan bewust te maken dat het gebruik van formele, op decimaal splitsen berustende aanpakken de nodige bezwaren kent als je als leerling nog niet goed doorziet wat je precies doet. Er kunnen dan al gauw fouten optreden die te vermijden zijn indien strategieën van een basaler niveau gebruikt worden. In de lesbeschrijvingen van de experimentele leergang werden dan ook aanwijzingen opgenomen die erop gericht waren om enerzijds enkele keren naar voren te laten komen dat er bij het gebruik van de genoemde formele aanpakken snel fouten ontstaan, en om anderzijds het groeperend rekenen naar voren te schuiven als een veel eenvoudiger te begrijpen en op verschillende manieren uit te voeren oplossingswijze die aansluit bij de informele eigen aanpakken in de sfeer van herhaald optellen en verdubbelen, en die bovendien perspectief biedt op niveauverhoging in de vorm van het werken met groepjes van 10.

Tijdens het experiment bleek deze opzet echter niet altijd even goed uit te pakken. In de ene klas bleek het voor de leerlingen veel acceptabeler en logischer om op een basaal, goed begrepen niveau tot een oplossing te komen dan in de andere klas. Hieronder volgt eerst een voorbeeld van een les waarin de introductie van het werken met groepjes en het beschrijven daarvan via schematische voorstellingen betrekkelijk probleemloos verliep. Daarna volgen enkele voorbeelden van situaties waarin dat minder vlot ging. De les hieronder betreft een school (school 100) waarbij de instructie van les 1 (waarbij de prijs van 16 lammeren van 240 euro bepaald moet worden) als volgt verloopt. Vooraf had de leraar een eenvoudige bordtekening van 16 lammeren (4 rijen van 4) op het bord gezet.

Leraar: 'Hoe zou je de prijs voor alle lammeren samen kunnen berekenen?'
Sofie: 'Onder elkaar... Dan doe je eerst 6x240 onder elkaar, en dan nog eeeh, dan nog 10 keer erbij.'
Leraar: 'Dat is een goede manier, maar nog wel moeilijk. Ik zoek een andere manier, een makkelijkere...'
Jelmer: 'Stapjes van 2. Dan stop je er steeds 2 bij elkaar, dat is steeds 480 euro..'
Leraar (hierop inhakend): 'Jij zegt: ik maak groepjes van twee. Ik teken het op het bord (omcirkelt 2 lammeren in de bordtekening en noteert er het bedrag van 480 naast). Doe ik dat zo goed?
Jelmer: 'Ja, en dan zo steeds 480. En dan tel je die op.' (...).

Achtereenvolgens verschijnen nu, op aangeven van de kinderen, de volgende drie vormen van groeperend rekenen (zie fig. 6.6). Bij de derde daarvan wordt geconstateerd dat deze min of meer overeenkomt met wat Sofie eerst al had geopperd.

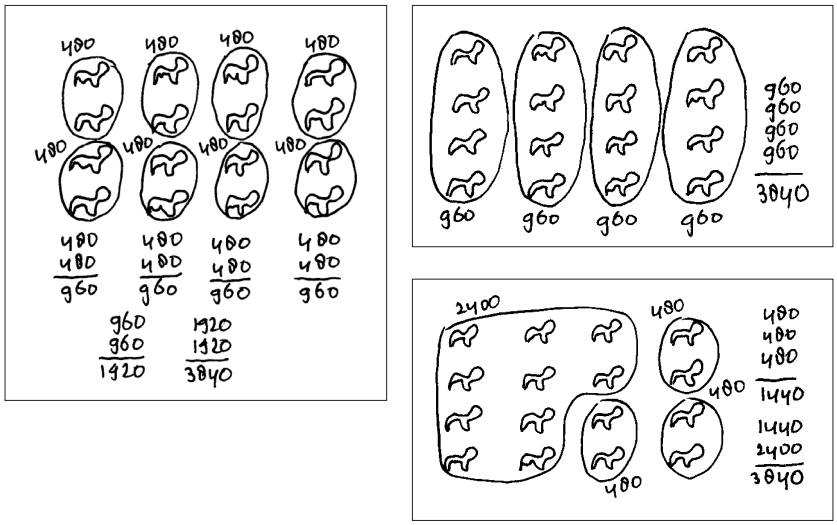


Fig. 6.6: De drie oplossingswijzen die in een van de scholen bij het probleem rond 16 lammeren van € 240,- in les 1 op het bord kwamen te staan. Bij de oplossing linksboven wordt herhaald verdubbeld, bij de oplossing rechtsboven wordt met groepjes van 4 gewerkt, en bij de oplossing rechtsonder wordt met een groepje van 10 en 3 groepjes van 2 gewerkt.

Aansluitend volgt een verwerking met enkele soortgelijke veemarktopgaven. De leraar geeft nog de aanwijzing om 'in de tekening zo goed mogelijk te laten zien wat voor groepjes je maakt'. Als hij vervolgens door de klas loopt en observeert hoe de leerlingen tewerk gaan, kan hij constateren dat er inderdaad diverse vormen van groeperend rekenen tot stand komen. Zie fig. 6.7 voor drie voorbeelden bij de opgave '18 schapen van 350 euro'.

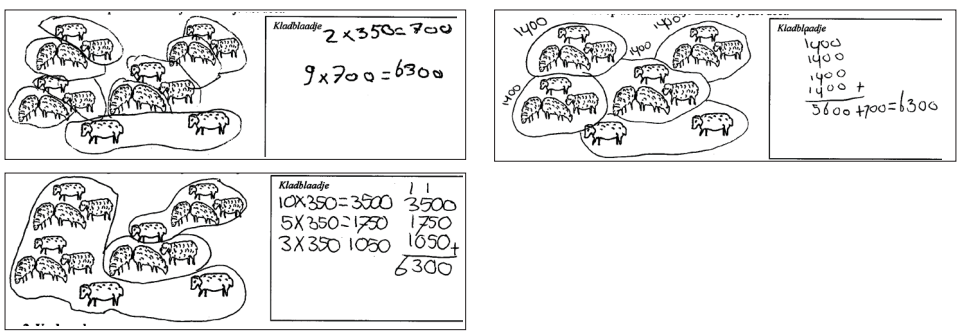


Fig. 6.7: Drie voorbeelden van oplossingswijzen tijdens de verwerking bij de opgave '18 schapen van € 350,-' waarbij respectievelijk met groepjes van 2, van 4 en van 10 gewerkt wordt.

Er bleken echter ook klassen te zijn waar het anders liep. Dit was vooral het geval in situaties waarin de leraar zich minder bewust leek te zijn van de bezwaren die inherent zijn aan het centraal stellen van formele, niet zo makkelijk te begrijpen aanpakken aan het begin van de leergang en waarbij het verschijnsel zich voordeed dat hoog niveau-strategieën al gauw de overhand kregen. In zulke situaties raakte het idee van het groeperend rekenen als oplossingswijze enigszins ondergesneeuwd onder die hoog niveau-strategieën. Dat was bijvoorbeeld het geval op een school waar de leerlingen in les 1 bij de hierboven vermelde lammerenopgave de opdracht kregen om voor zichzelf op een blaadje een oplossing te bedenken. Hoewel een tekening van de lammeren op het bord stond, werd de mogelijkheid om van deze tekening gebruik te maken, door deze opzet op voorhand sterk ingeperkt. In de aansluitende bespreking kwamen de leerlingen aanvankelijk dan ook vooral met hoog niveau-strategieën zoals verschillende vormen van decimaal splitsen (deels juist, deels onjuist) en een vorm van compenseren (16x240 via 16x250). Toen vervolgens een leerling uiteenzette hoe zij via het maken van groepjes van twee gewerkt had, probeerde de leraar dit tegelijkertijd in de bordtekening van de schapen te beschrijven en op basis daarvan het groeperend rekenen te introduceren. Op zich lukte dit wel, maar het nodigde bepaald niet tot navolging uit.

Evenzo was er een school waar de leraar zelf zich aanvankelijk niet zo aangesproken leek te voelen om de nadruk in het onderwijs in eerste instantie op basale oplossingen in de sfeer van het verdubbelen en groepjes maken te leggen. Bij deze leraar bestond dan ook de neiging om op een meer formeel niveau in te steken en meer af te gaan op de variëteit aan strategieën die zich daar zou aandienen, inclusief bijvoorbeeld aanpakken waarbij beide getallen decimaal gesplitst worden. Door het ontbreken van mogelijkheden om op een meer basaal niveau tot een oplossing te komen, bleek een aantal zwakkere leerlingen echter niet goed uit de voeten te komen. Zij moesten herhaaldelijk geholpen worden. Zie voor enkele van dergelijke onjuiste oplossingen fig. 6.8. Een en ander leidde ertoe dat op verzoek van de aanwezige onderzoeker enkele lesmomenten werden ingelast waarbij juist voor deze leerlingen nader belicht werd hoe het werken met groepjes tot basale en goed te begrijpen oplossingen kan leiden.

Toen alle gegevens met betrekking tot de eerste vijf lessen uit de leergang waren geanalyseerd, kon geconstateerd worden dat in twee van de vijf scholen het gebruik van hoog niveau-strategieën in meer of mindere mate de boventoon had gevoerd. In een derde school sloeg het werken met groepjes aanvankelijk wel goed aan, maar

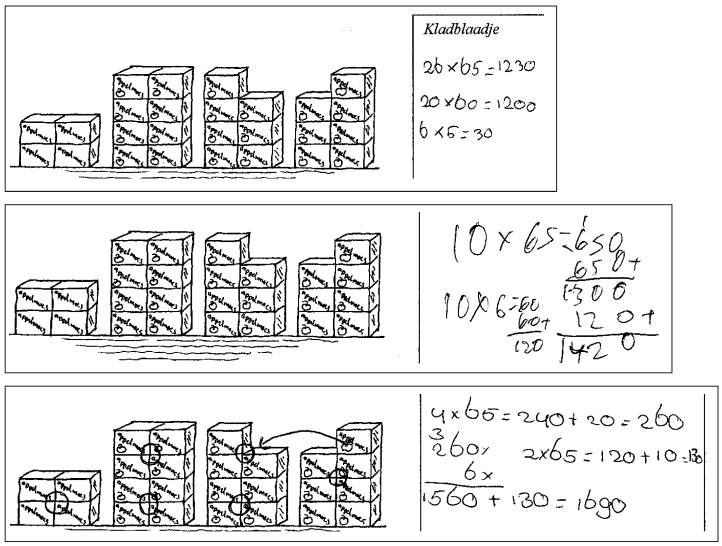


Fig. 6.8: Drie voorbeelden van oplossingswijzen tijdens de verwerking bij de opgave '26 dozen met 65 blikken appelmoes' (les 2). Bovenaan en in het midden twee onjuiste oplossingen op een meer formeel niveau, onderaan een oplossing waarbij met groepjes van 4 gewerkt wordt.

bleken er na drie tot vier lessen toch een aantal leerlingen te zijn die de neiging hadden hun toevlucht te nemen tot niet goed begrepen formele strategieën. Sommige leerlingen op deze scholen, met name degenen die dachten dit soort opgaven toch al enigszins aan te kunnen, leken de suggestie om met groepjes te werken en de tekening te gebruiken als een stap terug te ervaren, als een te primitieve benadering om serieus mee aan de slag te gaan. Het gebeurde nogal eens dat dit juist ook de leerlingen waren die strategieën van een meer formeel niveau nog niet aankonden, en dus nogal wat fouten bleven maken. Dit leidde op de genoemde scholen tot kleine plaatselijke bijstellingen waarbij de mogelijkheden van het werken met groepjes alsnog goed werden belicht.

Het betreft hier, meer in het algemeen, overigens een meer structureel probleem dat enigszins inherent is aan de realistische onderwijsbenadering. Ook binnen andere domeinen heeft de ervaring geleerd dat leerlingen in de eerste, exploratieve fase van het onderwijsleertraject, soms niet erg geneigd zijn om bijvoorbeeld een opgave als 82–37 op elementair niveau gebruikmakend van de lege getallenlijn op te lossen als ze het gevoel hebben dat ze het eigenlijk al op een veel hoger niveau kunnen[6]

6.4.2 Overzicht leren houden

Als de leerlingen zich bewust zijn geworden van de mogelijkheid om op een basaal niveau via het werken met groepjes tot een oplossing te komen, dan blijken er flinke verschillen in de manier van uitvoering van deze werkwijze geconstateerd te kunnen worden. Dit geldt bijvoorbeeld voor het al dan niet bewust kiezen voor groepjes van een bepaalde omvang. Sommige leerlingen laten zich voornamelijk door 'lokale' omstandigheden van de probleemsituatie leiden, zoals de wijze waarop de objecten in kwestie getekend staan. Zie voor een voorbeeld fig. 6.9a. Er is bij zulke leerlingen kennelijk nog niet zoveel besef van het feit dat je de groepsgrootte mede kunt laten afhangen van de getallen in kwestie. Zoals hierboven reeds is beschreven, is ook het idee dat groepjes van 10 handig zijn omdat je 10 keer een hoeveelheid of bedrag makkelijk kunt uitrekenen, bij sommige leerlingen bepaald nog geen gemeengoed. Daarnaast is er een categorie leerlingen die wel bewust gebruik maken van de getallen in kwestie en die vaak ook het handige van groepjes van 10 doorzien. Zie het voorbeeld in fig. 6.9b.

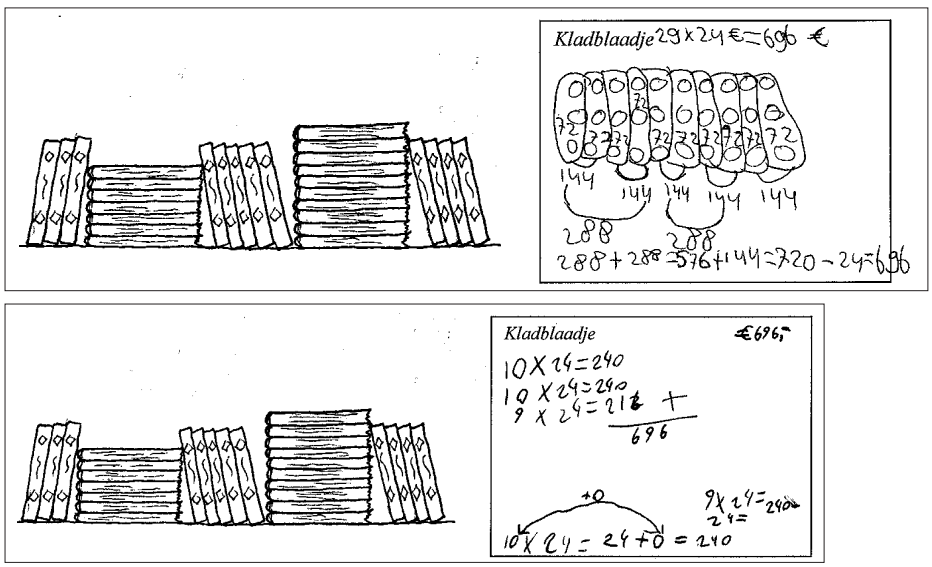


Fig. 6.9a en 6.9b: Twee voorbeelden van oplossingen bij de opgave rond de prijs van 29 schoolboeken van 24 euro (les 4, school 200). Bij de bovenste aanpak heeft de leerling voor groepjes van 3 gekozen. Bij de onderste aanpak is voor groepjes van 10 gekozen. Opvallend is dat in beide gevallen tevens een vorm van compenseren wordt gebruikt.

Een probleem dat zich in deze eerste fase van het onderwijsleerproces bij nogal wat leerlingen van tijd tot tijd bleek voor te doen, is gelegen in het feit dat ze soms het overzicht over de verschillende handelingen die tijdens het oplossingsproces worden uitgevoerd, kwijtraken. Hieronder volgen twee voorbeelden van dergelijke gevallen.

Irma (school 200; verwerking van les 1) heeft bij het varkensprobleem (17 varkens van 480 euro) besloten om groepjes van 4 te maken. Zij heeft de betreffende groepjes met behulp van rondjes alvast in de tekening aangegeven. Maar hoe reken je nu zo gauw 4 keer 480 uit, is haar vraag naar de onderzoeker toe (die even bij haar langskomt). Deze suggereert om eerst eens 2 keer 480 uit te rekenen, hetgeen Irma doet. Voor alle vier de groepjes noteert zij nu op haar kladblaadje: 2x480=960. Vervolgens besluit ze om steeds 960 te verdubbelen, hetgeen tot 2 keer 1920 leidt (zie het kladblaadje in fig. 6.10). In de tekening noteert ze dan 4 keer 1920 als subtotaal. Daarna telt ze 1920 en 1920 op, en telt bij het resultaat (3840) nog eens 480 van het resterende 'losse varken' op, met als resultaat 4320. Ze is hier zichtbaar tevreden mee en gaat over op de volgende opgave, zich niet realiserend dat ze in haar berekening twee groepjes van 4 over het hoofd heeft gezien.

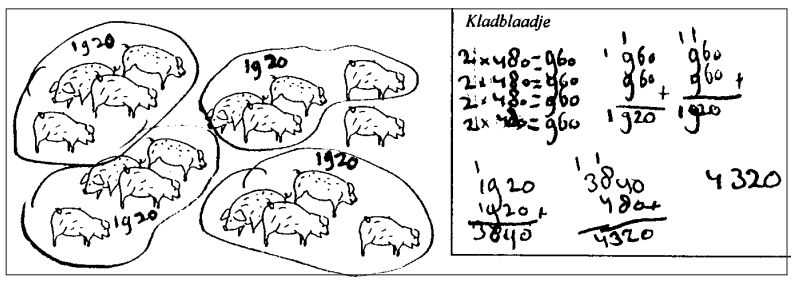


Fig. 6.10: De aanpak van Irma. Zij heeft groepjes van 4 gemaakt en de subtotalen erbij genoteerd. Vervolgens raakt zij enigszins verstrikt in het optellen van de subtotalen: ze vergeet twee groepjes van 4 in de berekening.

Teddy (School 200) heeft bij een dozenopgave (les 2; 26 dozen met 65 potten appelmoes) in de tekening 6 groepjes van 4 gemaakt, en nog een groepje van 2. Uit z'n hoofd rekent hij nu eerst uit dat er in 4 dozen 260 potten zitten (eerst heeft hij 230 als antwoord, maar hij corrigeert dit uit zichzelf). Vervolgens noteert hij op het kladblaadje 6 keer 260 onder elkaar en telt deze getallen cijferend bij elkaar op. De uitkomst daarvan (1560) is tevens zijn einduitkomst, en hij ziet dus het groepje van 2 dozen over het hoofd. De onderzoeker vraagt hem dan of hij nu wel alle dozen heeft meegerekend. Kun je dat zien in de tekening? Ja, dat kan, aldus Teddy. Kijk maar, 6 groepjes van 4 dozen, steeds 260, en nog ... oei, twee dozen vergeten! Die moeten er nog bij, aldus Teddy. Hij noteert naast het antwoord 1560 nu 130 en telt beide getallen uit z'n hoofd op, met 1590 als resultaat. Zie fig. 6.11.

Hij is zich niet bewust dat hij hierbij nog een rekenfout maakt, maar lijkt nu wel te doorzien hoe je in de tekening kunt verifiëren of je op het kladblaadje alle subtotalen inderdaad samengenomen heb.

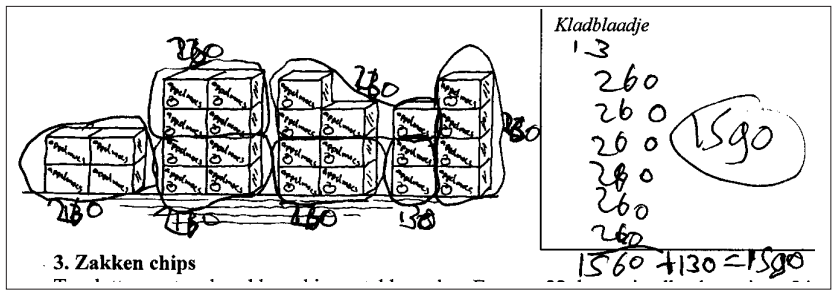


Fig. 6.11: De aanpak van Teddy. Ook hij heeft groepjes van 4 gemaakt en subtotalen genoteerd, maar bij het optellen daarvan ziet hij aanvankelijk het groepje van 2 dozen over het hoofd.

Al met al zijn dit typisch situaties van leerlingen die in principe een bepaalde, nog wat omslachtige werkwijze in het hoofd hebben maar die tijdens de uitvoering daarvan zich dermate moeten inspannen dat ze de draad van hun oplossingswijze enigszins kwijtraken en niet direct doorzien wat er misgaat. Op alle scholen zijn dergelijke gevallen in de eerste fase van het onderwijsleerproces aangetroffen. Zie ook het voorbeeld in fig. 6.12 waarbij een leerling in de tekening 3 groepjes van 10 en een groepje van 2 aangeeft, maar in z'n berekening vervolgens verzuimt om het groepje van 2 'mee te nemen' (school 500).

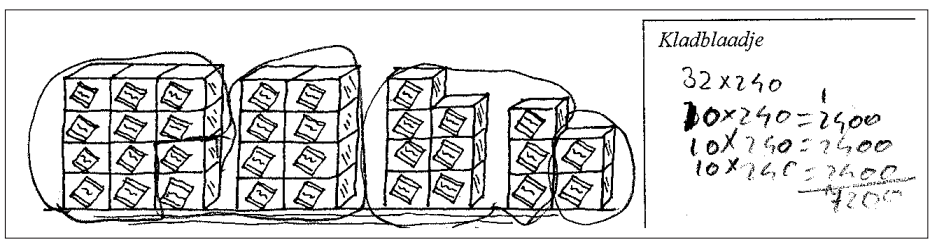


Fig. 6.12: De aanpak van Delan. Hij onderscheidt 3 groepen van 10 en 1 groepje van 2, maar verzuimt om het groepje van 2 in z'n berekening op te nemen.

Het komt er in dergelijke gevallen op neer dat leerlingen het enerzijds nog moeilijk vinden om een bepaalde, soms nog lastige handeling uit te voeren terwijl ze anderzijds, werkende weg, het overzicht over de totaliteit van handelingen dienen

te bewaren en min of meer doelgericht verder dienen te gaan in de berekening. Dit vraagt van de leerlingen een geregelde blikwisseling waarbij de aandacht afwisselend uitgaat naar het correct uitvoeren van een bepaalde deelhandeling en naar het op grotere afstand van het oplossingsproces pas op de plaats maken om te zien hoe ver de berekening gevorderd is. Een gevolg van het nog niet goed overzien van de verschillende handelingen is ook dat er soms rekenfouten ontstaan. Zie hiervoor de beschrijving van punt (3) hieronder.

Een mogelijkheid om dit overzicht over de verschillende handelingen in het geval van de onderhavige leergang goed vast te houden is gelegen in de visuele uitbeelding van de objecten in kwestie. Door in eerste instantie in de tekening aan te geven welke groepjes gemaakt worden, ontstaat naderhand, als op het kladblaadje de verschillende subtotalen samengevoegd worden (soms via een hoofdrekenstrategie en soms via cijferen), de mogelijkheid om te verifiëren of alle subtotalen naar behoren in de berekening zijn opgenomen[7].

6.4.3 Basale rekenvaardigheid als voorwaardelijke kennis

In principe was de experimentele leergang zodanig opgezet, dat ook leerlingen met een beperkte basale rekenvaardigheid binnen het getalgebied tot 100 en tot 1000 voldoende mogelijkheden zouden hebben om uit de voeten te kunnen en tot de nodige progressie te komen. Kennis van het cijferend vermenigvuldigen van een eencijferig met een meercijferig getal werd bijvoorbeeld niet nodig geacht. Zoals bij de beschrijving van de beginsituatie in paragraaf 3 van hoofdstuk 3 is aangegeven, werden vooral de genoemde rekenvaardigheid tot 100 alsmede zaken als begrip van getallen tot 1000, kennis van de tafels van vermenigvuldiging en vaardigheid in het cijferend optellen als belangrijke voorwaarden beschouwd om binnen de experimentele leergang de nodige successen te kunnen boeken. Daarnaast werd het van belang geacht dat leerlingen tot op zekere hoogte vertrouwd zouden zijn met het gebruik van het kladblaadje om hulpnotaties op weer te geven.

Tijdens het experiment bleek dit aspect van de leergang over het algemeen vrij goed te functioneren. Er deden zich vooral in het begin weliswaar regelmatig situaties voor waarin leerlingen rekenfouten maakten, maar ze leken over het algemeen niet belemmerd te worden door het feit dat de beginsituatie bij de experimentele leergang verkeerd was ingeschat. Eerder leken de gemaakte fouten een gevolg van het feit dat het werkgeheugen door de uit te voeren opeenvolging van handelingen soms wat overbelast dreigde te raken. Vaak was het bijvoorbeeld zo dat een leerling na afloop

van een berekening, als deze nog eens bekeken werd, al gauw in de gaten had dat er sprake was van een rekenfout. Hieronder twee voorbeelden van zulke situaties.

De les van vandaag (les 3; school 200) begint met een korte terugblik op enkele oplossingswijzen van leerlingen die tijdens de verwerking van de vorige les gehanteerd werden. De leraar verwijst naar de betreffende opgave (26 dozen met 65 potten appelmoes) en beschrijft de aanpakken van drie leerlingen in kort bestek op het bord. Zie fig. 6.13. Zoals hij de kinderen ook uitlegt, laat de leraar daarbij de groepjes dozen die de leerlingen hebben omcirkeld achterwege, maar geeft via rondjes aan hoe zij gewerkt hebben. Eerst laat hij enkele kinderen verwoorden hoe de betreffende leerlingen tewerk zijn gegaan: Teddy heeft eerst zes groepjes van 4 gemaakt en toen nog één van 2, enzovoorts.

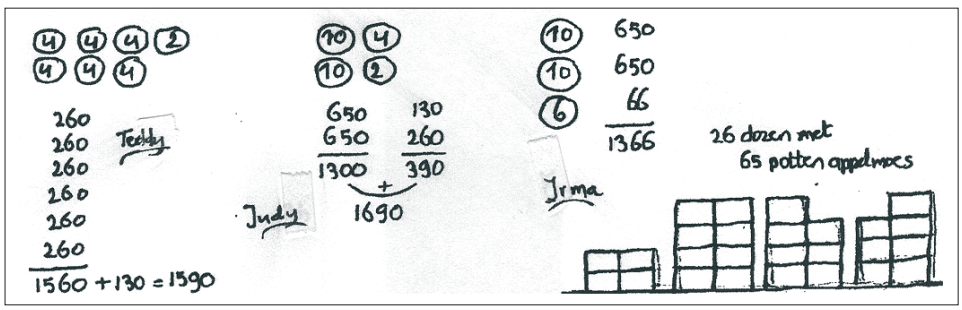


Fig. 6.13: Bordtekening van drie aanpakken van leerlingen die aan het begin van de les nog even door de leraar op het bord zijn gezet.

Vervolgens wijst hij op het feit dat er nu drie verschillende uitkomsten op het bord staan, er moeten dus hier en daar fouten zijn gemaakt. Welke uitkomst is nu goed? En wat is er fout gegaan? Teddy reageert meteen als zijn eigen aanpak is verwoord: 'ik heb dat honderdje er vergeten bij te doen; 1560 en 130 is 1690…' Iedereen is het ermee eens. Vastgesteld wordt dat 1690 waarschijnlijk dan ook het juiste antwoord is. Nadat de manier van Judy gezamenlijk besproken is (waarbij wordt geconstateerd dat zij twee groepjes van 10, een groepje van 2 en een groepje van 4 heeft gemaakt), wordt besproken wat er bij Irma fout is gegaan. Veel leerlingen zien onmiddellijk dat de fout zit in het groepje van 6: 6 groepjes van 65 kan nooit 66 zijn. Nadat is vastgesteld dat dit 360 plus 30 dus 390 had moeten zijn, vraagt de leraar nog of er leerlingen zijn die zien welke vergissing Irma heeft gemaakt. Het duurt even, maar dan hebben enkele leerlingen het in de gaten. Louise: 'ze deed 6x6 is 36 en toen nog 6x5 is 30; en dan 36 en 30 is bij elkaar 66'. 'Oh ja', is nu de reactie van Irma, 'ik ben vergeten dat het 60 was in plaats van 6…'.

Vandaag (les 11, school 300) hebben de leerlingen posters gemaakt. Ze hebben eerst een probleem opgelost rond een parkeerterrein met 48 rijen van 95 parkeerplaatsen. Daarna hebben ze in groep-

jes hun oplossingen uitgewisseld en er daarvan één uitgekozen die ze zo duidelijk mogelijk op een poster hebben weergegeven. Een van de groepjes is tot de in fig. 6.14 afgebeelde poster gekomen met dien verstande dat ze in eerste instantie als uitkomst 3560 in plaats van 4560 hadden. Toen de betreffende leerlingen na het voltooien van hun eigen poster een kijkje namen bij enkele andere groepjes, kwamen zij erachter dat deze veelal 4560 als antwoord hadden. Binnen het eigen groepje werd nu beraadslaagd. Hadden ze misschien toch iets fout gedaan? De berekening werd gecontroleerd, maar dit leverde niets op. Vervolgens werd de leraar ingeschakeld. Kon die misschien iets vinden dat fout was gegaan? Samen met het groepje werd de berekening nog eens doorgenomen.

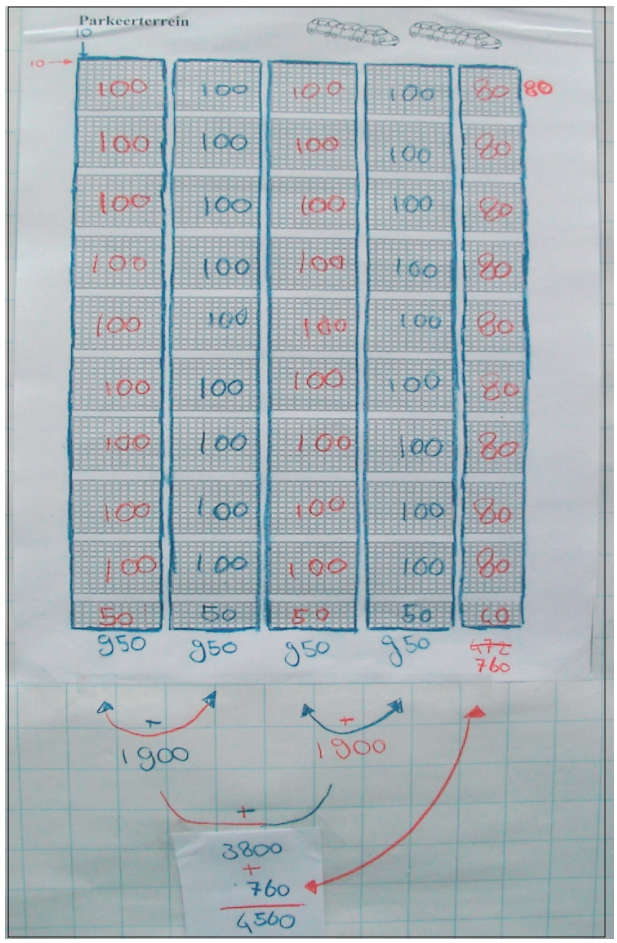


Fig. 6.14: De poster van het groepje dat bij de opgave '48 rijen van 95 parkeerplaatsen' aanvankelijk 3560 als uitkomst had en dit later met enige hulp van de leraar tot 4560 verbeterde. Onderaan is het strookje te zien waarmee het onjuiste gedeelte van de berekening werd afgeplakt.

Eerst werd vastgesteld dat alle subtotalen zoals die in de tekening van het parkeerterrein stonden, correct op het kladblaadje eronder waren genoteerd. Vervolgens werden de optellingen van de subtotalen nog eens nagelopen, en nu bleek dat er daar een fout was ontstaan: men had als uitkomst voor 1900+1900 per ongeluk 2800 aangehouden. Dit onjuiste subtotaal was vervolgens correct bij het andere subtotaal van 760 opgeteld, met 3560 als onjuist eindantwoord. Besloten werd nu om de berekening vanaf het onjuiste subtotaal van 2800 met een strookje papier af te plakken en om op dat strookje het juiste subtotaal van 3800 te noteren, gevolgd door de rest van de berekening ('Dan ziet het er veel netter uit, met zo'n strookje erover heen…').

In zulke situaties lijkt het erop dat er fouten ontstaan die voornamelijk het gevolg zijn van de veelheid aan handelingen die tijdens het oplossen van een opgave uitgevoerd worden. Wellicht dat dit nog versterkt wordt in een situatie waarin het erop aan komt een berekening zo duidelijk mogelijk op een poster weer te geven. Hoewel dit niet nauwkeurig onderzocht is, lijkt het er ook op dat veel van deze fouten naderhand vanzelf verdwenen zijn zonder dat er specifieke aandacht nodig was om bepaalde basisvaardigheden op te rakelen.

Er was evenwel één leerling (Saïd, school 300) waarbij een gebrekkige basisvaardigheid wel parten leek te spelen. Deze leerling was een notoire teller in de zin dat allerlei elementaire opgaven zoals 70+50 en 4x80 tellend werden opgelost waarbij hij voor elke gemaakte sprong een stipje op het papier zette. Zie de beide voorbeelden hieronder in fig. 6.15.

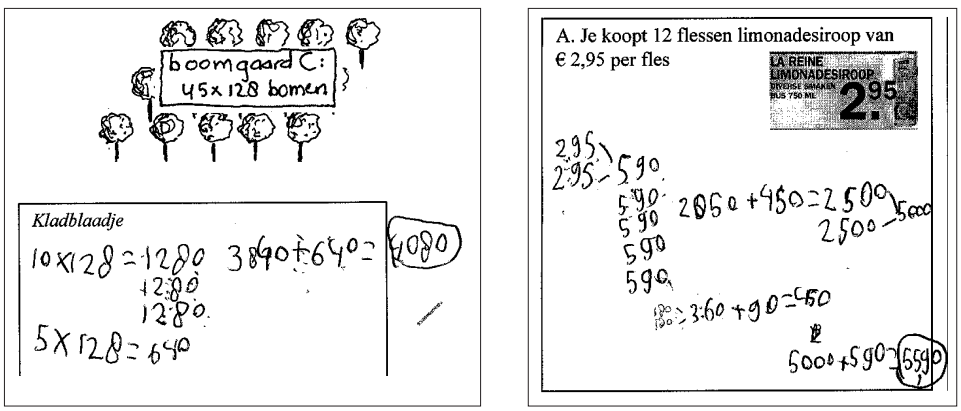


Fig. 6.15: Twee oplossingen van Saïd bij de tweede criteriumtoets (halverwege de leergang). In beide gevallen zijn duidelijk de stipjes te zien die het tellen moeten ondersteunen dat hij gebruikt om optellingen uit te rekenen.

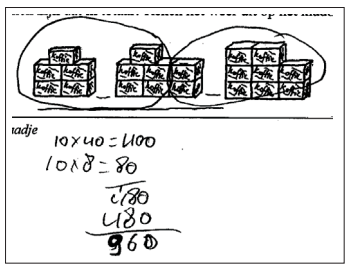
Dit tellend rekenen bleek hecht verankerd in het denken van deze leerling, en ondanks enige pogingen om hem op strategieën van een hoger niveau te doen overschakelen, bleef hij tellen. Dit leidde ertoe dat hij tot het einde van de leergang regelmatig fouten bleef maken doordat het optellen van de getallen in kwestie via tellen niet goed te doen was. Men kan zich meer in het algemeen afvragen in hoeverre het voor een leerling die bij het rekenen tot 100 en tot 1000 nog op een zo basaal niveau opereert, wel zinvol is om deel te nemen aan een leergang rond het meercijferige vermenigvuldigen.

6.4.4 Leren werken met groepjes van 10; de nulregel

Het groeperend rekenen heeft natuurlijk z'n beperkingen. Het werken met groepjes van 2, 3, 4 en dergelijke brengt vaak nogal wat rekenwerk met zich mee waardoor berekeningen al gauw bewerkelijk en foutgevoelig worden. Bij het werken met groepjes van 10 is dit uiteraard veel minder het geval; het uitrekenen van de subtotalen wordt dan een stuk eenvoudiger en bovendien hoef je veel minder groepjes te maken. Echter, zoals in paragraaf 3 van dit hoofdstuk reeds is aangegeven, een leerling zal het werken met groepjes van 10 alleen als een handige oplossing ervaren, als deze makkelijk 10x een getal kan uitrekenen, c.q. als hij/zij inzicht in de nulregel heeft. Is dat niet of niet voldoende het geval, dan mag verwacht worden dat hij/zij vooralsnog de voorkeur blijft geven aan het werken met kleine groepjes. Er kan dus bepaald niet vanuit gegaan worden dat alle leerlingen het werken met groepjes van 10 zonder meer als een handige groeperingsvorm zullen opvatten. Een van de ideeën achter de leergang was dan ook om de leerlingen eerst een aantal elementaire ervaringen met het werken met kleine groepjes te laten opdoen om ze gaandeweg, naarmate het inzicht in de nulregel verder doorbreekt, steeds meer bewust te maken van het handige en efficiënte van groepjes van 10.

Tijdens het experiment bleken gedurende de hele eerste fase van het traject sommige leerlingen inderdaad veelal de voorkeur te geven aan een goed begrepen zij het soms bewerkelijke aanpak via kleine groepjes boven een kennelijk niet goed begrepen aanpak via groepjes van 10 of veelvouden daarvan. Soms ook leken bepaalde leerlingen onder invloed van klassikale besprekingsmomenten pogingen te doen in de richting van het werken met groepjes van 10 zonder dat dit onmiddellijk succesvol was. In paragraaf 3 van dit hoofdstuk is daarvan al een voorbeeld gegeven. Hieronder nog twee voorbeelden.

Mona (School 100) rekent de eerste opgave bij de dozenles (les 2; opgave '20 dozen met 48 pakken koffie') mede op basis van de gegeven instructie uit door twee groepjes van 10 te formeren (zie fig. 6.16a) en vervolgens 10x48 uit te rekenen via 10x40 en 10x8 (in plaats van door in een keer een nul achter 48 te plaatsen). Ze rekent de opgave verder correct uit. Echter, bij een van de volgende opgaven ('26 dozen met 65 blikken appelmoes') brengt zij in de tekening wel een ordening aan van 2 groepjes van 10 en nog 1 van 6, maar vervalt bij de uitwerking in verkeerd splitsen (zie fig. 6.16b). Kennelijk begrijpt zij het fijne van de nulregel nog niet en is zij nog doende om daar beter wijs uit te worden.



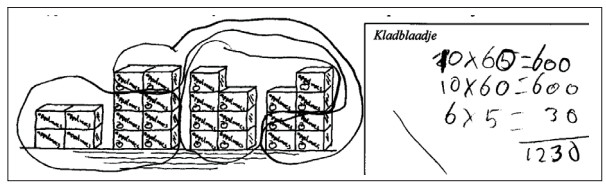


Fig. 6.16a en 6.16b: De oplossingen van Mona bij twee dozenopgaven (20x48 en 26x65). De opgave links is correct uitgerekend, bij de opgave rechts vervalt Mona toch weer in verkeerd splitsen.

Nadat in voorgaande lessen (School 500) het handige van het werken met groepjes van 10 enkele keren duidelijk naar voren is gekomen, buigen de leerlingen zich in les 5 over een aantal opgaven rond de kosten van schoolboeken. Bij de opgave '29 aardrijkskundeboeken van € 24,-' blijken inderdaad veel leerlingen met groepjes van 10 te werken, zoals Jos in fig. 6.17a.

Daar staat tegenover dat er ook nog een flinke groep leerlingen is die de voorkeur geven aan een vorm van groeperen waarbij met kleine groepjes gewerkt wordt. Interessant is de aanpak van Tamar (zie fig. 6.17b). Duidelijk is te zien hoe zij via herhaald optellen eerst de prijs van een groepje van 5 boeken bepaald heeft en op basis daarvan de prijs van nog een groepje van 5. Vervolgens is zij op een groepje van 10 overgestapt als verdubbeling van 2 groepjes van 5. Dan bepaalt zij de prijs van de resterende 9 boeken via compenseren (240-24) en tenslotte het totaalbedrag via cijferend optellen [8].

Zoals in paragraaf 3 reeds is vastgesteld, bleken de verwachtingen met betrekking tot het vlot doorzien en hanteren van de nulregel niet goed uit te komen. Veel meer leerlingen hadden hier moeite mee dan van tevoren was ingeschat. De activiteiten die in het onderwijsleertraject waren opgenomen om dat inzicht verder van de grond

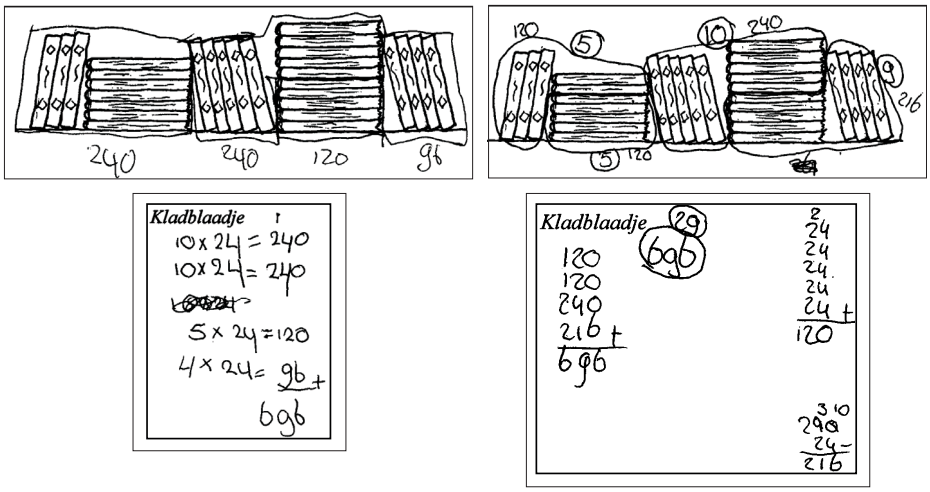


Fig. 6.17a en 6.17b: De oplossingen bij de opgave '29 boeken van 24 euro' van Jos en Tamar. Jos maakt groepjes van 10 en gebruikt de nulregel, Tamar maakt eerst twee groepjes van 5, daarna een groepje van 10 en tenslotte nog een groepje van 9.

te krijgen, troffen maar ten dele doel. Naar alle waarschijnlijkheid had dit te maken met het feit dat deze regel in het traject te weinig geproblematiseerd werd in de zin dat er te weinig werd ingespeeld op het feit dat hier een probleem voor nogal wat leerlingen lag en dat het waardevol kon zijn om dit als zodanig te onderkennen, ter discussie te stellen en gezamenlijk te onderzoeken hoe dat nu precies zit bij het vermenigvuldigen van getallen met 10. Juist de verschillen in aanpak tussen leerlingen, zoals die tussen Jos en Tamar in het voorbeeld van fig. 6.16a en 6.16b, zouden daarbij een mooi aangrijpingspunt hebben kunnen zijn.

6.4.5 Ontwikkeling van adequate hulpnotaties: het picturaal-schematische aspect

Een belangrijk leerdoel zoals dat van meet af aan voor ogen stond, betreft de ontwikkeling van heldere en overzichtelijke hulpnotaties door leerlingen. Het idee hierachter was dat zulke hulpnotaties niet alleen van waarde kunnen zijn om binnen de leergang tot de beoogde verkorting en niveauverhoging te komen, maar ook als een stuk algemeen wiskundig gereedschap dat in allerlei probleemsituaties op gevarieerde manieren ingezet kan worden om het eigen denken te ondersteunen en om de weg naar de oplossing mede te plaveien. Het werd van belang geacht dat zulke notatievormen niet het karakter van een vast, door de leraar voorgeschreven werkschema zouden hebben, maar van een bij de eigen oplossingswijze aansluitende, flexibel te gebruiken en deels door de leerlingen zelf te ontwikkelen 'format'. Zulke notatiewijzen dienden

als het ware mede te ontstaan uit de eigen, informele handelingen van leerlingen en uit de behoefte om deze op een eenvoudig te begrijpen, 'picturaal-schematische' manier weer te geven. Via de gezamenlijke uitwisseling en doordenking van deze notatiewijzen onder leiding van de leraar (zo was de verwachting) zou vervolgens een zekere homogenisering tot stand kunnen komen die geleidelijk aan steeds verder in de richting van de gangbare formele notatie zou kunnen voeren.

Tijdens het experiment bleek dat de leraren zich over het algemeen goed bewust waren van deze opzet en dat ze zich inspanden om, mede uitgaande van wat door de leerlingen werd aangedragen, de beoogde notatiewijzen naar voren te laten komen. Bij herhaling deed zich daarbij de noodzaak voor om datgene wat een leerling tijdens het oplossingsproces aan handelingen had uitgevoerd en genoteerd, op een heldere en 'natuurgetrouwe' manier op het bord weer te geven. Als handreiking voor het didactisch handelen stonden in de lesbeschrijvingen, min of meer naast elkaar, twee manieren aangegeven om dit te doen: notatievormen waarbij de objecten in kwestie via kruisjes, stipjes of hokjes daadwerkelijk werden weergegeven, en meer symbolische notatievormen waarbij het aantal objecten in een groepje via een getal met een rondje erom stond aangegeven[9]. Beide manieren blijken in de lessen veelal naast elkaar binnen dezelfde les voor te komen. Bijvoorbeeld:

De leraar (school 200) geeft tijdens de nabespreking van de schapenopgave (les 1, 18 schapen van 350 euro) enkele aanpakken weer door in eerste instantie de schapen snel met kruisjes op het bord te tekenen, en aan de hand van deze kruisjestekening te laten zien hoe twee leerlingen tewerk zijn gegaan (zie fig. 6.18). Bij de rechter aanpak wordt verduidelijkt dat de leerling in kwestie daarbij weliswaar twee groepjes van 5 heeft getekend, maar dat hij gerékend heeft met een groepje van 10.

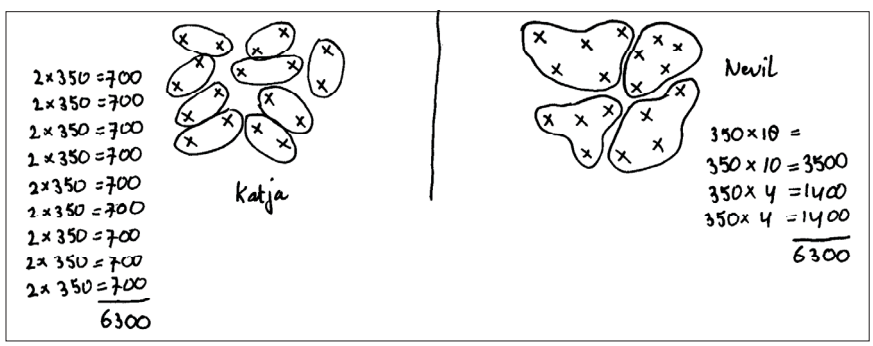


Fig. 6.18: De wijze waarop de leraar in school 200 tijdens les 1 twee aanpakken van leerlingen schematisch op het bord weergeeft, waarbij de schapen door kruisjes worden voorgesteld.

Voor de kinderen lijkt het heel duidelijk hoe de betreffende leerlingen het aanpakten[10]. Even later voegt de leraar er nog twee werkwijzen van andere leerlingen aan toe waarbij de indeling in groepjes met rondjes met een getal erin wordt aangegeven (zie fig. 6.19).

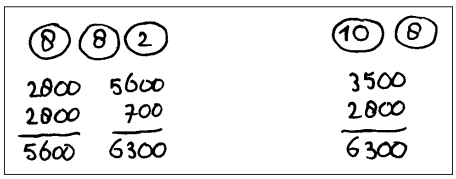


Fig. 6.19: De wijze waarop twee andere aanpakken via de symbolische rondjesnotatie worden weergegeven.

Hoewel deze symbolische notatiewijze sterker afwijkt van wat de leerlingen in kwestie op hun blad hebben genoteerd, lijken zij zich in deze notatievorm goed te kunnen herkennen. Ook de andere leerlingen lijken goed te begrijpen wat deze leerlingen gedaan hebben. Er melden zich diverse leerlingen aan die te kennen geven op dezelfde manier als Louise (aanpak rechts in fig. 6.19) gewerkt te hebben.

In de andere scholen doen zich soortgelijke situaties voor. Zo laat de leraar in school 300 in dezelfde les rond de veemarkt twee soortgelijke vormen van picturaal-schematische notaties zien. Eerst noteert hij de schapen met kruisjes en omcirkelt hij deze om aan te geven wat voor groepjes er zijn gemaakt, even later schrijft hij alleen een aantal getallen met een rondje erom heen ter aanduiding van het aantal schapen in het betreffende groepje. In één geval doet zich in zoverre een afwijkende situatie voor, dat de leraar weliswaar bij het inleidende gesprek de kruisjesnotatie op het bord aanhoudt, maar na de verwerking, tijdens de nabespreking, enkele leerlingen hun aanpak laat verwoorden zonder dat deze op het bord worden genoteerd. Hier blijft de uitwisseling beperkt tot het verbale niveau, en dit lijkt het van elkaar begrijpen wat je precies hebt gedaan, te bemoeilijken. Het zorgvuldig op het bord weergeven van de door leerlingen gehanteerde visualiseringen of geschematiseerde vormen daarvan, lijkt dan ook als een belangrijk aspect van de met het onderwijs beoogde interactie beschouwd te moeten worden. Is dit goed verzorgd, dan is al veel gewonnen, zo lijkt het. In het geval van de vermenigvuldigopgaven en de oplossingswijzen waar het hier om gaat, biedt de hierboven weergegeven kruisjesnotatie enerzijds de mogelijkheid om zulke oplossingswijzen adequaat en herkenbaar weer te geven terwijl hier anderzijds toch niet teveel tijd mee gemoeid is.

De rondjesnotatie met getallen ter aanduiding van de groepsgrootte zoals die (mede onder invloed van wat er in de lesvoorbereidingen beschreven stond) door de meeste leraren ook gebruikt werd, lijkt wellicht alweer een station verder; hier is de

groepsgrootte als het ware op een meer symbolisch niveau aangeduid, en dit maakt de verbinding met de daadwerkelijk door de leerlingen uitgevoerd handelingen minder hecht. Er zijn tijdens het experiment evenwel geen aanwijzingen gevonden waaruit zou blijken dat het min of meer tegelijkertijd hanteren van beide notatievormen een goed begrip van zulke notaties in de weg zou staan.

6.4.6 Inzichtelijk distributief redeneren

Op grond van de ervaringen tijdens het vooronderzoek die in hoofdstuk 5 zijn beschreven, was min of meer verwacht dat sommige leerlingen vooral in het begin van het beoogde onderwijsleerproces nogal eens hun toevlucht zouden nemen tot de strategie van het decimaal splitsen waarbij beide getallen gesplitst worden en waarbij alleen de tientallen onderling met elkaar vermenigvuldigd worden, en de eenheden. Bijvoorbeeld: 35x48 via 30x40 en 5x8. In hoofdstuk 5 is deze aanpak omschreven als 'quasi-distributief redeneren'. In het vervolg van deze studie wordt deze strategie veelal aangeduid als 'verkeerd splitsen' (VS). Het niet goed doorzien van de distributieve eigenschap werd als oorzaak voor deze foutieve aanpak aangemerkt.

Zoals eerder in dit hoofdstuk is beschreven, was het de bedoeling om deze onjuiste strategie te ontmoedigen door enerzijds te laten zien dat deze tot een onjuist antwoord leidt, en anderzijds te laten ervaren dat er op een meer basaal niveau makkelijker te begrijpen oplossingswijzen in de sfeer van het verdubbelen en groepjes maken mogelijk zijn die wel tot correcte uitkomsten leiden. Dat deze ontmoedigingstactiek bepaald niet overbodig is, wordt geïllustreerd door de volgende observatie:

Tijdens het werken aan de bloemperkopgave (35 rijen van 48 bloemen; les 4, school 2) gaat de speciale aandacht van de leraar uit naar Neil omdat deze in voorgaande lessen nogal eens verviel in verkeerd splitsen. Ook nu blijkt hij samen met Tony deze onjuiste aanpak te hanteren: ze hebben gezamenlijk het bovenste deel van het op het werkblad getekende bloemperk als 12 rijen van 35 bloemen geïdentificeerd, en dus de som 12x35 genoteerd. Deze is vervolgens opgelost via 10x30 en 2x5, met als antwoord 310 (zie het doorgestreepte deel van de berekening op het kladblaadje in fig. 6.20).

Lr.: Is dat wel goed, 310?
Neil: Ja, hoor...
Lr.: Maar hoe kan dat nou, jullie zeggen: dit zijn 12 rijen van 35, en dan staan daar maar 310 bloemen in? Is dat niet een beetje weinig?
Tony: Tja... Het is wel een beetje weinig...
Lr: Zou er iets mis zijn gegaan in jullie berekening?

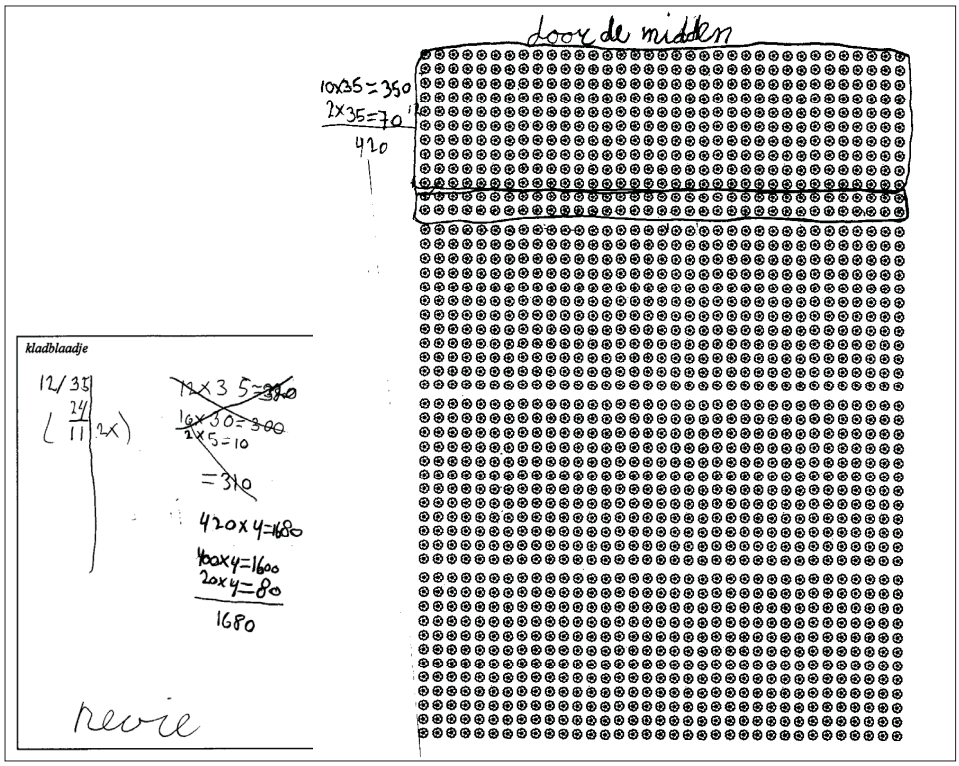


Fig. 6.20: De bloemperkopgave (35 rijen van 48 bloemen) met daarnaast de aanvankelijke onjuiste oplossing via verkeerd splitsen, en eronder de verbeterde werkwijze waarbij met 4 'blokken' van 420 wordt gewerkt.

Neil: Zou kunnen...

Lr.: Als het nu geen 12 rijen van 35 waren, maar 10 rijen...?

Tony: 10 rijen van 35? Dat is 350, makkelijk.

Neil: Ja, 10x35, dat is 350.

Lr.: Precies. Maar als 10x35 350 is, dan kan 12x35 toch nooit 310 zijn...?

Beiden (grijnzend): Nee...

Neil: Ik weet een andere manier. Dan doen we 350 ..., en nog 70... Dat is ..., 420! (Tony kijkt vragend)

Lr.: Maar wat bedoel je? Leg het eens aan Tony uit...

Neil: Nou, 12x35, dat is 10x35 en nog 2x35; dus 350 en 70...

Lr.: Dus jij zegt (wijzend op het blok van 12x35 dat beiden in de tekening hebben afgebakend): 12 rijen van 35, dat is evenveel als 10 rijen van 35 en nog 2 rijen van 35.

Beiden: Ja...!

Lr.: Kunnen jullie dat nu ook in de tekening laten zien, hoe je 12x35 verdeelt in 10x35 en 2x35? En probeer hem dan nog eens uit te rekenen…

Als de leraar even later terugkomt, ziet hij de berekening linksonder op het kladblaadje van beide leerlingen staan (zie fig. 6.20). Hij complimenteert ze en geeft aan dat het 'toch goed is om erop te letten dat je niet zo maar 10x30 en 2x5 kunt doen'.

In de gezamenlijke uitwisseling van op de poster weergegeven oplossingen waarmee de les afsluit, brengen Neil en Tony hun oplossing met verve naar voren. De leraar wijst daarbij nog eens op het feit dat meerdere groepjes leerlingen de 'blokken van 12 rijen' hebben ingedeeld in een groep van 10 en een groep van 2. Blijkbaar (zo constateert hij) is dat een handige manier, die groepen van 10…

Zoals bovenstaande observatie laat zien, kiezen de beide leerlingen ondanks minder gunstige ervaringen in voorgaande lessen aanvankelijk toch voor de aanpak van het verkeerd splitsen. Blijkbaar is het onjuiste van deze aanpak nog niet voldoende tot hen doorgedrongen. Na enig aandringen van de leraar doorzien ze evenwel dat deze werkwijze niet correct is. Uitgangspunt daarbij is om de leerlingen bewust te maken dat het nooit goed kan zijn omdat 'je veel te weinig rekent', zoals leerlingen het in volgende lessen zullen formuleren: als 10x35 al 350 is, kan 12x35 nooit 310 zijn. Vervolgens wordt, op aangeven van een van de leerlingen, onderzocht hoe je wel tot een correcte oplossing kunt komen door het tweede getal heel te laten en het eerste getal onder te verdelen in een groepje van 10 en van 2. Met name doordat in de tekening van het bloemperk de juistheid van deze verdeling onderbouwd wordt, lijken de leerlingen vastere grond onder de voeten te krijgen.

Enkele lessen na bovenstaande les, rezen toch weer nieuwe twijfels. In verschillende klassen bleef het verkeerd splitsen namelijk enigermate optreden, en zelfs betere leerlingen bezondigden zich eraan. Bij de tweede criteriumtoets, na les 8, werd deze twijfel bevestigd. In alle klassen deed zich het verkeerd splitsen als onjuiste strategie in meerdere of mindere mate voor. Ook daar moest geconstateerd worden dat niet alleen sommige zwakkere leerlingen, maar ook bepaalde betere leerlingen deze aanpak bleven gebruiken. Al met al wijst dit erop dat het goed doorzien en toepassen van de distributieve eigenschap begripsmatig veel lastiger is dan van tevoren verwacht was. Dit werd nog weer verder bevestigd in de hulpgesprekken die in drie van de vijf klassen na afloop van de tweede criteriumtoets gehouden werden. Hieronder een fragment uit het eerste van twee hulpgesprekken in school 300, waarbij een groepje

van drie leerlingen zich buigt over de vraag waarom het oplossen van 24x68 via 20x60 en 4x8 niet juist is.

Uitgangspunt voor het gesprek met Aysa, Rachel en Rama vormt hun oplossing van opgave 2b uit de criteriumtoets (zie fig. 6.21). Eerst wordt de rekenfout besproken die Rama heeft gemaakt. Zij heeft 2 groepjes van 10 (680 en 680) gemaakt, en een groepje van 4, en bij dat laatste heeft ze uit 4x68 als antwoord 264 gekregen. De rekenfout is gauw verbeterd, en vastgesteld wordt dat het juiste antwoord dus 1360+272, dus 1632 moet zijn.

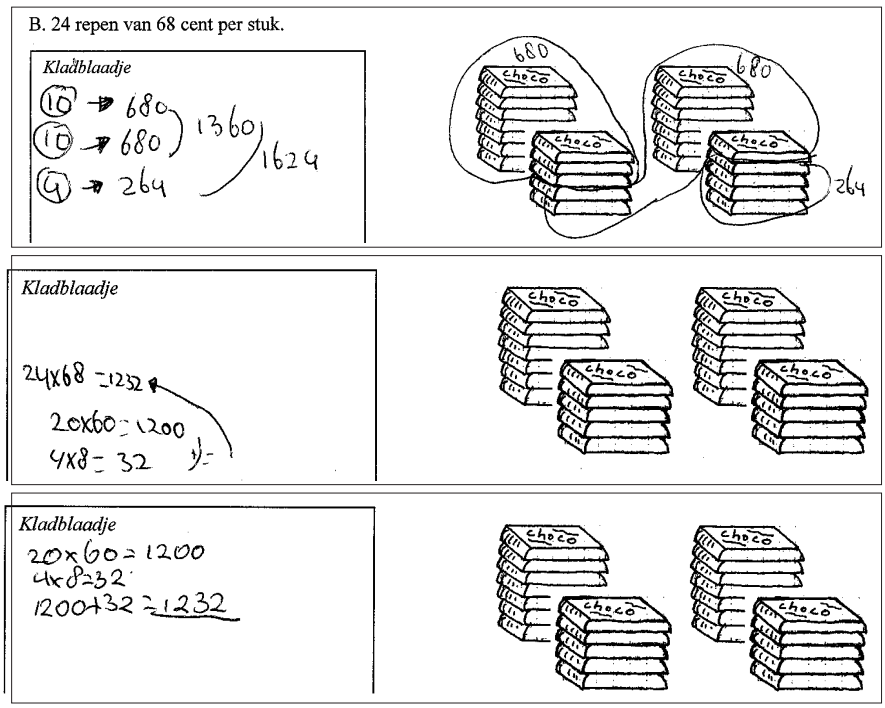


Fig. 6.21: De drie oplossingen van resp. Rama (boven), Aysa (midden) en Rachel (onder) bij de opgave '24 repen van 68 cent' uit de tweede criteriumtoets.

Vervolgens wordt de oplossing van Aysa en Rachel onder de loep genomen. Wat is hier nu misgegaan? Hebben Aysa en Rachel een idee? Beide leerlingen lachen wat. 'Het is te makkelijk', suggereert Aysa. 'Het is te weinig, het moet meer zijn', aldus Rachel. Aysa bevestigt dit. Maar waaróm deze aanpak nu fout is, blijkt nog niet zo eenvoudig te doorzien. We houden het er maar op dat de manier van Rama wel goed is: een groepje van 10, nog een groepje van 10 en nog een groepje van 4, dat gaat wel goed.

6.4.7 Ontwikkeling van adequate hulpnotaties: voortgaande schematisering

Zoals hierboven is aangegeven, leek het aannemelijk dat er zich bij de verkenning van het groeperend rekenen aanvankelijk een veelheid aan notatievormen zou voordoen met behulp waarvan de leerlingen 'tekenend en rekenend' tot een oplossing zouden komen. Naarmate ze zich meer bewust zouden worden van het handige van het werken met groepjes van 10, zou er, mede onder invloed van momenten van gezamenlijke uitwisseling en doordenking onder leiding van de leraar, in het notatiegedrag een zekere homogenisering tot stand kunnen komen waarbij steeds meer leerlingen hun oplossingswijze op een vergelijkbare manier zouden gaan noteren. Daarmee zou ook het perspectief op verdere verkorting en niveauverhoging zich steeds verder kunnen openen. Naarmate leerlingen in dat proces verder zouden komen, zo was de verwachting, zou er ook meer behoefte ontstaan aan een min of meer vast werkschema waarmee de verschillende, min of meer gestandaardiseerde stappen zonder al te veel nadenken uitgevoerd en genoteerd konden worden.

De verwachting met betrekking tot homogenisering bleek goed uit te komen. Over de hele linie kwamen er onder invloed van de genoemde uitwisselingsmomenten na zo'n zes tot zeven lessen enkele varianten van een algemeen gebruikt notatieschema naar voren waarbij vergelijkbare stappen op een vergelijkbare manier genoteerd werden. In hoge mate maatgevend bleken daarbij de door de leraar aanbevolen notatievormen zoals die met een zekere regelmaat op het bord verschenen. Een typerend voorbeeld van deze ontwikkeling is te zien in de figuren 6.22 en 6.23.

Bij de oplossingsstrategieën die bij het boekenprobleem in fig. 6.22 (een verwerkingsopgave uit les 5) worden gehanteerd, valt op dat alle drie de leerlingen gebruik maken van het werken met groepjes, al lopen de groepsgroottes nogal uiteen en al rekent Jasper (de middelste oplossing) abusievelijk 20 euro voor een boek in plaats van 24 euro. Ook de wijze waarop de totalen per groepje vervolgens bij elkaar opgeteld worden, varieert nogal. Verder springen de verschillende notatievormen in het oog die bij het optellen van de subtotalen worden aangehouden.

Bij de oplossingsstrategieën van dezelfde drie leerlingen bij een verwerkingsopgave uit les 10 ('240 dozen met 54 blikken appelmoes'; zie fig. 6.23) zijn er in de eerste plaats duidelijke veranderingen te zien doordat alle leerlingen nu met groepjes van 10, van 100 en verkortingen daarvan werken. Opvallend is verder dat de drie notatievormen in vergelijking met die in les 5 een veel sterkere overeenkomstigheid

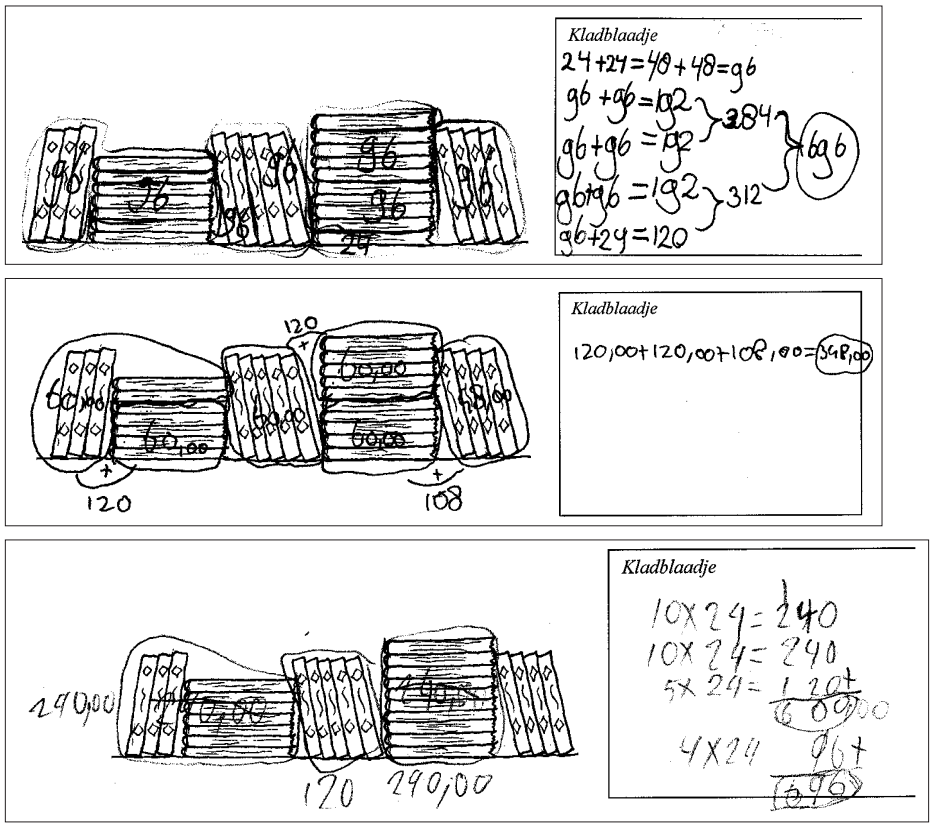


Fig. 6.22: Drie oplossingswijzen van resp. Gideo, Jasper en Jamy in les 5 bij de opgave '29 schoolboeken van 24 euro' (school 500). Alle drie maken ze gebruik van het werken met groepjes, maar de notaties op het kladblaadje verschillen sterk.

vertonen. Op dezelfde manier geven de leerlingen links onder elkaar aan welke groepjes ze maken (dit gebeurt hier uiteraard in gedachten, er is bij de opgave slechts één doos getekend), en twee van de leerlingen tellen de subtotalen op dezelfde manier cijferend bij elkaar op. Het stramien van deze vergelijkbare notatiewijzen komt overeen met de wijze waarop blijkens een aantal observaties de oplossingen regelmatig op het bord verschenen in deze klas. Ook in de andere scholen blijken zich dergelijke ontwikkelingen voor te doen. Aanvankelijk zijn er veelal sterk uiteenlopende notatievormen in omloop, maar naarmate het werken met groepjes van 10 en het gebruik daarbij van de symbolische rondjesnotatie meer ingeburgerd raken, beginnen deze notatievormen meer overeenkomstigheid te vertonen.

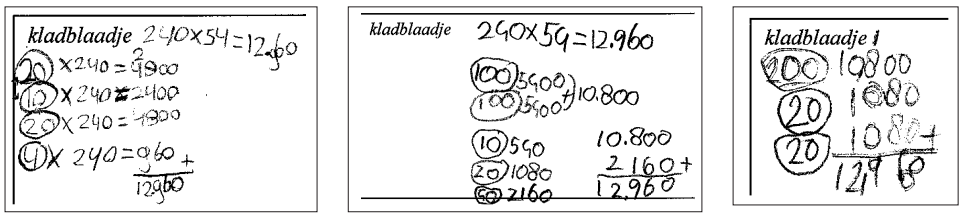


Fig. 6.23: Drie oplossingswijzen van dezelfde drie leerlingen bij een opgave uit de verwerking van les 10 ('240 dozen met 54 blikken appelmoes'). Van links naar rechts de oplossingen van resp. Gideo, Jasper en Jamy.

De verwachting met betrekking tot de behoefte aan standaardisering van de gebruikte notatievormen bleek in veel mindere mate uit te komen. Weliswaar treden tegen het einde van het experimentele onderwijsleerproces verdere verkortingen op, maar de gehanteerde notatievormen komen in essentie nog grotendeels overeen met die welke rond les 10 gebruikt werden. Dit wordt geïllustreerd door de in fig. 6.24 weergegeven oplossingswijzen van dezelfde drie leerlingen als hierboven. Bij deze opgave, afkomstig uit de verwerking van les 15, is te zien dat er in bepaalde opzichten niet veel is veranderd ten opzichte van de notatiewijzen in les 10.

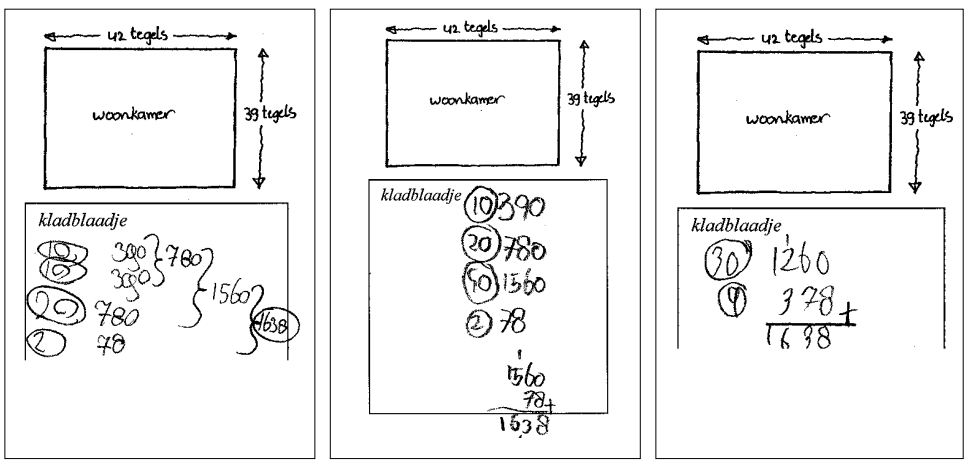


Fig. 6.24: Drie oplossingswijzen van dezelfde drie leerlingen bij een opgave uit de verwerking van les 15 ('42 rijen van 39 tegels'). Van links naar rechts weer de oplossingen van resp. Gideo, Jasper en Jamy.

Hierbij dient nog de kanttekening geplaatst te worden dat het al dan niet overstappen op een meer gestandaardiseerd werkschema per klas nogal verschilt. In de klas waaruit de hierboven beschreven notatievormen afkomstig zijn (school 500), gebruiken verreweg de meeste leerlingen tot het einde toe de weergegeven rondjesnotatie. In enkele andere klassen is het beeld echter veel meer gemêleerd. Sommige leerlingen blijken nog vast te houden aan de rondjesnotatie, anderen zijn op een meer formeel werkschema overgeschakeld. Zie de drie voorbeelden in fig. 6.25, afkomstig uit school 400. Uit de observaties in deze school blijkt dat de standaard-cijferprocedure tegen het einde van de leergang enkele keren expliciet aan de orde is gekomen doordat leerlingen deze uit zichzelf in gebruik namen, waarschijnlijk onder invloed van thuis. Een gevolg hiervan is dat een beperkt gedeelte van de leerlingen (ongeveer 20%) deze notatievorm heeft overgenomen.

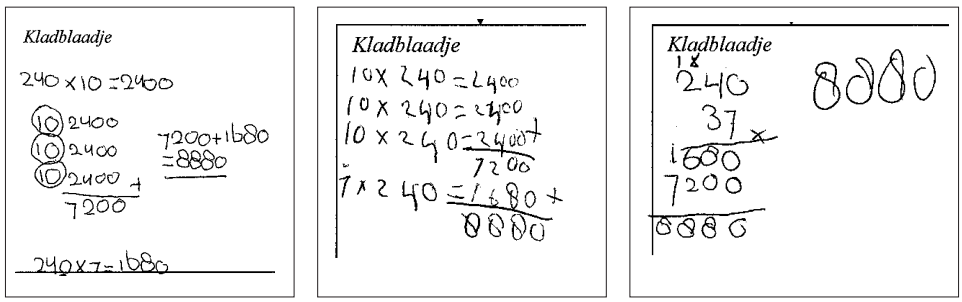


Fig. 6.25: Drie oplossingswijzen van drie leerlingen uit school 400 bij een kale opgave uit de verwerking van les 16 (37x240). De leerlingen werden verondersteld bij deze kale opgave eerst zelf een verhaaltje te bedenken, en deze vervolgens op te lossen.

Iets soortgelijks geldt voor twee andere scholen. Hoewel tijdens klassikale besprekingsmomenten de standaardprocedure in alle scholen enkele keren aan de orde is gekomen, blijkt deze dus niet zonder meer door veel leerlingen overgenomen te worden. Men lijkt over het algemeen liever vast te houden aan de eigen, vertrouwde notatiewijzen, al hebben die vaak betrekking op iets omslachtigere oplossingsstrategieën. Wellicht dat ook de rol van de leraar hier van invloed is; zou deze de standaardprocedure aanbevelen (hetgeen tijdens de experimentele leergang niet gebeurd is), dan zouden misschien veel meer leerlingen op het gebruik daarvan zijn overgeschakeld.

6.5 Verbinding met de vooraf geformuleerde verwachtingen

Tot zo ver de beschrijving van zeven cruciale onderwijsmomenten die naar aanleiding van het experimentele onderwijsleerproces naar voren kwamen. Zoals in de inleidende paragraaf van dit hoofdstuk is vastgesteld, was het voornaamste doel daarvan om een aantal patronen van onderwijsgebeurtenissen in kaart te brengen die voor de algehele progressie van de leerlingen tijdens het experimentele onderwijsleerproces van beslissende invloed zijn geweest. De vooraf geformuleerde verwachtingen vormden daarbij in belangrijke mate een richtpunt, en de bedoelde patronen zijn dan ook van grote waarde in verband met mogelijke aanpassing en aanscherping van de veronderstelde lokale onderwijstheorie.

Er is niet naar gestreefd om de gesignaleerde onderwijsmomenten met kwantitatieve gegevens te onderbouwen. Vooral in gevallen waarbij gebruik is gemaakt van beschrijvingen van interactieve lesmomenten en van individuele begeleidingsmomenten zoals die door de onderzoekers zijn geobserveerd, is dat ook nauwelijks haalbaar. In andere gevallen, zoals bij het vaststellen van het aantal leerlingen dat bij de tweede criteriumtoets nog gebruik maakte van de onjuiste strategie van het verkeerd splitsen, zou dat wel mogelijk zijn geweest. Omdat op dergelijke kwantitatieve aspecten van de resultaten van het onderwijsleerproces in het volgende hoofdstuk uitgebreid wordt ingegaan, blijven deze hier achterwege.

In het voorgaande is eerst en vooral geprobeerd om op een overtuigende manier aannemelijk te maken dat de betreffende patronen zich daadwerkelijk hebben voorgedaan. Het vertrekpunt werd daarbij veelal gevormd door het signaleren van een bepaalde onverwachtse gebeurtenis, zoals een bepaalde foutieve redenering of het niet goed tot een oplossing kunnen komen van een leerling. Zo'n gebeurtenis riep soms vragen of twijfels op over een bepaald aspect van het beoogde onderwijsleertraject. Ook gebeurde het wel dat zich een gebeurtenis voordeed die juist wel als een bevestiging van een van de vooraf beschreven verwachtingen leek te kunnen worden geïnterpreteerd. Door zulke gebeurtenissen te analyseren en na te gaan in hoeverre deze zich in andere situaties op een vergelijkbare manier voordeden, werd geprobeerd nader uitsluitsel te krijgen over het al dan niet optreden van een patroon van gebeurtenissen dat als indicatie voor de beoogde progressie kon worden opgevat. Hiertoe werden alle gegevens over lesobservaties opnieuw bekeken, over aanpakgedrag, uit interviews met leerlingen, uit de drie criteriumtoetsen, enzovoorts. Ook werd nagegaan in hoeverre een patroon zich wellicht in de ene school wel maar

in de andere school niet voordeed. Op grond van al dergelijke gegevens werd dan uiteindelijk vastgesteld of het al dan niet om een cruciaal onderwijsmoment ging.

Een aantal van de hierboven weergegeven cruciale momenten is dan ook direct verbonden met de in hoofdstuk 5 geformuleerde verwachtingen met betrekking tot het beoogde onderwijsleerproces. Aan het begin van paragraaf 6.4 is dit verband reeds aangegeven. Het is echter niet zo dat alle gesignaleerde momenten rechtstreeks verbonden zijn met een van de verwachtingen. Zo houdt het punt van het overzicht leren houden geen direct verband met een van de verwachtingen, net als het punt van de basale rekenvaardigheid als voorwaardelijke kennis. Er is dus geen directe één-op-één-relatie tussen verwachtingen en cruciale momenten en daar is ook een duidelijke reden voor. Bij het verzamelen en analyseren van gegevens met betrekking tot het experimentele onderwijsleerproces stelt men zich namelijk niet in de eerste plaats de vraag of deze gegevens overeenkomen met de vooraf geformuleerde onderwijsverwachtingen.Veeleer is het zo dat men a priori afgaat op het eigen gezonde onderwijsverstand, op de ervaring die men heeft bij het analyseren en interpreteren van in het oog springende onderwijsgebeurtenissen, en op de daarbij ontwikkelde expertise. Uiteraard zal het regelmatig gebeuren dat een gesignaleerd patroon van gebeurtenissen in direct verband staat met een van de vooraf geformuleerde verwachtingen. Deze hebben immers betrekking op wat als cruciale aspecten van de met het onderwijsleerproces beoogde progressie beschouwd werden. Maar het kan ook gebeuren dat gebeurtenissen wel als betekenisvol aangemerkt moeten worden terwijl ze toch niet direct verbonden zijn met een van de verwachtingen.

Een typerend voorbeeld van een onderwijsmoment dat niet direct met een van de geformuleerde verwachtingen verband hield, betreft het punt van het leren overzicht houden (punt 6.4.2). Er was van tevoren geen rekening gehouden met het feit dat dit voor nogal wat leerlingen wel eens een probleem zou kunnen zijn, en er was dan ook geen verwachting in dat opzicht beschreven. Toch bleek dit tijdens het onderwijsexperiment wel degelijk een belangrijk aandachtspunt. Zijn leraren zich nadrukkelijk bewust van dit punt, en is er in de lesbeschrijvingen de nodige informatie over opgenomen, dan kan dit het succesvol doorlopen van het beoogde onderwijsleertraject stellig ten goede komen.

Wellicht zou men kunnen zeggen dat er in onderzoekssituaties zoals die in de onderhavige studie aan de orde zijn, naast de expliciet geformuleerde verwachtingen met betrekking tot het beoogde onderwijsleerproces veelal ook impliciete

verwachtingen bestaan die te maken hebben met wezenlijke aspecten van de realistische onderwijsbenadering die als funderend theoretisch kader voor het onderzoek fungeert.

voetnoten

1 Steeds werden per school zes tot acht leerlingen geïnterviewd; drie tot vier zwakkere leerlingen en drie tot vier betere leerlingen. De interviews werden opgenomen met een cassetterecorder, zodat de resultaten naderhand beluisterd en geanalyseerd konden worden. Tevens werd van elke interviewsessie een schriftelijk verslag gemaakt dat bij de overige gegevens werd gevoegd.

2 De didactische vormgeving en de lay out van de lesbeschrijvingen werden sterk afgestemd op die van de op de scholen gebruikte reken-wiskundemethode *Wis en Reken*. Daardoor werd de herkenbaarheid en hanteerbaarheid van de beschrijvingen voor de leraren zo groot mogelijk gemaakt.

3 Zoals in hoofdstuk 4 reeds is aangegeven, werden de observaties op drie van de vijf scholen door K. Buijs gemaakt, terwijl die op de overige twee scholen door M. Beishuizen werden verzorgd. Ook de gesprekken met de leraren en de interviews met de leerlingen werden volgens deze verdeling gedaan.

4 De inhoud van de overige lessen die door de leraren in de betreffende periode gegeven werden, stond grotendeels los van het domein rond het vermenigvuldigen van meercijferige getallen. Deze lessen, die volgens het reguliere lesplan uit de gebruikte methode (Wis en Reken) gegeven werden, hadden onder meer betrekking op onderwerpen als hoofdrekenen, schattend rekenen, breuken, kommagetallen en meten (metriek stelsel). Zie verder het leerstofoverzicht in Handleiding 1, van groep 7 van deze methode (Buijs (red.) e.a., 2000; p. 28-59).

5 In drie van de vijf klassen waarin de experimentele leergang werd doorlopen, waren de leraren zich zeer goed bewust van het belang van dergelijke aspecten. Dit komt bijvoorbeeld tot uitdrukking in de waardering die door de leraar soms werd uitgesproken voor een heel mooi weergegeven eigen aanpak van een leerling, in de aansporingen die van tijd tot tijd werden gegeven om toch vooral oplossingsstrategieën te gebruiken ‘die je zelf goed begrijpt’, in de gerichtheid om tijdens nabesprekingsmomenten gezamenlijk de overeenkomsten en verschillen tussen op het bord genoteerde aanpakken goed te doorzien en te verwoorden, enzovoorts. In twee klassen was hiervan minder sprake en was het toch meer de autoriteit van de leraar die door de leerlingen als doorslaggevend werd ervaren bij het al dan niet in gebruik nemen van een besproken oplossingswijze.

6 Bij de try out van de methode Wis en Reken bleek dit zeer duidelijk binnen het leerstofdomein van het optellen en aftrekken tot 100 toen de rijgaanpak en met name het gebruik daarbij van de lege getallenlijn bij herhaling door sommige leerlingen als omslachtig werd ervaren. Deze leerlingen hadden sterk de neiging om de opgaven (zoals 48+34,

57+25, e.d.) direct uit het hoofd te willen uitrekenen, ondanks dat dit soms tot minder goede resultaten leidde. Om hieraan enigszins tegemoet te komen, werd de verwerking bij een aantal lessen zodanig vormgegeven, dat alle leerlingen verplicht werden om in ieder geval de eerste drie of vier opgaven op de lege getallenlijn uit te rekenen, en de rest van de opgaven naar eigen keuze.

7 Wellicht is het nog aan te bevelen de leergang te beginnen met een of twee activiteiten waarin sprake is van een aantal dozen of (speelgoed)dieren die concreet aanwezig zijn zoals dit ook door de Engelse onderzoekster Hutton (1977, p. 9) werd gedaan. Het indelen in groepjes kan dan daadwerkelijk uitgevoerd en zichtbaar gemaakt worden, hetgeen nog duidelijker tot uitdrukking laat komen wat hier precies gedaan wordt.

8 Dit is een fraai voorbeeld van wat Ambrose, Baek en Carpenter (2003, p. 314) noemen 'building up with other factors'. Net als Bob in het voorbeeld van Ambrose c.s., begint Tamar met een vorm van herhaald optellen door 5 keer 24 op te tellen. Vervolgens verdubbelt zij dit tot 10 keer en gebruik dit laatste als een grotere factor om de berekening mee af te maken.

9 Dit wijkt overigens enigszins af van het oorspronkelijke plan om eerst enige tijd een notatie met kruisjes of andere aanduidingen van de betreffende objecten aan te houden, en pas later een meer symbolische notatie met rondjes met een getal erin te gaan gebruiken. Bij de uitwerking van de lessen leek het onderscheid tussen deze beide notatievormen toch minder relevant dan aanvankelijk gedacht werd.

10 Het begrijpen van de notatie van de leerling rechts wordt nog wat bemoeilijkt doordat op het bord niet 10x350 en 4x350 genoteerd staat, maar het omgekeerde: 350x10 en 350x4. Dit was de letterlijke notatie zoals de leerling die op z'n blaadje had staan. Voor zover dit in te schatten was, leken de overige leerlingen wel degelijk te doorzien dat het in wezen om 1 groepje van 10 en nog 2 groepjes van 4 ging.

7 Analyse resultaten: de ontwikkeling van goedscores en aanpakgedrag

7.1 Inleiding

In de komende twee hoofdstukken worden een aantal resultaten van het onderwijsexperiment rond de experimentele leergang gepresenteerd en geanalyseerd. Voor hoofdstuk 7 betreft dit de ontwikkeling van de goedscores en het aanpakgedrag van alle aan het experiment deelnemende leerlingen. In hoofdstuk 8 wordt vervolgens de ontwikkeling van het notatiegedrag onder de loep genomen. Mede op basis van deze analyses worden in hoofdstuk 9 een aantal bevindingen van meer algemene aard met betrekking tot het onderzoek gepresenteerd, alsmede een daarmee samenhangende lokale onderwijstheorie. Daarmee zijn tevens de drie centrale onderzoeksvragen van deze studie beantwoord.

Om de ontwikkeling van goedscores en aanpakgedrag adequaat te kunnen beschrijven, wordt in paragraaf 2 van dit hoofdstuk eerst een categorisering gegeven van de voornaamste soorten oplossingsstrategieën die door de leerlingen in de loop van het experiment werden gebruikt. Mede op basis daarvan wordt in paragraaf 3 besproken op welke wijze de gegevens met betrekking tot goedscores en aanpakgedrag uit de drie criteriumtoetsen bijeengebracht en geanalyseerd werden. De uiteindelijke resultaten van deze analyse worden vervolgens in paragraaf 4 gepresenteerd. Tenslotte wordt in paragraaf 5 apart ingegaan op de verschillen in ontwikkeling die zich tijdens het experiment tussen de 25% zwakste leerlingen en de 25% beste leerlingen hebben voorgedaan.

7.2 Categorisering van de voornaamste typen oplossingsstrategieën

In deze paragraaf wordt een overzicht gegeven van de voornaamste typen oplossingsstrategieën die door de leerlingen tijdens het onderwijsexperiment werden gebruikt[1]. Het overzicht werd samengesteld op basis van een analyse van al het leerlingenmateriaal dat tijdens het experiment werd verzameld. Dit betreft het materiaal uit het vooronderzoek, uit de drie criteriumtoetsen, en uit de reguliere lessen. Het overzicht omvat een indeling in twaalf categorieën oplossingsstrategieën die naar opklimming van abstractieniveau worden beschreven[2]. Steeds wordt een bepaald type strategie geïllustreerd met voorbeelden van oplossingswijzen die zich

tijdens het experiment voordeden. Bij alle categorieën wordt een afkorting vermeld die naderhand terugkomt bij de analyse van het aanpakgedrag in paragraaf 3, 4 en 5.

(1) Herhaald optellen, verdubbelen en combinaties daarvan (Hopt/Verd)
De meest elementaire oplossingswijzen zoals die vooral in het vooronderzoek en tijdens de eerste lessen van de leergang naar voren kwamen, zijn die waarbij een leerling herhaald optelt of verdubbelt. Met name bij opgaven met lastigere getallen, zoals geldbedragen, werd dit type strategie herhaaldelijk aangetroffen. Ook kwamen regelmatig mengvormen voor waarbij begonnen wordt met herhaald optellen, en dan op verdubbelen wordt overgeschakeld. Zie de bovenste twee voorbeelden in fig. 7.1.

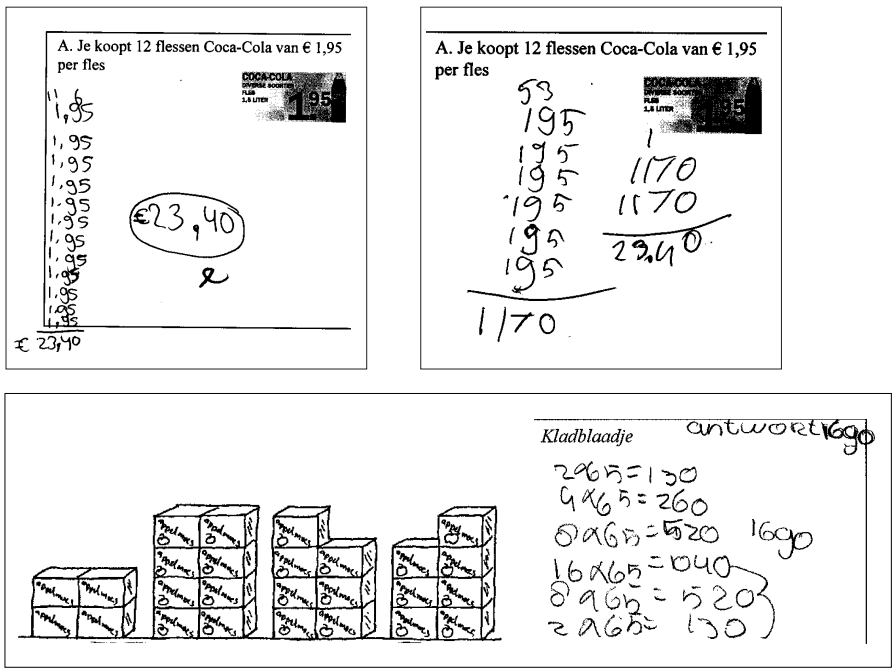


Fig. 7.1: Drie voorbeelden van strategieën uit de categorie herhaald optellen/verdubbelen. Linksboven een vorm van zuiver herhaald optellen, rechts een combinatie daarvan met verdubbelen. Eronder een vorm van herhaald verdubbelen waarbij uiteindelijk drie subtotalen bij elkaar worden opgeteld (opgave: 26 dozen met 65 blikken).

Een meer geavanceerde vorm van verdubbelen doet zich voor als deze aanpak herhaald wordt toegepast. Dit herhaalde verdubbelen kwam in uiteenlopende varianten voor. In het onderste voorbeeld van fig. 7.1 is een variant te zien waarbij de leerling in kwestie net zo lang verdubbelt tot zij in de buurt is van het beoogde aantal keren,

en waarbij vervolgens drie subtotalen worden samengenomen. In de literatuur wordt deze vorm veelal als Egyptisch vermenigvuldigen aangeduid (zie bijvoorbeeld De Jong (red.), 1977, p. 60; Treffers (red.), 1979, p. 132)[3].

(2) Verkeerd splitsen (VS)

Een type strategie dat aanvankelijk ook regelmatig werd gesignaleerd en dat naderhand van tijd tot tijd bleef terugkomen, betreft het 'verkeerd splitsen'. Deze onjuiste aanpak komt erop neer dat beide getallen worden gesplitst op basis van hun tientallige structuur en dat vervolgens de tientallen met elkaar vermenigvuldigd worden, en de eenheden (zie het voorbeeld links in fig. 7.2). Beide subtotalen worden tenslotte bij elkaar opgeteld. Deze strategie komt in diverse varianten voor. In het geval van een vermenigvuldiging van een tweecijferig met een driecijferig getal worden veelal de tientallen van het ene getal met de honderdtallen van het andere getal vermenigvuldigd, terwijl de eenheden van het ene getal zowel met de tientallen als met de eenheden van het andere getal worden vermenigvuldigd. Zie het voorbeeld rechts in fig. 7.2. Vooral in het geval van opgaven met hele getallen en zonder dat er sprake was van een uitgebreide context, kwamen zulke aanpakken regelmatig voor.

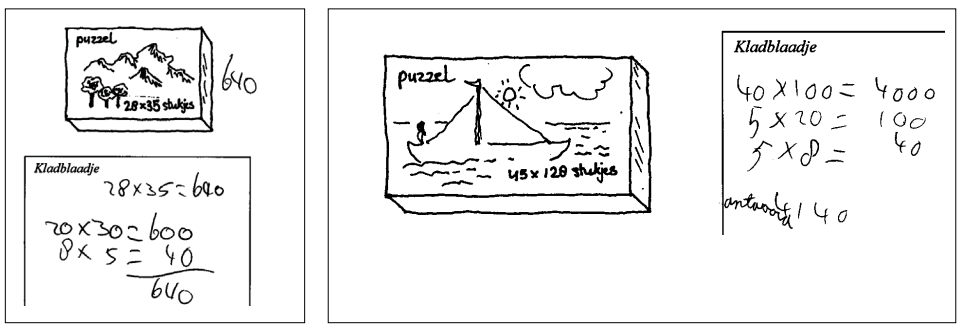


Fig. 7.2: Twee voorbeelden van verkeerd splitsen. In het geval van de vermenigvuldiging van twee tweecijferige getallen worden alleen de tientallen met de tientallen en de eenheden met de eenheden vermenigvuldigd. In het geval van 'tweecijferig maal driecijferig' worden tientallen met honderdtallen vermenigvuldigd, en eenheden met eenheden en tientallen.

(3) Groeperend rekenen (GR)

In het eerste deel van de leergang werd de aandacht nadrukkelijk gevestigd op een verkorte vorm van herhaald optellen, namelijk die van het werken met kleine gelijke groepjes. Bijvoorbeeld: de prijs van een hoeveelheid van 16 koeien van 350 euro per stuk bepalen door groepjes van 2, van 4, of van 5 te maken. Deze aanpak werd aanvankelijk door sommige leerlingen op een basaal niveau gebruikt waarbij groepjes

van 2, 3 of 4 werden gevormd. Zie de bovenste twee voorbeelden in fig.7.3. Andere leerlingen schakelden al gauw over op grotere groepen, in het bijzonder groepen van 10. Zie het voorbeeld onder in fig. 7.3.

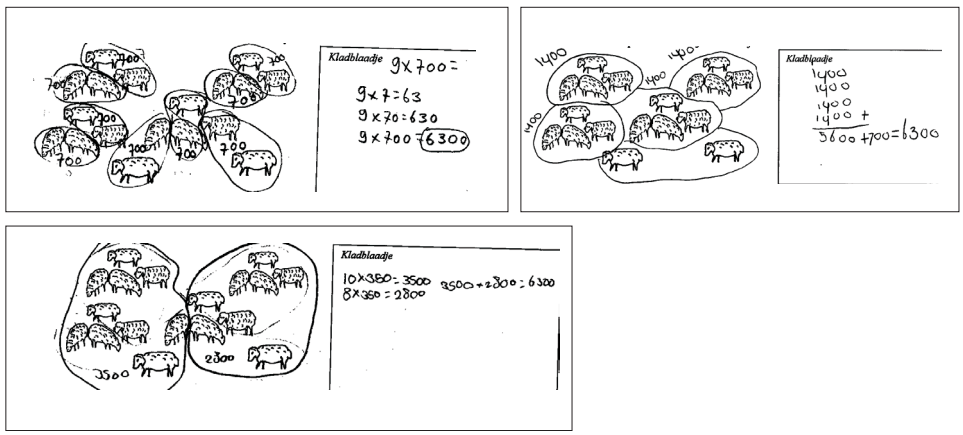


Fig. 7.3: Drie voorbeelden van groeperend rekenen. In de bovenste twee voorbeelden wordt resp. met groepjes van 2 en van 4 gewerkt, in het onderste voorbeeld met een groepje van 10 en van 8.

Ook bij dit type strategie zijn weer varianten mogelijk, zoals wanneer een leerling al groeperende van een kleiner groepje op een groter groepje overschakelt. Zie het voorbeeld in fig. 7.4 waarbij de leerling in kwestie eerst met groepjes van 5 werkt, maar vervolgens op groepjes van 10 overstapt. In de literatuur wordt deze werkwijze soms omschreven als 'opbouwen met andere factoren' (zie Ambrose, Baek & Carpenter, 2003, p. 314–315).

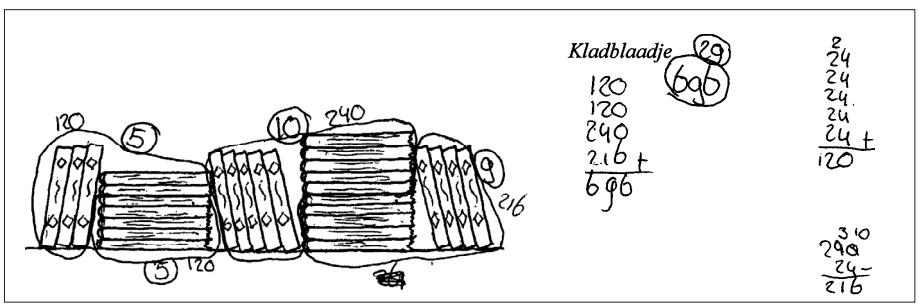


Fig. 7.4: Voorbeeld van een vorm van groeperend rekenen waarbij op een groter soort groepje wordt overgeschakeld.

(4) De strategie waarbij het eerste getal decimaal wordt gesplitst: S1

De aanpak van het werken met groepjes van 10 werd door sommige leerlingen van meet af aan ook al op een meer getalsmatig, formeel niveau gehanteerd. Dat wil zeggen: zonder dat sprake was van het maken van groepjes, maar louter op basis van het decimaal splitsen van het eerste getal terwijl het tweede getal heel gehouden werd. Naderhand, toen de leerlingen steeds verder vertrouwd raakten met het groeperend rekenen en het handige van het werken met groepjes van 10 daarbij, schakelden steeds meer kinderen geleidelijk aan over op deze meer getalsmatige, formele variant van het werken met groepjes van 10. Deze strategie wordt aangeduid met S1 (splitsen 1e getal), en komt voor in uiteenlopende varianten. In het kader van dit onderzoek is een globaal onderscheid gemaakt tussen de meest basale vorm, S1b genoemd, waarbij uitsluitend met groepjes van 10 (voor de tientallen) en groepjes van 2 (voor de eenheden) wordt gewerkt (zie het voorbeeld links in fig. 7.5); en een meer geavanceerde vorm waarbij hetzij bij de tientallen, hetzij bij de eenheden met verkortingen wordt gewerkt (S1v genoemd). Zie de twee voorbeelden rechtsboven en rechtsonder in fig. 7.5. Zoals uit de voorbeelden blijkt, is de grens tussen groeperend rekenen en de S1-strategie niet altijd scherp te trekken. Gezien het feit dat in de notatiewijze bij de strategie linksboven in fig. 7.5 verwezen wordt naar het maken van groepjes, zou er iets voor te zeggen zijn om deze aanpak als een vorm van groeperend rekenen te kenschetsen. Omdat de leerling in kwestie echter in de tekening bij deze opgave geen groepjes heeft gemaakt, wordt deze aanpak in de categorie S1 ingedeeld. In gevallen waarbij een leerling wel daadwerkelijk groepjes in de tekening heeft aangegeven, wordt deze aanpak in de categorie GR ondergebracht.

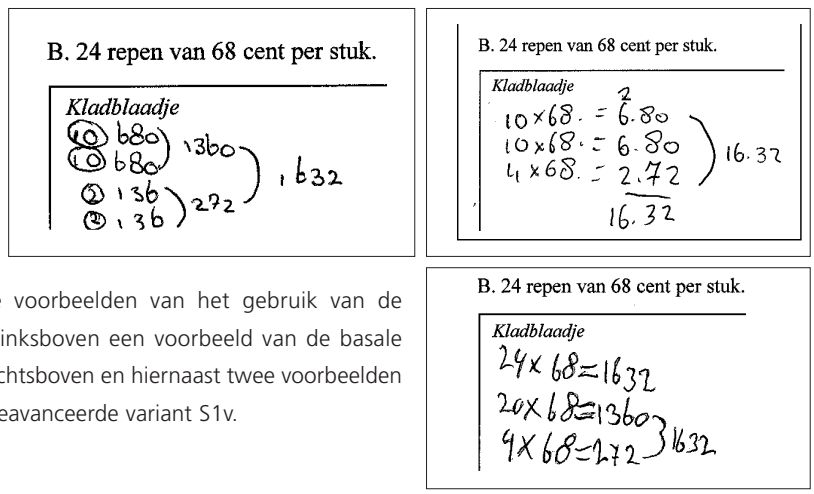


Fig. 7.5: Drie voorbeelden van het gebruik van de S1-strategie. Linksboven een voorbeeld van de basale variant S1b; rechtsboven en hiernaast twee voorbeelden van de meer geavanceerde variant S1v.

Zoals de voorbeelden laten zien, kunnen bij het optellen van de subtotalen uiteenlopende strategieën gehanteerd worden. Sommige leerlingen gebruiken een hoofdrekenstrategie waarbij veelal met boogjes of pijlen wordt aangegeven welke getallen samengenomen worden. Andere leerlingen gebruiken het cijferen, waarbij de getallen in kwestie veelal onder elkaar staan en waarbij boven deze getallen soms 'onthoudgetallen' vermeld staan.

(5) De S12-strategie: eerst het eerste getal decimaal splitsen, later het tweede getal
De aanpak van het decimaal splitsen van het eerste getal wordt soms gebruikt in een variant waarbij in tweede instantie het tweede getal ook nog wordt gesplitst, namelijk bij het vermenigvuldigen van de eenheden van het eerste getal met de tientallen en eenheden van het tweede getal. Omdat deze strategie soms betrekkelijk veel voorkwam, wordt deze als een aparte categorie aangemerkt. In dat geval wordt gesproken van S12 (Splitsen 1e getal en daarna 2e getal). Zie het voorbeeld in fig. 7.6.

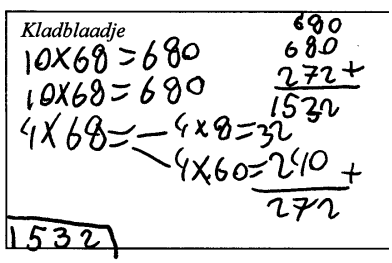


Fig. 7.6: Voorbeeld van het gebruik van de S12-strategie. Eerst wordt het eerste getal (24) gesplitst, daarna, bij het vermenigvuldigen van de eenheden van het eerste getal met het tweede getal, ook het tweede getal (68). Bij het optellen van de subtotalen rechtsboven is een 'onthoud-fout' gemaakt.

(6) De aanpak waarbij het tweede getal wordt gesplitst: S2
Oplossingen waarbij het eerste getal heel wordt gehouden en het tweede getal wordt gesplitst (S2), kwamen ook al in een vroeg stadium voor, zij het mondjesmaat. Deze oplossingswijze bleek net als de hieronder nog te bespreken AS-aanpak nogal foutgevoelig en het gebruik ervan werd daarom enigszins ontmoedigd. Naderhand, toen de leerlingen meer greep op het op een formeel niveau oplossen van opgaven kregen, kwam de S2-aanpak geleidelijk aan wat meer voor, en toen met meer succes. Zie fig. 7.7 voor twee voorbeelden.

Ook wat betreft deze aanpak zou in principe een onderscheid kunnen worden aangebracht in een basale variant (S2b) en een verkorte variant (S2v). Omdat deze strategie maar betrekkelijk weinig voorkwam, is dit onderscheid achterwege gelaten.

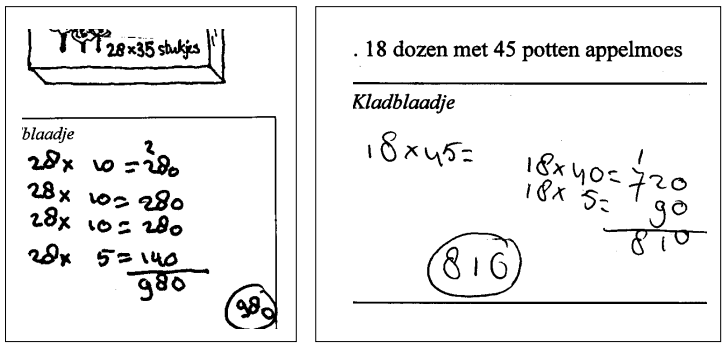


Fig. 7.7: Twee voorbeelden van de S2-strategie. Bij de linker aanpak gebeurt dat op een basaal niveau, bij de rechter aanpak op een meer verkort niveau.

(7) De aanpak waarbij beide getallen decimaal worden gesplitst: AS

Bij deze aanpak worden beide getallen op basis van hun decimale structuur gesplitst en worden de tientallen van het eerste getal met de tientallen en eenheden van het tweede getal vermenigvuldigd, waarna hetzelfde gebeurt voor de eenheden van het eerste getal. Deze strategie wordt verder aangeduid met de afkorting AS (Alles Splitsen). De precieze volgorde waarin de verschillende handelingen worden uitgevoerd, kan uiteraard verschillen. Zie fig. 7.8 voor twee voorbeelden. Ook deze aanpak werd van meet af aan door sommige leerlingen gebruikt, maar ook hier traden regelmatig fouten op, zoals nulfouten of het vergeten van een term. In dat laatste geval werd de strategie in de categorie VS ondergebracht. Naderhand zijn er wat meer leerlingen die deze aanpak hanteren, maar, zoals in paragraaf 3 verder besproken zal worden, het blijft mondjesmaat. Toch zijn er ook enkele leerlingen die deze aanpak door de hele leergang heen consequent en redelijk succesvol gebruiken.

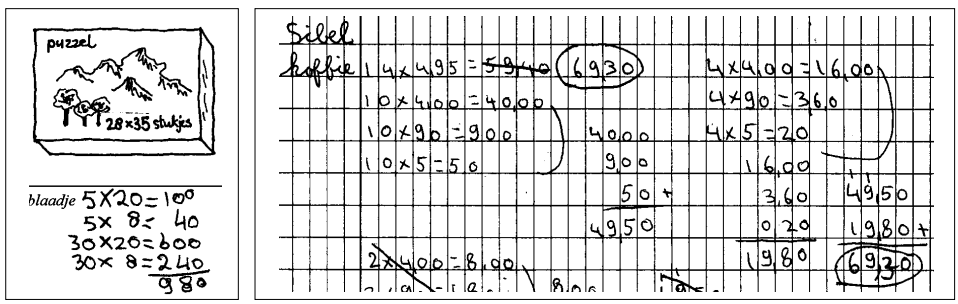


Fig. 7.8: Twee voorbeelden van het gebruik van de AS-strategie waarbij beide getallen decimaal gesplitst worden. Links een voorbeeld van een vermenigvuldiging van een tweecijferig met een tweecijferig getal, rechts een voorbeeld waarbij de prijs van 14 pakken koffie van € 4,95 bepaald moest worden (tweecijferig maal driecijferig).

(8) Compenseren: Comp

Het was de bedoeling dat de leerlingen geleidelijk aan steeds gevoeliger zouden worden voor situaties waarin compenseren een handige aanpak is – de aanpak waarbij een van beide getallen 'rond gemaakt' wordt en waarbij het teveel gerekende er naderhand weer afgetrokken wordt. In incidentele gevallen kwam deze aanpak al aan het begin van de leergang voor, soms op een zeer basaal niveau zoals bij het voorbeeld links in fig. 7.9. Soms werd deze aanpak op een minder basaal niveau gebruikt, zoals bij het voorbeeld rechts in fig. 7.9.

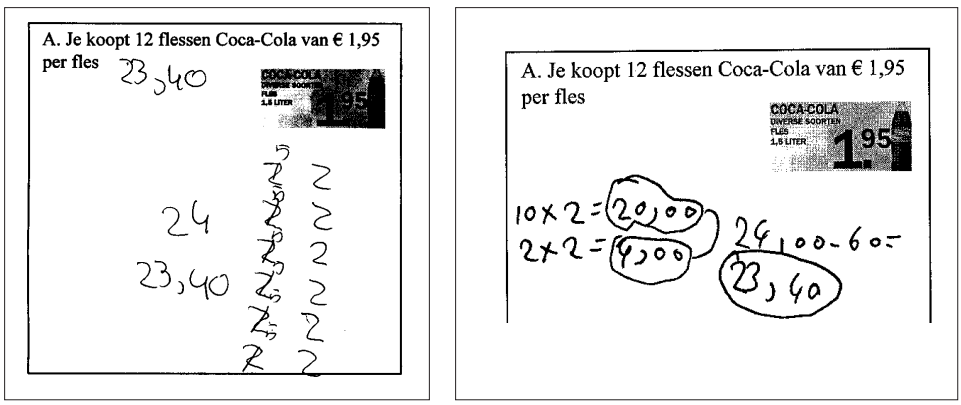


Fig. 7.9: Twee voorbeelden van de compensatiestrategie. Links wordt deze op een basaal niveau gebruikt waarbij het teveel gerekende er apart bij wordt genoteerd; rechts wordt de strategie op een meer geavanceerd niveau gehanteerd.

De aanpak van het compenseren kwam verder ook regelmatig voor in combinatie met een andere aanpak. Bijvoorbeeld in combinatie met de S1-strategie wanneer een leerling 18x45 uitrekende via 10x45, 10x45 en dan 2x45 eraf. Of wanneer een opgave als 24x68 werd uitgerekend via 10x68, 10x68, 5x68 en nog 1x68 eraf[4]. Zie de twee voorbeelden in fig. 7.10.

(9) Halveren-verdubbelen (HV)

Dit is een strategie die in de TAL-terminologie net als het compenseren als een typische varia-strategie wordt aangemerkt[5] (zie Van den Heuvel-Panhuizen e.a. (red.), 2001, p. 39), en die erop neerkomt dat het eerste getal in een opgave wordt verdubbeld terwijl het tweede getal gehalveerd wordt, of andersom. In eerste instantie kwam deze strategie nauwelijks voor. Naderhand, nadat zij enkele keren door een leraar onder de aandacht was gebracht, begon deze aanpak geleidelijk aan meer op te treden.Verder komt deze aanpak ook weer in diverse varianten voor waarbij het soms

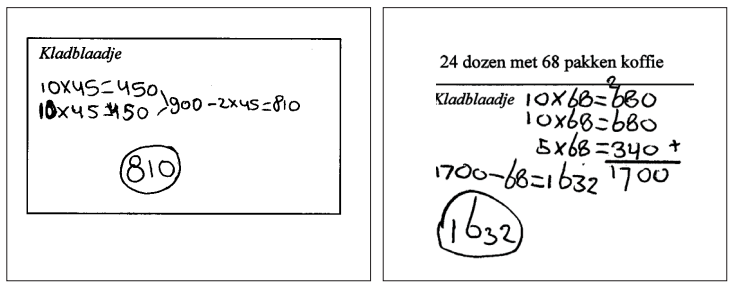


Fig. 7.10: Twee voorbeelden waarbij het compenseren gebruikt wordt in combinatie met de S1-strategie.

niet zozeer om halveren-verdubbelen gaat, maar meer om het handig benutten van een bekende getalrelatie, zoals in het geval dat 16x25 wordt opgelost via het bekende weetje 4x25=100. Zie het voorbeeld links in fig. 7.11. Dergelijke varianten werden ook tot de categorie HV gerekend. Rechts in fig. 7.11 een voorbeeld waarbij deze aanpak in een meer zuivere vorm wordt gehanteerd.

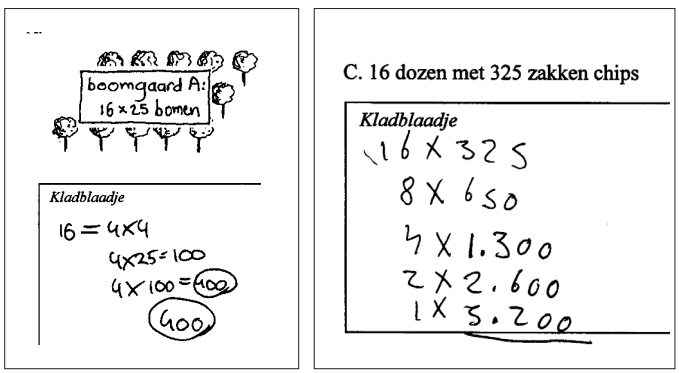


Fig. 7.11: Twee voorbeelden van het gebruik van de strategie halveren-verdubbelen.

(10) Cijferen (Cijf)

In de loop van het experimentele onderwijsleerproces werden bepaalde leerlingen zich steeds meer bewust hoe je de opgaven ook kunt oplossen onder gebruikmaking van de standaardprocedure van het cijferen. Deze bewustmaking kwam veelal tot stand onder invloed van 'bronnen' buiten het onderwijs, bijvoorbeeld doordat een leerling hierover thuis informatie kreeg van een oudere broer of zus. In enkele gevallen kwam deze procedure ook een keer in de experimentele lessen aan de orde tijdens een nabespreking.Veelal werd de cijferprocedure in zulke situaties met succes toegepast. Zie het voorbeeld rechts in fig. 7.12. Daarnaast waren er in het begin van het experimentele onderwijsleerproces soms leerlingen die zelf probeerden een

cijferprocedure te bedenken die verwant was aan wat ze al wisten op het gebied van het optellen en aftrekken of het vermenigvuldigen van een eencijferig met een meercijferig getal. Dikwijls leidde dit tot ondoordachte en onjuiste oplossingen. Zie het voorbeeld links in fig. 7.12.

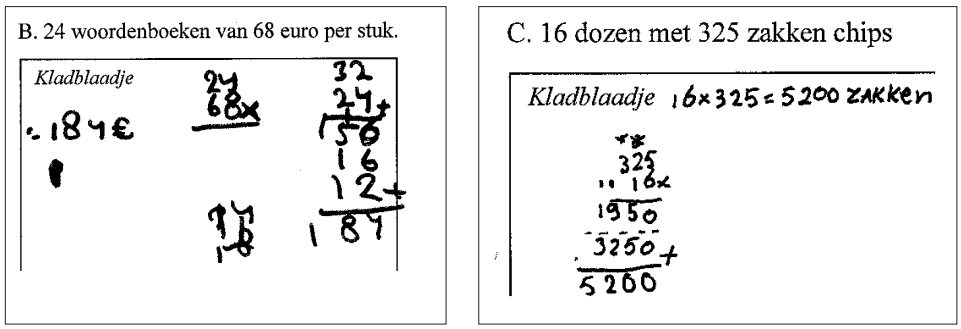
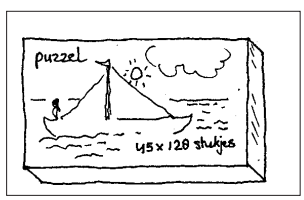


Fig. 7.12: Twee voorbeelden waarbij het cijferen als strategie wordt gebruikt. Links een voorbeeld waarbij eerder gesproken moet worden van 'quasi-cijferen' (afkomstig uit de eerste criteriumtoets), rechts een voorbeeld waarin deze werkwijze wel doordacht en met succes wordt gehanteerd (afkomstig uit de derde criteriumtoets).

Hoewel cijferen in principe kan worden opgevat als een strategie van hoog niveau, kan dat natuurlijk moeilijk gezegd worden in het geval dat een leerling aan het begin van de leergang op eigen houtje gaat proberen om deze procedure te reconstrueren, zoals in het voorbeeld links in fig. 7.12. In zo'n geval zou eerder gesproken dienen te worden van een aanpak van laag niveau. De cijferstrategie wordt soms ook gebruikt in combinatie met andere strategieën, zoals de S1-strategie. Een voorbeeld daarvan is te zien in fig. 7.13 waarbij de leerling eerst de S1-strategie hanteert, en vervolgens het al bekende algoritme voor het vermenigvuldigen van een eencijferig met een meercijferig getal inzet.



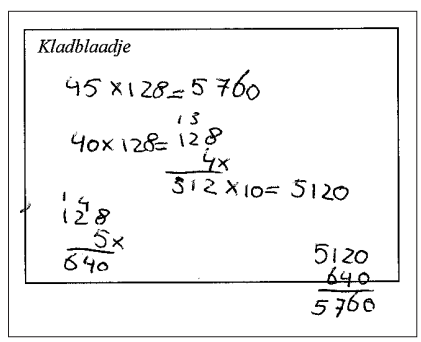


Fig. 7.13: Voorbeeld van een aanpak waarbij het cijferen in combinatie met de S1-strategie wordt gebruikt.

(11) Anders (And)

Er zijn bij een zo ruime onderzoekspopulatie (n=112) natuurlijk altijd strategieën die niet in een van de hierboven beschreven categorieën vallen. Dit is bijvoorbeeld het geval als een leerling gekozen heeft voor een andere bewerking dan vermenigvuldigen, zoals delen. Zie fig. 7.14 voor een voorbeeld. Ook kan het zijn dat uit de berekening van een leerling niet is op te maken wat deze nu precies heeft gedaan. In zulke gevallen wordt de strategie ook in de categorie 'anders' ondergebracht. Strategieën in deze categorie kwamen over het algemeen weinig voor.

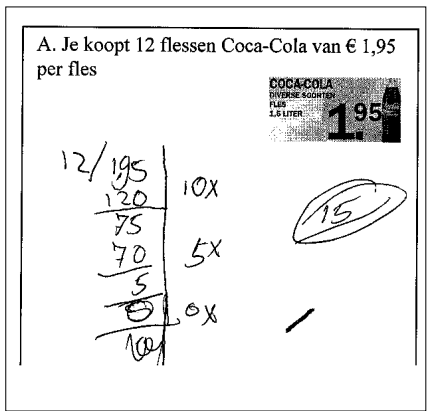


Fig. 7.14: Voorbeeld van een aanpak waarbij de verkeerde bewerking is gekozen. Deze valt onder de categorie 'anders'.

(12) Geen antwoord of geen berekening (ga / gb)

Vooral in het begin van de experimentele leergang, bij de eerste criteriumtoets, kwam het nogal eens voor dat een leerling nog geen raad met een opgave wist en helemaal niets invulde. Ook gebeurde het dat een leerling wel een antwoord noteerde, maar daarbij geen berekening gaf. Vaak betrof het in zulke gevallen een situatie waarin de leerling een slag naar het antwoord sloeg zonder precies te weten hoe hij/zij tot een oplossing zou kunnen komen. Daarnaast kwam het, met name in het laatste deel van de leergang, echter ook voor dat een leerling een opgave als dermate eenvoudig ervaarde dat het hele oplossingsproces uit het hoofd gebeurde. Dit was vooral het geval bij opgaven met betrekkelijk eenvoudige getallen, zoals bij 16x25.

Het gaat in al zulke gevallen uiteraard niet om een afzonderlijke categorie strategieën in eigenlijke zin. Maar voor het in kaart brengen van de resultaten van de leergang qua aanpakgedrag is het toch waardevol om dergelijke gevallen apart te registreren. Vandaar dat deze toch als een categorie in dit overzicht zijn opgenomen.

De hierboven beschreven categorisering komt in belangrijke mate overeen met die uit enkele grote internationale onderzoeken zoals die in paragraaf 4 van hoofdstuk 3 zijn

beschreven. Veelal worden daarin vergelijkbare zij het wat minder ver gespecificeerde typen strategieën onderscheiden. Maar enkele van de voornaamste categorieën zoals die van herhaald optellen/verdubbelen, S1, AS en compenseren worden binnen deze onderzoeken (zie bijvoorbeeld Murray e.a., 1994; Ambrose e.a., 2003) op dezelfde manier onderscheiden als in het onderhavige onderzoek.

Het valt overigens lang niet altijd mee om bij een door een leerling weergegeven strategie te achterhalen wat deze nu precies heeft gedaan, en tot welke categorie de strategie gerekend moet worden. In het geval er met de betreffende leerling een interview wordt gehouden, kan dit veelal alsnog vastgesteld worden. Maar is dat niet het geval, dan dient er soms langdurig overwogen te worden wat de meest in aanmerking komende categorie is. Een voorbeeld van zo'n moeilijk te identificeren strategie is die in fig. 7.15, waarbij enigszins cryptische aanduidingen als '4=16' en '2=1,90' genoteerd staan. Bij deze oplossingswijze is ook niet geheel duidelijk wat nu het uiteindelijke antwoord van de leerling is; zou dit 64 (het getal linksonder) of 13,30 (rechtsonder) zijn? Of heeft de leerling wellicht vergeten om deze twee subtotalen op te tellen? In eerste instantie lijkt het nog het meest voor de hand te liggen om deze strategie als een vorm van herhaald optellen/verdubbelen aan te merken. Echter, bij die categorie wordt het tweede getal gewoonlijk als geheel opgevat, terwijl dat tweede getal hier gesplitst wordt in 4 (euro) en 95 (cent). Zo bezien zou de aanpak misschien eerder als een vorm van S2 kunnen worden geïnterpreteerd. Bij strategieën uit deze laatste categorie wordt er evenwel vanuit gegaan dat er met tienvouden geredeneerd wordt, en daarvan is geen sprake. Gezien het feit dat het aspect van het herhaald optellen/verdubbelen waarschijnlijk toch als het meest pregnante aspect van de strategie beschouwd kan worden, is er uiteindelijk voor gekozen om deze in de laatst genoemde categorie onder te brengen.

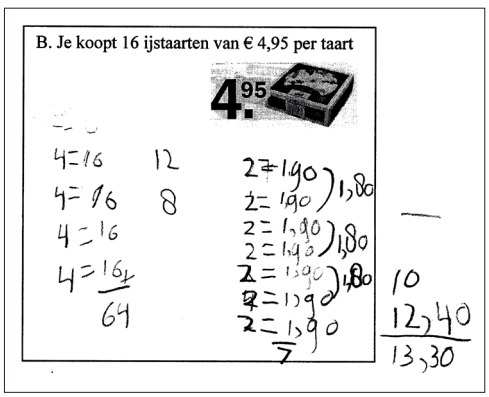


Fig. 7.15: Voorbeeld van een moeilijk te categoriseren strategie die uiteindelijk in de rubriek herhaald optellen / verdubbelen is ondergebracht.

7.3 Werkwijze bij het analyseren van de gegevens uit de drie criteriumtoetsen

In deze paragraaf wordt de werkwijze beschreven die gevolgd werd om de resultaten van alle aan het experiment deelnemende leerlingen voor wat betreft goedscores en strategiegebruik te analyseren. Kenmerkend voor deze werkwijze was dat het analyseren in drie rondes plaatsvond. In een eerste ronde werden alle gegevens uit de drie criteriumtoetsen verzameld en in vijftien tabellen geordend, waarbij eerste 'trends' gesignaleerd werden. In een tweede ronde werden de gegevens uit deze tabellen in 'ingedikte' vorm in vijf overzichten ondergebracht, voor elke school één. Per school werd van deze gegevens vervolgens een analyse gemaakt. In een derde ronde werden de gegevens uit de vijf overzichten samengebundeld in één totaaloverzicht voor alle scholen samen. Van dit totaaloverzicht werd een nadere analyse gemaakt, waarbij de gegevens uit de eerdere analyses werden betrokken[6] In deze paragraaf wordt de gang van zaken tijdens deze gefaseerde analyse nader toegelicht.

Als vertrekpunt werden dus alle resultaten met betrekking tot goedscores en aanpakgedrag bij alle opgaven uit de drie criteriumtoetsen in kaart gebracht. Voor alle leerlingen van een school werden deze resultaten per criteriumtoets in één tabel bijeengebracht. In deze tabel werd vastgelegd of een leerling een opgave goed had gemaakt (aangegeven met een + of -), en wat voor type strategie daarbij was gebruikt. Bij de typering van strategieën werd een nog iets verfijndere versie van de categorisering uit paragraaf 7.2 aangehouden[7]. Voor alle vijf de scholen samen leverde dit dus in totaal vijftien tabellen op met gegevens over goedscores en aanpakgedrag.

Vervolgens werden per school alle aldus verkregen gegevens gebundeld in één overzicht waarbij voor alle drie de criteriumtoetsen en voor alle onderscheiden categorieën oplossingsstrategieën werd weergegeven hoeveel keer een bepaald type strategie voorkwam, en hoeveel keer daarvan de uitkomst goed dan wel fout was. In Bijlage 2 zijn deze vijf overzichten opgenomen. Als voorbeeld van zo'n overzicht is in fig. 7.16 het overzicht van school 300 te zien. Bij het samenstellen van deze vijf overzichten werd ervoor gekozen om de gegevens van de wat afwijkende opgave 3 niet op te nemen. Bij deze opgave, waarbij de leerlingen moesten aangeven hoe lang en breed een rechthoekig plein kan zijn dat in totaal uit 1200 tegels bestaat, kon namelijk niet gesproken worden van strategiegebruik zoals bij de andere opgaven.

OVERZICHT STRATEGIEGEBRUIK T1, T2 EN T3 OP SCHOOL 300 (n=18)

T1	Hopt/ verd	GR	VS	S1b	S1v	AS	S12	S2	S1 comp	Comp	Halv Verd	Cijf	An- ders	
+	2			6	22	2	8	8	2			5	4	59
-	7		37	7	11		3	10	1			2	7	85
Tot.	9		37	13	33	2	11	18	3			7	11	**144**

T2	Hopt/ verd	GR	VS	S1b	S1v	AS	S12	S2	S1 comp	Comp	Halv Verd	Cijf	An- ders	
+	3	9		12	21	1	11	3	1	2	6	5	1	75
-	7	5	20	14	7	1	8	2		2	1	1	1	69
Tot.	10	14	20	26	28	2	19	5	1	4	7	6	2	**144**

T3	Hopt/ verd	GR	VS	S1b	S1v	AS	S12	S2	S1 comp	Comp	Halv Verd	Cijf	An- ders	
+	6			26	61		1	3	1	5	6	4	1	114
-	1		3	3	13					4		4	2	30
Tot.	7		3	29	74		1	3	1	9	6	8	3	**144**

Fig. 7.16: Overzicht van het strategiegebruik bij de drie criteriumtoetsen op school 300. In de bovenste rij wordt steeds het aantal keer vermeld dat een bepaalde strategie correct werd gebruikt (aangeduid met een +), daaronder het aantal keer dat deze onjuist werd gehanteerd (aangeduid met een -).

Van de vijf overzichten waarin het strategiegebruik per school stond aangegeven, werd vervolgens een uitgebreide analyse gemaakt. Hierbij werden per school een aantal voorlopige conclusies getrokken, vragen opgeworpen en hypotheses opgesteld die naderhand verder onderzocht zouden kunnen worden. In beknopte vorm staan deze

analyses eveneens in Bijlage 2 weergegeven. Steeds werd geprobeerd om eventuele bevindingen, vermoedens en conclusies te verbinden met wat in voorgaande analyses reeds werd opgemerkt. Bovendien werd getracht een onderscheid te maken tussen lokale en algemene trends. Zo bleek bijvoorbeeld de relatief grote toename van het gebruik van de S12-strategie bij de overgang van T1 naar T2 een lokale trend voor school 300, evenals de toename van het gebruik van de S2-strategie bij school 200. Het veelvuldig optreden van de onjuiste VS-strategie bleek daarentegen een algemene trend te zijn die later in wat mindere mate ook op de scholen 400 en 500 werd geconstateerd. Evenzo bleek de forse toename van het gebruik van de S1-strategie met een corresponderende toename van de bijbehorende goedscore over het geheel van de drie criteriumtoetsen een algemene trend.

Nadat de gegevens van alle afzonderlijke scholen waren gecombineerd in het totaaloverzicht dat in Bijlage 3 is opgenomen, volgde een derde analyseronde waarbij de gegevens uit het totaaloverzicht gecombineerd werden met de gegevens uit de voorgaande ronde. Hieronder wordt deze derde analyse, die de basis vormt voor de in paragraaf 7.4 geformuleerde conclusies, beknopt weergegeven.

Analyse van alle scholen samen

T1

- De VS-aanpak treedt op bij 19% van de opgaven (!).
- In de categorieën rond het decimaal splitsen komt S1 met 28% het meeste voor, met goedscore van .67. Daarnaast treden regelmatig op AS (13%; goedscore .62), S12 (7%; goedscore .57) en S2 (10%, goedscore .51).
- Laag niveau-strategieën Hopt/verd en GR komen uit op 6% met een goedscore van .51.
- De categorie Comp komt niet veel voor (6%) maar wel met een relatief hoge goedscore van .86.
- De categorie Cijf komt iets lager uit op 5% maar met een veel lagere goedscore van .37.
- De categorie Anders komt ook uit op 5% maar met nog ongunstigere goedscore van .21. Deze categorie bestaat voornamelijk uit gevallen waarbij een leerling nog niet tot een antwoord in staat bleek te zijn ('ga').
- Totale gemiddelde goedscore: .47.

Het percentage VS is dus, zoals al eerder werd gesignaleerd, beduidend hoger dan van tevoren was ingeschat. Dit geeft des te meer te denken omdat zelfs bij T2 (zie hieronder) toch nog scholen zijn waarbij dit percentage nog rond de 5% ligt, en op één school zelfs 14% bedraagt.
Verder kan men zich afvragen of een gemiddelde goedscore aan het begin van de experimentele leergang (dus bij T1) van .47 niet erg hoog is. Zou het in het algemeen bij rekenen-wiskunde niet

zo zijn dat leerlingen aan het begin van een leergang een hoger percentage opgaven nog niet weten op te lossen? En zou het vooral het relatief late tijdstip van aanbieding zijn dat hiervoor heeft gezorgd? Het zou waardevol kunnen zijn om dergelijke zaken in een vervolgonderzoek nader onder de loep te nemen.

T2

- De VS-aanpak is afgenomen tot 4%. Hier zijn overigens flinke verschillen tussen de scholen onderling. Terwijl deze aanpak bij de scholen 400 en 500 bij T2 reeds geheel is verdwenen, komt zij bij school 300 nog vrij veel voor (14%) en op de scholen 100 en 200 ook nog, zij het in mindere mate (resp. 6% en 5%).
- In de categorieën rond het decimaal splitsen is S1 sterk gestegen tot 56% met een goedscore van .71. Het succesgehalte van deze strategie is bij T2 dus al vrij hoog, zij het dat de stijging in goedscore nog beperkt is.
- Verder is AS gekelderd van 13% naar 5% met goedscore van .71, terwijl S12 van 7% naar 5% is gezakt met goedscore van .72. S2 is gehalveerd van 10% naar 5% met tamelijk lage goedscore van .53.
- Laag niveau-aanpakken (Hopt/verd en GR) zijn gestegen van 6% naar 11% met goedscore van .57.
- Cijf is gezakt naar 2% met goedscore .64.
- De categorie Anders is eveneens flink gezakt naar 3% met goedscore van .65. Het aantal gevallen waarin een leerling geen antwoord wist te produceren, is bijna tot nul gereduceerd.
- Totale gemiddelde goedscore is gestegen van .47 naar .65.

Hier blijkt dat het gebruik van de S1-strategie overwegend met succeservaringen gepaard gaat. Het gebruik is sterk toegenomen, en de goedscore ligt bij T2 reeds op een vrij hoog niveau: .71. Dit lijkt erop te wijzen dat het centraal stellen van deze strategie in de experimentele leergang een verantwoorde keuze is geweest.

Van de overige strategieën uit de categorieën decimaal splitsen valt in de eerste plaats op dat ze sterk afnemen. Verder springt in het oog dat de S2-strategie een beduidend lagere goedscore met zich meebrengt dan de andere strategieën die berusten op decimaal splitsen. Een mogelijke oorzaak hiervoor zou kunnen zijn dat de 'subopgaven' die ontstaan bij splitsing van het tweede getal, vaak lastig zijn en dat er als gevolg daarvan snel fouten kunnen optreden. Zie het voorbeeld in fig. 7.17.
De stijging van het percentage laag niveau-strategieën van 6% naar 11% doet op het eerste gezicht wellicht merkwaardig aan maar laat zich verklaren uit het feit dat nogal wat leerlingen die zich bewust werden van het feit dat de VS-strategie onjuist is, in eerste instantie overstapten op een strategie uit deze categorieën. Met name het groeperend rekenen komt regelmatig voor. De oorzaak van de daling van het gebruik van de cijfer-strategie is vermoedelijk gelegen in het feit dat nogal wat

leerlingen afstapten van deze aanpak toen ze zich realiseerden dat deze toch veel minder succesvol en bovendien moeilijker te begrijpen is dan ze aanvankelijk wellicht dachten. Een aanwijzing daarvoor werd verkregen in een van de interviews met zwakkere leerlingen na afloop van T2.

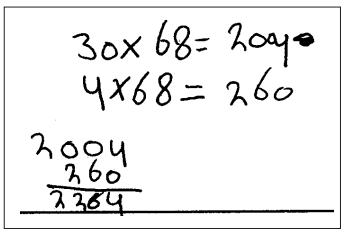


Fig. 7.17: Voorbeeld van een opgave (34x68) waarbij de S2-strategie wordt gebruikt en waarbij een fout ontstaat door het onjuist oplossen van de 'subopgave' 30x68.

T3

- Het gebruik van de S1-strategie neemt verder toe tot 69%, met een goedscore van .84.
- Het aandeel van de strategieën AS, S12 en S2 neemt verder af. AS wordt nog bij 3% van de opgaven gebruikt (goedscore .93), S12 bij 2% (goedscore .82) en S2 bij 3% (goedscore .87).
- Laag niveau-strategieën blijven enigszins vertegenwoordigd met 3% en een goedscore van .80.
- Strategieën uit de categorie Comp en S1comp nemen toe van 9% bij T2 tot 13% bij T3, in dat laatste geval met een goedscore van .85. Hier doet zich dus een trend voor die tegenovergesteld is aan de trend bij het gebruik van strategieën uit bepaalde categorieën decimaal splitsen.
- Strategieën uit de categorie cijferen zijn toegenomen tot 4% met een goedscore van .83.
- Totale gemiddelde goedscore is gestegen van .65 naar .84.
- Schematisch weergegeven ziet de ontwikkeling van het strategiegebruik over de drie criteriumtoetsen er in grote lijnen uit zoals in het diagram van fig. 7.18.

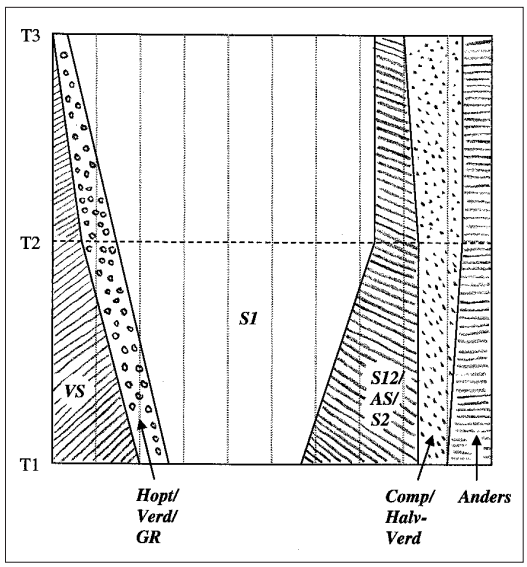


Fig. 7.18: Diagram waarin de ontwikkeling van het aanpakgedrag schematisch is weergegeven. Duidelijk is te zien dat het gebruik van strategieën uit de categorie S1 steeds verder toeneemt terwijl bijvoorbeeld het gebruik van VS steeds meer verdwijnt. De rubriek 'Anders' is in dit diagram wat ruimer genomen dan in de categorisering van paragraaf 2.

Er is dus een duidelijke verdere toename van het gebruik van S1 en een gelijktijdige stijging van de goedscore tot .84. Dit lijkt de vruchtbaarheid van het centraal stellen van deze strategie op de wijze zoals dat in de experimentele leergang is gebeurd, te bevestigen. Dat nog altijd strategieën van laag niveau optreden, is wellicht minder verbazend dan het op het eerste gezicht lijkt. Het geval wil namelijk dat een strategie waarbij een leerling groepjes afbakent, nog tot deze categorie gerekend wordt, ook als een leerling met groepjes van 10 werkt (en dus in zekere zin de S1-strategie gebruikt). Er zijn ook bij T3 nogal eens leerlingen die van tijd tot tijd toch nog groepjes (veelal van 10) tekenen, en daardoor qua strategiegebruik in de categorie GR terecht komen. Zie het voorbeeld in fig. 7.19.

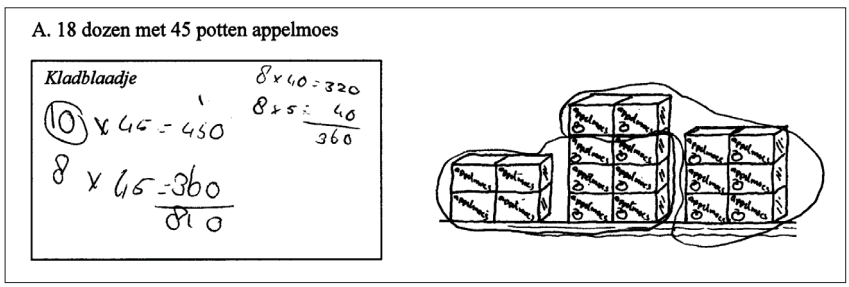


Fig. 7.19: Voorbeeld van het gebruik bij T3 van een strategie waarbij een leerling toch nog groepjes (van 10) tekent. Zo'n strategie wordt volgens de definitie tot de categorie GR gerekend.

De toename van het gebruik van strategieën uit de categorie Comp kan enerzijds verklaard worden uit het feit dat deze strategie in twee lessen expliciet aan de orde is gesteld in het geval van 'bijna ronde' geldgetallen. Anderzijds zou een verklaring kunnen zijn dat steeds meer leerlingen het vermenigvuldigen van meercijferige getallen steeds beter gaan doorzien op grond van het toegenomen inzicht in de nulregel en de verdeeleigenschap en ook steeds meer oog krijgen voor het werken met 'bijna ronde getallen' in vermenigvuldigsituaties. Wellicht is men om zo te zeggen steeds meer boven het basale, ambachtelijke rekenwerk uitgestegen en begint men steeds meer handige getalrelaties te onderscheiden en te hanteren. Dat het hier inderdaad om toegenomen inzicht gaat, is natuurlijk niet direct te zien, maar wel enigszins af te leiden uit de vaak zeer duidelijke, steeds overzichtelijkere notaties en uit de informatie die bij de interviews is verkregen. Zie het voorbeeld in fig. 7.20 van een leerling die de compensatie-strategie goed weet toe te passen en te beschrijven.

Tot zo ver de analyse van de gegevens met betrekking tot alle scholen samen. Om te controleren of de hierboven weergegeven verschillen in prestaties bij de drie criteriumtoetsen mogelijk op toeval berusten werd naderhand, nadat eerst

nog een verdere vereenvoudiging in de categorisering van oplossingsstrategieën was aangebracht, een statistische analyse uitgevoerd. Mede op basis daarvan werd vervolgens een aantal algemene conclusies getrokken.

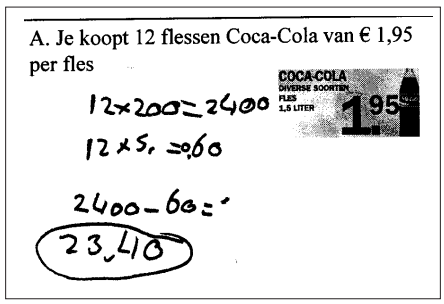


Fig. 7.20: Voorbeeld van het gebruik van de compensatie-strategie waarbij deze strategie zeer overzichtelijk en helder genoteerd wordt.

.

7.4 Voornaamste conclusies met betrekking tot goedscores en aanpakgedrag

7.4.1 Resultaten van alle leerlingen samen

Ter afronding van de analyse van de resultaten op alle scholen samen, werd eerst een verdere vereenvoudiging in het overzicht van oplossingsstrategieën aangebracht. Hierbij werd uitgegaan van een indeling in drie niveaus van strategieën. Zie fig. 7.21.

laag niveau		middel niveau		hoog niveau	
Hopt/verd/GR	***VS***	***S1 (b e n v)***	***AS en S12 en S2***	***Comp en S1 comp en HalvVerd***	***Ande rs***

Fig. 7.21: Vereenvoudigde indeling van de gehanteerde oplossingsstrategieën in drie rubrieken 'laag niveau', 'middel niveau' en hoog 'niveau', alsmede een restcategorie 'Anders'.

In dit vereenvoudigde overzicht zijn de categorieën herhaald optellen/verdubbelen en verkeerd splitsen in een rubriek 'laag niveau' ondergebracht, terwijl de categorieën waarbij decimaal gesplitst wordt, in een rubriek 'middel niveau' zijn geplaatst. De categorieën compenseren (zowel S1comp als Comp) en halveren-verdubbelen werden opgenomen in een rubriek 'hoog niveau'. In deze laatste rubriek zou in principe ook de categorie van het cijferen (Cijf) kunnen worden ondergebracht. Maar zoals hierboven reeds werd aangegeven, er is ook sprake van een vorm van cijferen die leerlingen helemaal in het begin van de leergang gebruikten, en die bepaald niet als een hoog niveau kon worden aangemerkt. Omdat het cijferen als strategie toch maar

weinig voorkwam, is ervoor gekozen om deze strategie in de rubriek 'Anders' op te nemen. Op basis van deze vereenvoudigde indeling werden de resultaten nogmaals op een rij gezet. Zie fig. 7.22.

Alle scholen (n=112)	Hopt/verd GR	VS	S1 (b e n v)	AS / S2 / S12	Comp / HalvV erd	Anders	Totale goedscore
T1	6%	19%	29%	30%	6%	10%	.47
	.51	.00	.67	.57	.84	.42	
T2	11%	4%	56%	15%	9%	4%	.65
	.57	.00	.71	.72	.74	.65	
T3	3%	--	69%	8%	15%	5%	.84
	.80	--	.85	.89	.86	.81	

Fig. 7.22: Overzicht van alle resultaten op de vijf scholen samen volgens de vereenvoudigde indeling.

Om na te gaan of de verschillen in prestatie die uit dit overzicht naar voren komen, mogelijk op toeval berusten, werden vervolgens de oorspronkelijke gegevens uit de vijftien tabellen waarin de resultaten per school en per toets stonden weergegeven, ingevoerd in een databestand dat bewerkt werd volgens het statistische programma SPSS. Voor alle scholen samen leidde dit tot de in fig. 7.23 weergegeven tabel die vervolgens in een lijngrafiek werd omgezet die in fig. 7.24 staat afgebeeld.

Tijd: Test-1, Test-2 en Test-3

Measure: Goedscore

Tiid	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval	
			Lower Bound	Upper Bound
1	,475	,030	,416	,535
2	,656	,024	,608	,704
3	,842	,016	,810	,873

Fig. 7.23: Tabel met de gemiddelde goedscores en standaarddeviaties op alle scholen samen bij T1, T2 en T3.

Op grond van de tabel van fig. 7.23 en de daarbij behorende toets naar 'within-subjects effecten' (zie tabel 1 in Bijlage 4) kan vastgesteld worden dat de vooruitgang op alle scholen samen significant is ($M_1 = .48$; $M_2 = .66$; $M_3 = .84$; $F\,[2, 214] = 95{,}63$; $p < .001$). Bovendien is deze vooruitgang lineair in de tijd, dat wil zeggen ongeveer even groot van T1 naar T2 als van T2 naar T3.

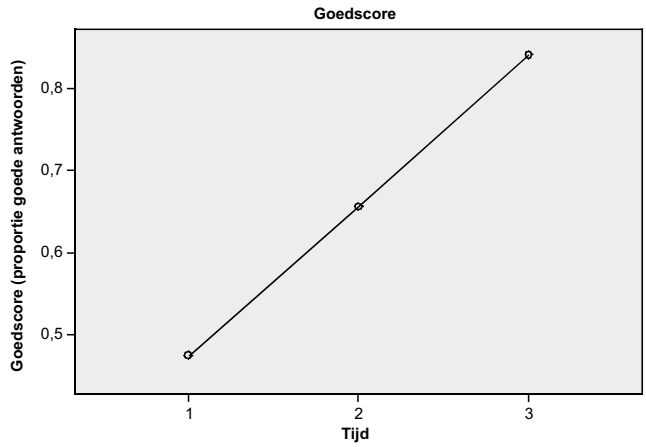


Fig. 7.24: Grafiek van de gemiddelde goedscores op alle scholen samen bij T1, T2 en T3.

Nadat bovenstaande conclusies getrokken waren, werden vervolgens een aantal meer definitieve bevindingen gedaan met betrekking tot de in het onderzoek gehanteerde didactische benadering en de resultaten daarvan in termen van de verschillende categorieën oplossingsstrategieën. Dit betreft de volgende vijf punten:

(1) De gevolgde didactische benadering waarbij het vertrekpunt voor de leergang gekozen werd in een brede oriëntatie op oplossingsstrategieën van een basaal niveau in de sfeer van herhaald optellen, verdubbelen en groeperend rekenen en waarbij de S1-strategie, voortkomend uit deze oriëntatie, als een efficiënte, op uiteenlopende niveaus uit te voeren werkwijze centraal aan de orde werd gesteld, is behoorlijk succesvol gebleken.
(2) De onjuiste VS-strategie bleek veel frequenter op te treden dan van tevoren was ingeschat. Zelfs halverwege de leergang, bij T2, bleek deze strategie nog herhaaldelijk voor te komen. Dit wijst erop dat het niet goed gelukt is om de leerlingen voldoende 'weerstand tegen deze werkwijze te laten opbouwen' (Streefland, 1988, p. 312).
(3) Onder invloed van de leergang is het gebruik van de S1-strategie door de hele leergang heen steeds verder toegenomen. Aanvankelijk heeft deze stijging echter geen gelijke tred gehouden met een stijging in goedscores. Halverwege de leergang werd de S1-strategie weliswaar aanzienlijk frequenter gebruikt dan aan het begin (een stijging van 29% naar 56%), maar de goedscore lag daarbij op een niveau dat niet veel hoger was dan bij de aanvang van de leergang (.67 om .71). Pas in het laatste deel van de leergang is niet alleen het gebruik van S1 verder toegenomen (van 56% naar

69%), maar is ook de goedscore fors omhoog gegaan (van .71 naar .85).
(4) Tegelijk met de stijging van het gebruik van S1, is het gebruik van de andere strategieën waarbij sprake is van decimaal splitsen, te weten AS, S12 en S2, steeds verder afgenomen: van 30% bij T1 via 15% bij T2 naar 8% naar T3. De goedscores vertonen een steeds verdere stijging tot .89 bij T3. Dit laat zien dat de leerlingen deze strategieën steeds selectiever maar ook steeds efficiënter zijn gaan gebruiken.
(5) Het gebruik van hoog niveau-strategieën (compenseren en halveren-verdubbelen) is over de hele leergang genomen flink gestegen: van 6% bij T1 via 9% bij T2 tot 15% bij T3. De goedscore bij de strategieën uit deze categorie laat een wat ander beeld zien. Was deze bij aanvang van de leergang al behoorlijk hoog (.84), halverwege de leergang was een zekere daling ingetreden tot .74, terwijl aan het eind weer een stijging tot stand was gekomen tot .86.

7.4.2 Verschillen tussen de scholen

Hoewel de ontwikkeling van goedscores en aanpakgedrag op de vijf scholen vrij sterke overeenkomsten vertoont, zijn er natuurlijk ook verschillen. Hierboven zijn enkele daarvan al genoemd. Om nog iets meer over deze verschillen te kunnen zeggen, werd het reeds samengestelde databestand zodanig bewerkt dat de goedscores per school naar voren kwamen. Dit leidde tot de tabel van fig. 7.25 en de bijbehorende grafiek in fig. 7.26.

Goedscore: proportie goede antwoorden

	School	Mean	Std. Deviation	N
PG1	100	,4489	,31019	22
	200	,3571	,32403	28
	300	,4097	,26362	18
	400	,5526	,34439	19
	500	,6200	,27595	25
	Total	,4754	,31651	112
PG2	100	,6023	,27450	22
	200	,6116	,25536	28
	300	,5208	,31287	18
	400	,8026	,16306	19
	500	,7400	,18722	25
	Total	,6563	,25749	112
PG3	100	,8466	,15397	22
	200	,8036	,18139	28
	300	,7847	,18593	18
	400	,9145	,09366	19
	500	,8650	,18013	25
	Total	,8415	,16777	112

Fig. 7.25: Overzicht van de afzonderlijke goedscores bij de drie criteriumtoetsen op de vijf scholen. Steeds staat per school de gemiddelde goedscore, de standaarddeviatie en het aantal leerlingen aangegeven.

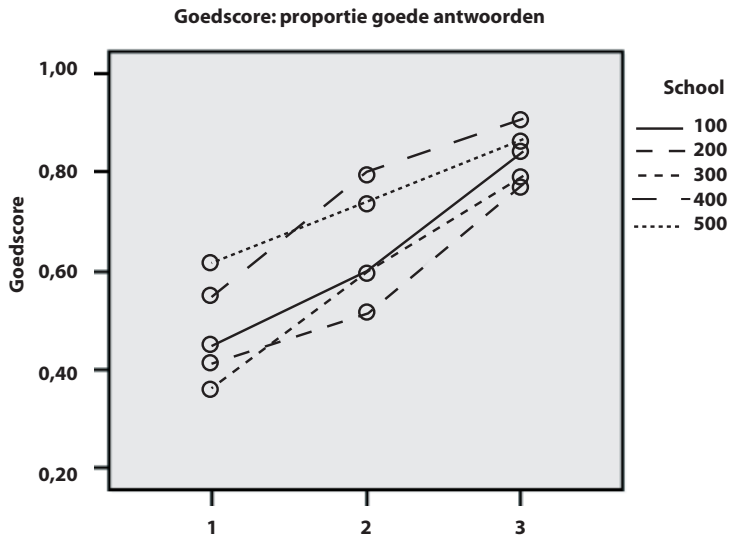


Fig. 7.26: Grafisch overzicht van de ontwikkeling van de goedscores op de vijf scholen afzonderlijk bij T1, T2 en T3.

Uit dit overzicht en de bijbehorende grafiek kan geconcludeerd worden dat zich op alle vijf scholen eenzelfde significante vooruitgang heeft voorgedaan (F [8, 214] = 1,53; $p < .15$; zie tabel 1 van Bijlage 4), zowel bij de overgang van T1 naar T2 als bij de overgang van T2 naar T3. Zoals uit de tabellen 2 en 3 van Bijlage 4 blijkt, verschillen de scholen gemiddeld over de drie metingen wel significant van elkaar (F = 4,59; $p < .002$). School 4 en 5 (M = .76 en .74) scoren significant hoger ($p < .05$) dan school 2 en 3 (M = .59 en .57). Het algehele gemiddelde van school 1 (M = .63) ligt tussen dat van de andere scholen in, maar verschilt daar niet significant van.

Voorts dient opgemerkt te worden dat er tijdens de leergang een zekere convergentie lijkt op te treden waarbij de goedscores per school enigszins naar elkaar toe groeien. Terwijl bijvoorbeeld bij T1 het verschil in goedscore tussen school 200 (afgerond) en school 500 nog .26 bedraagt (.36 om .62), is dit bij T2 gereduceerd tot .13 (.61 om .74) en bij T3 zelfs tot .07 (.80 om .87). Waarschijnlijk speelt hier ook een zeker 'plafond-effect' mee: hoe hoger de resultaten worden, des te moeilijker wordt het om deze nog verder te verbeteren.

7.4.3 Verschillen tussen jongens en meisjes

Om iets aan de weet te komen over eventuele verschillen in ontwikkeling tussen jongens en meisjes, werd het databestand ook nog op deze 'variabele' uitgesplitst. De

resultaten daarvan zijn in fig. 7.27 en 7.28 te zien. Op grond van deze gegevens kan geconcludeerd worden dat de goedscores van jongens en meisjes een vergelijkbare ontwikkeling doormaken. Terwijl het beginniveau van jongens en meisjes vrijwel even hoog is (.48), ligt het niveau van de jongens aan het eind van de leergang iets hoger dan dat van de meisjes (.85 tegenover .82). Maar, zoals uit de tabellen 4, 5 en 6 van Bijlage 4 blijkt, zijn er geen significante verschillen tussen jongens en meisjes, noch in verandering over de tijd ($F[1,106] = 1{,}35$; $p < .24$), noch gemiddeld over de drie tijdstippen ($F\ [1,106] = 0{,}04$; $p < .84$), noch in combinatie met rekenniveau. Dit beeld komt overigens overeen met het beeld dat uit de PPON-gegevens van het Cito naar voren komt voor de vaardigheidsschaal 'Bewerkingen: vermenigvuldigen en delen' (Janssen, Van der Schoot en Hemker, 2005, p. 106-107). Ook daar zijn de verschillen tussen jongens en meisjes gering[8].

Geslacht * Tijd

Measure: Goedscore

Geslacht	Tijd	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval	
				Lower Bound	Upper Bound
jongens	1	,476	,042	,394	,559
	2	,640	,034	,573	,707
	3	,858	,022	,814	,901
meisjes	1	,475	,043	,389	,560
	2	,674	,035	,604	,743
	3	,824	,023	,779	,869

Fig. 7.27: Overzicht van de resultaten van de jongens en meisjes afzonderlijk bij T1, T2 en T3. Het bovenste deel (geslacht 1) betreft de jongens (n=58), het onderste deel (geslacht 2) de meisjes (n=54).

Nu zou het in principe nog kunnen zijn dat niet alle leerlingen evenveel geprofiteerd hebben van het gegeven onderwijs. Het zou bijvoorbeeld kunnen zijn dat de goede leerlingen er eigenlijk maar weinig bijgeleerd hebben, of dat er toch een bepaalde, kleine categorie hele zwakke leerlingen is die nauwelijks profijt van het onderwijs hebben gehad. Daarom werd besloten nog een aparte analyse te maken waarin de resultaten van de 25% zwakste leerlingen vergeleken werden met die van de 25% beste leerlingen.

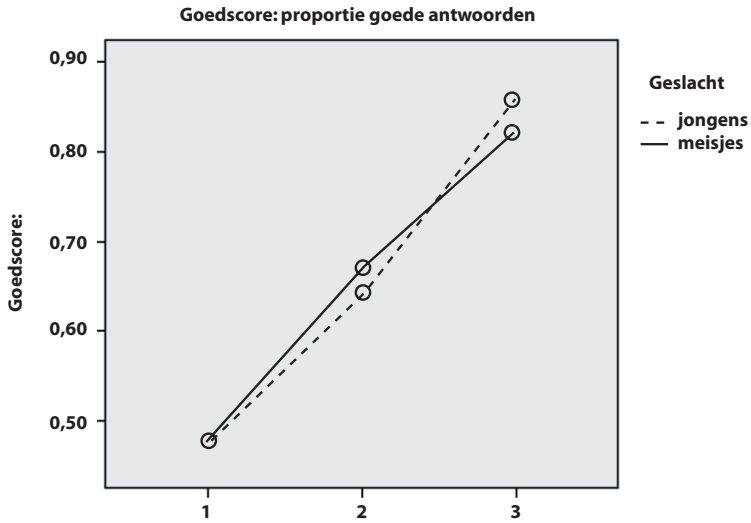


Fig. 7.28: Grafisch overzicht van de resultaten van de jongens (geslacht 1) en meisjes (geslacht 2) afzonderlijk bij T1, T2 en T3.

7.5 Contrastanalyse: de 25% zwakste leerlingen vergeleken met de 25% beste leerlingen

Om vast te stellen welke leerlingen tot deze twee groepen behoorden, werd uitgegaan van het vaardigheidsniveau volgens de gegevens van het leerlingvolgsysteem van het Cito, dat op alle aan het experiment deelnemende scholen in gebruik was. Als graadmeter werd het niveau genomen dat de leerlingen bij de E6-toets behaald hadden bij 'rekenen algemeen'. In fig. 7.29 is te zien van welke scholen de betreffende leerlingen afkomstig waren, en hoe hoog hun vaardigheidsniveau was. De groep van de 25% zwakste leerlingen wordt daarbij aangeduid met de afkorting Z25, die van de 25% beste leerlingen met B25.

Zoals het overzicht laat zien, zijn de leerlingen qua school van herkomst niet geheel evenwichtig over de twee groepen verdeeld. Komen de leerlingen in de groep 25% zwakste leerlingen voornamelijk uit de scholen 200 en 300, de leerlingen in de groep 25% beste leerlingen zijn vooral afkomstig uit de overige scholen 100, 400 en 500. Verder valt op dat het niveau van de groep beste leerlingen iets te hoog is ten opzichte van het niveau van de groep zwakste leerlingen: zitten er in eerstgenoemde groep uitsluitend A-leerlingen (die dus, landelijk gezien, behoren tot de 25% beste

Z25 (n=28)	School 100	School 200	School 300	School 400	School 500	Totaal
E-lln		223 86-E 226 87-E	304 85-E			Subtot. 3
D-lln		222 88-D 209 90-D 218 90-D 219 90-D 205 92-D 225 93-D 203 94-D 213 94-D 216 94-D	301 88-D 305 88-D 307 90-D 310 91-D 308 93-D	410 90-D	507 92-D 510 90-D	Subtot. 20
lage C-lln		206 95-C 214 95-C 227 96-C 220 98-C	313 96-C 314 96-C	409 98-C	517 96-C	Tot. 28

B25 (n=28)	School 100	School 200	School 300	School 400	School 500	Totaal
A-lln	114 116-A 118 116-A 110 115-A 111 115-A 108 112-A 106 110-A 109 110-A 116 110-A 122 110-A 123 110-A	228 131-A 229 131-A 207 110-A 210 109-A	311 108-A	415 127-A 413 124-A 408 122-A 417 112-A 403 108-A	513 119-A 523 116-A 520 116-A 502 114-A 518 113-A 521 112-A 506 109-A 522 108-A	Tot. 28

Fig. 7.29: Overzicht van de herkomst en het vaardigheidsniveau van de leerlingen uit de twee groepen '25% zwakste leerlingen' en '25% beste leerlingen'. Steeds wordt eerst het nummer van de betreffende leerling vermeld, en daarna zijn of haar vaardigheidsniveau (met daarachter de letter die dat niveau globaal aangeeft).

leerlingen in Nederland), in de laatstgenoemde groep zitten zowel E-, D- als lage C-leerlingen (die dus niet helemaal afkomstig zijn uit de categorie 25% zwakste leerlingen in Nederland).

Van deze twee groepen leerlingen werden overzichten van de resultaten qua goedscores en aanpakgedrag gemaakt zoals deze eerder al voor alle scholen afzonderlijk waren samengesteld. Deze overzichten werden vervolgens weer gecomprimeerd tot de twee overzichten die in fig. 7.30 staan weergegeven. In deze laatste overzichten worden voor de voornaamste typen oplossingsstrategieën de goedscores en de frequentie bij de drie criteriumtoetsen aangegeven.

Z25 (n=28)	Hopt/verd GR	VS	S1 (b en v)	AS / S2 / S12	Comp / HalvVerd	Anders	Totale goedscore
T1	9%	37%	14%	20%	1%	19%	.22
	.20	.00	.39	.44	.67	.12	
T2	21%	13%	39%	21%	3%	4%	.46
	.56	.00	.54	.55	.17	.38	
T3	6%	2%	71%	10%	8%	3%	.72
	.93	.00	.71	.77	.89	.43	

B25 (n=28)	Hopt/verd GR	VS	S1 (b en v)	AS / S2 / S12	Comp / HalvVerd	Anders	Totale goedscore
T1	3%	9%	39%	28%	15%	6%	.72
	.50	.00	.85	.71	.88	.64	
T2	6%	1%	62%	8%	20%	2%	.81
	.71	.00	.83	1.00	.89	1.00	
T3	1%	--	69%	4%	20%	6%	.93
	1.00	--	.94	.90	.91	1.00	

Fig. 7.30: De resultaten van de groep 25% zwakste leerlingen en de groep 25% beste leerlingen in gecomprimeerde vorm weergegeven.

Om na te gaan in hoeverre de veranderingen van beide groepen significant zijn, werd het databestand vervolgens met behulp van het SPSS-programma bewerkt voor drie categorieën leerlingen: de groep Z25, de groep M50 en de groep B25. De resultaten daarvan zijn in de tabel van fig. 7.31 en in de grafiek van fig. 7.32 te zien.

Uit deze gegevens en de bijbehorende gegevens in de tabellen 7 t/m 9 uit Bijlage 4 blijkt dat de significante vooruitgang van de goedscore lineair in de tijd is, dat wil zeggen even groot van T1 naar T2 als van T2 naar T3. Maar wel verschilt de grootte van deze vooruitgang significant tussen de rekenniveaus ($F = 7{,}97$; $p < .001$). De toename is het grootst voor de 25% zwakste rekenaars (van M1 = .22 naar M3 = .73) en het kleinst voor de 25% sterkste rekenaars (van M1 = .71 naar M3 = .93).

Op grond hiervan kunnen met betrekking tot de ontwikkeling van de goedscores in meer globale zin enkele belangrijke conclusies getrokken worden. In de eerste plaats kan gesteld worden dat zowel Z25 als B25 qua goedscores een redelijke mate van progressie laten zien. Wel is deze progressie bij Z25 beduidend groter (van .22 via .47 naar .73) dan bij B25 (van .71 via .81 naar .93). Maar daarbij dient aangetekend te worden dat er waarschijnlijk een zeker plafond-effect bij B25 optreedt: naarmate de goedscore dichter bij 1.00 komt te liggen, wordt het immers ook moeilijker deze nog weer verder te verbeteren.

Rekenniveau * Tijd

Measure: Goedscore

Rekenniveau	Tijd	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval	
				Lower Bound	Upper Bound
Zwak 25%	1	,219	,050	,119	,318
	2	,469	,043	,383	,554
	3	,728	,029	,671	,785
Midden 50%	1	,487	,036	,416	,557
	2	,672	,030	,611	,732
	3	,853	,020	,812	,893
Best 25%	1	,710	,050	,610	,810
	2	,813	,043	,727	,898
	3	,933	,029	,876	,990

Fig. 7.31: Tabel met de gemiddelde goedscores bij T1, T2 en T3 voor de afzonderlijke groepen Z25 (de 25% zwakste leerlingen), M50 (de middelste 50% leerlingen) en B25 (de 25% beste leerlingen).



Fig. 7.32: Grafiek met de gemiddelde goedscores bij T1, T2 en T3 voor de afzonderlijke groepen Z25 (de 25% zwakste leerlingen), M50 (de middelste 50% leerlingen) en B25 (de 25% beste leerlingen).

Uit de gecomprimeerde overzichten van fig. 7.30 zijn voorts enkele opvallende verschillen qua strategiegebruik te constateren. Zo wordt de onjuiste VS-strategie aan-

zienlijk vaker gebruikt door de 25% zwakste leerlingen. Vooral bij T1 is dit verschil groot: 37% tegenover 9%. Kennelijk was deze strategie bij aanvang van de leergang vooral voor de groep zwakkere leerlingen een aantrekkelijke en voor de hand liggende optie. Naderhand vlakt het verschil steeds verder af: bij T3 wordt de VS-strategie nog bij 2% van de opgaven door leerlingen uit de groep Z25 gebruikt, terwijl deze aanpak door leerlingen uit de groep B25 nauwelijks meer gebruikt wordt.

Ook de gebruiksfrequentie van de S1-aanpak verschilt aanvankelijk sterk, waarbij eveneens een groot verschil in goedscore optreedt: bij Z25 wordt deze aanpak bij 14% van de opgaven gebruikt met een goedscore van .39, bij B25 bedraagt dit reeds 39% met veel hogere goedscore van .85. Bij T2 is het gebruik van S1 in beide groepen aanzienlijk gestegen; bij Z25 tot 39% met goedscore van .54, en bij B25 tot 62% met goedscore .83. Bij T3 is het verschil grotendeels verdwenen: door Z25 wordt S1 bij 71% van de opgaven gebruikt met goedscore .71, door B25 bij 69% van de opgaven met tamelijk hogere goedscore van .94. Een mogelijke oorzaak van het aanvankelijk grote verschil zou gelegen kunnen zijn in het feit dat de betere leerlingen bij aanvang van de leergang de nulregel al veel beter doorzagen, en daardoor ook beter in staat waren om de S1-strategie met succes toe te passen.

De verschillen bij de andere typen strategieën zijn minder groot. Opvallend bij de categorie herhaald optellen/verdubbelen/groeperend rekenen is dat strategieën uit deze categorie door leerlingen uit de groep Z25 weliswaar structureel meer gebruikt worden (bij T2 bijvoorbeeld 21% tegen 6%), maar dat zich bij beide groepen in zoverre eenzelfde tendens voordoet dat deze strategieën bij T1 betrekkelijk weinig gebruikt worden, vervolgens bij T2 wat meer terwijl zich tenslotte bij T3 voor beide groepen weer een daling voordoet. Bij strategieën uit de categorie AS/S2/S12 zijn de verschillen eveneens minder groot met dien verstande dat strategieën uit deze categorie door Z25 aan het einde van de leergang meer gebruikt worden dan door B25 (10% met goedscore .77 om 4% met goedscore .90). Strategieën uit de categorie compenseren/halveren-verdubbelen worden over de hele linie door B25 beduidend frequenter gebruikt. De goedscore aan het einde van de leergang is voor beide groepen overigens hoog: .89 om .91. Dit wijst erop dat ook zwakkere leerlingen strategieën uit deze categorie uiteindelijk succesvol kunnen toepassen.

Voorts kan gesteld worden dat de leergang voor de betere leerlingen wellicht op een wat laat tijdstip is gekomen. Zij zaten immers aan het begin van de leergang al op een score van .71. Dit is bijna dezelfde goedscore als de groep zwakste leerlingen aan het einde van de leergang bereikte (.73). Voor deze laatste groep leerlingen daarentegen

lijkt de leergang op een goed tijdstip te zijn gekomen. Zou er vroeger begonnen zijn, (bijvoorbeeld: medio groep 6), dan is het maar de vraag of deze leerlingen wel voldoende toegerust zouden zijn om de nu vertoonde progressie te realiseren. Hier tekent zich overigens een van de dilemma's van realistisch reken-wiskundeonderwijs af voor wat betreft het tijdstip van aanvang van een leergang. Begint een leergang te vroeg, dan bestaat de kans dat zwakkere leerlingen niet goed uit de voeten komen; wordt echter te lang gewacht, dan bestaat de kans dat betere leerlingen de leerstof eigenlijk al grotendeels beheersen en niet zo goed aan hun trekken komen.

Tenslotte kan geconstateerd worden dat het verschil in goedscore tussen Z25 en B25 in de loop van de leergang steeds verder verkleind is. In de tabel van fig. 7.31 is te zien hoe dit verschil bij aanvang van de leergang bijna .50 bedroeg terwijl het bij T2 verkleind was tot .34 en bij T3 verder was geslonken tot .20. Omdat in de experimentele lessen een zekere nadruk lag op het juist door de zwakkere leerlingen laten verwoorden van gehanteerde aanpakken, het laten beargumenteren van een bepaalde verkorting en het tegen elkaar laten afwegen van de voor- en nadelen van bepaalde aanpakken, mag verwacht worden dat de opzet van de experimentele leergang zeker heeft bijgedragen tot deze verkleining van het verschil in goedscore.

Hierbij dient nog wel de kanttekening geplaatst te worden dat er aanwijzingen zijn dat er in zoverre wel degelijk verschillen tussen de groep van zwakste leerlingen en de groep van beste leerlingen gebleven zijn dat deze laatste groep bij opgaven van een wat hoger niveau aan het einde van de leergang beduidend beter scoren. Om een indicatie te krijgen hoe alle leerlingen zouden scoren bij opgaven van dat hogere niveau, werd namelijk bij T3 een pagina met extra-opgaven toegevoegd die de leerlingen dienden op te lossen nadat ze de reguliere toetsopgaven voltooid hadden. Dit betrof opgaven van het type tweecijferig maal driecijferig en driecijferig maal driecijferig, waarbij bovendien met een komma gewerkt moest worden doordat sprake was van geldgetallen en meetgetallen. Zie fig. 7.33 voor twee voorbeelden van deze opgaven.

Bij de analyse van de resultaten bij deze opgaven bleek in de eerste plaats dat sommige zwakkere leerlingen hier noteerden dat ze zichzelf niet in staat achten om deze op te lossen ('dit snap ik niet meer'), terwijl bij de betere leerlingen vrijwel altijd een berekening stond. Bovendien bleek het verschil in goedscore bij deze opgaven aanzienlijk groter te zijn dan bij de reguliere toetsopgaven. Behaalden de leerlingen uit Z25 een gemiddelde goedscore van .26, de leerlingen uit de groep B25

Lang weekend naar Parijs Vertrek op vrijdagmiddag 17.00 uur Aankomst op maandagmiddag 17.00 uur *Aantal plaatsen in de bus:* ***36*** *Prijs:* ***€ 67,50***	**Lang weekend naar Praag** Vertrek op donderdagmiddag 17.00 uur Aankomst op maandagmiddag 17.00 uur *Aantal plaatsen in de bus:* ***48*** *Prijs:* ***€ 97,50***

Fig. 7.33: Twee voorbeelden van extra-opgaven die de leerlingen aan het einde van de reguliere toets bij T3 maakten. In beide gevallen is de vraag hoeveel geld er in totaal binnenkomt.

kwamen tot een goedscore van .65. Zie fig. 7.34 voor een overzicht. Dit wijst erop dat de betere leerlingen wel degelijk ook een flinke progressie in de loop van de experimentele leergang hebben geboekt.

Resultaat extra-opgaven T3	**36x€67,50**	**48x€97,50**	**56x4,25 m**	**180x4,25 m**	***Gem. goedscore***
Z25	6x +	11x +	5x +	7x +	
	22x -	17x -	23x -	21x -	*.26*
B25	17x +	18x +	17x +	21x +	
	11x -	10x -	11x -	7x -	*.65*

Fig. 7.34: Overzicht van de goedscores door leerlingen uit de groepen Z25 en B25 bij de vier extra-opgaven die bij T3 opgenomen waren. Steeds is per opgave aangegeven hoeveel leerlingen uit de betreffende groep een opgave goed hebben gemaakt, en hoeveel leerlingen niet. In de kolom uiterst rechts staat de totale goedscore voor beide groepen leerlingen aangegeven.

Het overzicht laat overigens ook zien dat zwakkere leerlingen wel degelijk soms tot goede oplossingen kwamen, al gebeurde dit veelal op een basaler niveau dan bij de betere leerlingen. Zie de twee voorbeelden in fig. 7.35.

Een interessante kwestie betreft tenslotte nog de vraag in hoeverre de groep zwakste leerlingen in wezen hetzelfde proces hebben doorgemaakt als de groep beste leerlingen, zij het met een zekere vertraging. Als in globale zin gekeken wordt naar de ontwikkeling van goedscores en aanpakgedrag, valt er iets voor te zeggen om deze vraag bevestigend te beantwoorden. Het zou evenwel kunnen zijn dat er kwalitatief toch duidelijke verschillen blijven tussen het door beide groepen leerlingen vertoonde aanpakgedrag. Een eerste verkennende analyse die werd uitgevoerd om hier nader uitsluitsel over te verkrijgen, wijst uit dat er in ieder geval voor wat betreft het gebruik van S1-aanpakken niet zoveel kwalitatief verschil is tussen leerlingen uit de

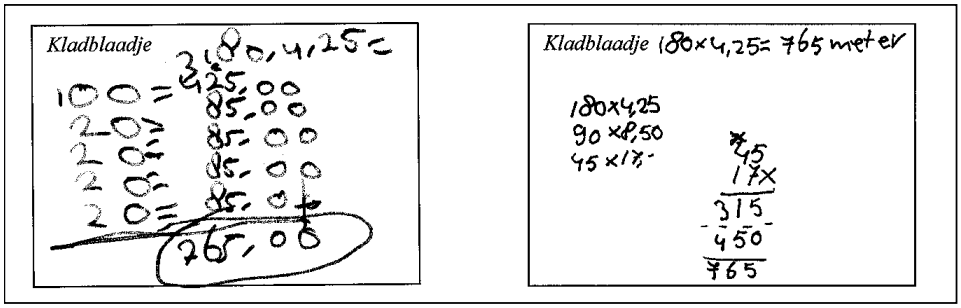


Fig. 7.35: Twee voorbeelden van oplossingen door respectievelijk een zwakkere (links) en een betere leerling bij de extra-opgave '180 pijpen met een lengte van 4,25 m'.

groep Z25 en uit de groep B25. Daartoe werd gekeken welke mate van verkorting door de leerlingen werd gebruikt bij het verwerken van de eenheden in een opgave. Lost een leerling bijvoorbeeld een opgave als 18x45 op door 10x en vervolgens 2x, 2x, 2x en 2x te doen, dan is dit weliswaar net zo goed een S1-oplossing als wanneer hij tewerk gaat via 10x, 5x en 3x, of via 10x, 4x en 4x, maar is er toch een verschil in mate van verkorting. Op grond daarvan zou dan geconcludeerd kunnen worden dat er binnen de categorie van S1-strategieën toch verschil van oplossingsniveau bestaat tussen de categorieën B25 en Z25. De voorlopige conclusie aan de hand van een steekproef van 20 leerlingen uit de beide categorieën B25 en Z25 is echter dat zulke verschillen niet geconstateerd kunnen worden. Dit kan als een aanwijzing worden opgevat dat de zwakkere leerlingen inderdaad een vergelijkbaar maar trager verlopend proces doormaken als de betere leerlingen.

Aandachtspunten voor het realiseren van groepsgericht interactief onderwijs in de groepen 7 en 8
Al met al leveren bovenstaande bevindingen met betrekking tot de resultaten van de 25% zwakste leerlingen ten opzichte van de 25% beste leerlingen een belangrijk aanknopingspunt op met betrekking tot een kwestie die van tijd tot tijd actueel is, namelijk betreffende de vraag in hoeverre en onder welke condities groepsgericht interactief onderwijs in de hoogste leerjaren van de basisschool gerealiseerd kan worden[9]. Uit de in de vorige paragraaf uitgevoerde analyse blijkt in de eerste plaats dat groepsgericht interactief onderwijs binnen een domein als het meercijferige vermenigvuldigen wel degelijk goed haalbaar is. Zoals hierboven is uiteengezet, blijken beide groepen leerlingen bij de gehanteerde didactische benadering goede progressie te kunnen boeken.

Daarnaast zijn er op grond van het uitgevoerde onderwijsexperiment enkele duidelijke aandachtspunten aan te wijzen voor de wijze waarop zulk onderwijs in

de hoogste leerjaren van de basisschool gerealiseerd kan worden. Belangrijk is in de eerste plaats dat in het eerste deel van een leergang veel ruimte voor leerlingen is ingebouwd om op een basaal en eenvoudig te begrijpen niveau tot een oplossing te komen. Met name voor de groep zwakkere leerlingen lijkt het van essentieel belang dat ze gelegenheid hebben om zich rustig op de leerstof te oriënteren en om basale oplossingswijzen te beproeven die aansluiten bij de eigen, informele kennis en ideeën. Belangrijk is verder dat er in het streven naar verkorting en niveauverhoging binnen een leergang de nodige geleidelijkheid wordt betracht en dat leerlingen de ruimte wordt geboden om, binnen zekere grenzen, in hun eigen tempo tot de beoogde niveauverhoging te komen[10]. In de derde plaats is het aan te bevelen om tijdens instructie- en interactiemomenten vooral de zwakkere leerlingen intensief bij het gesprek te betrekken, en om in eerste instantie juist deze leerlingen te laten verwoorden hoe zij tewerk zijn gegaan, te laten beargumenteren waarom een bepaalde redenering of aanpak al dan niet correct is, enzovoorts; en om in tweede instantie, in aanvulling hierop, de betere leerlingen met hun aanpakken en argumenten te laten komen. Dit kan tot resultaat hebben dat op het bord een soort dwarsdoorsnede van oplossingswijzen komt te staan die iets wezenlijks laten zien van de beoogde niveauverhoging zonder dat alle leerlingen gedwongen worden om op een bepaald hoog niveau tewerk te gaan. Waarbij de leraar, zoals in de onderhavige experimentele leergang ook regelmatig gebeurde, uiteraard wel degelijk bepaalde aanbevelingen kan doen, de aandacht op bepaalde begripsmatige moeilijkheden kan vestigen, en mogelijkheden kan aanreiken om dergelijke moeilijkheden te overwinnen.

Voorts is het belangrijk dat er voor de betere leerlingen behalve een cruciale rol bij het aandragen van aanpakken van een hoger niveau en bij het beargumenteren van de juistheid daarvan, ook gelegenheid is om zich regelmatig bezig te houden met opgaven die de eigenlijke doelstellingen van de leergang te boven gaan maar die wel van belang zijn om deze leerlingen de kans te bieden om te laten zien wat ze in dat opzicht allemaal nog meer aankunnen. Zo kregen de leerlingen tijdens een groot deel van de leergang van tijd tot tijd enkele additionele opgaven voorgelegd waarbij bijvoorbeeld bepaald moest worden hoe lang en breed een vierkant terras maximaal kan zijn als er voor dat terras in totaal 240 tegels beschikbaar zijn. Vooral de betere leerlingen bleken bij dat soort puzzelachtige opgaven soms tot goede oplossingen te komen. Zie fig. 7.36 voor een voorbeeld.

De analyse van de resultaten van de experimentele leergang laat zien dat als in de genoemde aandachtspunten tot op zekere hoogte is voorzien, en als het tijdstip

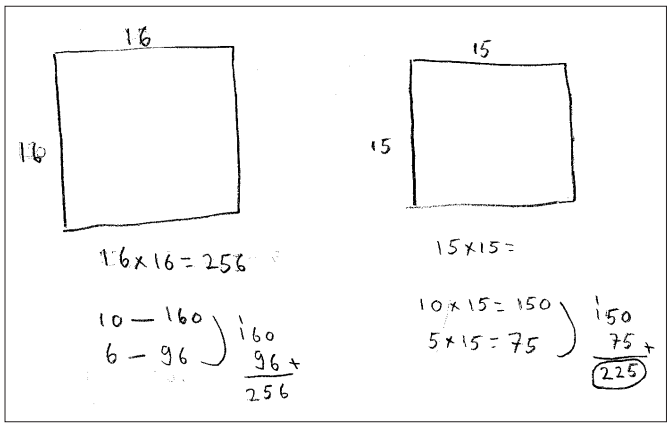


Fig. 7.36: Oplossing bij het probleem rond het grootste vierkant dat met 240 tegels gelegd kan worden. Eerst heeft de leerling een terras van 16 bij 16 getekend en berekend. Toen dit te groot bleek, heeft zij een terras van 15 bij 15 geprobeerd.

van aanbieding van de leergang niet te prematuur is, het effect van een leergang kan zijn dat vrijwel alle leerlingen de nodige progressie kunnen boeken en tot een acceptabel beheersingsniveau kunnen komen. En dat het ook in de hoogste leerjaren van de basisschool heel goed mogelijk is om, binnen zekere grenzen, de leerlingen in een groepsgericht interactieve onderwijsopzet gelijk op te laten trekken bij het doorlopen van de leerstof.

voetnoten

1 Het overzicht sluit aan bij vergelijkbare categoriseringen zoals die bijvoorbeeld zijn gemaakt in de *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool* (deel 2, Basisvaardigheden en cijferen; Treffers & De Moor, 1990), en in de TAL-brochure *Kinderen leren rekenen* (Van den Heuvel-Panhuizen (red.) e.a., 2001).

2 Zoals in hoofdstuk 8 uitgebreid zal worden besproken, is het vaak mogelijk om een bepaald type strategie op uiteenlopende niveaus van abstractie uit te voeren. In die zin is de volgorde die in de categorisering wordt aangehouden, enigszins arbitrair.

3 In verschillende reken-wiskundemethoden wordt deze manier van vermenigvuldigen aan de orde gesteld in een historische terugblik op het ontstaan van ons getallenstelsel en de daarin gangbare rekenprocedures. Zie bijvoorbeeld Wisboek 2 van groep 8 van de methode *Wis en Reken*, p. 80.

4 Bij het in kaart brengen van de door de leerlingen tijdens het experiment gehanteerde oplossingsstrategieën werd aanvankelijk een onderscheid gemaakt tussen het compenseren als zodanig (aangeduid met 'Comp') en het gebruik van bijvoorbeeld de S1-strategie in combinatie met compenseren ('S1comp' genoemd). Naderhand is dit onderscheid achterwege gelaten en is ervoor gekozen om alle strategieën waarbij op enigerlei wijze sprake was van compenseren, in de categorie 'Comp' onder te brengen.

5 De term 'varia' verwijst in dit verband naar het feit dat het om een strategie gaat die slechts in sommige gevallen handig is. Zo is compenseren voornamelijk handig als er sprake is van bijna ronde getallen (4x€1,95 e.d.) terwijl halveren-verdubbelen in het bijzonder toepasselijk is als het gaat om een getal dat via (herhaald) verdubbelen makkelijk in een rond getal is om te zetten (zoals bij 12x125). Zie verder de toelichting in de TAL-brochure *Kinderen leren rekenen* (Van den Heuvel-Panhuizen e.a. (red.), 2001), p. 39-40.

6 Deze gefaseerde vorm van analyseren komt overeen met de door Gravemeijer en Cobb voorgestane werkwijze bij het analyseren van gegevens uit een onderwijsexperiment in het kader van ontwikkelingsonderzoek. In een verwijzing naar het feit dat bij een volgende analyseronde de voorlopige bevindingen, hypotheses en vragen uit een voorgaande analyseronde worden betrokken, spreken zij van 'meta-analyzing' (Gravemeijer en Cobb, 2006, p. 38).

7 De in deze tabel gehanteerde categorisering vertoont kleine afwijkingen van de categorisering in paragraaf 7.2 die verband houden met het feit dat bepaalde verfijnde aanduidingen later in grotere categorieën werden ondergebracht. Zo wordt nog apart gesproken van Comp en S1comp (naderhand samengevoegd tot Comp) en van S1bb (naderhand aangemerkt als S1b) S1bv, S1vb en S1vv (naderhand samengebracht tot S1v). Tevens wordt in de tabel nog een afwijkende afkorting gebruikt bij leerling 318. De term 'Dir' verwijst naar 'direct uit het hoofd'. Naderhand is deze term vervangen door het algemenere gb (geen berekening).

8 Dit geringe verschil doet zich volgens de PPON-analyses overigens alleen voor bij de onderdelen 'Bewerkingen: optellen en aftrekken', 'Bewerkingen: vermenigvuldigen en delen' en 'Samengestelde bewerkingen'. Voor alle overige onderdelen geldt dat meisjes over het algemeen significant slechter scoren. Zie Janssen, Van der Schoot & Hemker, 2005, p. 224. Een verklaring van dit opmerkelijke verschil in prestaties, dat zich in omringende landen als België, Duitsland en Engeland niet voordoet, is nog altijd niet gevonden.

9 Een 'stelling' in deze richting die in het tijdschrift Volgens Bartjens… werd gepubliceerd (Noteboom & Verwaal, 2005), kreeg steun van bijna de helft van de respondenten. Ter ondersteuning van de stelling voerden de auteurs van de stelling aan dat uit (onder meer) Cito-analyses bij het Leerlingvolgsysteem en PPON-rapporten blijkt dat zeer zwakke leerlingen te weinig basiskennis, vaardigheden en inzichten hebben om de reguliere rekenlessen te kunnen volgen. Hierbij dient nog wel te worden aangetekend dat de auteurs van genoemde stelling onder zeer zwakke leerlingen lage D- en E-leerlingen (volgens de Cito-systematiek) verstaan. Bij de 25% zwakste leerlingen uit het onderhavige onderzoek zaten weliswaar ook lage D- en E-leerlingen, maar daarnaast ook hoge D-leerlingen en lage C-leerlingen.

10 In de TAL-brochure *Jonge kinderen leren rekenen* (Van den Heuvel-Panhuizen (red.) e.a., 1999; p.7) wordt dit aspect van realistische leergangen aangeduid met de term 'bandbreedte'. Het is met name door een ruime bandbreedte in leergangen in te bouwen, dat zowel zwakke als goede leerlingen gelegenheid hebben om op hun eigen manier de nodige progressie te boeken.

8 Analyse resultaten: de ontwikkeling van het notatiegedrag

8.1 Inleiding; het belang van een zorgvuldige ontwikkeling van het notatiegedrag

In dit hoofdstuk worden de resultaten van het onderzoek voor wat betreft de ontwikkeling van het notatiegedrag gepresenteerd en geanalyseerd. Daarmee wordt de tweede onderzoeksvraag van deze studie verder beantwoord. In z'n totaliteit luidde deze vraag:

(2) *Hoe ontwikkelt zich binnen zo'n leergang het aanpakgedrag en het notatiegedrag van de leerlingen? En in hoeverre biedt deze leergang ook zwakkere leerlingen voldoende houvast om tot de met het onderwijs beoogde efficiënte strategieën te komen?*

In hoofdstuk 3 t/m 5 is beschreven hoe de ontwikkeling van adequaat notatiegedrag van meet af aan een centraal aandachtspunt voor het onderzoek vormde. Een eerste belangrijke overweging hierbij was het gegeven dat nogal wat leerlingen in groep 7/8 op dit punt ernstige manco's laten zien. Zoals uit de analyse van de PPON-resultaten van 2004 blijkt (zie hoofdstuk 3), is er aan de ene kant een groep leerlingen die bij grotere vermenigvuldigingen zoals 56x23 de standaardprocedure van het cijferen of een variant daarop gebruiken, en aan de andere kant een groep leerlingen die alles uit het hoofd doen. Zoals te verwachten valt, is het aantal foute uitkomsten in dat laatste geval hoog. De leerlingen in kwestie zijn kennelijk zo weinig vertrouwd met informele hulpnotaties ter ondersteuning van hun denkstappen bij het gebruik van een (gestileerde) hoofdrekenaanpak, dat ze zo'n aanpak niet met succes kunnen uitvoeren. Juist voor deze groep veelal zwakkere leerlingen, die in het onderwijsleerproces rond het vermenigvuldigen met grotere getallen niet toekomen aan beheersing van de standaardprocedure, zou het een flinke stap voorwaarts kunnen betekenen indien zij in ieder geval leren om bij het gebruik van een hoofdrekenstrategie adequate hulpnotaties te benutten waarmee ze wél het nodige succes op dit gebied kunnen boeken. Zoals in paragraaf 5 van hoofdstuk 3 reeds is gememoreerd, gaat het hier overigens om een veel algemener probleem. Van Putten (2006) signaleert in een analyse van deelopgaven uit de PPON van 2004 dat zich binnen dat domein een soortgelijk verschijnsel voordoet. En Van den Heuvel-Panhuizen (2004) constateert dat ook goede leerlingen soms geen gebruik weten te maken van hulpnotaties. Al met

al lijkt het hier om een bredere, ongewenste trend in het reken-wiskundeonderwijs te gaan die nader onderzoek vraagt.

Een tweede belangrijke overweging vormde het feit dat de ontwikkeling van informele hulpnotaties in hoge mate zou kunnen bijdragen aan de versterking van het inzicht van de leerlingen in de beoogde rekenstrategieën en de wiskundige eigenschappen die daarbij een rol spelen. Zoals in hoofdstuk 5 is beschreven, zou dit met name het geval kunnen zijn als deze notaties de vrucht zouden zijn van een proces van brede oriëntatie op situaties waarin zich vermenigvuldigingen met grotere getallen voordoen, waarbij zulke notaties op een natuurlijke manier voortvloeien uit het schematisch of modelmatig weergeven van die situaties en van de handelingen met behulp waarvan leerlingen tot een oplossing komen. Dergelijke notaties zouden enerzijds kunnen verwijzen naar de situaties waaruit zij voortkomen, en anderzijds de kiemen in zich kunnen dragen van efficiënte, meer formele strategieën die naderhand via een proces van voortgaande verkorting en niveauverhoging in het onderwijsleerproces naar voren zouden kunnen komen.

Hieronder wordt nagegaan in hoeverre zich tijdens het onderwijsexperiment inderdaad een succesvolle ontwikkeling van het notatiegedrag heeft voorgedaan. Om te beginnen wordt in kaart gebracht hoe adequaat notatiegedrag gedefinieerd kan worden. Aan de hand van het beoordelingsinstrument dat daaruit voortvloeit, wordt vervolgens het notatiegedrag van alle aan het experiment deelnemende leerlingen geanalyseerd dat bij de drie criteriumtoetsen door hen gedemonstreerd werd. De resultaten hiervan worden tenslotte geanalyseerd en in verband gebracht met de in hoofdstuk 5 beschreven verwachtingen. Deze analyse mondt uit in een aantal conclusies en aandachtspunten voor het ontwikkelen van notatiegedrag. Tenslotte wordt nagegaan in hoeverre de door de leerlingen gedemonstreerde variëteit aan notatievormen opgevat kan worden als een indicatie voor toegenomen inzicht.

8.2 Drie voorbeelden van de ontwikkeling van notatiegedrag; twee bruikbare criteria

Om de vraag te kunnen beantwoorden op grond van welke criteria de kwaliteit van het door de leerlingen vertoonde notatiegedrag beoordeeld zou kunnen worden, worden eerst drie voorbeelden van leerlingen onder de loep genomen waarbij zich een duidelijk merkbare ontwikkeling van het notatiegedrag voordoet. Steeds wordt

het notatiegedrag bij de opgaven 2a en 2b uit de drie criteriumtoetsen T1, T2 en T3 bekeken. Alleen in het geval dat een leerling in de bijbehorende afbeelding iets heeft getekend of genoteerd, wordt dit in de voorbeelden hieronder ook getoond.

Leerling 209 (D-leerling)
Bij de drie criteriumtoetsen laat deze leerling achtereenvolgens het in fig. 8.1 weergegeven notatiegedrag zien. Een opvallend kenmerk van de ontwikkeling van deze leerling is in de eerste plaats dat zij bij T1 nog geen raad wist met de betreffende opgaven en zonder veel succes probeert om op een cijferachtige manier tot een oplossing te komen. Haar notatie is erg onoverzichtelijk, ongeordend en ook niet eenvoudig te begrijpen voor leraar en medeleerlingen.

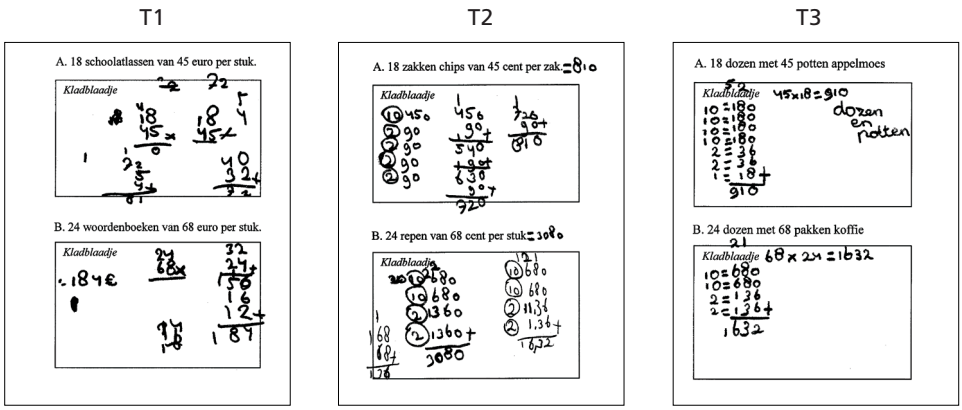


Fig. 8.1: Het notatiegedrag zoals dat door leerling 209 werd vertoond bij de opgaven 2a en 2b van de drie criteriumtoetsen. Bij opgave 2b van T2 staan links en rechts van de oorspronkelijke oplossing twee naderhand toegevoegde notaties ter correctie van een fout (2x68=1360).

Bij T2 doet zich een opmerkelijke verandering voor. Zij heeft zich de werkwijze van het groeperend rekenen eigen gemaakt zoals deze in de lessen aan de orde is gesteld, en komt werkend met groepjes van 10 en van 2 tot een oplossing. Bij de tweede opgave maakt zij daarbij nog een fout (2x68 is 1360) die zij in het interview dat direct na afloop van de toetsafname werd gehouden, zelf signaleert. Dit leidt tot de links en rechts van de oorspronkelijke oplossing genoteerde, door haar zelf uitgevoerde verbeterde werkwijze. Kenmerkend voor het notatiegedrag bij T2 is verder dat dit nog altijd tamelijk uitgebreid en weinig compact is, maar toch beduidend overzichtelijker en ordelijker dan bij T1 het geval was. Bovendien is haar

notatiewijze voor de andere leerlingen en voor de leraar nu veel makkelijker te begrijpen. Bij T3 zien we vervolgens een verdere verbetering doordat de notatie nu nog wat compacter is geworden, al blijft de leerling nog werken met groepjes van 10, 2 en 1. Bovendien maakt ze nog weer een rekenfout in de lange optelling 'onder elkaar' bij 18x45. De overzichtelijkheid en de communiceerbaarheid laten verder nauwelijks nog te wensen over.

Drie potentiële criteria voor het beoordelen van de ontwikkeling van notatiegedrag
Uit bovenstaande analyse zijn drie potentiële criteria af te leiden waaraan de kwaliteit en de progressie van het notatiegedrag mogelijk zijn af te lezen:
- de mate van compactheid van de notatie
- de mate van overzichtelijkheid
- de mate van communiceerbaarheid

Doet zich voor wat betreft alle drie deze criteria een succesvolle ontwikkeling voor zoals leerling 209 hierboven laat zien, dan zou gesproken kunnen worden van een goede progressie op dit gebied. Voordat deze criteria nader uitgewerkt en doordacht worden, volgt hieronder eerst nog het voorbeeld van een tweede en een derde leerling.

Leerling 511 (C-leerling)
Bij de drie criteriumtoetsen laat deze leerling achtereenvolgens het in fig. 8.2 weergegeven notatiegedrag zien. Haar notatiegedrag bij T1 kan omschreven worden als weinig compact, weinig overzichtelijk en moeilijk communiceerbaar; ongeveer van hetzelfde basale niveau als leerling 209 bij T1 liet zien. Weliswaar worden tussenuitkomsten van een rondje voorzien, maar de bijbehorende stappen worden her en der genoteerd, en het is voor een medeleerling of voor de leerkracht moeilijk te achterhalen hoe zij nu precies heeft geredeneerd.

Bij T2 doet zich een wending voor. Ze maakt nu gebruik van het groeperend rekenen en laat dit in de tekening ook zien: groepjes van 4 waarvan het subtotaal wordt bepaald. Bij opgave 2b laat ze ook zien hoe ze gebruik maakt van compenseren: per groepje van 4 rekent ze € 2,80, en trekt tot slot het teveel gerekende (6x8 is 48 cent) er weer vanaf. De hier gevolgde notatiewijze is weliswaar nog niet erg compact (de strategie van het groeperend rekenen brengt dit meestal met zich mee) maar wel heel overzichtelijk. Bij T3 tenslotte laat de leerling zien hoe zij met groepjes van 10 en een groepje kleiner dan 10 werkt. Haar notatiewijze is qua niveau nu vergelijkbaar met

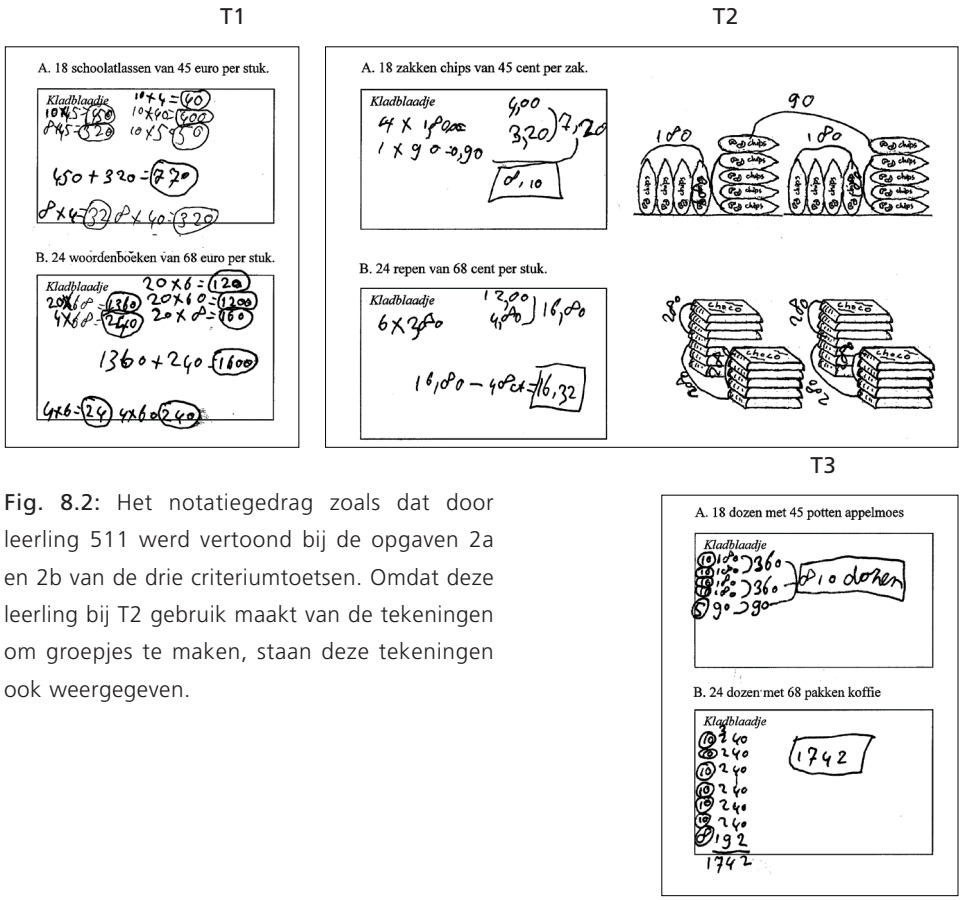


Fig. 8.2: Het notatiegedrag zoals dat door leerling 511 werd vertoond bij de opgaven 2a en 2b van de drie criteriumtoetsen. Omdat deze leerling bij T2 gebruik maakt van de tekeningen om groepjes te maken, staan deze tekeningen ook weergegeven.

dat van leerling 209: heel overzichtelijk, redelijk compact en goed communiceerbaar naar medeleerlingen en leerkracht. In die zin is ook bij haar een duidelijke progressie op het punt van notatiegedrag te constateren.

Leerling 513 (A-leerling); de onbruikbaarheid van communiceerbaarheid als criterium

Het criterium van de communiceerbaarheid vraagt nog om een nadere doordenking. De leerlingen die tot nu toe als voorbeeld zijn genomen, laten namelijk een groei zien die min of meer verloopt in overeenstemming met het beoogde onderwijs, waarbij ze notatievormen hanteren die door het onderwijs (cq. door de onderwijsgevende) sterk bevorderd worden en daarvan een goede afspiegeling vormen. Het gevolg is dat deze notatievormen ook steeds beter communiceerbaar naar de overige leerlingen en naar de leerkracht worden. Dit mag als een belangrijke verworvenheid beschouwd worden omdat deze notatievormen zich dan ook goed lenen voor gezamenlijke reflectie en

dus het collectieve uitgangspunt kunnen vormen voor verdere niveauverhoging en verkorting (Thompson, 2004). Maar stel nu dat een leerling wel een goede progressie boekt, of zelfs van meet af aan geavanceerde strategieën en notatievormen hanteert, maar dat dit niet erg spoort met de notatievormen die in het onderwijs aangemoedigd worden. Het is de vraag hoe de communiceerbaarheid dan gewaardeerd moet worden. Een voorbeeld van zo'n leerling is leerling 513, die bij T1, T2 en T3 bij de opgaven 2a en 2b het in fig. 8.3 gememoreerde notatiegedrag laat zien.

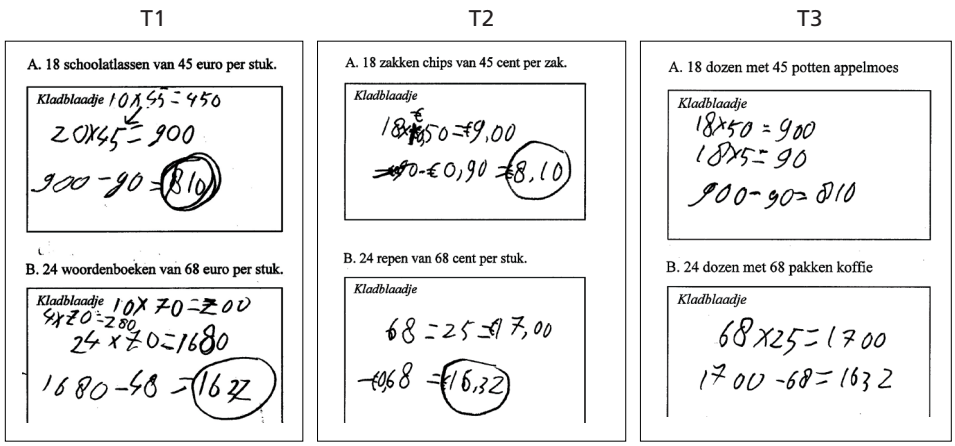


Fig. 8.3: Het notatiegedrag zoals dat door leerling 513 werd vertoond bij de opgaven 2a en 2b van de drie criteriumtoetsen.

Van meet af aan laat deze leerling slimme oplossingen zien, waarbij decimaal splitsen, compenseren en (wellicht) halveren-verdubbelen een rol spelen. Over de mate van compactheid en de mate van overzichtelijkheid zijn bij de door hem gehanteerde notatievormen de nodige opmerkingen te maken – dit zijn in principe goed bruikbare criteria. Maar bij de communiceerbaarheid ligt het anders. De vertoonde notatievormen zijn immers niet makkelijk naar de overige leerlingen te communiceren. En deze kunnen dus evenmin een goed uitgangspunt voor gezamenlijke overdenking en niveauverhoging vormen. De leerling werkt immers op een zo hoog niveau, dat veel van de zwakkere leerlingen hem zeker in het eerste deel van de leergang waarschijnlijk moeilijk kunnen volgen. Dit betekent dat de communiceerbaarheid als laag gekwalificeerd zou moeten worden. Terwijl hij er wel blijk van geeft de leerstof goed te doorzien en daarin ook progressie te boeken. Hieruit valt af te leiden dat communiceerbaarheid moeilijk als een algemeen criterium voor mathematische progressie valt te hanteren. Het kan immers zijn dat een leerling weliswaar een goede

progressie boekt, maar toch een geheel eigen of zelfs idiosyncratische notatiewijze blijft volgen met een laag gehalte aan communiceerbaarheid. Op grond hiervan moet besloten worden om slechts de eerste twee criteria van compactheid en overzichtelijkheid als centrale graadmeters voor het beoordelen van de ontwikkeling van het notatiegedrag te gebruiken.

Werken met een driepuntsschaal; notatiegedrag-diagram
Om de progressie makkelijker kwantificeerbaar te maken, is gekozen voor een eenvoudige driepunts-schaal met niveau 2 als matige tussenvorm, daaronder niveau 1 als indicatie van laag niveau en daarboven niveau 3 als aanwijzing voor hoog niveau. Natuurlijk zou het mogelijk zijn geweest om meer niveaus en vormen van notatiegedrag te onderscheiden. Maar meer specifieke categorieën maken een betrouwbare score moeilijker. Ruime, meer globale categorieën scoren betrouwbaarder, en dat is van belang om gefundeerde uitspraken te kunnen doen over de ontwikkeling van het notatiegedrag. In de gehanteerde driepuntsschaal staat 1 dus voor een lage vorm van compactheid of overzichtelijkheid zoals de leerlingen 209 en 511 bij T1 laten zien, 2 voor een matige vorm daarvan zoals deze leerlingen bij T2 op het punt van compactheid demonstreren, en 3 voor een hoge vorm zoals ze dat bij T3 op het punt van overzichtelijkheid tentoon spreiden. Aldus kan voor elke leerling een 'notatiegedrag-diagram' opgesteld worden waarbij aan elke opgave uit de drie criteriumtoetsen waarbij sprake is van duidelijk waarneembaar notatiegedrag (de opgaven 1, 2, 4 en 5), een 1, 2 of 3 wordt toegekend voor zowel de mate van compactheid als de mate van overzichtelijkheid van het vertoonde notatiegedrag. In het geval van de leerlingen 209 en 511 kan dit er als volgt uit zien (zie fig. 8.4). In de diagrammen is aan de rechterkant steeds het gemiddelde per criterium aangegeven.

8.3 Uitwerking van de twee criteria tot een beoordelingsinstrument

Om als hulpmiddel te kunnen fungeren voor het beoordelen van de kwaliteit van het door de leerlingen gedemonstreerde notatiegedrag, dienen de twee criteria uiteraard nader uitgewerkt en gespecificeerd te worden. Dit moet resulteren in een algemeen bruikbaar beoordelingsinstrument waarmee de kwaliteit van het notatiegedrag op objectieve wijze in kaart gebracht kan worden. Met dat doel worden hieronder eerst twee voorlopige omschrijvingen van de beide criteria compactheid en overzichtelijkheid gegeven die voortvloeien uit de hierboven geanalyseerde voorbeelden van notatiegedrag.

Naam: Leerling 209									
T1	opg. 2			opg. 4			opg. 5		gem
	a	b	c	a	b	c	a	b	
Cp	1	1	1	1	1	1	1	1	**1.0**
Ov	1	1	1	1	1	1	1	1	**1.0**
T2	opg. 2			opg. 4			opg. 5		
	a	b	c	a	b	c	a	b	
Cp	2	2	2	2	2	2	3	2	**2.1**
Ov	3	3	3	2	3	2	3	2	**2.6**
T3	opg. 2			opg. 4			opg. 5		
	a	b	c	a	b	c	a	b	
Cp	2	2	2	2	2	2	3	2	**2.1**
Ov	3	3	3	3	3	3	3	3	**3.0**

Naam: Leerling 511									
T1	opg. 2			opg. 4			opg. 5		gem
	a	b	c	a	b	c	a	b	
Cp	1	1	1	1	1	1	3	3	**1.5**
Ov	1	1	1	1	1	1	3	3	**1.5**
T2	opg. 2			opg. 4			opg. 5		
	a	b	c	a	b	c	a	b	
Cp	2	2	2	1	1	1	3	3	**1.9**
Ov	2	2	2	1	1	1	3	3	**1.9**
T3	opg. 2			opg. 4			opg. 5		
	a	b	c	a	b	c	a	b	
Cp	2	2	2	3	2	2	2	2	**2.1**
Ov	3	3	3	3	3	3	3	3	**3.0**

Fig. 8.4: Twee voorbeelden van een notatiegedragdiagram zoals dat voor alle leerlingen werd opgesteld. De afkorting Cp verwijst naar mate van compactheid, de afkorting Ov naar mate van overzichtelijkheid.

Compactheid: de mate van beknoptheid, van kernachtigheid, zonder uitvoerige en redundante beschrijvingen in rekentaal of in gewone taal. Ook de mate van verkorting van de uitgevoerde oplossingsstrategie kan als een aspect van dit criterium worden aangemerkt.

Overzichtelijkheid: de mate waarin een notatie eenvoudig te overzien is; de mate waarin de 'rode draad' van een berekening er makkelijk uit te halen valt, bijvoorbeeld doordat er een duidelijke 'richting' en systematiek in de notatie zit: van links naar rechts, van onder naar boven, onderscheid makend tussen hoofdstappen en hulpstappen om die hoofdstappen uit te voeren, en doordat de uiteindelijke uitkomst duidelijk omcirkeld of onderstreept is.

Om tot een beoordelingsinstrument te komen, wordt aan de hand van enkele voorbeelden hieronder eerst nog een categorie notatievormen onderscheiden die als gevolg van bepaalde omstandigheden niet voor beoordeling in aanmerking komen en daarvan derhalve uitgesloten worden. Dit leidt tot een 'uitsluitingscriterium'. De hierboven gegeven omschrijving van de criteria compactheid en overzichtelijkheid wordt vervolgens met behulp van nog enkele voorbeelden nader uitgewerkt en

gespecificeerd. Tenslotte wordt nog stilgestaan bij het cumulatieve effect dat kan optreden als verschillende aspecten van een criterium 'bij elkaar worden opgeteld'. Al met al levert dit een beoordelingsinstrument op met vier criteria die bij elkaar een goede mogelijkheid lijken te bieden om de kwaliteit van het notatiegedrag van de leerlingen op een zorgvuldige manier in kaart te brengen:

(1) het uitsluitingscriterium
(2) het compactheidscriterium
(3) het overzichtelijkheidscriterium
(4) het cumulatiecriterium

(1) Het uitsluitingscriterium: er wordt een op voorhand onjuiste strategie gebruikt

Er zijn nogal wat gevallen van leerlingen waarvan het notatiegedrag bij een aantal opgaven wel overzichtelijk en compact is, maar moeilijk scoorbaar omdat een op voorhand onjuiste strategie wordt toegepast. Dit laat zich eenvoudig verduidelijken aan de hand van enkele voorbeelden. Zoals in hoofdstuk 7 is getoond, gebeurt het vooral bij T1 nogal eens dat leerlingen niet goed raad weten met de op dat moment nog complexe opgaven. Men neemt dan soms z'n toevlucht tot een ogenschijnlijk nog niet zo slechte, maar wel onjuiste aanpak als die van het verkeerd splitsen, of verklaart zelfs een andere bewerking van toepassing. Zie de twee voorbeelden in fig. 8.5.

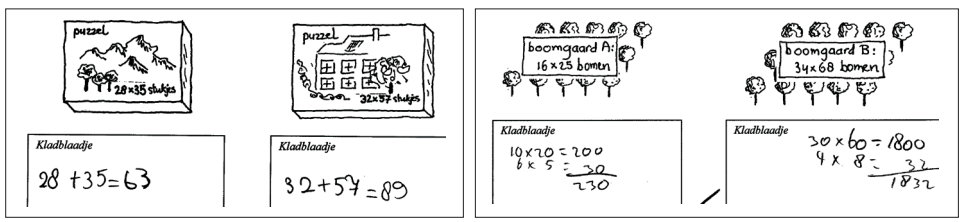


Fig. 8.5: Twee voorbeelden van op voorhand onjuiste strategieën bij T1. Links heeft een leerling voor optellen in plaats van vermenigvuldigen gekozen, rechts wordt de V.S.-strategie gebruikt.

Op zich is dergelijk notatiegedrag wel overzichtelijk, en eveneens compact. Maar de betreffende leerlingen zijn wel een per definitie onjuiste weg ingeslagen en kunnen dus nooit tot een goed antwoord komen. Op grond van de twee criteria kan in zulke gevallen dan ook geen gefundeerde uitspraak gedaan worden over de mate van progressie die in het notatiegedrag geboekt wordt. Men zou kunnen zeggen dat de betreffende opgaven aan de hand van deze criteria niet goed scoorbaar zijn. Daarom

is ervoor gekozen om opgaven waarbij sprake is van een per definitie onjuiste aanpak, niet mee te tellen in de beoordeling. Dit geldt ook voor opgaven waarbij een leerling alleen een antwoord zonder berekening heeft genoteerd.
Verder ligt het voor de hand om leerlingen bij wie zich dergelijke aanpakken frequent voordoen, helemaal van de beoordeling uit te sluiten. De grens kan daarbij op 3 opgaven gesteld worden: volgt een leerling in dezelfde toets bij meer dan 3 opgaven een per definitie onjuiste aanpak zoals die van het verkeerd splitsen, dan wordt deze leerling niet meegeteld. Dit betekent weliswaar een inkrimping van het leerlingenbestand waaruit geput wordt voor de analyse (met name in de categorie van de 25% zwakste leerlingen vallen er nogal wat af). Maar het doet toch niet wezenlijk afbreuk aan de validiteit van de uitspraken met betrekking tot de ontwikkeling van het notatiegedrag in z'n algemeenheid omdat er, zoals verderop zal blijken, van de 112 leerlingen nog altijd 85 overblijven.

(2) Het criterium compactheid: twee aspecten
Indien compactheid wordt opgevat als mate van beknoptheid, van kernachtigheid, dan ligt het voor de hand in ieder geval twee aspecten van dit criterium te onderscheiden. In de eerste plaats kan gekeken worden naar de mate van compactheid van de notatie als zodanig, waarbij het gaat om zaken als de mate van uitgebreidheid van genoteerde tussenstappen, hulpberekeningen en tussenantwoorden. In de tweede plaats kan gekeken worden naar de mate van verkorting van de gehanteerde strategie. Hoe meer een strategie immers verkort is, des te compacter kan de voor deze strategie gebruikte notatievorm zijn. Dat die notatievorm in zulke gevallen compacter is, hoeft overigens niet noodzakelijkerwijs zo te zijn. Het kan immers ook zijn dat een leerling nog moeite heeft een verkorte strategie vlot uit te voeren en daarom in eerste instantie toch nog veel tussenstappen noteert[1].

Het aspect compactheid van de notatie als zodanig
In grote lijnen lijken er voor dit aspect drie kenmerken te onderscheiden, te weten:
- het gebruik van hulpstappen of tussenantwoorden die apart in de berekening genoteerd worden (zoals leerling 511 laat zien bij T1);
- het gebruik van apart uitgevoerde optellingen van subtotalen in een notatievorm (zoals leerling 209 laat zien bij T2);
- het té compact noteren van een berekening in de zin dat nauwelijks te achterhalen is wat een leerling precies heeft gedaan (zoals leerling 513 bij T2 bij opgave 2b laat zien); en in de zin dat een leerling een bepaalde tussenstap helemaal vergeten is.

Voor alle drie deze kenmerken zou als norm gesteld kunnen worden dat aan een notatie maximaal de score 2 wordt toegekend indien sprake is van een van de genoemde verschijnselen. Zie de drie voorbeelden in fig. 8.6 als voorbeeld.

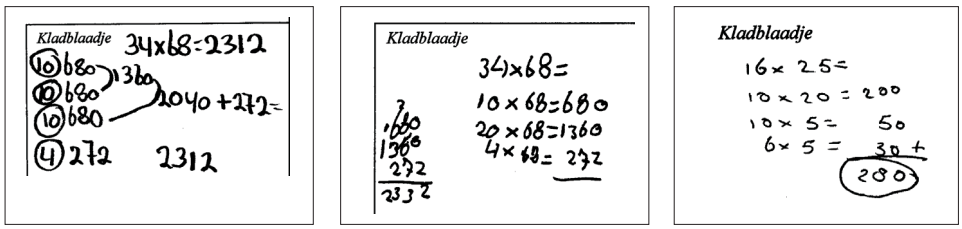


Fig. 8.6: Drie voorbeelden van notatiewijzen waarbij voor het criterium compactheid de score 2 wordt toegekend. Links is sprake van een berekening met diverse tussenantwoorden, midden worden de subtotalen apart onder elkaar opgeteld. En rechts vergeet een leerling de factor 6x20 (AS-strategie).

Het aspect mate van verkorting van de gehanteerde strategie

In paragraaf 4 van hoofdstuk 7 zijn de door de leerlingen tijdens het experiment gebruikte oplossingsstrategieën in een vijftal globale categorieën ingedeeld. Deze indeling kan als uitgangspunt fungeren voor het toekennen van een mate van compactheid aan de betreffende notatievorm. Het ligt voor de hand om de categorie strategieën waarbij het gaat om herhaald optellen, verdubbelen, en werken met groepjes (groeperend rekenen) tot niveau Cp 1 te rekenen. Strategieën waarbij decimaal gesplitst wordt, te weten S1, S12, S2 en AS, kunnen in principe tot niveau Cp 2 of Cp 3 gerekend worden, al naar gelang de mate van verkorting waarmee deze strategieën uitgevoerd en genoteerd worden. Dit geldt ook voor strategieën uit de categorie Comp en Halv-Verd (respectievelijk compenseren en halveren-verdubbelen) waarbij het wederom afhangt van de mate van compactheid waarmee deze strategieën worden genoteerd of een 2 dan wel een 3 wordt toegekend. De categorie van het cijferen kan, gelet op het zeer compacte karakter van de bijbehorende notatie, in het algemeen tot het niveau van Cp 3 gerekend worden. Een nadere specificatie van deze globale indeling is uiteraard noodzakelijk, deze wordt in Bijlage 5 gegeven. In fig. 8.7 volgen ter toelichting nog drie voorbeelden van notatievormen die met resp. Cp 1, Cp 2 en Cp 3 beoordeeld worden.

(3) Het criterium overzichtelijkheid

In de voorbeelden van de leerlingen 209, 511 en 513 zijn goede aanknopingspunten te vinden om tot een passende afbakening van de beoogde niveaus Ov 1, Ov 2 en

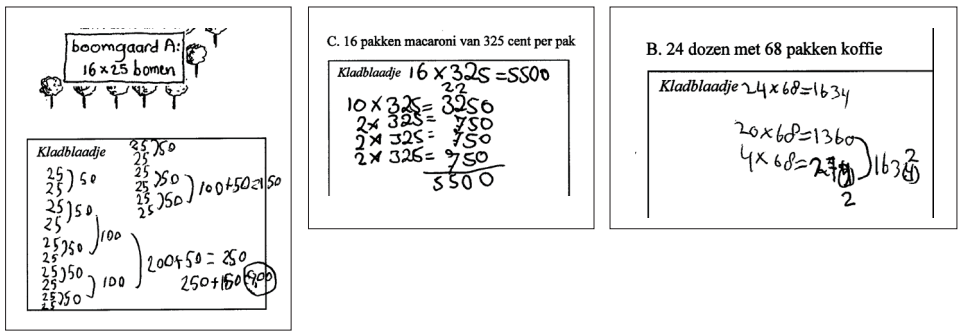


Fig. 8.7: Drie voorbeelden van notatievormen waaraan resp. de score Cp 1 (het voorbeeld links, herhaald optellen), Cp 2 (midden, S1-strategie maar met groepjes van 2) en Cp 3 (rechts, verkorte S1-strategie) wordt toegekend.

Ov 3 te komen. Zo vormt het notatiegedrag dat de leerlingen 209 en 511 bij T1 laten zien, een mooi voorbeeld van niveau 1: uitvoerige notaties die weinig overzichtelijk zijn, zonder duidelijk begin en einde van de berekening. Bij beide leerlingen doet zich bij T2 op het punt van de overzichtelijkheid een aanzienlijke verbetering voor: de notatie is nu heel goed te overzien, er wordt van boven naar onder gewerkt, en de uiteindelijke uitkomst is duidelijk onderscheiden. Bij T3 wordt dit zo mogelijk nog beter. Zowel voor de notaties bij T2 als bij T3 lijkt een waardering van Ov 3 op z'n plaats. Het notatiegedrag van leerling 513 levert nog een verdere aanwijzing op. Bij T1 laat hij redelijk overzichtelijk zij het wat rommelig notatiegedrag zien waarbij afzonderlijke rekenstappen soms moeilijk van elkaar te onderscheiden zijn. Dit kan gewaardeerd worden als Ov 2. Bij T2 ziet het er ordelijker uit, maar is sprake van enkele storende doorhalingen die ook afbreuk doen aan de overzichtelijkheid. Ook hier kan de waardering Ov 2 zijn. Bij T3 tenslotte zijn de stappen wel overzichtelijk en zonder doorhalingen genoteerd. Het niveau van overzichtelijkheid komt nu globaal overeen met dat van de leerlingen 209 en 511 bij T2 en T3, en kan derhalve met een score Ov 3 gehonoreerd worden.

Worden op basis van deze globale indeling nog enkele andere leerlingen in beschouwing genomen, dan blijken er meer in het algemeen een aantal factoren te onderscheiden die kenmerkend zijn voor de verschillende niveaus. In Bijlage 5 worden deze beschreven en uitgewerkt. In fig. 8.8 volgen ter toelichting nog drie typerende voorbeelden van notatievormen die met Ov 1, Ov 2 en Ov 3 zijn beoordeeld.

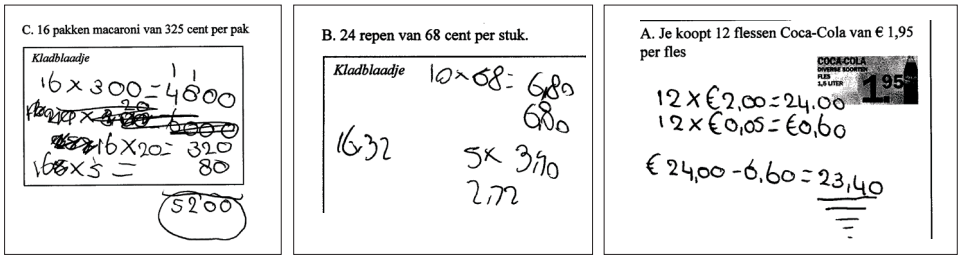


Fig. 8.8: Drie voorbeelden van notatievormen waarbij resp. de score Ov 1 (voorbeeld links, grotendeels doorgehaalde berekening), Ov 2 (midden, berekening met fragmentarisch genoteerde stappen) en Ov 3 (rechts, berekening geheel overzichtelijk genoteerd) wordt toegekend.

(4) Het cumulatiecriterium

Het komt nogal eens voor dat een notatievorm in twee opzichten in aanmerking komt voor een minder hoge waardering. Voor wat betreft het criterium compactheid is dit bijvoorbeeld het geval als in een berekening zowel sprake is van apart genoteerde hulpstappen of tussenantwoorden (het eerste compactheidsaspect), als van een minder verkorte aanpak (het tweede aspect). Voor beide factoren afzonderlijk wordt Cp 2 toegekend. Echter, ook in combinatie wordt dan Cp 2 toegekend. Zou dat namelijk niet gedaan worden, dan komen zulke notatievormen gelijk te staan aan het niveau van Cp 1 zoals bij herhaald optellen e.d., hetgeen niet gewenst is. Zie de twee voorbeelden in fig. 8.9.

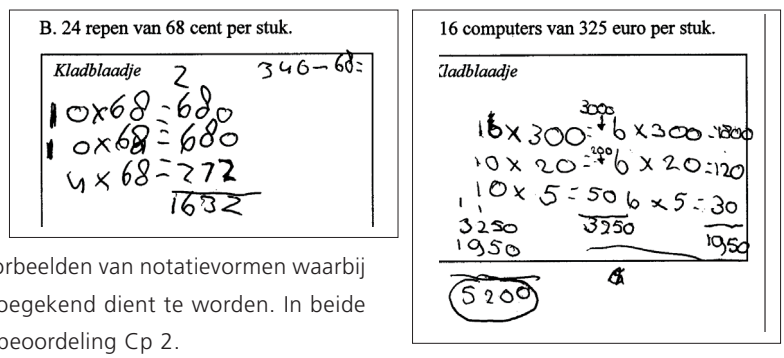


Fig. 8.9: Twee voorbeelden van notatievormen waarbij twee keer Cp 2 toegekend dient te worden. In beide gevallen blijft de beoordeling Cp 2.

Hetzelfde geldt voor het criterium van de overzichtelijkheid. Zo komt het voor dat een leerling tussenantwoorden of tussenstappen niet goed van elkaar onderscheiden in de berekening heeft opgenomen, terwijl er bovendien enkele doorhalingen in de berekening zitten. In feite gaat het dan om 'dubbel Ov 2', maar dit blijft dan Ov 2 en wordt geen Ov 1. Zie de twee voorbeelden in fig. 8.10.

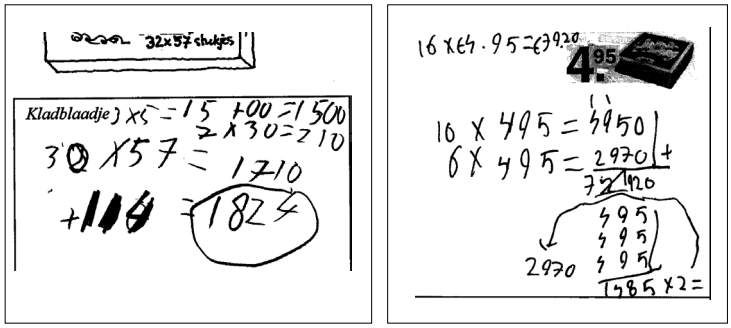


Fig. 8.10: Twee voorbeelden van notatievormen waarbij sprake is van 'dubbel Ov 2' en waarbij toch de score Ov 2 wordt toegekend.

8.4 De resultaten van alle leerlingen in kaart gebracht

8.4.1 Werkwijze

Op basis van het volgens bovenstaande richtlijnen uitgewerkte beoordelingsinstrument is het notatiegedrag van alle leerlingen vervolgens in kaart gebracht. Hierbij is voor elke leerling een notatiediagram opgesteld waarin voor elk van de acht relevante opgaven uit de drie criteriumtoetsen een beoordeling voor de mate van compactheid en de mate van overzichtelijkheid van het vertoonde notatiegedrag is aangegeven. Steeds is per leerling en per toets ook een gemiddelde waarde voor de beide criteria opgenomen. Indien het notatiegedrag binnen één toets meer dan 3 keer als niet-beoordeelbaar moest worden gekwalificeerd, is deze leerling verder geheel buiten de beoordeling gehouden. Op grond van dit 'uitsluitingscriterium' zijn uiteindelijk 27 van de 112 leerlingen oftewel 24% buiten de beoordeling gebleven.

Om na te gaan hoe betrouwbaar het ontwikkelde beoordelingsinstrument is, heeft een 'contra-expertise' plaatsgevonden waarbij collega M. Beishuizen aan de hand van het beoordelingsinstrument alle notaties van de aan het experiment deelnemende leerlingen eveneens gescoord heeft. Dit gebeurde in drie etappes. Bij de eerste daarvan werd door hem een drietal leerlingen van school 500 gescoord waarna de resultaten daarvan vergeleken werden met de oorspronkelijke scores om een eerste indicatie te krijgen voor de mate van overeenstemming. Dit leidde tot een lichte aanscherping van het beoordelingsinstrument. Deze gang van zaken werd vervolgens voor vier leerlingen van school 400 herhaald. Daarna scoorde Beishuizen alle overige 105 leerlingen, terwijl de oorspronkelijke beoordelingen op basis van het aangescherpte beoordelingsinstrument nog eens herhaald werden. Uiteindelijk leidde

dit tot een overzicht van alle scoreverschillen voor de 105 leerlingen, waarbij de conclusie was dat het percentage overeenstemming op 87.2 ligt. Zie hiervoor Bijlage 5. Hieruit mag geconcludeerd worden dat de beoordeling een tamelijk hoge graad van betrouwbaarheid heeft.

8.4.2 Resultaten van alle scholen samen

Hieronder worden de resultaten voor alle scholen samen gegeven. Zie fig. 8.11 en 8.12a en 8.12b. De uitgebreidere tabel voor alle scholen afzonderlijk is in Bijlage 7 opgenomen.

				95% Confidence Interval	
Measure	Tijd	Mean	Std. Error	Lower Bound	Upper Bound
Compactheid	1	2.177	.051	2.075	2.278
	2	2.327	.038	2.252	2.402
	3	2.488	.035	2.418	2.559
Overzichtelijkheid	1	2.431	.044	2.344	2.517
	2	2.659	.030	2.598	2.719
	3	2.832	.021	2.791	2.874

Fig. 8.11: De tabel met de resultaten voor alle scholen samen. De aanduiding Tijd (1, 2 en 3) verwijst naar de toetsafnames T1, T2 en T3.

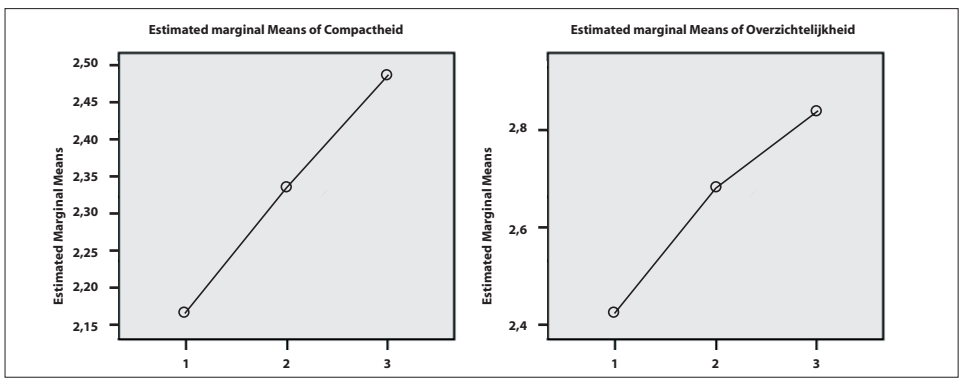


Fig. 8.12a en 8.12b: Grafisch overzicht van de ontwikkeling van het notatiegedrag qua compactheid (fig. 8.17a) en qua overzichtelijkheid (fig. 8.17b) voor alle scholen samen. De getallen 1, 2 en 3 op de horizontale as verwijzen naar de toetsafnames T1, T2 en T3 van de criteriumtoets.

Bij een analyse van deze resultaten vallen direct enkele zaken in het oog. In de eerste plaats kan er een geleidelijke stijging geconstateerd worden voor zowel de mate van compactheid als de mate van overzichtelijkheid. Zoals uit tabel 2 en 3 van Bijlage 7

blijkt, is dit voor beide criteria een significante verbetering van T1 naar T3 (F[2,160] = 24,48 resp. 44,52; p < .001). Beide effecten zijn lineair, dus ongeveer even groot van T1 naar T2 als van T2 naar T3.

Verschillen tussen de scholen

Zoals de beide grafieken in fig. 8.13 laten zien, treden er tussen de scholen enkele duidelijke verschillen op. De scholen 100, 200 en 500 laten op compactheid een duidelijke vooruitgang zien, vooral van T1 naar T2; de scholen 300 en 400 laten evenwel een terugval zien op dit criterium van T1 naar T2, en weer een herstel van T2 naar T3. Op overzichtelijkheid gingen alle scholen vooruit, maar de scholen 100, 200 en 500 gingen eerst snel vooruit en daarna minder snel, terwijl school 300 geleidelijker maar minder sterk vooruit ging, en school 400 vanaf een relatief hoog beginniveau eerst terugviel maar daarna weer fors verbeterde op dit criterium. Zoals tabel 3 uit Bijlage 7 laat zien, zijn de genoemde verschillen tussen de scholen significant (F[8,160] = 5,66 resp. 2,19; p < .001 resp. .05).

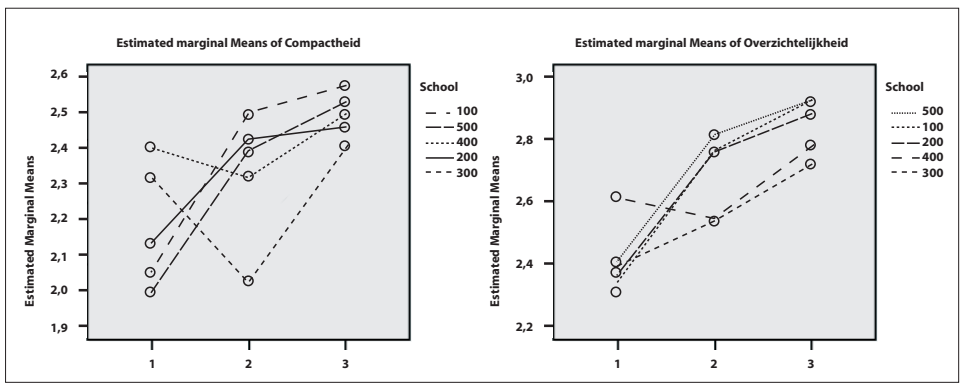


Fig. 8.13a en 8.13b: Grafisch overzicht van de ontwikkeling van het notatiegedrag qua compactheid (fig. 8.13a) en qua overzichtelijkheid (fig. 8.13b) voor alle scholen afzonderlijk. De getallen 1, 2 en 3 op de horizontale as verwijzen weer naar de toetsafnames T1, T2 en T3 van de criteriumtoets.

Wat de oorzaak is van het feit dat zich bij de scholen 300 en 400 op compactheid een daling voordoet van T1 naar T2 terwijl er bij de andere drie scholen sprake is van een flinke stijging, is niet geheel zeker. Een mogelijke oorzaak bij school 300 zou kunnen zijn dat het hier gaat om een leerlingenpopulatie met tamelijk wat zwakkere leerlingen die bij T1 nogal eens gekozen hadden voor de onjuiste VS-strategie, waarna ze bij T2 kozen voor een nog betrekkelijk omslach-

tige strategie zoals verdubbelen of groepjes maken. Een daling van het criterium compactheid ligt dan voor de hand. School 400, de andere school waarbij zich de daling voordoet, had echter juist een populatie met vrij veel goede leerlingen. Een mogelijke verklaring zou hier wellicht gelegen kunnen zijn in het feit dat de leerlingen in deze school zich op grond van aanwijzingen van de leraar misschien enigszins verplicht voelden om alles zo uitgebreid mogelijk te noteren, maar in de geanalyseerde lesprotocollen en video-opnamen zijn daarvoor geen aanwijzingen gevonden. Verder valt op dat het beginniveau van veel leerlingen over het geheel genomen al behoorlijk is. Dit geldt zowel voor de mate van compactheid als voor de mate van overzichtelijkheid.

Kennelijk vertoonden veel leerlingen bij aanvang van het praktijkexperiment al een tamelijk goed ontwikkeld notatiegedrag. Tot op zekere hoogte was dit stellig het geval. Ook bij de peiling van de beginsituatie van de leerlingen lieten veel leerlingen namelijk al redelijk compacte en overzichtelijke notatievormen zien. Een voor de hand liggende reden hiervoor is gelegen in het feit dat het om goede leraren gaat die zich reeds bij aanvang bewust waren van het belang van goed notatiegedrag. Bovendien werkten ze met een methode (Wis en Reken) waarin aan dit punt uitgebreid aandacht wordt besteed[2]. Toch dient een kanttekening geplaatst te worden omdat juist in de groep zwakkere leerlingen (de C-, D- en E-leerlingen) nogal wat leerlingen zaten uit de categorie 'niet beoordeelbaar'. Zij lieten met name bij T1 nogal eens per definitie onjuiste aanpakken zien waardoor zij buiten de analyse van het notatiegedrag zijn gebleven. Zouden zij wel in de analyse zijn opgenomen (bijvoorbeeld doordat aan de hand van de beperkte hoeveelheid wel beoordeelbare opgaven een score was bepaald), dan zou het beeld er wellicht anders hebben uitgezien. Om hierover iets meer aan de weet te komen, worden hieronder de resultaten voor de 25% zwakste en de 25% beste leerlingen apart onder de loep genomen.

8.4.3 Resultaten van de 25% zwakste en 25% beste leerlingen

In de tabel van fig. 8.14 en de grafieken van fig. 8.15 is te zien hoe de resultaten waren voor de afzonderlijke groepen 25% zwakste leerlingen en 25% beste leerlingen.

Hoewel de categorie 25% zwakste leerlingen (Z25) om bovengenoemde reden nogal uitgedund is, is toch duidelijk te zien dat het aanvangsniveau op het punt van compactheid beduidend lager ligt dan dat van de 25% beste leerlingen (B25). Dit geldt ook voor het aspect van de overzichtelijkheid. Verder kan geconcludeerd worden dat niet alleen de zwakkere leerlingen, maar ook de betere leerlingen progressie

2. V3 * Tijd

Measure	V3	Tijd	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
Compactheid	1	1	1.814	.122	1.572	2.056
		2	2.071	.092	1.888	2.255
		3	2.271	.081	2.111	2.432
	2	1	2.200	.068	2.065	2.335
		2	2.380	.052	2.277	2.483
		3	2.500	.045	2.410	2.590
	3	1	2.258	.089	2.080	2.435
		2	2.442	.068	2.307	2.577
		3	2.604	.059	2.486	2.722
Overzichtelijkheid	1	1	2.171	.101	1.970	2.373
		2	2.571	.075	2.422	2.721
		3	2.764	.052	2.662	2.867
	2	1	2.440	.057	2.327	2.553
		2	2.684	.042	2.601	2.768
		3	2.853	.029	2.796	2.911
	3	1	2.546	.074	2.398	2.694
		2	2.712	.055	2.602	2.822
		3	2.869	.038	2.794	2.945

Fig. 8.14: Tabel met de resultaten van de 25% zwakste leerlingen, de middelste 50% leerlingen en 25% beste leerlingen voor de beide criteria compactheid en overzichtelijkheid. Onder de variabele Tijd worden met 1, 2 en 3 weer bedoeld T1, T2 en T3.

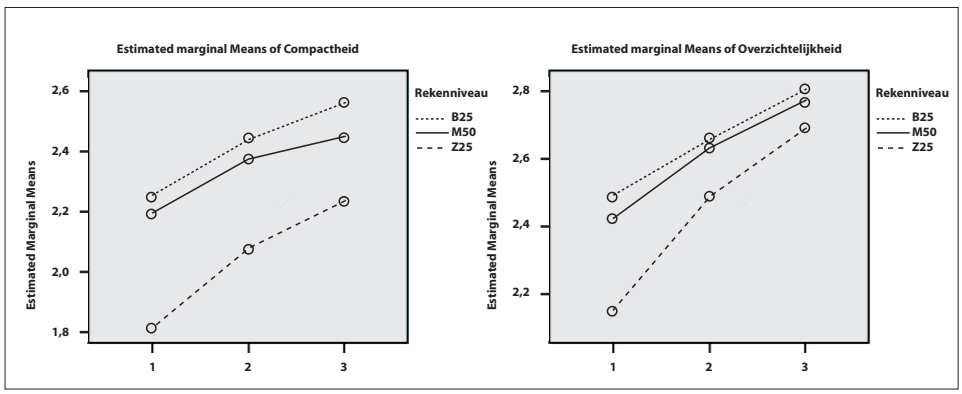


Fig. 8.15a en 8.15b: Grafisch overzicht van de ontwikkeling van het notatiegedrag qua compactheid (fig. 8.15a) en qua overzichtelijkheid (fig. 8.15b) voor de drie groepen Z25, M50 en B25. De getallen 1, 2 en 3 op de horizontale as verwijzen weer naar T1, T2 en T3.

geboekt hebben in hun notatiegedrag. In mindere mate geldt hier wat in paragraaf 5 van hoofdstuk 7 is geconcludeerd met betrekking tot goedscores en aanpakgedrag, namelijk dat sprake is van een convergerende tendens. Met name voor de mate van compactheid maar ook voor de mate van overzichtelijkheid geldt dat de groep Z25 nog een flinke weg te gaan heeft en dat deze leerlingen het niveau van de groep B25

nog niet benaderen. Gelet op het feit dat veel leerlingen uit de groep Z25 blijkens de in hoofdstuk 7 gepresenteerde resultaten aan het einde van de leergang nog niet tot een hoge graad van verkorting van hun oplossingswijzen zijn gekomen, is dit een verklaarbaar verschijnsel.

Zoals uit tabel 4 van Bijlage 7 geconcludeerd kan worden, is de vooruitgang van beide groepen leerlingen significant en treden de toenames op beide aspecten van het notatiegedrag in gelijke mate op voor deze beide groepen leerlingen ($F[4,164] = 0{,}34$ resp. $1{,}26$; $p > .85$ resp. $.28$).

8.4.4 Verschillen tussen jongens en meisjes

In de tabel van fig. 8.16 en de grafieken van fig. 8.17 is te zien hoe de progressie van jongens en meisjes als afzonderlijke groepen is verlopen.

2. geslacht: 1=j; 2=m * Tijd

					95% Confidence Interval	
Measure	geslacht: 1=j; 2=m	Tijd	Mean	Std. Error	Lower Bound	Upper Bound
Compactheid	1	1	2.240	.070	2.101	2.379
		2	2.371	.055	2.263	2.480
		3	2.540	.047	2.446	2.634
	2	1	2.058	.074	1.910	2.205
		2	2.323	.058	2.207	2.438
		3	2.443	.050	2.343	2.542
Overzichtelijkheid	1	1	2.453	.059	2.336	2.571
		2	2.664	.042	2.580	2.749
		3	2.818	.029	2.760	2.875
	2	1	2.400	.063	2.275	2.525
		2	2.685	.045	2.596	2.774
		3	2.873	.031	2.812	2.933

Fig. 8.16: Tabel met de resultaten van de jongens en meisjes afzonderlijk voor de beide criteria compactheid en overzichtelijkheid.

Uit deze gegevens en uit de in tabel 5 van Bijlage 7 opgenomen gegevens blijkt dat jongens en meisjes zich voor beide criteria positief hebben ontwikkeld, waarbij de progressie van T1 naar T2 ongeveer even groot is als de progressie van T2 naar T3. Hoewel de grafiek voor compactheid lijkt te suggereren dat jongens het wat dit criterium betreft beter doen dan meisjes, blijkt dit verschil niet significant te zijn (tabel 5, Bijlage 7).

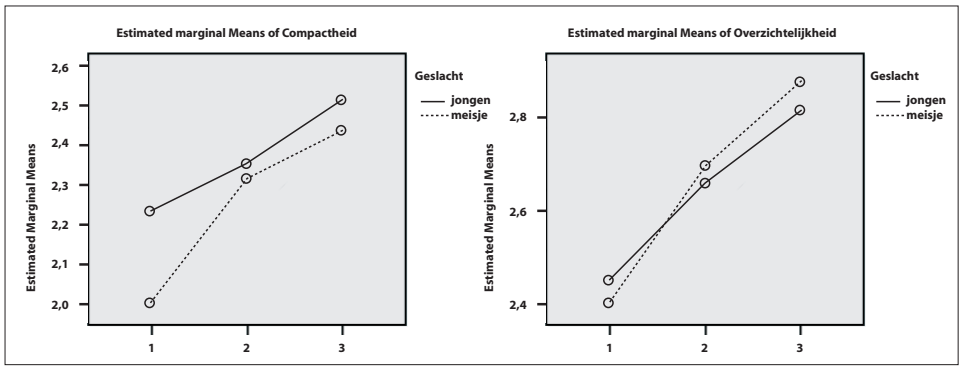


Fig. 8.17a en 8.17b: Grafisch overzicht van de ontwikkeling van het notatiegedrag qua compactheid (fig. 8.17a) en qua overzichtelijkheid (fig. 8.17b) voor de jongens en meisjes afzonderlijk. De getallen 1, 2 en 3 op de horizontale as verwijzen weer naar de toetsafnames T1, T2 en T3.

8.5 Conclusies en discussie met betrekking tot de ontwikkeling van het notatiegedrag

8.5.1 Mate van betrouwbaarheid van de beoordeling

Over de vraag hoe valide het beoordelingsinstrument is in de zin dat het ook werkelijk meet wat het pretendeert te meten, zijn in het licht van de hierboven beschreven werkwijze de nodige opmerkingen te maken. Zo bleek het notatiegedrag in enkele gevallen multi-interpretabel te zijn. In het voorbeeld links in fig. 8.18 hanteert de leerling in principe de S2-strategie waarbij het tweede getal gesplitst wordt in 1 en 0,95; maar bij het uitrekenen van 12x95 heeft de leerling vervolgens de per definitie onjuiste strategie van het verkeerd splitsen (VS) toegepast. Omdat van deze VS-strategie al eerder was vastgesteld dat deze niet-beoordeelbaar is, werd uiteindelijk besloten om alle notatievormen waarbij sprake is van een vorm van verkeerd splitsen, als niet-beoordeelbaar aan te merken.

Lastig bleek het soms om tot een eenduidige beoordeling te komen in het geval van doorhalingen of andere vormen van onoverzichtelijkheid. In het geval van het notatiegedrag rechts in fig. 8.18 gebruikt de leerling een onorthodoxe variant van de S2-strategie waaraan de score Cp 2 toegekend kan worden. Maar welke score moet er voor overzichtelijkheid gegeven worden? Er zit een doorhaling in de berekening, de getallen staan wat chaotisch genoteerd, en de leerling gaat ook nog buiten het kader.

In zo'n geval zou Ov 1 toegekend kunnen worden, maar omdat de elementen van onoverzichtelijkheid van betrekkelijk ondergeschikte betekenis zijn, is uiteindelijk toch een score van Ov 2 gegeven[3].

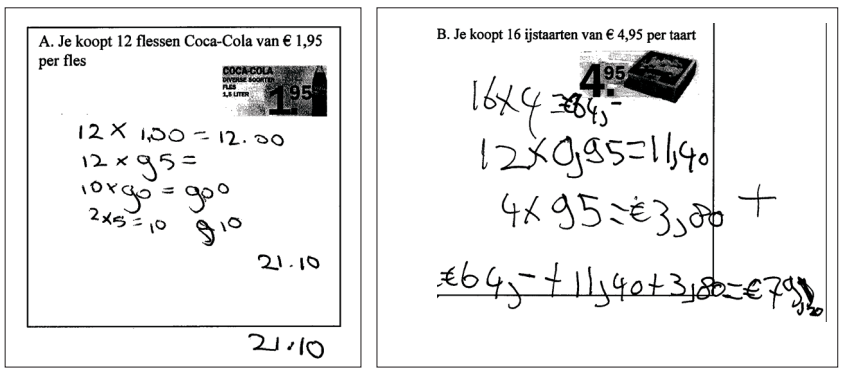


Fig. 8.18: Twee voorbeelden van notatiegedrag dat volgens de aangelegde criteria moeilijk eenduidig te beoordelen is.

Op een soortgelijke manier waren er nog enkele andere discussiepunten. Zo is het wellicht enigszins arbitrair of strategieën als AS en S12 op compactheid wel onder Cp2 gerangschikt moeten worden. Gelet op het tamelijk efficiënte karakter van deze strategieën, valt er ook iets voor te zeggen om in sommige van deze gevallen een score van Cp 3 toe te kennen. Het probleem is echter dat via al dergelijke nuanceringen de scheidslijnen tussen de verschillende categorieën dreigen te vervagen, hetgeen eenduidige beoordeling steeds moeilijker maakt. Bovendien gaat het bij de beoordeling toch vooral om het signaleren van de grote lijn in de ontwikkeling van het notatiegedrag, en het lijkt aannemelijk dat kleine verschuivingen zoals die hierboven staan aangegeven, geen wezenlijke invloed hebben op de trends die geconstateerd kunnen worden in de globale ontwikkeling van het notatiegedrag. Op grond van deze overwegingen kan besloten worden dat het beoordelingsinstrument met het oog op het nagestreefde doel, voldoende betrouwbaar is.

8.5.2 Enige conclusies en aandachtspunten aangaande de ontwikkeling van het notatiegedrag

Je als leerling bewust worden van de mogelijkheden om het eigen oplossingsproces in wiskundige probleemsituaties met informele hulpnotaties te ondersteunen en in het gebruik van zulke notaties een zekere mate van bedrevenheid verwerven, kan als een belangrijke doelstelling van reken-wiskundeonderwijs beschouwd worden (Klep

e.a., 2006). De taal is immers het voertuig van het denken, en de schriftelijke taal die leerlingen tijdens het wiskundige leerproces leren gebruiken, is een belangrijk hulpmiddel om het eigen denken en redeneren tot uitdrukking te brengen (Kaput, 1987), om reflectie over dat denken te stimuleren (Meira, 2003), om bepaalde strategische of relationele aspecten van eigen of andermans oplossingsgedrag te doordenken en om, meer in het algemeen, tot wiskundige progressie te komen. Ook vanuit de historie gezien vormt deze taalontwikkeling een belangrijk element in de ontwikkeling van de wiskunde als wetenschap (Damerow et al., 1981). Daarom kan aandacht voor de ontwikkeling van adequaat notatiegedrag als een essentieel aspect van realistisch reken-wiskundeonderwijs beschouwd worden.

Bij de gekozen definiëring van criteria voor de boordeling van notatiegedrag is er in de hierboven weergegeven resultaten over de hele linie een duidelijke vooruitgang te bespeuren. Dit geldt zowel voor de scholen afzonderlijk als voor alle scholen samen. Bovendien geldt het zowel voor de groep van 25% zwakste leerlingen als voor de groep van 25% beste leerlingen, alsmede voor zowel de jongens als de meisjes. Daarom is het gerechtvaardigd om te concluderen dat het beoogde onderwijs daadwerkelijk in belangrijke mate heeft bijgedragen tot de ontwikkeling van adequaat notatiegedrag. Meer in het algemeen mag verwacht worden dat de wiskundige progressie van leerlingen, zeker ook van de groep zwakkere leerlingen in het reken-wiskundeonderwijs, bevorderd zal worden indien in dat onderwijs systematische aandacht wordt besteed aan het goed leren noteren van de eigen oplossingen, en aan het gezamenlijk doordenken van de daarbij gehanteerde notatievormen. Meer in het bijzonder zou deze aandacht tot uitdrukking kunnen komen in een aantal aandachtspunten waarvan geprobeerd is om deze in het tijdens het onderhavige onderzoek doorlopen onderwijsleertraject zo goed mogelijk tot hun recht te laten komen:
(1) Het uitgaan van concrete contextsituaties, en dan met name verhoudingssituaties en groepjessituaties waarbij de objecten in kwestie zodanig op het blad staan weergegeven dat het sterk voor de hand ligt om via passende, bij voorkeur door de leerlingen zelf ontworpen schematiseringen tot een oplossing te komen;
(2) Het in de gebruikte onderwijsleermaterialen tot uitdrukking laten komen dat het op prijs gesteld wordt als leerlingen hun oplossingswijzen zo zorgvuldig en doordacht mogelijk op papier zetten. Dit kan bijvoorbeeld door bij veel opgaven op de werkbladen maar ook in de toetsen het kladblaadje prominent af te beelden.
(3) Het bordgebruik: door aanpakken van leerlingen tijdens besprekingsmomenten zo 'natuurgetrouw' mogelijk op het bord te (laten) noteren en deze niet alleen

op efficiëntie en mate van verkorting te bespreken, maar ook op mate van overzichtelijkheid en begrijpelijkheid.
(4) De interactie: het zo begrijpelijk mogelijk laten verwoorden van handelingen en oplossingen. Bij voorkeur dient er tijdens interactiemomenten een directe relatie tot stand te komen tussen de door een leerling uitgevoerde handelingen, de verwoording daarvan, en de notatie op het bord.
(5) De 'klassecultuur'. Juist als het door de leerlingen produceren van 'mooie' notatievormen (dat wil zeggen: goed te begrijpen, overzichtelijk, gericht op communicatie) positief gewaardeerd wordt, ontstaat een 'cultuur' in de klas waarin het notatiegedrag van de leerlingen zich steeds verder kan ontwikkelen[4].

Een mogelijkheid om deze cultuur verder te stimuleren ontstaat als de leerlingen van tijd tot tijd uitgenodigd worden hun oplossingen zo 'mooi' mogelijk op een poster te noteren, en deze vervolgens gezamenlijk te bespreken. Zo verscheen bij een opgave rond een bloemperk van 48 rijen van 35 bloemen in school 300 tijdens les 4 de in fig. 8.19 weergegeven oplossing op een poster. Op zich betrof het hier een tamelijk bewerkelijke oplossingwijze (waarbij met 4 groepen van 12 rijen wordt gewerkt), maar voor de leerling in kwestie (een van de zwakste leerlingen) was het een geweldige ervaring om te merken hoe positief deze oplossing zowel door de leraar als door medeleerlingen gewaardeerd werd om haar overzichtelijkheid en helderheid.

8.5.3 Variëteit in notatievormen als indicatie voor toegenomen inzicht

Kan uit het voorgaande nu ook geconcludeerd worden dat de leerlingen steeds meer *inzicht* in de leerstof hebben gekregen en dat ook in dit opzicht dus een duidelijke vooruitgang is geboekt? Dat hoeft niet zonder meer het geval te zijn. Het zou immers kunnen zijn dat leraren de beoogde notatievormen op een tamelijk stringente manier hebben opgelegd zonder dat leerlingen daarvoor de noodzaak en wenselijkheid hoefden in te zien. In dat geval zou in het notatiegedrag van de leerlingen echter een sterke mate van uniformiteit aangetroffen moeten worden. Als ze immers een notatievorm voornamelijk via een patroon van nadoen van de leraar zouden zijn gaan gebruiken, dan zouden deze notatievormen binnen de klas als geheel sterk met elkaar overeen moeten komen. Als de notatievormen op dit punt van uniformiteit nader onder de loep genomen worden, blijkt al gauw dat hiervan geen sprake is. Weliswaar komen de gebruikte notatievormen in een aantal opzichten tamelijk goed met elkaar overeen, maar dit lag ook in de lijn van het beoogde onderwijs. Er zijn echter op een groot aantal kleinere punten steeds allerlei verschillen tussen de notatievormen binnen een klas te constateren, en dit wijst

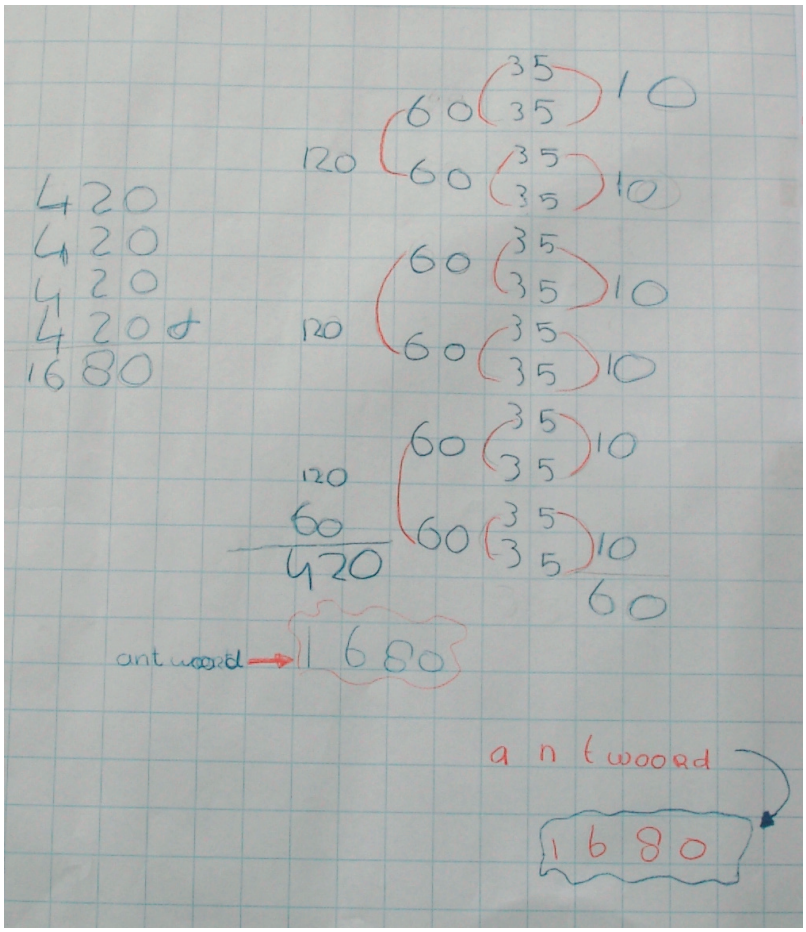
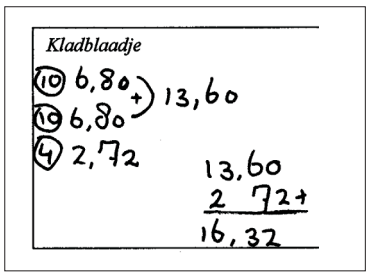


Fig. 8.19: Op een poster weergegeven oplossingswijze van een leerling uit school 300 bij de opgave 'een bloemperk met 48 rijen van 35 bloemen'.
Op zich betreft het een tamelijk omslachtige aanpak, maar de notatie als zodanig werd in de klas geprezen om haar overzichtelijkheid en duidelijkheid.

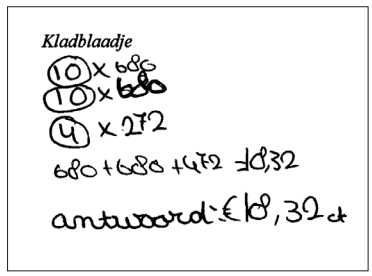
erop dat de leerlingen wel degelijk tot op zekere hoogte hun eigen weg volgden en op basis van inzicht eigen varianten gingen gebruiken. Ter illustratie daarvan volgt hieronder, tot besluit van deze analyse, een globaal overzicht van de variëtiet aan notatievormen die binnen één klas (bij school 500) bij één opgave uit de tweede criteriumtoets (24x68) gebruikt werden.

A. Notatievormen bij gebruik van de S1-strategie bij T2

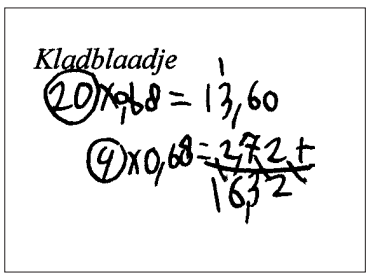
a.



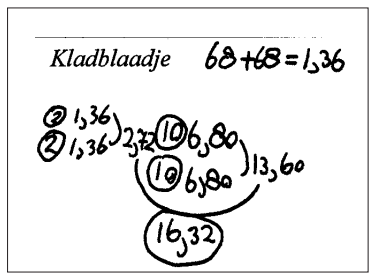
b



c.



d



a. Leerling 501: S1-strategie via 10x, 10x en 4x; met notatie van tussenantwoord 13,60 en aparte optelling 13,60+2,72.

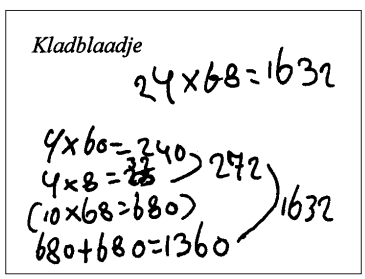
b. Leerling 507: S1-strategie via 10x, 10x, en 4x; tussen-antwoorden apart genoteerd en opgeteld (met een verschrijving en daardoor een fout).

c. Leerling 512: S1-strategie via 20x en 4x; geen tussenantwoorden genoteerd.

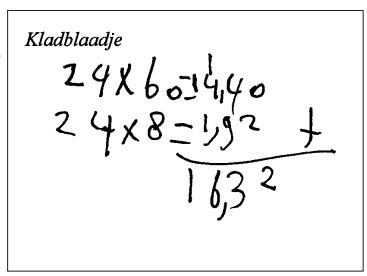
d. Leerling 514: S1-strategie via 2x, 2x, 10x en 10x; met notatie van twee tussenantwoorden.

B. Notatievormen bij gebruik van andere decimaal splitsen-strategieën bij T2

a.



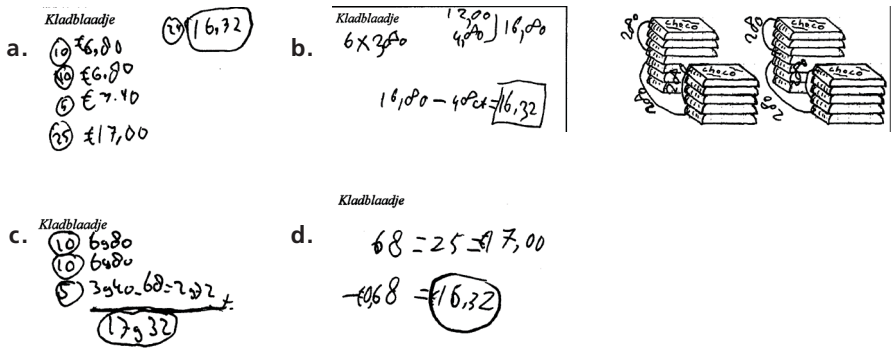
b.



a. Leerling 510: S12-strategie via 4x68 (via 4x60 en 4x8), 10x68 en 10x68 met notatie van tussenantwoorden.

b. Leerling 525: S2-strategie via 24x60 en 24x8, zonder notatie van tussenantwoorden.

C. Notatievormen bij gebruik van compenseren als strategie bij T2



a. Leerling 506: S1-strategie met compenseren via 10x, 10x, 5x en –1x; geen tussenantwoorden genoteerd.
b. Leerling 511: Combinatie van groeperend rekenen (4 groepjes van 6) en compenseren (6x68 via 6x70).
c. Leerling 518: S1-strategie met compenseren zoals leerling 506; maar met notatie tussenantwoord.
d. Leerling 513: Compenseren via 68x25 min 68.

Uit veel van deze notaties spreekt een hoge mate van doordachtheid, een goed ontwikkeld vermogen om de eigen redenering op een heldere en expressieve wijze weer te geven. Op hoofdpunten komen de notaties vrij goed met elkaar overeen, maar elke individuele leerling zet de notatie toch weer enigszins naar de eigen hand, en geeft daarmee blijk van een goed ontwikkeld besef van 'weten waar je mee bezig bent'. In die zin kan geconcludeerd worden dat het steeds efficiënter leren gebruiken van al dergelijke notaties tevens als een uiting van toegenomen inzicht kan worden opgevat.

voetnoten

1 Een voorbeeld van een dergelijke strategie is die van het compenseren. In principe is dit een tamelijk complexe strategie, maar tijdens het onderwijsexperiment werd herhaaldelijk gesignaleerd dat een leerling deze strategie op een betrekkelijk laag niveau uitvoerde. Zie het voorbeeld dat in paragraaf 3 van hoofdstuk 9 wordt gegeven.

2 Zie hiervoor bijvoorbeeld de beschrijving van de leerlijn optellen en aftrekken tot 100 in de inleiding van Handleiding 1 van groep 4 van *Wis en Reken*, p. 39-41 (Buys et al, 2000).

3 In feite betrof het hier een strategie waarbij handig gebruik werd gemaakt van een al uitgerekende opgave die verwant was aan de nog uit te rekenen opgave. Bij opgave 5a had de betreffende leerling de opgave 12x€1,95 namelijk opgelost via dezelfde S2-strategie door 12x1 en 12x0,95 uit te rekenen en deze subtotalen vervolgens op te tellen. Van de reeds uitgerekende subopgave 12x0,95=11,40 maakt hij vervolgens gebruik bij het uitrekenen van de subopgave 16x0,95 door een onderverdeling in 12x0,95 en 4x0,95 aan te brengen.

4 Gravemeijer (2003b) onderscheidt in navolging van Cobb (1993) aan de genoemde klassecultuur twee aspecten, namelijk dat van de sociale normen (social norms) en de wiskundig-sociale normen (socio-mathematical norms). Bij laatst genoemde normen gaat het bijvoorbeeld om de vraag wat telt als een andere wiskundige oplossing, wat als handige en minder handige oplossingen beschouwd dienen te worden, en wat geldt als een aanvaardbare wiskundige onderbouwing van een oplossingswijze. Wellicht is het zinvol om het aspect van het notatiegedrag hieraan toe te voegen in de zin dat het streven naar overzichtelijke en heldere wiskundige notatievormen als een algemeen aanvaard doel door leerlingen en leraar wordt gezien. Zoals de voorbeelden aan het eind van paragraaf 5 van hoofdstuk 8 is te zien, zou zelfs te overwegen zijn om een esthetisch aspect aan deze argumentatie te onderscheiden: soms laten bepaalde leerlingen dermate fraaie notatievormen zien dat dit een algemene ervaring van ‘schoonheid’ onder de medeleerlingen en de leraar teweeg kan brengen.

9 Bevindingen, discussie en aanbevelingen

9.1 Inleiding; terugblik op het doorgemaakte ontwikkelproces

Nadat in de vorige twee hoofdstukken een aantal resultaten zijn geanalyseerd betreffende de ontwikkeling van goedscores, aanpakgedrag en notatiegedrag, worden in dit hoofdstuk een aantal bevindingen met betrekking tot het onderzoek als geheel gepresenteerd. Hiermee wordt de derde onderzoeksvraag beantwoord, die handelt over de lokale onderwijstheorie als grondslag voor de experimentele leergang. Vertrekpunt voor dit hoofdstuk is gelegen in een reflectie in paragraaf 1 op de in hoofdstuk 5 geformuleerde verwachtingen en op de daarmee verbonden cruciale onderwijsmomenten die in hoofdstuk 6 werden gememoreerd. Naar aanleiding van de bevindingen met betrekking tot het al dan niet uitkomen van deze verwachtingen wordt in paragraaf 2 vervolgens een voorstel voor een aangepaste leergang gepresenteerd. Nadat in paragraaf 3 eerst een analyse is gemaakt van het niveaukarakter van deze leergang, wordt in aansluiting daarop een lokale onderwijstheorie geformuleerd. Op basis van alle gegevens en analyses uit de laatste drie hoofdstukken worden daarna in paragraaf 4 een viertal bevindingen beschreven die als de belangrijkste nieuwe vakinhoudelijke inzichten kunnen worden aangemerkt die het onderzoek heeft opgeleverd. In paragraaf 5 tenslotte volgt een bespreking van vier discussiepunten die uitmondt in enkele aanbevelingen.

Lessen trekken uit 'didactische complicaties'

In hoofdstuk 6 is een aantal cruciale momenten beschreven die zich tijdens de experimentele fase van het onderzoek bij de uitvoering van de lessen voordeden. Enerzijds betrof dit momenten waarop zich een bevestiging voordeed van wat tevoren verwacht was met betrekking tot zaken als aanpakgedrag, beoogde verkortingen, gebruik van notatievormen, en zo meer. Anderzijds ging het om momenten waarop zich gebeurtenissen voordeden die juist niet verwacht waren. Met name deze laatste momenten kunnen in het algemeen waardevolle aanwijzingen opleveren voor verbetering en aanpassing van een leergang. Zoals in hoofdstuk 6 is beschreven, gaven zulke momenten soms aanleiding tot directe aanpassingen omdat zich onvoorziene complicaties voordeden (men zou dit 'didactische complicaties' kunnen noemen) waaraan op korte termijn het hoofd geboden diende te worden. Het is echter lang niet altijd goed mogelijk om eventuele aanpassingen direct door te voeren. Dit kan te maken hebben met het feit dat het lesmateriaal voor een aanzienlijk deel ruim voor aanvang van het onderwijsexperiment ontworpen en geproduceerd moet zijn. Is dat niet het geval, dan kan het moeilijk zijn om de aan het experiment deelnemende

scholen tijdig van de betreffende materialen te voorzien en dreigt een zorgvuldig planmatig verloop van het experiment in de knel te komen.

Maar er is nog een andere reden waarom aanpassingen soms niet direct kunnen worden aangebracht – een reden die meer inherent is aan het proces van ontwerpen en ontwikkelen. Zoals in hoofdstuk 6 reeds is aangegeven, is het namelijk lang niet altijd mogelijk om niet verwachte gebeurtenissen meteen goed te duiden en om daar op korte termijn de juiste lessen uit te trekken. Het kan zijn dat men als onderzoeker in eerste instantie niet goed snapt wat er nu precies aan de hand is, wat de diepere oorzaken van een didactische complicatie zijn en wat het beste gedaan kan worden om zo'n complicatie te overwinnen. Daarvoor is vaak nadere overdenking oftewel reflectie nodig, alsmede overleg met aan het experiment deelnemende leraren en met eventuele mede-onderzoekers. Als resultaat van dergelijke reflectie kan dan soms vastgesteld worden dat het slechts een complicatie van incidentele aard betrof die zich niet voordeed in de andere klassen waarin het experiment plaatsvond. Maar het kan ook zijn dat het om een algemene tendens gaat die zich regelmatig voordoet. Het gaat er vooral om zulke tendensen goed te achterhalen en om op basis daarvan naderhand aanpassingen in een leergang aan te brengen.

Enkele bevindingen met betrekking tot niet uitgekomen verwachtingen
Zoals in hoofdstuk 6 is geconstateerd, zijn een aantal van de verwachtingen die met het oog op het praktijkexperiment geformuleerd waren, niet of slechts ten dele uitgekomen. In grote lijnen gaat het om de volgende drie punten:

(1) Het bleek in de eerste fase van de leergang beduidend minder makkelijk om de leerlingen (en soms de leraren) te overtuigen van het nut van het groeperend rekenen als een weliswaar wat primitieve maar eenvoudig te begrijpen en perspectiefrijke strategie. Sommige leerlingen bleken zich niet aangesproken te voelen, en zagen ook niet hoe je op basis van deze aanpak steeds handiger en efficiënter tot een oplossing kunt komen.

(2) De onjuiste strategie van het verkeerd splitsen (VS) bleek veel hardnekkiger en langduriger voor te komen dan van tevoren was ingeschat. Ook betere leerlingen bleken, nadat ze reeds uitvoerig kennis hadden gemaakt met het werken met groepjes van 10 en verkortingen daarvan, bij vlagen soms toch terug te vallen op deze aanpak. Het is dus niet goed gelukt om de onjuistheid van deze aanpak reeds in een vroeg stadium inzichtelijk te maken voor alle leerlingen.

(3) Het bleek veel meer moeite te kosten om de leerlingen een goed inzicht te doen verwerven in de nulregel – de regel die stelt dat je een nul achter een getal mag plaatsen als dat getal met 10 vermenigvuldigd wordt. Veel meer dan van tevoren was ingeschat bleek het een proces van de lange adem te zijn om de leerlingen deze nulregel goed te doen doorzien en efficiënt te laten inzetten.

Een consequentie van het eerstgenoemde punt is dat het voor de leerlingen aantrekkelijker en voor de hand liggender gemaakt moet worden om deze basale aanpak te gaan gebruiken. Dit kan bijvoorbeeld door de getallen binnen de betreffende contexten wat lastiger te maken, zodat het ook voor betere leerlingen interessant wordt om deze strategie in te zetten. Het kan ook door de objecten waar het in de een context om gaat (zoals bomen in een boomgaard, dozen op een plank e.d.) op een voorgestructureerde wijze weer te geven, zoals in groepjes van 4 of van 5. En een derde mogelijkheid is om een historische context ten tonele te voeren rond een (fictief) land waarin grote vermenigvuldigopgaven gewoonlijk opgelost worden via groeperend rekenen. Vanuit het perspectief van een koning of een schatbewaarder zouden de leerlingen dan op zoek kunnen gaan naar verkortingen en efficiëntere notatievormen. Verder speelt ook het tijdstip van aanbieding van de leergang een rol. Dit tijdstip was in het onderzoek tamelijk laat, namelijk vanaf september in groep 7. Zou de leergang vroeger op het programma hebben gestaan (bijvoorbeeld: medio groep 6), dan zou het op voorhand al meer voor de hand gelegen kunnen hebben voor veel leerlingen om het werken met groepjes als strategie in gebruik te nemen. In dat geval zouden namelijk veel meer leerlingen in eerste instantie geneigd zijn om de betreffende opgaven, die op dat moment nog tamelijk complex voor ze zouden zijn, via allerlei basale vormen van herhaald optellen, verdubbelen en herhaald verdubbelen op te lossen[1]. Het groeperend rekenen zou dan veel beter aansluiten bij de eigen, intuïtieve aanpakken van de leerlingen en veel meer ervaren kunnen worden als een stap in de goede richting.

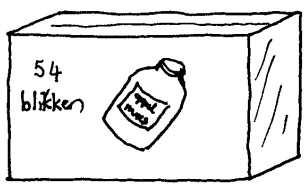
Een consequentie van het tweede punt is dat het aan te bevelen is om de onjuistheid van de VS-strategie veel eerder en op een andere manier aan de orde te stellen. Nu was het zo dat dit op een betrekkelijk laat tijdstip enkele keren onder de aandacht kwam in de context van een rechthoeksituatie. Bijvoorbeeld: in de context van het bepalen van het aantal auto's op een groot parkeerterrein met 48 rijen van 95 auto's, bezonnen de leerlingen zich op de vraag of een oplossing via 40x90 en 8x5 (3600+40, dus antwoord 3640) correct was. Zie fig. 9.1.



Fig. 9.1: Voorbeeld van een context waarbinnen de onjuistheid van de VS-aanpak aan de orde werd gesteld (les 11).

De verwachting was dat de leerlingen aan de hand van de bijgeleverde rechthoek (bestaande uit 48 rijen van 95 hokjes) zouden doorzien dat je dan enkele factoren vergeet. Dit bleek echter niet voldoende het geval te zijn; er deed zich bepaald niet de gehoopte Aha-Erlebnis voor op grond waarvan de leerlingen voor eens en voor altijd zouden doorzien dat dit een foute aanpak is. Het zou in de eerste plaats al een verbetering zijn als de getallen veel eenvoudiger waren, bijvoorbeeld door een situatie te nemen waarin het gaat om 12 rijen van 15 auto's. Het lijkt aannemelijk dat het dan ook een stuk eenvoudiger te doorzien is dat een uitkomst van 110 (10x10 en 2x5) nooit juist kan zijn. Een van de aan het experiment deelnemende leraren kwam tijdens een nabespreking nog met een andere suggestie, namelijk om voor het ontmaskeren van deze onjuiste strategie in eerste instantie een verhoudingscontext te nemen rond van het kopen van boeken of iets dergelijks. Bijvoorbeeld: iemand koopt 12 boeken van elk 15 euro. In zo'n situatie is het, gezien vanuit het standpunt van de koper én de verkoper, belangrijk om te achterhalen of het totaalbedrag via 10x10 plus 2x5 correct uitgerekend wordt. Om te voorkomen dat de VS-strategie al gauw een eigen leven gaat leiden in het denken van sommige leerlingen, is het voorts aan te bevelen om deze strategie in een veel eerder stadium van de leergang ter discussie te stellen. Als bijvoorbeeld in les 3 of 4 een brede verkenning van meercijferige vermenigvuldigingen plaatsvindt in de context van schoolboeken aanschaffen, kan in een aansluitende activiteit onderzocht worden waarom de opgave '12 schoolboeken van 15 euro' niet correct via 10x10 en 2x5 opgelost kan worden. Nader onderzoek zou overigens moeten uitwijzen in hoeverre dergelijke aanpassingen tot betere resultaten leiden.

Een consequentie van het derde punt is dat het aanbeveling verdient om de nulregel explicieter en diepgaander aan de orde te stellen. Wordt dit niet gedaan, dan is er immers het gevaar dat leerlingen het maken van groepjes van 10 (een belangrijke stap in de leergang, zie hoofdstuk 5 en 6), te weinig als een handige en verkorte werkwijze ervaren. Het inzicht in de nulregel zou gaandeweg verder tot ontwikkeling kunnen komen indien de problematiek van het vermenigvuldigen met 10 in de leergang op gezette tijden in voor de hand liggende situaties terugkomt. Zo kan in het begin, bijvoorbeeld in een winkelsituatie, onderzocht worden hoe je voor allerlei artikelen de prijs van 10 ervan handig kunt bepalen. Zoals in hoofdstuk 6 is besproken, is het namelijk vaak zo dat leerlingen de nulregel wel in het geval van eenvoudige en ronde getallen begrijpen en weten toe te passen (10x5=50; 10x20=200; 10x50=500), maar veel minder in iets complexere gevallen zoals bij 10x16=160, 10x34=340 en 10x125=1250). Zou in de genoemde situatie expliciet worden onderzocht 'wat er met de getallen gebeurt' als je een bedrag als 34 euro met 10 vermenigvuldigt (de losse euro's worden tientjes, de tientjes worden honderdjes, enzovoorts), dan zou daarmee de algemene regel van het plaatsen van een nul achter het getal beter aannemelijk gemaakt kunnen worden. Naderhand zou dit nog eens kunnen terugkomen in een situatie waarin eigen producties centraal staan in de context van verpakkingen. Bijvoorbeeld: als je weet dat er in 1 doos 24 pakjes boter zitten, welke aantallen dozen zou je dan ook makkelijk kunnen uitrekenen? En in het geval er 54 blikken appelmoes in een doos zitten? En in het geval er 125 pakken lucifers in een doos zitten? (zie fig. 9.2)



In 1 doos 54 blikken appelmoes,
in .. dozen .. blikken
Bedenk zelf aantallen dozen
waarvan je makkelijk het aantal
blikken kunt uitrekenen.
....
....
....

9.2: Voorbeeld van een opgave waarbij het voor de hand ligt dat leerlingen zelf veelvouden van 10 en 100 als aantal dozen bedenken, en daarmee op het spoor van de nulregel gezet kunnen worden.

Naar voren zou kunnen komen dat je in al zulke gevallen het aantal blikken of pakken in 10 dozen en ook in 100 dozen eenvoudig uit het hoofd kunt bepalen. Speciale

aandacht dient vervolgens ook nog eens uit te gaan naar het vermenigvuldigen van geldbedragen met 10. Tijdens het experiment is herhaaldelijk gebleken dat opgaven als 10x7,50 en 10x19,95 problemen opleveren. Ook hier geldt dat expliciete aandacht voor dit type opgaven geboden is, waarbij de leerlingen nogmaals uitgedaagd kunnen worden om te beargumenteren wat er 'met de getallen gebeurt' als deze met 10 vermenigvuldigd worden[2].

Enkele bevindingen met betrekking tot wel uitgekomen verwachtingen
In hoofdstuk 7 en 8 zijn reeds enkele bevindingen gedaan die betrekking hebben op verwachtingen die wel zijn uitgekomen. Deze geven uiteraard geen aanleiding om de leergang op fundamentele punten bij te stellen. Niettemin is het nuttig om deze op een rij te zetten, zodat ze mogelijk gebruikt kunnen worden om tot een zekere aanscherping van lesinhouden en leerdoelen binnen de leergang te komen. De voornaamste bevindingen zijn:

(1) Het door de leerlingen in gebruik laten nemen van eigen notatievormen en het door hen zelf laten aanbrengen van verbeteringen en verkortingen in deze notaties vormt een waardevol element in de leergang dat niet alleen bijdraagt aan steeds verdere verkorting en niveauverhoging, maar ook aan het steeds beter overzien van de verschillende stappen die tijdens de berekening worden uitgevoerd.

(2) Het gedurende een aanzienlijk deel van de leergang (met name in het middendeel van de leergang) centraal stellen van de S1-strategie als een basisstrategie waarmee op een betrekkelijk veilige en efficiënte wijze alle typen vermenigvuldigingen met grotere getallen opgelost kunnen worden, heeft in aanzienlijke mate bijgedragen tot het succes van de leergang en kan daarom eveneens als een waardevol element worden opgevat.

(3) Het in de laatste fase van de leergang gevoelig maken voor alternatieve strategieën (met name het compenseren en halveren-verdubbelen) die vooral in aanmerking komen indien de getallen zich daarvoor goed lenen, vormt eveneens een waardevol element van de leergang.

Bij deze bevindingen zijn nog enkele kanttekeningen te plaatsen. Zo is het wat het eerste punt betreft natuurlijk niet zo dat de genoemde notatievormen geheel en al op eigen kracht door de leerlingen ontworpen hoeven te worden. Zoals in voorgaande hoofdstukken herhaaldelijk is gesteld, kunnen zij met name door de voorbeelden

die door de leraar op het bord getoond worden, geïnspireerd worden om tot een passende notatievorm te komen. Op het bord kan bijvoorbeeld door de leraar, naar aanleiding van wat een aantal leerlingen in de klas zelf hebben gedaan, getoond worden hoe je het maken van groepjes van 10 op een picturaal-schematische wijze kunt weergeven. Zie het bovenste voorbeeld in fig. 9.3 voor een opgave waarbij de prijs van 24 koeken van 68 cent bepaald moet worden. Al naar gelang van wat zich in de klas aandient, kunnen ook compactere en meer formele notatiewijzen op het bord komen (zie de onderste twee notatievormen in fig. 9.3). In hoofdstuk 6 is geconstateerd dat het naast elkaar op het bord laten verschijnen van dergelijke oplossingen bepaald niet schadelijk hoeft te zijn.

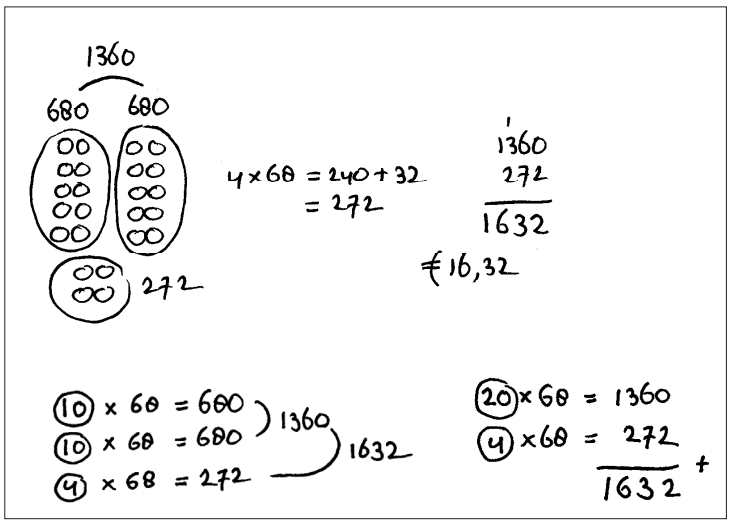


Fig. 9.3: Drie voorbeelden van oplossingswijzen die door de leraar op het bord kunnen worden gezet naar aanleiding van wat de leerlingen aandragen.

Tijdens het experiment is gebleken dat de leerlingen inderdaad tot dergelijke verkortingen komen en dat deze benadering goede mogelijkheden biedt om op eigen niveau geleidelijk aan de nodige progressie te boeken. Een enigszins tijdrovende maar waardevolle andere mogelijkheid om aanpakken en notatievormen te vergelijken, is om enkele leerlingen de eigen aanpak tegen het einde van een verwerking zelf op het bord te laten zetten zodat deze als uitgangspunt voor de nabespreking kunnen fungeren. Zie de foto in fig. 9.4 waarbij de leerlingen de eigen oplossingswijze op het bord hebben genoteerd die betrekking had op een opgave rond de totaalprijs van een stapel van 3x3x4 (en dus 36) pakjes boter van € 1,95 per pakje.

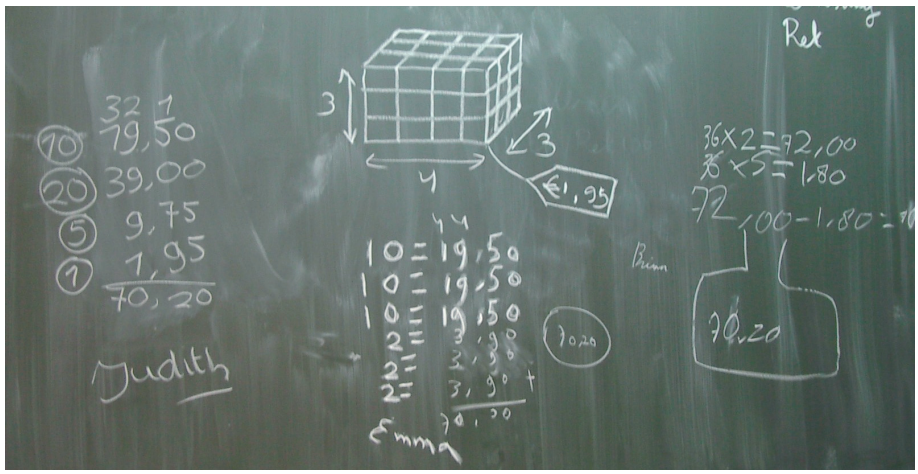


Fig. 9.4: Drie voorbeelden van oplossingswijzen die door de leerlingen zelf op het bord zijn genoteerd bij een opgave waarbij de prijs van 36 pakjes boter van € 1,95 per pakje bepaald moest worden.

Voor wat betreft het tweede punt kan gesteld worden dat centrale aandacht voor de S1-strategie tijdens het middengedeelte van de leergang belangrijk is doordat deze strategie direct voortkomt uit de eerdere ervaringen met het groeperend rekenen dat in de eerste fase van de leergang veel aandacht heeft gekregen. Deze treedt dus op een natuurlijke wijze uit het werken met kleine groepjes naar voren en verwijst daar in de 'rondjesnotatie' ook naar. Bovendien kan een meer formele, procedurele werkwijze die in het verlengde van de S1-aanpak ligt, weer voortkomen uit steeds verdere verkorting van deze basisstrategie.

Dit hoeft uiteraard niet te betekenen dat andere strategieën geheel en al buiten beschouwing blijven. Indien leerlingen op een doordachte manier andere strategieën gebruiken waarbij decimaal gesplitst wordt (zoals de AS-strategie maar ook de S2-strategie) of waarbij vormen van compenseren worden toegepast, dan is daar niets op tegen. Maar wel is het aan te bevelen om de nadruk in de instructie op het inzichtelijk maken en steeds efficiënter laten hanteren van de S1-aanpak te leggen.

Voor wat betreft het derde punt geldt dat de genoemde alternatieve aanpakken van compenseren en halveren-verdubbelen vooral belicht kunnen worden, indien het gebruik van de S1-strategie tot op zekere hoogte is veilig gesteld. Zijn de leerlingen hier voldoende vertrouwd mee, dan kan van tijd tot tijd naar voren komen hoe in bepaalde gevallen het compenseren en het halveren-verdubbelen in aanmerking

komen, zoals in de hierboven beschreven situatie waarbij de prijs van 36 pakjes boter van € 1,95 bepaald moet worden. Een interessante mogelijkheid om de strategie van halveren-verdubbelen onder de aandacht te brengen kwam tijdens het onderzoek naar voren in de context van het zelf bepalen van de grootte van rechthoekige tegelpleintjes als er in totaal bijvoorbeeld 240 tegels beschikbaar zijn. Het is dan mogelijk om het ene pleintje als het ware uit het andere af te leiden, en zo kan een hele serie pleintjes ontstaan die direct uit elkaar afgeleid worden. Zie de voorbeelden in fig. 9.5. Impliciet komt hiermee ook aan het licht dat je bij een vermenigvuldiging de ene factor mag verdubbelen (of verviervoudigen of ..) als je de andere factor halveert (of door 4 deelt, of..). Tijdens het experiment bleek dat sommige leerlingen na deze tegelpleinles (les 13 uit de reeks) spontaan de strategie van halveren-verdubbelen gingen toepassen.

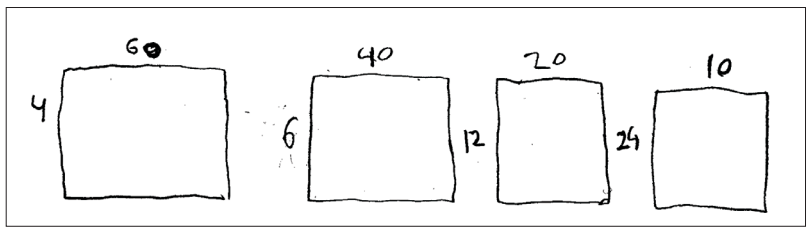


Fig. 9.5: Vier zelf bedachte rechthoekige tegelpleintjes van 240 tegels. Duidelijk is te zien hoe de leerling bij de laatste drie pleintjes de ene factor steeds verdubbelt en de andere halveert.

9.2 Voorstel voor een aangepaste leergang

Hieronder wordt in vijf punten de grote lijn van een aangepaste leergang beschreven waarin de in de vorige paragraaf aangeduide bevindingen zijn verwerkt. Drie daarvan hebben betrekking op de eigenlijke leergang, terwijl het eerste punt betrekking heeft op de gewenste beginsituatie. Het laatste punt behelst de doorloop naar de fase waarin een standaardprocedure wordt ingeoefend.

De beginsituatie
Voorafgaand aan de leergang dienen de leerlingen zich op het gebied van rekenen-wiskunde de nodige kennis, inzichten en vaardigheden eigen gemaakt te hebben. Omdat een betrekkelijk laag instapniveau in de leergang mogelijk is, ligt het niet voor de hand om een gedetailleerde omschrijving van deze beginsituatie te geven. In globale zin komt het erop aan dat er in ieder geval het nodige gebeurd en bereikt is op het gebied van getallen en getalrelaties, het optellen en aftrekken tot 1000 (en daarboven), vermenigvuldigen en delen (begripsvorming, tafels), meten

(met name ook voor de grootheid oppervlakte in verband met het werken met rechthoekstructuren), en het vermenigvuldigen met grotere en ronde getallen. Een en ander geldt zowel voor het rekenen met kale getallen als in toepassingssituaties. Daarbij dienen de leerlingen grondig vertrouwd te zijn geraakt met de mogelijkheid om, in het geval van lastigere opgaven, een tussenstap of tussenantwoord op papier te zetten (het gebruik van het zogenoemde kladblaadje). Zie voor een wat uitgebreidere beschrijving van de beginsituatie het eerste deel van paragraaf 3.3.

Fase 1: brede verkenning van situaties en strategieën
De leerlingen krijgen een aantal contextsituaties voorgeschoteld waarin sprake is van vermenigvuldigingen met twee meercijferige getallen. Het accent ligt daarbij in eerste instantie op verhoudingssituaties en groepjessituaties, later volgen ook rechthoeksituaties:

- de veemarkt (18 schapen van € 350,–; 26 koeien van € 420,–; ...)
- magazijnvoorraden (20 dozen met 48 pakken koffie; 34 dozen met 65 blikken appelmoes; ...)
- schoolboeken inkopen (43 woordenboeken van € 29,–; 32 atlassen van € 48,50; ...)
- de boomgaard (een boomgaard met 32 rijen van 45 bomen; één van 25 rijen van 84 bomen; ...)

Er vindt een brede verkenning van strategieën plaats waarmee dergelijke opgaven opgelost kunnen worden. In eerste instantie zullen dat vooral elementaire vormen van herhaald optellen, verdubbelen, en groepjes maken zijn. Daarnaast zullen meer geavanceerde aanpakken voorkomen waarbij een van de getallen of beide getallen decimaal gesplitst worden, inclusief de onjuiste VS-strategie. Aansluitend bij de meer elementaire strategieën wordt nu het maken van groepjes nader onderzocht als een aanpak waarbij op een betrekkelijk simpele en overzichtelijke manier een oplossing wordt verkregen. Deze werkwijze wordt vergemakkelijkt doordat de objecten waaraan de vermenigvuldigingen binnen de context gekoppeld zijn (zoals schapen, dozen en bomen) visueel op het betreffende werkblad staan weergegeven. Daardoor is het mogelijk om kleinere of grotere groepjes objecten af te bakenen waarvan de totaalprijs of het totaal aantal blikken of bomen op een basaal niveau bepaald kan worden. Zie het voorbeeld in fig. 9.6.

De leerlingen bezinnen zich op het gebruik van deze groepjesstrategie, waarbij met name wordt stilgestaan bij de vraag welke groepsgrootte handig is. Het maken van

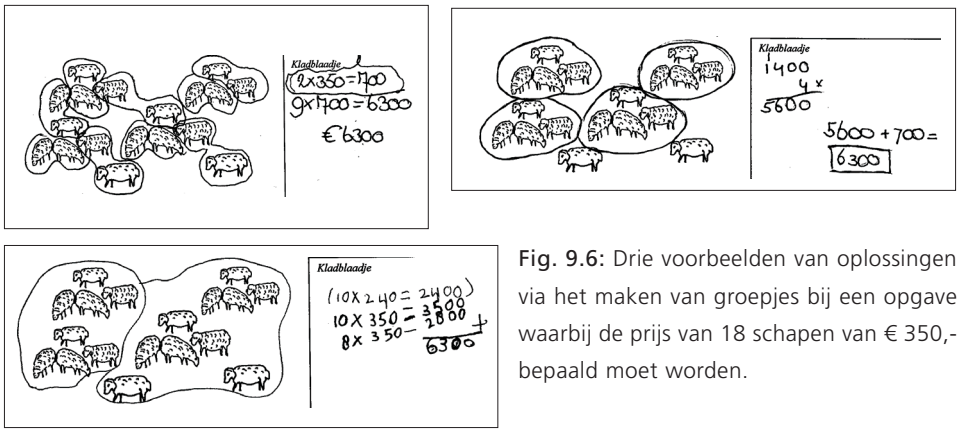


Fig. 9.6: Drie voorbeelden van oplossingen via het maken van groepjes bij een opgave waarbij de prijs van 18 schapen van € 350,- bepaald moet worden.

groepjes van 10, zoals in fig. 9.7 wordt gedaan bij de strategie rechtsonder, komt naar voren als een werkwijze waarbij de groepjesstrategie efficiënt wordt. Daarom wordt dit werken met groepjes van 10 nader verkend, waarbij de plaatsing van de objecten in de tekening het vormen van groepen van 10 enigszins in de hand kan werken. Zie het voorbeeld in fig. 9.7 (opgave: '26 dozen met 65 blikken appelmoes').

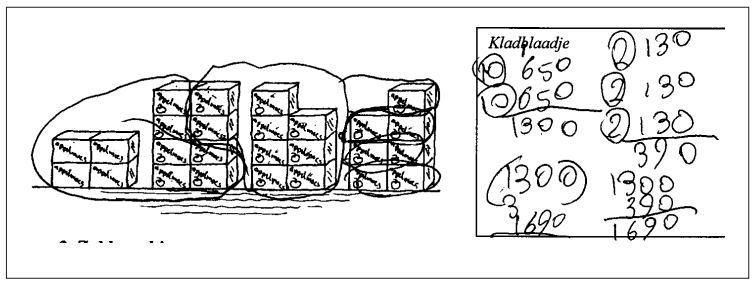


Fig. 9.7: Oplossing via het maken van groepjes van 10 bij een opgave rond 26 dozen met 65 blikken appelmoes.

De betreffende contexten kunnen overigens meerdere keren ingezet worden. De eerste keer dat dit gebeurt kan de nadruk liggen op een brede oriëntatie als zodanig en op het verder verkennen van de aanpak waarbij met groepjes van 10 wordt gewerkt, de tweede keer kunnen enkele specifieke zaken onder de loep genomen worden. Dit betreft met name:

- het vermenigvuldigen met een factor 10
  In de sfeer van 'vrije producties' bezinnen de leerlingen zich op de vraag wat voor aantallen dozen met bijvoorbeeld 54 blikken appelmoes je ook makkelijk

kunt uitrekenen. Op basis daarvan is er gerichte aandacht voor het feit dat 10x54, 10x86 en 10x125 heel makkelijk zijn uit te rekenen, en voor het waaróm achter dit feit. Aldus wordt het inzicht in de nulregel versterkt en wordt het maken van groepjes van 10 voor leerlingen bij wie dit inzicht nog maar beperkt ontwikkeld is, toegankelijker gemaakt.

- de onjuistheid van de strategie van het verkeerd splitsen (VS)
  In de context van de aanschaf van schoolboeken krijgen de leerlingen in aanvulling op een bredere verkenning van deze context als zodanig, een situatie voorgelegd waarin iemand de prijs van 12 boeken van 15 euro uitrekent via 10x10 en 2x5 euro. Onderzocht wordt waarom deze oplossingswijze niet correct is, en hoe de opgave wél goed kan worden aangepakt. De aanpak waarbij de 12 boeken verdeeld worden in een groepje van 10 en een groepje van 2 komt naar voren als een wel correcte werkwijze. Hiermee wordt het inzicht in de verdeeleigenschap (die inhoudt dat je, in algebraïsche termen gesteld, (a+b) x c via (a x b) + (a x c) kunt uitrekenen) op basaal niveau versterkt.

Fase 2: gerichte aandacht voor de S1-strategie

Op basis van de beschreven brede oriëntatie wordt nu de S1-strategie (die erop neerkomt dat het tweede getal als geheel wordt opgevat en het eerste getal decimaal wordt gesplitst) gedurende een periode centraal gesteld. Ook nu is er sprake van uiteenlopende contexten, zoals:

- de rondvaartboot (38 passagiers die elk € 65,- betalen; 48 passagiers die elk € 73,- betalen; ...)
- parkeerterreinen (een terrein met 25 rijen van 84 plaatsen; met 56 rijen van 140 plaatsen; ...)
- de sponsortocht (hoeveel geld wordt er verdiend als iemand 15 rondjes van € 7,50 loopt?; en als iemand 24 rondjes van € 5,25 loopt?; ...)
- in de vrachtwagen (een lading van 360 dozen met 45 pakken koffie; van 480 dozen met 75 pakken hagelslag; ...)

Daarbij vindt in zoverre een overgang plaats dat de objecten in kwestie niet meer visueel staan aangegeven en het maken van groepjes meer op mentaal niveau moet plaatsvinden. Omdat ze de notatie met rondjes (die verwijzen naar het vormen van groepjes) blijven gebruiken, ervaren de leerlingen dit als een schematisering van wat ze al eerder deden, op een meer symbolisch niveau. Ze kunnen daarbij tot op zekere hoogte hun eigen notatievorm aanhouden. Zie het voorbeeld in fig. 9.8.

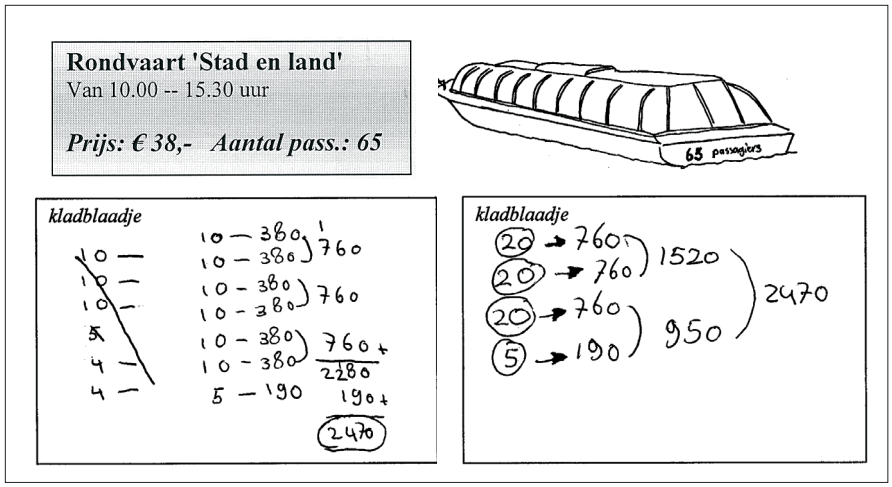


Fig. 9.8: Opgave rond het bepalen van het totale bedrag dat betaald wordt door 65 passagiers die elk € 65,- betalen. Eronder twee oplossingen waarbij op een meer symbolisch niveau met groepjes van 10 resp. 20 wordt gewerkt.

De door de leerlingen gehanteerde strategieën en notatievormen worden regelmatig klassikaal uitgewisseld. Overeenkomsten en verschillen kunnen zo naar voren komen en gezamenlijk doordacht worden. Om de essentie van strategieën nader te verduidelijken, en om de bruikbaarheid van verschillende notatievormen ter discussie te stellen, vindt van tijd tot tijd een 'posterpresentatie' plaats waarbij de leerlingen proberen om hun strategie zo duidelijk en beeldend mogelijk weer te geven. In de bespreking daarvan gaat de aandacht niet alleen naar overeenkomsten en verschillen tussen strategieën en oplossingen uit, maar ook naar de overzichtelijkheid en duidelijkheid van de gehanteerde notatievormen.
Ook in deze fase wordt de nulregel expliciet aan de orde gesteld. Daarbij kan met name nader onderzocht worden hoe je de prijs van 10 boeken of dozen of ritten handig kunt bepalen in het geval van geldgetallen. Bijvoorbeeld: hoe reken je handig uit wat er bij de sponsortocht verdiend wordt als iemand 10 rondjes van € 6,95 loopt? En 10 rondjes van € 8,50? En 10 rondjes van € 17,50? Wat gebeurt er nu precies met zulke getallen als je ze met 10 vermenigvuldigt? Is dat te verklaren?

De onjuistheid van de VS-strategie wordt nader doordacht in een rechthoeksituatie waarbij de leerlingen zich bezinnen op de vraag waarom het bepalen van het totaal aantal tegels van een terras van bijvoorbeeld 15 bij 24 tegels via 10x20 en 5x4 niet correct is. Door het terras er in getekende vorm bij te nemen en vast te stellen dat je 'dan een paar stukken vergeet', wordt ook het inzicht in de distributieve eigenschap versterkt.

Door de getallen wat groter te maken, worden de kinderen gestimuleerd tot verdere verkorting. Dit is met name ook van waarde voor degenen die aanvankelijk consequent vasthouden aan groepjes van 10 en van 2. Door oplossingen naast elkaar te leggen en tegen elkaar af te wegen, kunnen leerlingen zich bewust worden van het efficiënte van het vormen van grotere groepen zoals van 20 en van 40. Zoals in fig. 9.9 is te zien, treden ook andere vormen van decimaal splitsen zoals de AS-strategie en de S2-strategie nu steeds meer op. In principe wordt dit vrijgelaten, maar de nadruk in de instructie blijft liggen op het efficiënt uitvoeren van de S1-strategie.

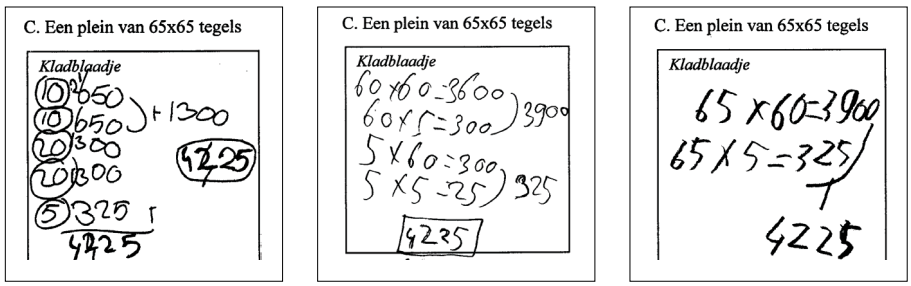


Fig. 9.9: Drie voorbeelden van strategieën bij de opgave 'een plein van 65 x 65 tegels'. Links een voorbeeld van de S1-strategie, rechts de AS-strategie en rechts de S2-strategie.

Om de betere leerlingen te prikkelen, worden in de verwerking regelmatig opgaven van hogere moeilijkheidsgraad opgenomen, zoals opgaven waarbij sprake is van drie vermenigvuldigfactoren. Zie fig. 9.10.

Parkeergarage De Vlinder heeft 12 verdiepingen. Op elke verdieping zijn 15 rijen van 48 parkeerplaatsen.

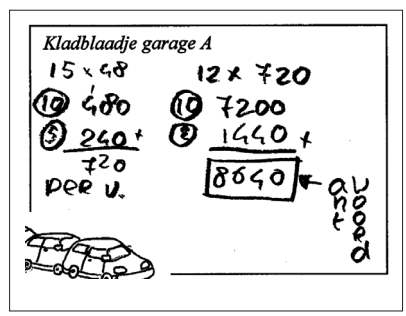


Fig. 9.10: Voorbeeld van een 'extra-opgave' rond een parkeergarage, met ernaast een oplossing waarbij twee keer de S1-strategie wordt gebruikt.

Fase 3: Verdere niveauverhoging en formalisering; verbreding naar andere strategieën
In het voorgaande zijn al enkele keren situaties aan de orde geweest waarbij andere strategieën voor de hand liggen dan de strategieën die berusten op decimaal splitsen.

Dit betreft in de eerste plaats het compenseren dat sommige leerlingen van meet af aan in verschillende varianten gebruiken. Naarmate de leergang vordert, komt deze aanpak wat uitgebreider en explicieter aan de orde, bijvoorbeeld in de context van de sponsorloop met opgaven als '16 x € 3,95'. Uiteraard is het ook nu mogelijk om met groepjes van 10 te werken en dus de S1-strategie te volgen (zie links in fig. 9.11), maar de aanpak waarbij € 3,95 wordt afgerond tot €4,- ligt eveneens voor de hand (midden en rechts in fig. 9.11).

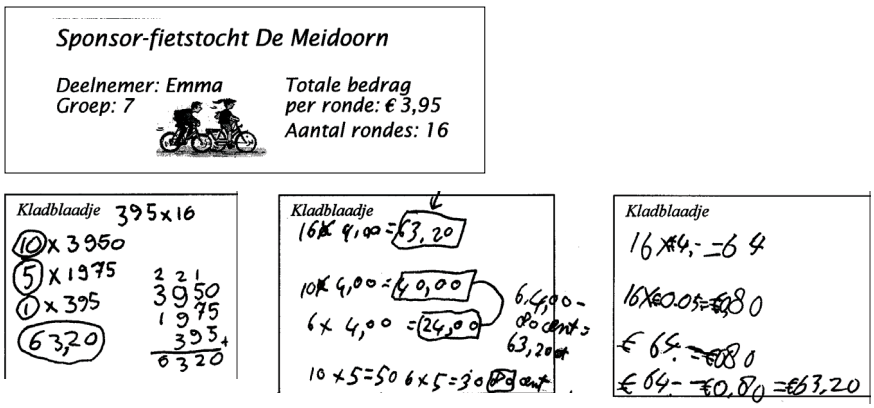


Fig. 9.11; Opgave rond een sponsor-fietstocht, met linksonder een oplossing via de S1-strategie, en midden en rechtsonder oplossingen via compenseren.

Iets soortgelijks geldt voor de strategie van het halveren-verdubbelen die binnen verschillende contexten enkele keren expliciet aan de orde wordt gesteld. Dat gebeurt bij voorkeur naar aanleiding van de eigen oplossingen van enkele leerlingen waarbij besproken wordt wat deze leerlingen nu precies gedaan hebben, en waarom dat een goede oplossing is. Zie fig. 9.12.

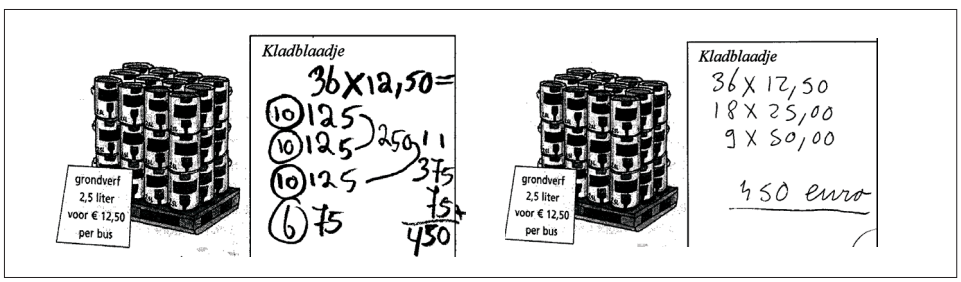


Fig. 9.12: Opgave rond 36 blikken verf van € 12,50, met daarnaast een oplossing volgens de S1-strategie en een oplossing via halveren-verdubbelen.

Enerzijds worden zulke varia-aanpakken verhelderd en onderbouwd, anderzijds wordt duidelijk gemaakt dat ze vooral een functie hebben in aanvulling op de S1-basisstrategie, namelijk in gevallen dat de getallen in kwestie zich er bij uitstek voor lenen.

In dit stadium doet een zekere mate van formalisering z'n intrede, waarbij naast contextproblemen ook kale opgaven regelmatig aan de orde komen. Niet alleen gaat de aandacht nu uit naar verdere verkorting en niveauverhoging, maar ook naar het onderscheid maken tussen opgaven die op betrekkelijk eenvoudige wijze direct uit het hoofd uitgerekend kunnen worden, en opgaven die zich meer lenen voor een schriftelijke uitwerking. Dit leidt ertoe dat het kladblaadje van een leerling bij twee rijtjes van vijf opgaven eruit kan zien zoals in fig. 9.13.

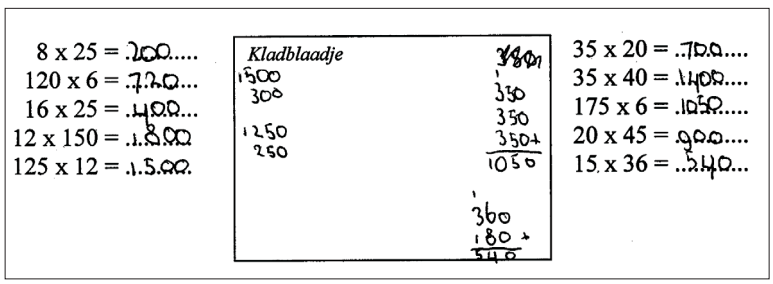


Fig. 9.13: Voorbeeld van twee rijtjes opgeloste kale opgaven met op het kladblaadje de hulpnotaties bij vier van deze opgaven.

Tegen het einde van de leergang is er nog altijd een vrij grote spreiding in niveaus en mate van verkorting die de leerlingen laten zien. Sommigen gebruiken nog de rondjesnotatie en werken veelal met groepjes van 10. Anderen hanteren een meer formele notatie en gebruiken sterk verkorte notatievormen. Zie de drie voorbeelden in fig. 9.14 (afkomstig uit de laatste criteriumtoets).

Doorloop naar een standaardprocedure

In het voorgaande zijn regelmatig allerlei oplossingswijzen van leerlingen getoond. Dit waren over het algemeen goede oplossingen. Uiteraard hebben zich tijdens het praktijkexperiment regelmatig fouten voorgedaan, en in zoverre is het beeld dat van de drie besproken fasen werd getoond, wat vertekend. Fouten doen zich uiteraard regelmatig voor, in allerlei vormen en gedaanten. Bijvoorbeeld:

- begripsfouten doordat de VS-strategie wordt gebruikt;
- overzichtsfouten doordat een leerling het overzicht tijdens het uitvoeren van een berekening kwijtraakt en als gevolg daarvan een stap vergeet;

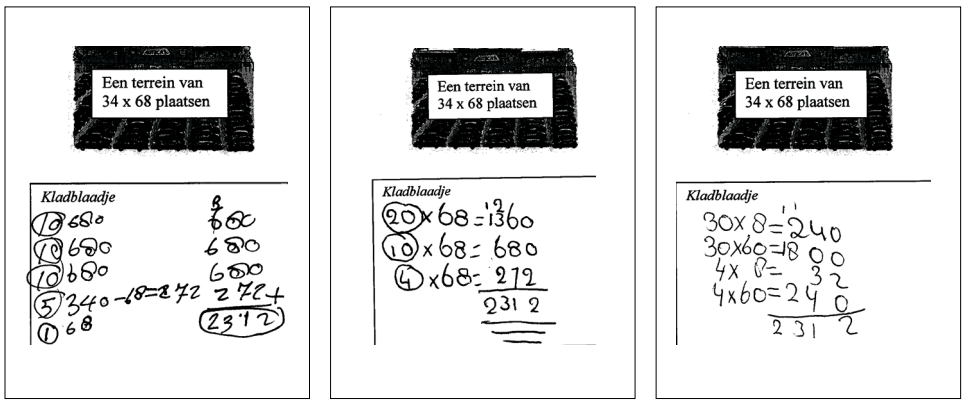


Fig. 9.14: Drie voorbeelden van oplossingen uit de laatste criteriumtoets die iets laten zien van de variëteit aan oplossingswijzen aan het eind van de leergang.

- rekenfouten doordat een leerling bijvoorbeeld een opgave als 6x65 even snel uit het hoofd uitrekent als onderdeel van een grotere berekening, en bij vergissing op 66 uitkomt;
- rekenfouten als gevolg van het niet goed onder elkaar zetten van getallen (positiefouten).

Zoals in hoofdstuk 7 aan de hand van de toetsresultaten is getoond, neemt het aantal fouten over de hele linie verder af naarmate de leerlingen beter greep krijgen op de beoogde oplossingswijzen en er daarbij in slagen steeds overzichtelijkere en compactere notatievormen te gebruiken. Om dit aantal fouten nog verder te minimaliseren, verdient het aanbeveling om, als sluitstuk van de leergang, over te gaan tot een standaardprocedure waarbij de leerlingen oefenen om volgens een vast notatieschema in enkele vaste stappen tot een oplossing te komen. De overgang naar zo'n standaardprocedure is niet groot meer[3]. Sommige leerlingen gaan er, waarschijnlijk gesouffleerd door een oudere zus of een oma, uit zichzelf al toe over om dit te doen. Meestal betreft dit dan de cijferprocedure. Een andere mogelijkheid is een procedure die als kolomsgewijze procedure aangemerkt kan worden in de zin dat niet met positiewaarden maar met getalwaarden wordt gewerkt. Hierbij wordt de S1-strategie op het hoogste niveau gebruikt met notatie van tussenantwoorden op een apart kladblaadje. Er zijn twee varianten mogelijk. Samen met de variant van het pure cijferen, leidt dit tot drie mogelijkheden om over te gaan op een standaardprocedure. Zie fig. 9.15.

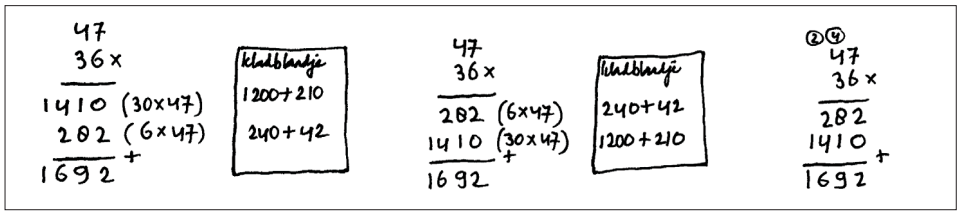


Fig. 9.15: Drie varianten van een standaardprocedure die ter afsluiting van de leergang ingeoefend kunnen worden.

Overigens is een combinatie van een kolomsgewijze met de cijferprocedure ook mogelijk. Eerst worden de leerlingen daarbij vertrouwd gemaakt met de middelste procedure, daarna wordt de cijferprocedure geïntroduceerd. Hierbij kan open gelaten worden in hoeverre kinderen daadwerkelijk allemaal overgaan tot het gebruik van de cijferprocedure. Het voordeel hiervan kan zijn dat juist de zwakkere leerlingen een optimale mogelijkheid behouden om via de eenvoudiger te begrijpen kolomsgewijze procedure tot een oplossing te komen[4].

9.3 Naar een lokale onderwijstheorie

9.3.1 Het niveaukarakter van realistische leergangen

Het niveaukarakter van het met de realistische onderwijsbenadering beoogde leerproces vormt een aspect dat van cruciaal belang is voor het welslagen van dat leerproces. Immers, juist doordat leerlingen in staat gesteld worden om de betreffende opgaven op hun eigen niveau op te lossen en doordat ze via gezamenlijke uitwisseling en doordenking daarvan gestimuleerd worden tot verhoging van dat niveau, wordt progressie geboekt. Voor de leraar is het van grote waarde om een goed idee te hebben van de niveaus die de leerlingen in globale zin tijdens het leerproces doorlopen. Een goede aanduiding van die niveaus is voor realistische leergangen dan ook van grote betekenis.

Binnen de realistische onderwijsbenadering worden in het algemeen drie abstractieniveaus onderscheiden die typerend zijn voor de wijze waarop het wiskundig handelen zich binnen een bepaald domein ontwikkelt (Treffers, 1987; Gravemeijer, 1994; Treffers, Streefland & De Moor, 1996):

(1) Het informele, contextgebonden niveau van handelen
(2) Het semi-formele, modelondersteunde niveau van handelen
(3) Het formele, vakmatige niveau van handelen[e]

Kenmerkend voor het eerste niveau is het feit dat de handelingen nog sterk verbonden zijn met de context waarbinnen de probleemoplossende activiteiten zich afspelen, en een uitvloeisel vormen van wat leerlingen intuïtief op basaal niveau weten te bedenken. Bij de handelingen op het tweede niveau komen deze handelingen steeds meer los van de context en steunen ze vooral op een model dat als schematische voorstelling van een context naar voren is gekomen. Bij het derde, formele niveau worden problemen opgelost op basis van structuren, getalrelaties en rekeneigenschappen die in het model besloten liggen en die via reflectie bewust gemaakt zijn. Zoals Treffers, Streefland en De Moor opmerken (1996, p. 200), is hierbij in de eerste plaats belangrijk dat de handelingen op een hoger niveau de handelingen op een lager niveau niet elimineren, maar integreren. Daardoor blijft het mogelijk dat leerlingen die in het algemeen op het hoogste, formele niveau opereren, in sommige situaties teruggrijpen op het lagere, modelondersteunde niveau of zelfs op het informele contextgebonden niveau om tot een oplossing te komen.

Een tweede belangrijk aspect is verbonden met de wijze waarop het model tot ontwikkeling komt. Streefland (1985) heeft in navolging van Freudenthal (1978) laten zien dat zich hier een belangrijke overgang voltrekt in de zin dat er een onderscheid gemaakt moet worden tussen de stap waarbij het model tot stand komt en als het ware een 'nabeeld' is bij een concrete probleemsituatie; en de stap waarbij dat model toegepast wordt in allerlei andere situaties en dus als 'voor-beeld' gaat fungeren. Hij karakteriseert dit als een blikwisseling die hij als volgt omschrijft:

'In de mentale omslag van nabeeld tot voorbeeld worden bewustwording en niveauverhoging in het leerproces manifest. Genoemde blikwisseling weerspiegelt het nieuw verworven inzicht van de bredere bruikbaarheid van het geconstrueerde model.' (Streefland, 1985, p. 63)

Gravemeijer (1994, 1999) gaat nog een stap verder. Hij brengt in de geschetste driedeling een verfijning aan door de 'nabeeldfase' en de 'voorbeeldfase' als aparte niveaus aan te merken. Eerstgenoemde fase noemt hij het verwijzende niveau en de tweede het algemene niveau. Hij betoogt dat zich bij de overgang van verwijzend naar algemeen niveau een belangrijke verandering in het denken voltrekt die hij als volgt omschrijft:

'De verandering van 'model van' naar 'model voor' gaat gepaard met een verandering van denken over de gemodelleerde contextsituatie naar denken over de wiskundige relaties die daarin besloten liggen.' (Gravemeijer, 1999, p. 157)

Kenmerkend voor deze verandering noemt hij verder dat de betekenis van het model voor de leerling als het ware mee verandert. In eerste instantie verwijst dit model naar de situatie waarmee het oorspronkelijk verbonden is en waaruit het voortgekomen is. Geleidelijk aan, naarmate het inzicht in de toepasbaarheid van het model in steeds andere situaties doorbreekt, vervaagt deze oorspronkelijke betekenis en krijgt het model veel meer een algemene, wiskundige betekenis in de zin van belichaming van wiskundige structuren, getalrelaties en rekeneigenschappen. Gravemeijer spreekt in dit verband van een 'keten van betekenissen' (chain of signification) van de modelmatige voorstelling.

9.3.2 Voorbeelden van strategieën op de drie niveaus van formalisering

Over de vraag in hoeverre een indeling in drie dan wel in vier niveaus van handelen het meest wenselijk is, kan men van mening verschillen. Gelet op de praktische bruikbaarheid en de algemene acceptatie lijkt een indeling in drie niveaus voldoende. Maar dat neemt niet weg dat het belangrijk is om te constateren dat zich in de tweede fase een cruciale overgang voltrekt die niet alleen met het niveau van de handelingen als zodanig te maken heeft, maar ook met het niveau van denken. Immers, op het tweede, modelondersteunde niveau voltrekt zich de overgang waarbij niet langer gedacht wordt in termen van getalsmatige objecten en relaties die direct gerelateerd zijn aan de betreffende context, maar in termen van getallen, getalrelaties en eigenschappen als zodanig, dat wil zeggen als een op zichzelf staande 'denkwereld'. Het model vervult daarbij een brugfunctie, zoals Goffree het formuleert (Goffree, 1982), tussen het informele contextgebonden eerste niveau en het formele derde niveau.

In de onderhavige leergang van het meercijferige vermenigvuldigen zijn de drie abstractieniveaus duidelijk te herkennen. Zo zien we in de wijze waarop leerlingen bij het vooronderzoek en in de eerste lessen van de leergang tot een oplossing komen, het informele, contextgebonden niveau bij oplossingswijzen zoals weergegeven in fig. 9.16.

Beide leerlingen gebruiken een vorm van herhaald optellen, maar op een aangepaste manier. De leerling links telt de prijs van 6 flessen herhaald op, en verdubbelt het totaal. De leerling rechts noteert voor elke fles € 2,- waarbij ze voor de eerste zes flessen aangeeft dat er telkens 5 cent teveel is gerekend. Vervolgens rekent ze 12x2 uit (wellicht via 6x2 en 6x2) en trekt daar 12x5 cent vanaf.

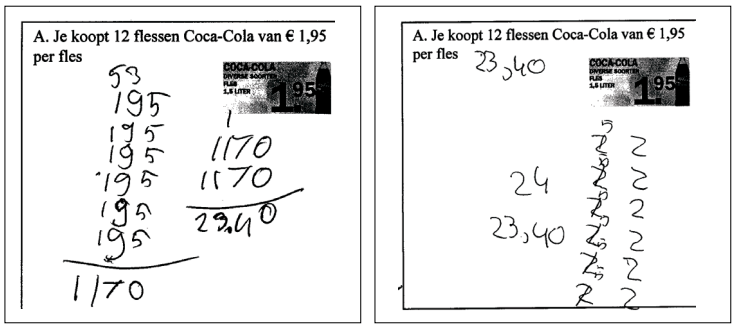


Fig. 9.16: Twee voorbeelden van oplossingen op het informele, contextgebonden niveau

In de middenfase van de leergang zien we veel leerlingen die op een semi-formeel, modelondersteund niveau tot een oplossing komen zoals in fig. 9.17 (de opgave uit de criteriumtoets luidt nu '12 flessen van € 2,95'):

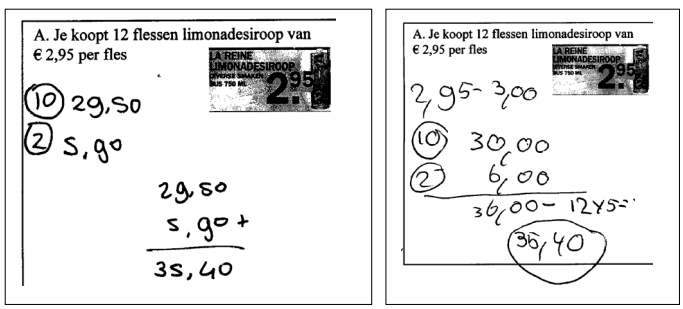


Fig. 9.17: Twee voorbeelden van oplossingen op het semi-formele, modelondersteunde niveau

Deze leerlingen verwijzen in hun notatie naar het feit dat ze met een groepje van 10 en van 2 werken, maar de leerling links doet dit op de reguliere manier volgens de S1-strategie terwijl de leerling rechts een vorm van compenseren hanteert.

Tegen het einde van de leergang zijn er veel leerlingen die op een formeel niveau tot een oplossing komen. De groepjesnotatie wordt nu achterwege gelaten en de oplossingswijze krijgt meer het karakter van een formele aanpak waarbij met getalstructuren wordt gewerkt, zonder verwijzing naar een model. Zie de drie oplossingen in fig. 9.18.

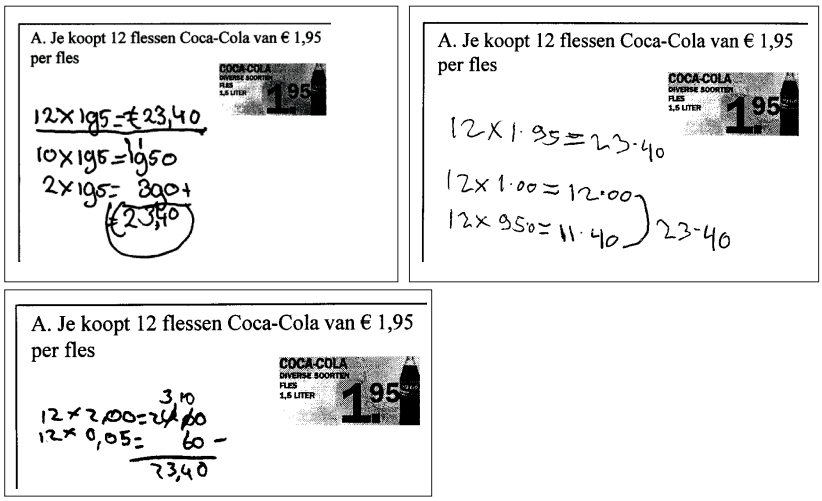


Fig. 9.18: Drie voorbeelden van oplossingen op het formele, vakmatige niveau.

Overigens is er geen scherpe scheiding tussen de niveaus. Zo zijn er leerlingen die reeds in een vroeg stadium op een formeel niveau werken (soms quasi-formeel als ze de VS-strategie gebruiken), en ook leerlingen die tegen het einde van de leergang nog altijd op modelondersteund niveau opereren.

9.3.3 Mate van structurering van rekenstrategieën als graadmeter voor niveauverhoging

In de hierboven getoonde rekenstrategieën manifesteert zich een belangrijke component in termen waarvan de groei in het niveau van handelen beschreven kan worden: de mate van structurering van strategieën. Dit is een algemeen criterium dat bij veel realistische leergangen gebruikt wordt om de progressie naar een hoger niveau van handelen te typeren. Zo is in de TAL-brochure 'Jonge kinderen leren rekenen' (Treffers, Van den Heuvel-Panhuizen & Buys, 1999) voor het domein van het rekenen tot 20 een onderscheid gemaakt in tellend, structurerend en formeel rekenen. En voor het domein van het rekenen tot 100 is in dezelfde brochure een onderscheid gemaakt in rijgen, splitsen en varia-strategieën, een indeling die naderhand ook voor hoofdrekenen meer in het algemeen is aangehouden. Kenmerkend voor deze driedelingen is het verschil in mate van structurering van de betreffende typen strategieën. Zo is binnen het domein van het rekenen tot 20 het tellende rekenen van een wezenlijk lager niveau dan het structurerende rekenen waarbij vingerbeelden en het rekenrek gebruikt worden om redenerend op basis van de vijf- en tienstructuur tot een oplossing te komen. Evenzo is het splitsende rekenen binnen het domein

van het rekenen tot 100 van een wezenlijk hoger niveau dan het rijgende rekenen (Treffers, 2005). Op een vergelijkbare manier kan in het onderhavige domein van het meercijferige vermenigvuldigen een driedeling worden aangebracht in drie typen strategieën die qua mate van structurering wezenlijk van elkaar verschillen:
(1) herhaald optellen, verdubbelen, groepjes maken
(2) de S1-strategie (en andere vormen van decimaal splitsen)
(3) variastrategieën: compenseren en halveren-verdubbelen

In het voorgaande (zie hoofdstuk 7) zijn deze typen strategieën reeds toegelicht en is ook duidelijk geworden dat deze driedeling in de experimentele leergang door de aan het onderwijsexperiment deelnemende leraren als didactische drieslag is gehanteerd. Net als binnen andere leergangen zoals hoofdrekenen geldt dat deze strategieën onderling hecht met elkaar verbonden zijn en grotendeels uit elkaar voortvloeien. Zo komt de S1-strategie als een specifieke vorm van groepjes maken naar voren, en het compenseren als een variant van de S1-strategie voor het geval van 'bijna mooie getallen'. In principe zit er een zekere hiërarchie in deze drieslag doordat bijvoorbeeld de S1-strategie van een wezenlijk hoger niveau is dan strategieën zoals herhaald optellen, terwijl compenseren nog weer wat abstracter is dan de S1-strategie. De hierboven beschreven voorbeelden laten echter zien dat deze hiërarchie betrekkelijk is. Zo blijkt de strategie van het compenseren zowel op een informeel, contextgebonden niveau, op een modelondersteund niveau als op een formeel niveau door de kinderen gebruikt te worden. Bij gevolg kan een diagram met twee componenten opgesteld worden dat de met de leergang beoogde niveauverhoging tot op zekere hoogte karakteriseert (zie fig. 9.19).
Hierbij geven de stippellijnen in globale zin de richting aan waarin het onderwijsleerproces zich beweegt. Soortgelijke diagrammen zijn door Menne, voortbordurend op het ontwikkelwerk van de TAL-groep, opgesteld voor leergangen zoals het rekenen tot 20 en tot 100 (Menne, 2001).

Nu is de component van de mate van structurering van gehanteerde rekenstrategieën weliswaar een waardevolle graadmeter voor niveauverhoging, maar deze heeft ook z'n beperkingen. Zoals in paragraaf 2 van hoofdstuk 2 is gememoreerd, schuilt er een zekere eenzijdigheid in het duiden van de niveauverhoging in termen van de rekenhandelingen die de leerlingen zich binnen een bepaald domein eigen maken. Het gevaar bestaat dat het onderwijs zich in dat geval sterk gaat richten op strategie- en procedureontwikkeling terwijl de begripsmatige kant van het leren minder aandacht krijgt (zie ook Buijs, 2005, p. 100). Dat dit gevaar niet denkbeeldig is, bleek bijvoorbeeld tijdens de try out van Wis en Reken binnen het gebied van het rekenen

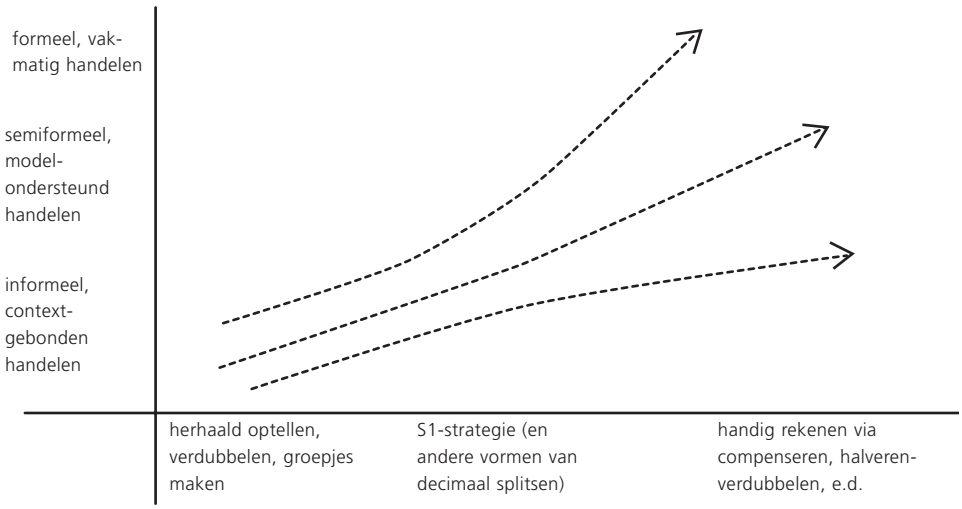


Fig. 9.19: Karakterisering van de niveauverhoging binnen de leergang via de drie abstractieniveaus en via de drie typen rekenstrategieën.

tot 100 toen gesignaleerd werd dat het vertrouwd raken met de rijgaanpak op basis van het gevarieerde tellen met sprongen van 10 een te smalle begripsmatige basis kan opleveren om de leerlingen voldoende progressie te laten boeken. Het bleek van essentieel belang dat ze een goed begrip van de getallen als zodanig ontwikkelen voordat het tellen met sprongen van 10 en in het verlengde daarvan de rijgaanpak wordt geïntroduceerd.

9.3.4 Mate van inzicht in twee wiskundige kernideeën als tweede graadmeter

Om deze kwestie nader te belichten, ga ik nog even terug naar het onderscheid dat Gravemeijer maakt tussen de 'model van-fase' en de 'model voor-fase'. Zoals hierboven reeds is beschreven, geeft hij aan dat modellen bij voorkeur door de leerlingen zelf geconstrueerd dienen te worden als schematische voorstelling bij een context-probleem en dat ze naderhand zelf dienen uit te vinden hoe dit model in allerlei andere contextsituaties ingezet kan worden om tot een oplossing te komen. De overgang die zich hierin voltrekt, gaat gepaard (aldus Gravemeijer) met een overgang in het denken van de leerling over de getallen en rekeneigenschappen, of algemener de wiskundige objecten in kwestie. Niet langer worden deze getallen primair gezien als objecten gebonden aan hoeveelheden, afmetingen of reële handelingen, maar meer als objecten met een (wiskundige) betekenis van zichzelf, kortom, als wiskundige objecten die op allerlei manieren met elkaar in verband staan en waarvoor

allerlei eigenschappen gelden die weliswaar hun oorsprong vinden in de alledaagse realiteit, maar die ook los daarvan betekenis hebben en gebruikt kunnen worden om wiskundige problemen op te lossen. De getallenwereld wordt bij de genoemde overgang derhalve steeds meer een op zichzelf staande, wiskundige realiteit voor de leerlingen. In de woorden van Gravemeijer:

'De overgang van 'model van' naar 'model voor' brengt de totstandkoming met zich mee van een nieuwe wiskundige realiteit – een realiteit die 'formeel' genoemd kan worden in relatie tot de oorspronkelijke vertrekpunten van de leerlingen.' (Gravemeijer, 1999, p. 155)

Betrekken we deze constatering op verschillende domeinen, dan rijst de vraag om welke wiskundige objecten het bij deze overgang gaat. In het geval van het domein van het rekenen tot 100 noemt Gravemeijer het tot stand komen van een netwerk van getalrelaties die ingezet worden voor wiskundig redeneren als wezenlijk kenmerk van de 'nieuwe wiskundige realiteit'. Voor het domein van het meercijferige vermenigvuldigen dat in dit onderzoek centraal staat, geldt dat in veel mindere mate omdat zo'n netwerk al grotendeels tot stand is gekomen bij het optellen en aftrekken tot 1000 en omdat het hier om een andere bewerking gaat, namelijk vermenigvuldigen. Voor dat domein zijn echter in ieder geval twee wiskundige 'objecten' te onderscheiden waarvan het doorzien in hoge mate als graadmeter voor het op formeel niveau kunnen uitvoeren van de beoogde rekenhandelingen (en dus, in de woorden van Gravemeijer, van het tot stand komen van een nieuwe wiskundige realiteit) gezien moet worden, namelijk de distributieve eigenschap en de nulregel. In het voorgaande (zie hoofdstuk 6, hoofdstuk 7 en paragraaf 2 van dit hoofdstuk) is duidelijk aangetoond dat het juist het inzicht in deze beide wiskundige kernideeën was, dat leerlingen in staat stelde de overgang naar het modelondersteunde handelen met succes door te maken. In het in fig. 9.19 beschreven diagram kan dit als volgt worden aangegeven (zie fig. 9.20).

De niveauverhoging voltrekt zich binnen dit domein dus enerzijds doordat de leerlingen achtereenvolgens vertrouwd raken met de drie typen onderscheiden strategieën en inzicht ontwikkelen in de samenhang van deze drie typen, en anderzijds doordat ze daarbij een steeds beter inzicht verwerven in de twee genoemde wiskundige kernideeën van distributieve eigenschap en nulregel. Het gaat hier uiteraard om domeinspecifieke wiskundige objecten. Binnen andere domeinen zullen andere kernideeën onderscheiden moeten worden om de niveauverhoging adequaat te beschrijven[6].

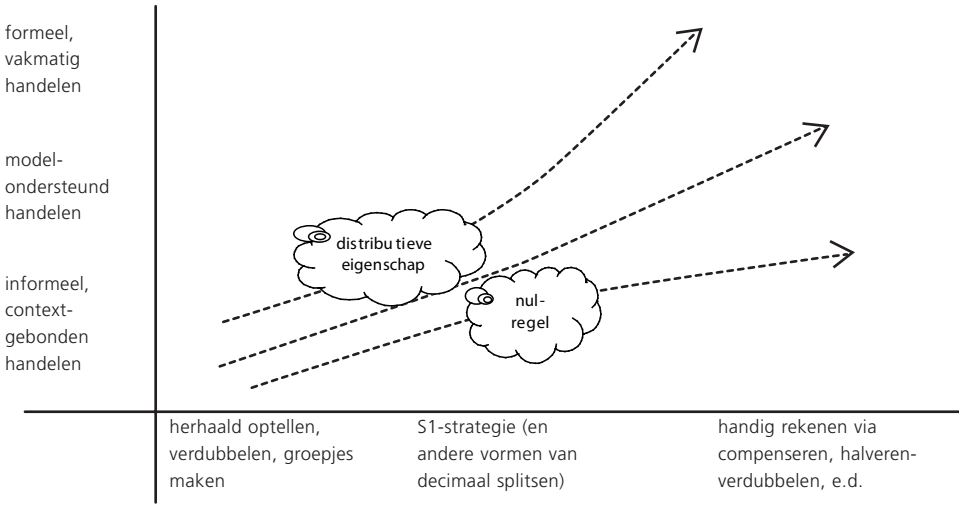


Fig. 9.20: Karakterisering van de niveauverhoging zoals in fig 9.19 weergegeven, maar nu met een derde 'dimensie' toegevoegd via de begripsmatige groei op basis van toenemend inzicht in twee wiskundige kernideeën (distributieve eigenschap en nulregel).

9.3.5 Kern van de lokale onderwijstheorie

Op basis van de in paragraaf 9.2 gegeven schets van de aangepaste leergang en op basis van de in het voorafgaande deel van paragraaf 9.3 aangeduide niveauverhoging is het nu mogelijk om een lokale onderwijstheorie met betrekking tot het domein van het meercijferige vermenigvuldigen te formuleren. Deze luidt:

Bij de verkenning van het domein van het meercijferige vermenigvuldigen wordt aansluiting gezocht bij het herhaald optellen, verdubbelen en groepjes maken als meest elementaire en natuurlijke oplossingswijzen. Door het visueel afbeelden van de objecten waar een vermenigvuldiging betrekking op heeft, wordt de strategie van het werken met groepjes nader uitgelokt en onderzocht. Verkorting van dit type strategie vindt plaats doordat de leerlingen met groepen van 10 en veelvouden daarvan gaan werken. Het decimale groepjesmodel dat in dit proces van modellering en schematisering naar voren komt, vervult een brugfunctie in de zin dat het enerzijds verbonden is met de genoemde informele eigen strategieën, en anderzijds het perspectief opent op het gebruik van de S1-strategie en andere vormen van decimaal splitsen. Doordat de leerlingen nauw betrokken zijn bij de ontwikkeling van dit model en binnen zekere grenzen hun eigen notatievormen ontwikkelen, wordt bereikt dat ze leren om zo goed mogelijk overzicht te behouden over de uitgevoerde handelingen. Twee essentiële inzichten

die het steeds efficiënter hanteren van het decimale groepjesmodel in hoge mate ondersteunen, hebben betrekking op de distributieve eigenschap en de nulregel.

Het hoeft weinig betoog dat de beschreven theorie beschouwd kan worden als een lokale uitwerking van de overkoepelende realistische onderwijstheorie. Elementen als het gebruik van contexten (als bron en als toepassingsgebied), het aansluiten bij eigen informele noties en strategieën van kinderen, het gebruik van modellen waarmee die strategieën op een hoger niveau gebracht kunnen worden, en de nadruk op de eigen constructieve inbreng van kinderen, zijn prominent aanwezig. Een enigszins nieuw aspect van deze theorie wordt gevormd door het feit dat de beoogde niveauverhoging niet alleen in termen van voortgaande structurering van rekenstrategieën wordt geformuleerd, maar ook in termen van de begripsmatige groei ten aanzien van twee wiskundige kernideeën, te weten distributieve eigenschap en nulregel.

Verder heeft de theorie een zekere verwantschap met de in Leerplanpublicatie 10 van wiskobas verwoorde theorie rond het meercijferige vermenigvuldigen (Treffers (red.), 1979, p. 21-25) doordat aangesloten wordt bij het herhaald optellen als informele oplossingsstrategie. Ook het maken van groepen van 10 en de daarmee samenhangende aandacht voor de nulregel vormen een gemeenschappelijk element. Er zijn echter ook enkele duidelijke verschillen. Zo is de aandacht voor het herhaald optellen als informele strategie in de wiskobastheorie wat eenzijdig. Zoals uit het onderwijsexperiment blijkt zijn er ook allerlei vormen van verdubbelen en herhaald verdubbelen die leerlingen in eerste instantie gebruiken, evenals wat in paragraaf 2 van hoofdstuk 7 in navolging van Ambrose e.a. (2003) genoemd is het 'opbouwen met andere factoren' (zie fig. 9.21). Het is juist van het vergelijken en tegen elkaar afwegen van die veelheid aan informele strategieën dat een belangrijke impuls tot niveauverhoging kan uitgaan.

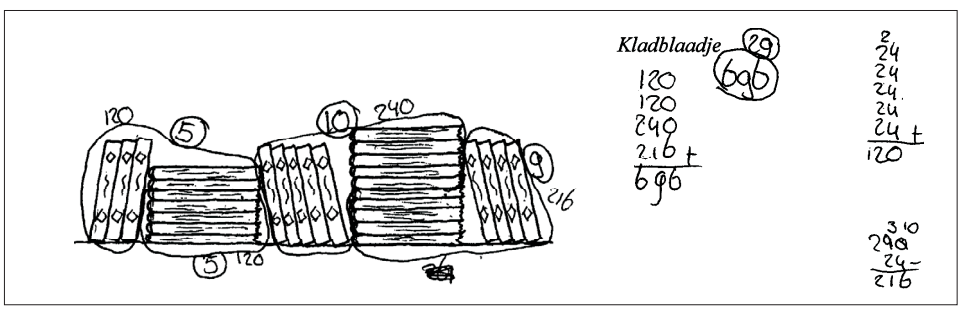


Fig. 9.21: Voorbeeld van een strategie waarbij sprake is van 'opbouwen met andere factoren' (opgave: 29 boeken van 24 euro).

Een ander belangrijk verschil is gelegen in de wijze waarop verkorting van het werken met groepen van 10 plaatsvindt. In de experimentele leergang kreeg deze verkorting mede naar aanleiding van waar de leerlingen zelf mee kwamen, gestalte.

9.4 Bevindingen

9.4.1 Inleiding: progressief mathematiseren

In hoofdstuk 2 is het wiskundige leerproces dat leerlingen in de basisschool kunnen doormaken, getypeerd als progressief mathematiseren; een proces van 'voortgaande verwiskundiging' waarvan de wortels liggen in de alledaagse realiteit, waarbij aangesloten wordt bij de eigen informele kennis van leerlingen en dat resulteert in een hoeveelheid nieuwe wiskundige kennis, inzichten en vaardigheden. Er is onderscheid gemaakt tussen horizontaal mathematiseren (het mathematiseren van verschijnselen en situaties uit de alledaagse realiteit) en verticaal mathematiseren (het met wiskundige middelen steeds verder uitbouwen van de reeds verworven wiskundige kennis). Ook is aangegeven dat de wiskundige kennis op een zeker moment tot de mentale realiteit van de leerling gaat behoren, waardoor deze realiteit de basis kan vormen voor hogere vormen van mathematiseren. Daardoor ontstaat een cyclisch proces van progressieve mathematisering dat enerzijds in globale zin door alle leerlingen gezamenlijk doorlopen wordt, terwijl er anderzijds veel ruimte voor individuele groei is.

In het verlengde van deze typering is in hoofdstuk 5 vervolgens aangegeven hoe gepoogd is dit proces van voortgaande mathematisering gestalte te geven in een leergang rond het meercijferige vermenigvuldigen. Nadat in hoofdstuk 6 een aantal cruciale momenten beschreven zijn die zich tijdens het onderwijsexperiment rond deze leergang voordeden, volgde in de hoofdstukken 7 en 8 een analyse van de resultaten van dat experiment. In de vorige paragraaf van het huidige hoofdstuk is op basis hiervan een voorstel voor een aangepaste leergang gepresenteerd.

In deze paragraaf worden tot besluit vier aspecten van het mathematiseringsproces eruit gelicht die als de belangrijkste bevindingen van het onderzoek gezien kunnen worden. Dit betreft:

- het voortschrijdende inzicht van leerlingen in de distributieve eigenschap;
- de voortschrijdende structurering van de S1-strategie als centrale oplossingsstrategie;
- het voortschrijdend inzicht in de nulregel en de positionaliteit van ons getallensysteem;
- en de voortschrijdende schematisering van de gehanteerde notatiewijzen.

9.4.2 Voortschrijdend inzicht in de distributieve eigenschap

De distributieve eigenschap, oftewel de verdeeleigenschap zoals deze op het niveau van de basisschool veelal wordt genoemd, is een van de fundamentele wiskundige eigenschappen waar de leerlingen in de loop van hun schoolcarrière mee in aanraking komen. Op veel niveaus speelt deze eigenschap een rol in het reken-wiskundeonderwijs. Reeds in groep 4 maken de leerlingen er impliciet kennis mee bij de verkenning van handige strategieën voor het oplossen van elementaire tafelopgaven (Ter Heege, 1985; Moerlands en Boswinkel, 1997). Naderhand zijn er diverse momenten waarop de verdeeleigenschap actueel is, zoals bij de verkenning van grotere vermenigvuldigingen (Jansen, 1973; Plunkett, 1979; Wittman & Müller, 1992). Maar ook in het voortgezet onderwijs is dat het geval, bijvoorbeeld bij het leren werken met algebraïsche vormen zoals -2(3a-5) en (x+2)(x-3) (Drijvers, 2006).

In de literatuur wordt het belang van het goed doorzien van deze eigenschap op veel plaatsen onderstreept. Zo geeft Freudenthal in zijn 'Didactische Fenomenologie' aan dat eigenschappen zoals de distributieve eigenschap door kinderen reeds op vroege leeftijd ervaren en verwoord kunnen worden (Freudenthal, 1984). Vergnaud typeert de wijze waarop kinderen eigenschappen als distributiviteit gebruiken als het hanteren van 'theorems-in-action' ('stellingen-in-actie') die uiteraard niet de status van een bewezen stelling hebben, maar wel van een wetmatigheid waarvan de juistheid al denkende en handelende wordt aangenomen (Vergnaud, 1988). In een onderzoek naar het gebruik van hoofdrekenstrategieën door leerlingen uit groep 7 constateert Ruthven (1998) dat nogal wat leerlingen gebruik maken van verschillende vormen van 'mental distribution' bij het oplossen van opgaven als '5 postzegels van 19 pence' via (5x10)+(5x9) en via (5x20)-(5x1). In Nederland wordt het belang van de verdeeleigenschap verder onder meer benadrukt door De Moor (1983) die opmerkt dat 'deze eigenschap zowel voor het handig rekenen als voor het inzicht in de cijferprocedures van belang is'. En in de TAL-brochures (Treffers e.a. (red.), 1999; Van den Heuvel-Panhuizen e.a. (red.), 2001) wordt de verdeeleigenschap herhaaldelijk ter sprake gebracht waarbij onder meer wordt aangegeven hoe het intuïtieve besef dat leerlingen van deze eigenschap bij het aanleren van de tafels hebben verworven, naderhand bij het verkennen van grotere vermenigvuldigingen zoals 6x48 expliciet gemaakt en uitgebouwd dient te worden om dergelijke opgaven via het splitsen van de tweede term efficiënt te kunnen uitrekenen.

Dat dit groeiende inzicht in distributiviteit lang niet altijd voldoende is om deze eigenschap bij het vermenigvuldigen van meercijferige getallen zonder meer correct toe te passen, heeft het onderzoek duidelijk uitgewezen. Zoals in hoofdstuk 6 en 7 is

beschreven, was een flink percentage van de leerlingen vooral in het eerste deel van de leergang nogal eens geneigd om 'quasi-distributief' te redeneren door een opgave als '18 schoolatlassen van 45 euro' op te lossen via 10x40 en 8x5. Ook verderop in de leergang kwam deze werkwijze nog herhaaldelijk voor. Dit wijst erop dat er speciale aandacht nodig is om het inzicht in de verdeeleigenschap in de loop van de leergang rond het meercijferige vermenigvuldigen te verdiepen en uit te bouwen. Als men recht wil doen aan de principes van realistisch reken-wiskundeonderwijs, in het bijzonder wat betreft de groepsgericht-interactieve benadering die daarvoor als kenmerkend wordt beschouwd, dan moet rekening gehouden worden met het feit dat lang niet alle leerlingen in hun begrip van de operatie vermenigvuldigen ver genoeg zijn om de essentie van deze eigenschap bij de verkenning van het meercijferige vermenigvuldigen snel te doorzien. Het onderzoek heeft laten zien dat wat dat betreft niet volstaan kan worden met een eenmalige belichting in het kader van bijvoorbeeld een rechthoeksituatie zoals die van de boomgaard. Het is van groot belang dat op meerdere momenten en in een zekere opbouw aandacht aan het correct distributief redeneren wordt besteed.

Een overweging bij het ontwerpen van een dergelijke opbouw is nog dat bij gebruik van de AS-strategie, de strategie waarbij beide getallen decimaal gesplitst worden, in feite sprake is van 'dubbel distributief redeneren'. Immers, als het eerste getal in twee delen a en b wordt gesplitst en het tweede getal in twee delen c en d, dan moet niet alleen a zowel met c als met d worden vermenigvuldigd, maar ook b. Zoals ook door Ambrose c.s. (2003, p. 318) wordt gesteld, lijkt het aannemelijk dat een dergelijke vorm van distributief redeneren abstracter en van een hoger niveau is dan een vorm waarbij alleen het eerste getal wordt gesplitst[7]. Om die reden is het aan te bevelen om in eerste instantie deze laatste vorm van distributiviteit centraal te stellen, en pas naderhand de tweede vorm. Voorafgaand daaraan kan dan nog de onjuistheid van het 'quasi-distributief redeneren' (de VS-strategie) onder de aandacht komen. Een en ander leidt tot een drietal typen activiteiten die in het kader van de verheldering van de distributieve eigenschap binnen het domein van het vermenigvuldigen van meercijferige getallen aan de orde kunnen komen:

- Ontmoediging van het 'quasi-distributief redeneren' door in een betaalsituatie als '12 boeken van 15 euro' aan de orde te stellen dat een oplossingswijze via 10x10 en 2x5 nooit goed kan zijn.
- Stimuleren van het 'enkelvoudig distributief redeneren' zoals dat plaatsvindt bij gebruik van de S1-strategie (12x15 via 10x15 en 2x15) en onderbouwing van de juistheid daarvan met behulp van groepjesmodel, rechthoekmodel en (eventueel) lijnmodel.

- Bewustmaking van de mogelijkheid van het 'dubbel distributief redeneren' waarbij beide termen decimaal gesplitst worden (12x15 via 10x10, 10x5, 2x10 en 2x5; de AS-strategie) als een aanvullende, wat abstractere aanpak; onderbouwing daarvan met behulp van het rechthoekmodel.

Naderhand kan deze didactische benaderingswijze binnen andere leergangen, zoals die rond het vermenigvuldigen van kommagetallen, (2,5x3,4; 1,6x2,45; e.d.) een vervolg krijgen waarbij in eerste instantie eveneens de nadruk op de mogelijkheid van het enkelvoudig distributief redeneren (2,5x3,4 via 2x3,4 en 0,5x3,4) kan liggen. Op een hoger niveau krijgt dit in het voortgezet onderwijs een vervolg bij het distributief leren redeneren met algebraïsche vormen (Van Streun e.a., 2008).

9.4.3 Voortschrijdende structurering van de S1-strategie als centrale oplossingsstrategie

De S1-strategie, de strategie waarbij het eerste getal (de vermenigvuldiger) decimaal wordt gesplitst en het tweede getal (het vermenigvuldigtal) als geheel wordt opgevat, is een oplossingswijze die in verschillende internationale onderzoeken als een gangbare strategie voor het oplossen van vermenigvuldigproblemen met meercijferige getallen wordt gesignaleerd (Murray e.a., 1994; Ambrose e.a., 2003). Het gebruik van deze strategie wordt ook gerapporteerd in een onderzoek van Foxman en Beishuizen (2003) onder een groep van 247 elfjarigen in Engeland, waarbij van alle door deze leerlingen gebruikte strategieën de S1-strategie tot de hoogste goedscore bleek te leiden. In Nederland wordt deze strategie in de leergangvoorstellen van wiskobas als meest in aanmerking komende strategie gepropageerd voor het meercijferige vermenigvuldigen (Treffers e.a., 1979), waarbij net als in de onderhavige leergang herhaald optellen met het maken van groepen van 10 als verkorting daarvan het vertrekpunt vormt. Ook in het Pluspunt-materiaal (Scholten e.a., 1983; De Moor, 1983) wordt deze strategie als een voor hand liggende mogelijkheid genoemd. In recente reken-wiskundemethoden zoals De Wereld in Getallen (Huitema e.a., 2003) en Wis en Reken (Buijs e.a., 2003) wordt de S1-strategie eveneens benadrukt, waarbij min of meer wordt opengelaten of deze strategie dient over te gaan in het standaardalgoritme, of niet.

Dat het centraal stellen van de S1-strategie zoals dat in de experimentele leergang is gebeurd, uitstekende mogelijkheden biedt om de leerlingen op een inzichtelijke en constructieve manier vertrouwd te maken met het efficiënt uitrekenen van meercijferige vermenigvuldigingen, heeft het onderzoek duidelijk aangetoond. Gebleken is

in de eerste plaats dat deze strategie goed aansluit bij de informele strategieën in de sfeer van herhaald optellen en verdubbelen die leerlingen uit zichzelf in een vroeg stadium van de leergang gebruiken naar aanleiding van de contextproblemen die ze krijgen voorgeschoteld. Net als bij de S1-strategie wordt hierbij het tweede getal als geheel opgevat. Verder is gebleken dat deze informele strategieën zich op een natuurlijke manier laten verkorten tot het hogere niveau van de S1-strategie, waarbij het groepjesmodel als centraal ondersteunend model kan fungeren. Zoals in de voorgaande paragraaf is beschreven, is de essentiële stap daarbij dat er een overgang plaatsvindt waarbij allerlei vormen van herhaald optellen, verdubbelen en groeperend rekenen plaatsmaken voor het werken met groepjes van 10 en waarbij de nulregel gebruikt wordt om die '10 tegelijk' snel en efficiënt uit te rekenen. Zoals het onderzoek laat zien, is dit een stap die door de leerlingen grotendeels zelf ontdekt kan worden als de voorwaarden daarvoor (met name wat betreft het doorzien van de nulregel) aanwezig zijn. Daarbij kunnen picturaal-schematische notatievormen ingezet worden die geleidelijk aan verder verkort en geschematiseerd worden tot gangbare formele notaties. Al naar gelang de opgave gaan de leerlingen er ook steeds meer toe over om het werken met groepjes van 10 te verkorten tot veelvouden daarvan. In een leerlijnmatig overzicht, met de opgave '24 zakken chips van 68 cent' als voorbeeld, ziet dit eruit zoals in fig. 9.22.

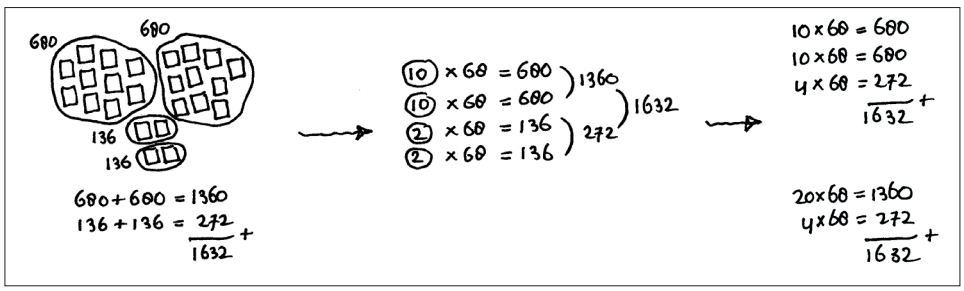


Fig. 9.22: Overzicht van het proces van voortschrijdende structurering van de S1-strategie als centrale oplossingsstrategie in de beoogde leergang.

In dit proces tekent zich de overgang af van het gebruik van het groepjesmodel als afspiegeling van de situatie met de zakken chips ('model van') naar het gebruik van dit model in meer algemene zin voor meercijferige vermenigvuldigingen ('model voor') (Streefland, 1985; Treffers, 1993; Gravemeijer, 2003b).

9.4.4 Voortschrijdend inzicht in nulregel en positionaliteit

In het verleden is regelmatig gepleit voor aandacht voor de nulregel als een belangrijke stap om leerlingen progressie te laten boeken bij het leren vermenigvuldigen met grotere getallen. Zo wordt in de hierboven genoemde wiskobas-publicatie 'Cijferend vermenigvuldigen en delen' (Treffers e.a., 1979) een aparte fase in de leergang opgenomen voor het 'ontdekken en motiveren van de regel van de nul'. En in het handboek bij de NOT-serie Pluspunt uit de jaren '80 van de vorige eeuw wordt opgemerkt dat 'we van kinderen mogen eisen dat ze het basisprincipe van het gebruik van het positiestelsel (nul erachter) begrijpen' (De Moor, 1983). Evenzo wordt in de nascholingscursus Hoofdrekenen van het Zwaluwproject gemeld dat dit principe weliswaar spontaan door kinderen wordt gebruikt als informele strategie voor het afleiden van tafelproducten, maar dat 'de strategie nul erachter voor het cijferend vermenigvuldigen dan nog uitgebreid moet worden naar getallen van twee of meer cijfers'. Dat deze uitbreiding nodig is, wordt geïllustreerd met een persoonlijke ervaring van een van de ontwikkelaars van de cursus die thuis zijn zoon Onno (groep 5) de opgave 16x240 in de context van de prijs van schapen voorlegt. Deze blijkt de opgave op te lossen volgens de S1-strategie via 10x240 en 6x240 waarbij 10x240 niet in één keer wordt uitgerekend, maar door verder te splitsen in 10x200=2000 en 10x40=400. Ook de Engelse onderzoeker Plunkett (1979) en de Amerikaanse vakdeskundigen McIntosh, Reys en Reys (1992) wijzen op het belang van een goed begrip van deze regel.

In het onderzoek is de noodzaak van deze uitbreiding duidelijk bevestigd. Zoals in hoofdstuk 6 is getoond, bleek het voor een aanzienlijk deel van de leerlingen bepaald geen vanzelfsprekendheid dat een opgave als 10x23 of 10x68 efficiënt uitgerekend kan worden door een nul achter het getal te plaatsen. Soms bleken leerlingen zo'n opgave uit te rekenen via 5x23 (100+15, dus 115) en dan verdubbelen. En soms bleek dit te gebeuren op de hierboven geciteerde wijze via 10x20 en 10x3, waarbij op dit wat lagere niveau wel van de nulregel gebruik werd gemaakt. Blijkbaar heeft deze regel op dat moment voor veel leerlingen niet veel meer dan de status van een ervaringsgegeven waarvan niet zonder meer duidelijk is dat dit ook van toepassing is op grotere getallen (laat staan geldgetallen en andere soorten kommagetallen). Dat ervaringsgegeven dient nadrukkelijk uitgebouwd te worden tot een goed begrepen inzicht in een wetmatigheid die inherent is aan ons positionele getallensysteem.

Het onderzoek heeft ook aanwijzingen opgeleverd over de vraag hoe dit uitbouwen het beste kan gebeuren. In de eerste plaats is het aan te bevelen om de nulkwestie bij

de verkenning van het meercijferige vermenigvuldigen reeds in een vroeg stadium aan de orde te stellen, namelijk als de leerlingen zich oriënteren op basale strategieën in de sfeer van het herhaald optellen, verdubbelen en groepjes maken. Enkele concrete suggesties hiervoor, zoals een eigen productie-activiteit waarbij de leerlingen zich bezinnen op de vraag van welke aantallen boeken de prijs allemaal handig berekend kan worden als je weet dat de prijs van 1 boek € 48,- of € 79,- bedraagt, zijn in de vorige paragraaf reeds genoemd. Met name doordat ze zich steeds beter gaan realiseren dat de prijs van 10 boeken ongeacht de prijs van 1 boek eenvoudig is uit te rekenen door een nul achter het betreffende bedrag te plaatsen, gaan ze ook steeds beter de mogelijkheden van het werken met groepjes van 10 in allerlei situaties doorzien. Daardoor opent zich het perspectief op het efficiënt inzetten van de S1-strategie steeds verder.
In de tweede plaats is in het onderzoek gebleken dat het is aan te bevelen om het aan de orde stellen van de nulregel niet bij één keer te laten. Sommige leerlingen hebben nadrukkelijk de tijd nodig om vertrouwd te raken met de regel en daarom verdient het aanbeveling om gedurende het eerste deel van de leergang een aantal activiteiten rond de verdere verkenning en doorgronding ervan te wijden. In de voorgaande paragraaf zijn hier enkele suggesties voor gedaan. Zo kan expliciet onderzocht worden hoe je '100 keer' handig kunt uitrekenen. Evenzo kan onderzocht worden hoe je 10 keer en 100 keer een geldbedrag met een komma erin (10 x € 2,40; 10 x € 4,95; 100 x 9,95; 100 x € 17,50; ...) handig kunt uitrekenen.

In wezen gaat het bij zulke activiteiten om iets fundamentelers dan alleen de nulregel. Er kan namelijk niet alleen vastgesteld worden dát er bij vermenigvuldiging van een getal met 10 een nul achter dat getal komt. Maar ook kan onderzocht worden waaróm dit zo is, wat de achtergrond van deze wetmatigheid is. Dat kan in de vorm van een reflectie op ons positiesysteem waarbij de vraag centraal staat 'wat gebeurt er met de getallen?'. Zo'n reflectie kan eerst plaatsvinden in de context van geldbedragen waarbij aan het licht komt dat in een bedrag als 23 euro bij vermenigvuldigen met 10 de drie euro's tientjes worden, en dat de twee tientjes honderdjes worden. En evenzo dat in een bedrag als 125 euro de vijf losse euro's tientjes worden, de twee tientjes honderdjes, en het ene honderdje een duizendje. In een positieschema kan dit tot uitdrukking worden gebracht, waarbij ook geconstateerd kan worden dat er in al zulke gevallen 'nul euro's' overblijven, en dat er in de positie van de losse euro's een 'lege plaats' ontstaat waar een nul genoteerd moet worden om te voorkomen dat er verwarring kan optreden. Zie fig. 9.23. Hiermee wordt niet alleen het inzicht in de nulregel versterkt, maar ook het inzicht in het positionele karakter van ons getallensysteem.

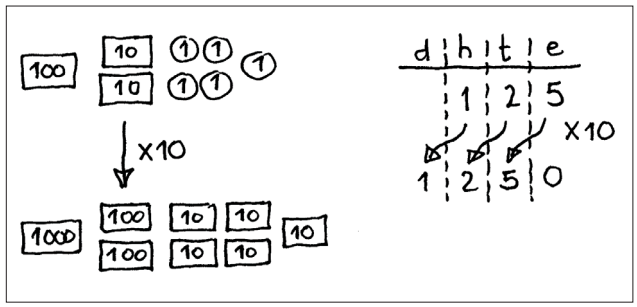


Fig. 9.23: Schematisch overzicht van de wijze waarop geld en de positiekaart gebruikt kunnen worden om het waarom achter de nulregel inzichtelijk te maken.

Evenzo kan naderhand onderzocht worden 'wat er met de getallen gebeurt' in het geval van het vermenigvuldigen met 10 van geldgetallen of meetgetallen met een komma erin (10 x € 4,95; 10 x 1,5 l; 10 x 3,75 m; ..), terwijl nog weer wat later, in samenhang met het voorafgaande, uitgezocht kan worden wat er gebeurt bij delen van getallen door 10. Dit kan uiteindelijk leiden tot de bekende 'schuifregel' voor het vermenigvuldigen en delen van kommagetallen met resp. door 10.

9.4.5 Voortgaande schematisering van informele hulpnotaties

Bij hoofdrekenen is het gebruik van ondersteunende notaties in de loop der jaren uitgegroeid tot een gangbaar verschijnsel. In Nederland hebben diverse auteurs (Nieland, 1986; Scholten, 1988; Huitema, 1991; Buijs, 2000) belicht dat het bij hoofdrekenen niet zozeer om rekenen-uit-het-hoofd gaat, maar om rekenen-met-het-hoofd (zoals Scholten het formuleerde). Het noteren van tussenantwoorden of stappen kan daarbij een belangrijk hulpmiddel zijn. Ook internationaal is deze opvatting steeds meer terrein aan het winnen. Zo wordt door Krauthausen (1993) gesproken van het belang van het 'halbschriftliches Kopfrechnen' waarbij leerlingen hun denken ondersteunen door het 'parallel lopend op papier noteren' van tussenstappen. En Ruthven (1998) citeert Engelse leerkrachten die stellen dat het opschrijven van rekenstappen een belangrijk hulpmiddel kan zijn voor het beschrijven van hoofdrekenstrategieën. Ruthven onderscheidt twee belangrijke functies van dit op papier noteren van tussenstappen:

- het vastleggen van sleutelinformatie uit het oplossingsproces van een voor het overige mentaal uitgevoerde strategie (cq. hoofdrekenstrategie) om zo'n strategie makkelijker uitvoerbaar te maken;
- door het schematiseren van zulke informatie de weg bereiden voor het verkennen van vaste opeenvolgingen van handelingen die kenmerkend zijn voor kolomsgewijze procedures.

Ook Wittman & Müller (1992) en Anghileri (1995) wijzen op het belang van het gebruik van hulpnotaties bij hoofdrekenen en op de mogelijkheid om standaardalgoritmen op basis van deze hulpnotaties op een inzichtelijke manier tot ontwikkeling te laten komen.
Het onderzoek heeft overtuigend laten zien dat de 'know how' die de leerlingen ten aanzien van het gebruik van hulpnotaties binnen het eigenlijke hoofdrekenen ontwikkelen, een belangrijk vertrekpunt kan vormen voor een leergang rond het meercijferige vermenigvuldigen waarin gestileerd hoofdrekenen centraal staat. Weliswaar verliep het inzetten van dergelijke hulpnotaties in het eerste deel van de leergang aanvankelijk niet in alle opzichten succesvol doordat sommige leerlingen een formele, soms niet goed doordachte oplossing verkozen boven het in de tekening weergeven van een groepsindeling met bijbehorend subtotaal (zie hoofdstuk 6). Maar toen steeds duidelijker werd dat via het vormen van groepjes wel een goede mogelijkheid ontstaat om op een basaal niveau tot een inzichtelijke oplossing te komen, en toen het besef steeds beter doordrong dat groepjes van 10 de mogelijkheid bieden om zulke oplossingen tamelijk efficiënt uit te voeren, bleken de daaruit voortvloeiende hulpnotaties een uitstekende basis voor verdere progressie te kunnen vormen. Via reflectie op de aldus gegenereerde picturaal-schematische oplossingswijzen, werd vervolgens een aanzet gegeven tot verdere schematisering, waarbij via het tekenen van rondjes om de getallen in kwestie op symbolisch niveau werd verwezen naar het eerdere maken van groepjes. Zoals in de vorige paragraaf is beschreven, kwam aldus een verwijzende notatie tot stand die het mogelijk maakte om toch nog aan het concrete vormen van groepjes van 10 te denken terwijl het oplossingsproces zich verder op symbolisch niveau afspeelt. Niet alleen bleek dit de leerlingen veel houvast te bieden, maar ook ontstonden zo steeds meer mogelijkheden tot verkorting en verdere niveauverhoging.

Daarbij werd ervoor gekozen om de leerlingen tot op zekere hoogte hun eigen notatievorm te laten bepalen en verder te laten ontwikkelen. In de vorige paragraaf is getoond hoe dit de leerlingen in hun ontwikkeling kan stimuleren doordat ze (varianten van) notatiewijzen gebruiken die het eigen denkproces het beste weerspiegelen, en doordat ze, bij regelmatige gezamenlijke uitwisseling en doordenking daarvan, geprikkeld worden om verdere verkortingen en 'stroomlijningen' in deze notatiewijzen aan te brengen. Met name de 'posterpresentaties' waarbij de leerlingen samenwerkend in groepjes de eigen oplossingswijzen zo beeldend en duidelijk mogelijk op een poster weergaven, bleken daartoe een krachtige inspiratiebron. Zie het voorbeeld in fig. 9.24.

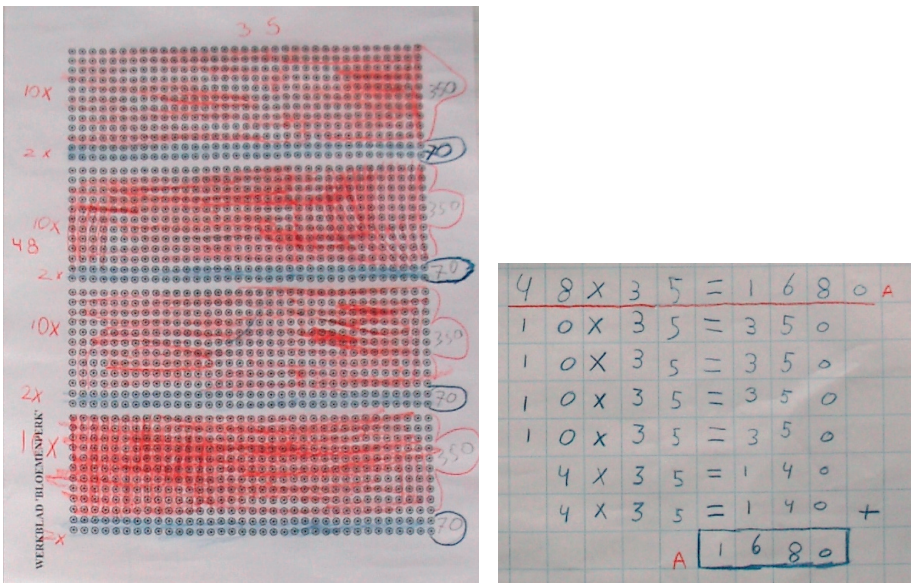


Fig. 9.24: Voorbeeld van een op een poster weergegeven oplossingswijze bij een opgave rond een bloemperk met 48 rijen van 35 bloemen.

9.5 Discussie en aanbevelingen

Bij de uitvoering van een onderzoek als het onderhavige rijzen soms vragen die bij de opzet ervan lang niet altijd waren voorzien. Een voorbeeld van zo'n vraag betreft de wenselijkheid van het al dan niet handhaven van het meercijferige vermenigvuldigen in het leerplan van de basisschool. Bij de aanvang van het onderzoek leek dit geen kwestie om nadrukkelijk bij stil te staan. Maar naarmate het onderzoek vorderde, ontstonden twijfels: hoe zinvol is het eigenlijk nog om veel onderwijstijd te investeren in een leerproces dat gericht is op procedures die door veel leerlingen na de basisschool nog maar weinig gebruikt zullen worden? Op een soortgelijke manier deden zich tijdens het onderzoek andere kwesties voor die aanleiding gaven tot reflectie, heroverweging van bepaalde zaken, twijfels, en dergelijke. Hieronder worden de voornaamste vier van deze kwesties in kort bestek besproken.

9.5.1 Is er nog plaats voor het meercijferige vermenigvuldigen in het leerplan van de toekomst?

Lange tijd maakte het meercijferige vermenigvuldigen deel uit van de kern van het leerplan voor de basisschool. Er bestond weinig twijfel over de waarde van een goede vaardigheid op dit gebied. Beheersing van het cijfermatige rekenen was daarbij het dominante leerdoel, en veel inspanningen waren erop gericht om dat doel te bereiken.

Als gevolg van twee omstandigheden is daar de laatste vijfentwintig jaar verandering in gekomen. In de eerste plaats is er een steeds toenemende kritiek ontstaan op de didactische benadering die tot voor kort algemeen werd gehanteerd – een benadering die vanaf een zeker moment als mechanistisch is betiteld (Treffers, 1987) en waarbij het onderwijs zich in een patroon van voor- en nadoen voltrekt. Zoals in hoofdstuk 2 is beschreven, werd het in toenemende mate van belang geacht dat de leerlingen inzicht in de leerstof verwierven en dat ze een eigen, actieve inbreng in het onderwijsleerproces hadden. Een tweede belangrijke omstandigheid vormde de grootschalige beschikbaarheid van de rekenmachine. Sinds de introductie daarvan in de jaren '70 en '80 van de vorige eeuw wordt een zeer groot deel van alle rekenhandelingen in onze samenleving die daarvóór door mensen verricht werden, steeds meer op de machine uitgevoerd. Daarmee werd de maatschappelijke behoefte aan mensen die de cijferprocedures snel, efficiënt en foutloos kunnen uitvoeren, drastisch gereduceerd. Een eerste gevolg van deze twee omstandigheden is dat tegenwoordig in het leerplan meer nadruk wordt gelegd op het kolomsgewijs rekenen cq. gestileerd hoofdrekenen als voorloper van het cijfermatige rekenen en soms zelfs als einddoel. Het onderhavige onderzoek is onder meer bedoeld om een aantal nieuwe ideeën omtrent een leergang rond het meercijferige vermenigvuldigen te onderzoeken die in belangrijke mate gericht is op gestileerd hoofdrekenen.

Hoewel er ook tegengeluiden zijn die er juist voor pleiten om het cijfermatige rekenen als centraal leerdoel onverkort in het curriculum te handhaven (Van de Craats, 2007), gaan er in toenemende mate stemmen op om domeinen zoals het meercijferige vermenigvuldigen minder aandacht te geven dan tot voor kort gebruikelijk was (Uittenbogaard, 2007). De vraag lijkt dan ook gewettigd of het meercijferige vermenigvuldigen als kernonderdeel van het leerplan nog een lang leven beschoren zal zijn. Het is hier uiteraard niet de plaats om over deze kwestie al te stellige uitspraken te doen. Wel zijn er enkele overwegingen te noemen die bij een zorgvuldige afweging van voors en tegens niet buiten beschouwing mogen blijven. De eerste

daarvan betreft de mathematisch-didactische rijkdom van het gebied. Zoals in het voorgaande uitvoerig is getoond, is het meercijferige vermenigvuldigen een gebied dat een grote rijkdom aan leerervaringen bij de leerlingen teweeg kan brengen. Niet alleen kunnen ze binnen dit gebied iets van de essentie ervaren van mathematiseringsprocessen in z'n meest zuivere vorm waarbij ze in sterke mate ondervinden hoe de betreffende wiskundige kennis als resultaat van een onderwijsleerproces tot stand komt waarin ze zelf een wezenlijke en actieve inbreng hebben en waarin het adagium van *guided reinvention* (Freudenthal, 1991) ten volle wordt waargemaakt. Maar ook kunnen ze tijdens dat leerproces enkele fundamentele inzichten verwerven die in meer algemene zin van grote waarde zijn voor hun wiskundige ontwikkeling. Dit betreft de in de vorige paragraaf beschreven inzichten in de distributieve eigenschap en in de nulregel en het daarmee samenhangende principe van de positionaliteit van ons getallenstelsel. Zoals in het voorgaande is betoogd, zijn deze beide inzichten binnen diverse domeinen die in het verlengde van het meercijferige vermenigvuldigen liggen (zoals het vermenigvuldigen met kommagetallen in groep 7 en 8, maar ook het werken met algebraïsche vormen in klas 1 t/m 3 van het voortgezet onderwijs) zeer goed toepasbaar. Daarmee samenhangend kan ook de binnen de leergang ontwikkelde vaardigheid in het inzichtelijk gebruik van de S1-strategie als een wezenlijke wiskundige verworvenheid beschouwd worden. En dat het leren gebruikmaken van passende wiskundige notatievormen binnen het domein van het meercijferige vermenigvuldigen uitstekend bevorderd kan worden, is in het vorige hoofdstuk uitvoerig aan de orde gesteld.

Bij dit alles dient echter wel beseft te worden dat het onderwijs dat nodig is om de leerlingen goed vertrouwd te maken met het meercijferige vermenigvuldigen, een flinke tijdsinvestering vraagt. In de experimentele leergang waren 17 lessen van een half uur à drie kwartier opgenomen. En hoewel dit voor de betere leerlingen ruim voldoende was om tot de gewenste vaardigheid te komen, gold dit in mindere mate voor de zwakkere leerlingen. In hoofdstuk 7 is getoond dat het leerproces voor de groep van 25% zwakste leerlingen nog niet helemaal als afgerond kon worden beschouwd. Er diende zeker nog een reeks oefenactiviteiten plaats te vinden waarin verdere verkorting en inoefening z'n beslag zou kunnen krijgen. Dit brengt het aantal lessen voor de totale leergang op ongeveer 20 lessen van een half uur à drie kwartier. Men kan zich afvragen of een dergelijke flinke tijdsinvestering nog wel gewenst is voor een domein waarvan de praktische waarde (cq. de maatschappelijke toepasbaarheid) de laatste vijfentwintig jaar drastisch is teruggelopen.

Daar staat dan weer tegenover dat het gestileerde hoofdrekenen zoals het hierboven beschreven is, tevens als een uitstekende voorbereiding voor het schattend rekenen en het verstandig gebruiken van de rekenmachine beschouwd kan worden. Bij het gestileerde hoofdrekenen houdt de leerling immers goed zicht op de orde van grootte van uitkomsten. Een belangrijk gevolg hiervan kan zijn dat als deze leerling te maken heeft met schattend rekenen en met het gebruik van de rekenmachine, het 'gevoel' voor de orde van grootte van uitkomsten zodanig in het denken is verankerd dat hij/zij beter in staat is om controle te houden over uitgevoerde bewerkingen.
Daar komt nog bij dat efficiënte, (semi-)-procedurele oplossingswijzen voor het meercijferige vermenigvuldigen als een belangrijke culturele verworvenheid beschouwd kunnen worden. In de loop van duizenden jaren zijn deze oplossingswijzen tot ontwikkeling gekomen en verfijnd, en daarmee behoren zij in belangrijke mate tot ons culturele erfgoed. Interessant daarbij is nog dat de genoemde oplossingswijzen niet het resultaat van één cultuur zijn, maar juist van vele. Hoewel dit aspect in deze studie niet expliciet is besproken, is het bekend dat vele culturen zoals de Chinese, de Indiase, de Egyptische, de Arabische alsmede de West-Europese een bijdrage aan de totstandkoming van deze wiskundige kennis hebben geleverd (Smith, 1958; Needham, 1959; Juschkewitsch, 1966; Struik, 1977). In die zin kan deze kennis dan ook als een schoolvoorbeeld van 'metacultureel' gegroeide kennis opgevat worden waarvan het juist in een multiculturele samenleving als de huidige West-Europese van waarde kan zijn om jonge mensen mee vertrouwd te maken[8].

9.5.2 Haalbaarheid van realistisch reken-wiskundeonderwijs

Van tijd tot tijd worden wel eens twijfels geuit over de haalbaarheid van realistisch reken-wiskundeonderwijs. Ook in het geval van de onderhavige leergang kan men afvragen of het didactisch concept dat eraan ten grondslag ligt, niet erg hoog gegrepen is voor veel leraren basisonderwijs. Er wordt immers bij de voorbereiding en uitvoering van de leergang een flink beroep gedaan op vakinhoudelijke kennis zoals die in de voorgaande paragrafen is beschreven. Bovendien is er een zekere vaardigheid nodig om de beoogde interactieve leergesprekken en reflectiemomenten met succes ten uitvoer te kunnen brengen[9]. Men kan zich de vraag stellen of het in de dagelijkse onderwijspraktijk wel haalbaar is om de beoogde brede verkenning van informele strategieën te doen plaatsvinden, om in aansluiting daarop de S1-strategie als voorkeurstrategie helder over het voetlicht te krijgen, en om de leerlingen volgens het *reinvention*-principe inzicht te doen verwerven in de hierboven beschreven wiskundige kernideeën van distributiviteit en nulregel.

Het kan niet ontkend worden dat er wat dit aangaat het nodige gevraagd wordt van leraren. Met name is het ook van waarde als de leraar het onderwijsleertraject in globale zin overziet en zich bewust is dat de ene leerling op een zeker moment al verder in het leerproces gevorderd is dan de andere. Daarmee samenhangend is het ook van belang dat de leraar enige notie heeft van de grondprincipes van de realistische onderwijsbenadering zoals die in hoofdstuk 2 zijn beschreven, en van het daaraan ten grondslag liggende idee van wiskunde als menselijke activiteit (Freudenthal, 1991).

Het hoeft echter ook weer niet overdreven te worden. Ook als de leraar nog niet zo geweldig bedreven is in het houden van interactieve leergesprekken, in het gebruik van het schoolbord om aanpakken van leerlingen op een heldere manier weer te geven, en in het door de leerlingen laten beargumenteren van de (on)juistheid van een aanpak, is het in principe mogelijk om kwalitatief goed reken-wiskundeonderwijs te geven. En ook als deze leraar nog niet zo goed in staat is om feilloos alle door de leerlingen aangedragen strategieën te identificeren en op hun waarde te schatten, kan een instructiemoment in grote lijnen naar wens verlopen. Hoewel het in het onderhavige onderzoek om ervaren leraren ging die de grondprincipes van realistisch reken-wiskundeonderwijs doorzagen en probeerden te hanteren, deden zich ook hier soms situaties voor waarin een leraar een wellicht minder gelukkige beslissing nam of er blijk van gaf een bepaald type strategie van een leerling niet goed te doorzien. Ook waren er van tijd tot tijd situaties waarin een leraar een bepaalde lesbeschrijving uit de handleiding op een geheel eigen manier interpreteerde, hetgeen soms heel goed maar soms ook minder goed kon uitpakken. Met name waren er soms ook duidelijke verschillen aan te wijzen in de mate van sturing die de leraren in de instructie aanhielden. Waar de ene leraar tijdens klassikale instructiemomenten veel accent legde op een brede inventarisatie van eigen strategieën van leerlingen, had de andere leraar een duidelijke voorkeur om tamelijk doelgericht aan te sturen op de introductie van een beoogde efficiënte oplossingswijze.
Van belang lijkt het vooral dat (aanstaande) leraren in de gelegenheid gesteld worden om een didactisch leerproces door te maken waarbij de mate van sturing, de mate van interactie en de mate van constructieve inbreng van leerlingen bij de instructie als 'variabelen' beschouwd worden. Wellicht is het in dat opzicht mogelijk te spreken van *niveaus of gradaties van realistische instructie* die als volgt getypeerd kunnen worden.

Nulde niveau van instructie: de opgaven zelf gevarieerd kunnen oplossen
Hier is van instructie nog geen sprake. Het gaat om het in staat zijn de betreffende opgaven zelf te kunnen oplossen. In de eerste plaats natuurlijk onder gebruikmaking van de gangbare gestandaardiseerde oplossingswijzen, maar bij voorkeur ook op andere manieren. Enerzijds heeft dit laatste betrekking op meer elementaire, bewerkelijke werkwijzen die leerlingen bij aanvang van een leergang soms gebruiken, anderzijds op varia-strategieën zoals die van het halveren-verdubbelen en compenseren die in de loop van een leergang naar voren kunnen komen.

Eerste niveau van instructie: uitleg als zodanig kunnen verzorgen
Hier gaat het erom dat een (aanstaande) leraar in staat is om denkbeeldige of echte leerlingen uit te leggen hoe een bepaalde procedure of strategie zoals de S1-strategie werkt, en waaróm die werkt. Hierbij hoeft nog geen rekening gehouden te worden met de situatie van de leerlingen in kwestie, en hoeft niet ingespeeld te worden op vragen, opmerkingen en andere inbreng van deze leerlingen. Wat uitgelegd wordt is datgene wat de leraar zelf voor ogen heeft, zonder dat de wijze van uitleg mede door de inbreng van de leerlingen wordt bepaald.

Tweede niveau van instructie: uitleg verzorgen rekening houdend met de situatie van de leerlingen
Op dit niveau is de (aanstaande) leraar in staat om een interactieve instructie over de beoogde procedure of strategie te verzorgen waarbij deze de leerlingen actief betrekt, rekening houdt met eigen ideeën en oplossingen van leerlingen, en waarin de leerlingen gelegenheid hebben naar voren te brengen wat ze nog moeilijk vinden, wat ze niet goed snappen, en dergelijke. Interactie vindt vooral plaats in de vorm van verticale interactie, dat wil zeggen tussen de leraar enerzijds en de leerlingen anderzijds (Nelissen, 2002).

Derde niveau van instructie: instructie op basis van wat de leerlingen aandragen
Het vertrekpunt voor de instructie komt nu steeds meer bij de leerlingen te liggen. Op basis van wat zij aan oplossingswijzen bij een gegeven probleemsituatie aandragen, en op basis van de gezamenlijke bespreking en doordenking daarvan, krijgen de leerlingen een steeds beter idee hoe je de betreffende typen opgaven kunt oplossen, wat voor hulpnotaties je daarbij kunt gebruiken, en hoe je een oplossingswijze kunt onderbouwen[10]. Doordat de aldus aangedragen oplossingswijzen een natuurlijke differentiatie in oplossingsniveau laten zien, kunnen alle leerlingen bij de instructie op hun eigen niveau aangesproken worden. Behalve verticale interactie vindt er nu ook regelmatig horizontale interactie plaats (interactie tussen de leerlingen onderling)[11].

De haalbaarheid van realistisch reken-wiskundeonderwijs zou bevorderd kunnen worden indien (aanstaande) leraren basisonderwijs beter in staat gesteld worden om juist op het zo cruciale vlak van het geven van adequate instructie een leerproces te doorlopen waarbij ze geleidelijk aan steeds beter leren om op een hoger didactisch niveau instructie te geven. Zeker in het licht van de opkomst van het competentiegerichte opleidingsonderwijs (Keijzer e.a., 2004), waarbij toekomstige leraren verondersteld worden hun eigen leervragen te formuleren, zou het aanbeveling kunnen verdienen om nader te onderzoeken onder welke omstandigheden een dergelijk leerproces zich optimaal kan voltrekken.

9.5.3 Modellen en voorkeurstrategieën: groepjesmodel versus rechthoekmodel

In het uitgevoerde onderzoek is, na ampele overweging, gekozen voor het groepjesmodel en de daarmee verbonden S1-strategie als centraal kenmerk van de experimentele leergang boven het gebruik van het rechtmodel en de daarmee verbonden AS-strategie. In het voorgaande (zie hoofdstuk 5) is deze keuze onder meer gemotiveerd met het feit dat het groepjesmodel beter aansluit bij de eigen, informele strategieën van leerlingen. Dat zijn immers vooral strategieën in de sfeer van herhaald optellen, verdubbelen en groepjes maken. Een tweede argument dat genoemd werd heeft betrekking op de minder grote toepasbaarheid van het rechthoekmodel. Zoals Treffers (1993, p. 38) beschreef, is het twijfelachtig of leerlingen die gedurende de leergang rond het meercijferige vermenigvuldigen veelvuldig met het rechthoekmodel gewerkt hebben, wel in staat zijn de verworven kennis toe te passen in situaties die zich niet zo makkelijk laten modelleren in termen van een rechthoek. Hiermee samenhangend is het argument van Ambrose e.a. (2003, p. 318) dat de AS-strategie in principe abstracter en moeilijker te begrijpen is dan de S1-strategie in verband met het feit dat een leerling die de AS-strategie wil gebruiken in verhoudingssituaties, groepjessituaties of lijnsituaties, zich in zekere zin los moet maken van de betreffende context om deze procedure te gebruiken.

Nu zou men voor wat betreft het eerstgenoemde argument kunnen tegenwerpen dat het rechthoekmodel in principe ook goed bij de genoemde informele strategieën aansluit. Immers, ook in situaties zoals in het geval van een tegelplein of bloemperk zouden leerlingen in wezen dergelijke strategieën kunnen gebruiken. Zoals in hoofdstuk 5 is beschreven, bleek weliswaar tijdens het vooronderzoek dat veel leerlingen situaties waarin dat model besloten ligt, direct leken te associëren met een formele vermenigvuldiging en derhalve ook op zoek leken te gaan naar een oplossingswijze op formeel niveau, inclusief de onjuiste VS-strategie. Maar deze neiging van leerlingen leek in belangrijke mate ook te maken te hebben met hun voorgeschiedenis

op het gebied van het vermenigvuldigen[12]. Zouden er enige aanpassingen in deze voorgeschiedenis aangebracht worden, dan zouden rechthoeksituaties wellicht ook goed kunnen uitlokken tot het gebruik van de genoemde informele strategieën.

Evenzo zou men kunnen tegenwerpen dat de kwestie van de toepasbaarheid minder relevant geworden is omdat leerlingen de procedures voor het meercijferige vermenigvuldigen toch maar in beperkte mate zullen toepassen. Weliswaar dienen ze in staat te zijn vermenigvuldigsituaties als zodanig te herkennen, maar zowel in het leven van alledag als in het voortgezet onderwijs zullen ze verder voornamelijk de rekenmachine gebruiken. Bij toepasbaarheid dient echter ook gedacht te worden aan het in brede zin toepassen van de verworven kennis binnen andere leerstofgebieden, met inbegrip van kennis met betrekking tot de distributieve eigenschap en de mogelijkheid om deze eigenschap te onderbouwen met behulp van herhaald optellen en van het rechthoekmodel. Dit betreft bijvoorbeeld het gebied van de elementaire algebra. Er zijn aanwijzingen dat het rechthoekmodel juist binnen zulke gebieden van grote betekenis is in verband met het 'dubbel distributief redeneren' (Kindt, 2006; Van der Zwaart e.a., 2008). Wordt daar als argument nog het sterk visuele karakter van het rechthoekmodel aan toegevoegd, dan zou er ook iets voor te zeggen zijn om dit laatste model toch als centraal model aan te houden. Zoals in hoofdstuk 3 is beschreven, is dat bijvoorbeeld ook gebeurd in het onderzoek van Fosnot en Dolk (2001b) die dit model een doorslaggevende rol laten spelen bij het door de leerlingen construeren van inzichtelijke en procedurele kennis op het gebied van het meercijferige vermenigvuldigen.

Al met al lijkt een combinatie van beide modellen op grond van alle genoemde overwegingen nog het meest aan te bevelen, en dit is dan ook wat in het hierboven beschreven voorstel voor een aangepaste leergang (zie paragraaf 2 van dit hoofdstuk) wordt gesuggereerd. Aanvankelijk speelt het groepjesmodel en de daarmee samenhangende S1-strategie een centrale rol, naderhand zijn er diverse momenten waarop ook het rechthoekmodel naar voren komt, bijvoorbeeld als het gaat om een nadere bewustmaking van de onjuistheid van de VS-strategie, en om een nadere explicitering en onderbouwing van de AS-strategie.

9.5.4 Ontwikkelingsonderzoek als onderzoeksmethode: behoefte aan nadere kwaliteitscriteria

Het in het kader van deze studie uitgevoerde onderzoek kan beschouwd worden als een typerend voorbeeld van ontwikkelingsonderzoek in de nog tamelijk prille traditie

van het realistisch reken-wiskundeonderwijs. Zoals in hoofdstuk 4 is aangegeven, richt zulk onderzoek zich primair op de ontwikkeling van nieuwe leergangen en op een daarbij passende lokale onderwijstheorie, waarbij de overkoepelende domeinspecifieke onderwijstheorie als referentiekader fungeert. Kenmerkend voor dit type onderzoek is onder meer dat het gepaard gaat met een onderwijsexperiment waarin de effecten van de ontworpen leergang in de onderwijspraktijk onderzocht en geanalyseerd worden. Kenmerkend is verder dat veelal niet gewerkt wordt met een controlegroep en dat er dus geen vergelijking wordt getrokken tussen de leerprocessen die zich in de experimentele groep en in de controlegroep afspelen. Als een belangrijk criterium voor de deugdelijkheid van ontwikkelingsonderzoek wordt de virtuele navolgbaarheid gezien, dat wil zeggen de mogelijkheid om het onderzoeksproces van zo nabij te volgen en 'te beleven' dat dit als een eigen onderzoeksproces ervaren kan worden en dat deze ervaring als basis voor het begrijpen van vergelijkbare onderwijsleerprocessen in andere situaties kan fungeren.

Recentelijk wordt ontwikkelingsonderzoek wel ondergebracht onder de bredere noemer van 'ontwerponderzoek' (design research). Kenmerkend voor zulk onderzoek worden een vijftal punten gezien (Kelly, 2003 en 2006; Design-Based Research Collective (2003); Van den Akker e.a. (red.), 2006) die grotendeels overeenkomen met de grondkenmerken van ontwikkelingsonderzoek. Dit betreft het op interventies in de reële wereld (i.c. het onderwijs) gerichte karakter ervan (1); de cyclische benaderingswijze waarbij ontwerpen, experimenteren en herzien van het ontwerp elkaar gedurig afwisselen (2); het procesgeoriënteerde karakter waarbij het zo goed mogelijk begrijpen en verbeteren van de gepleegde interventies centraal staat (3); de gerichtheid op ontwikkeling van praktisch bruikbare 'artefacten' (4); en het theoriegerelateerde karakter waarbij bepaalde theorieën als uitgangspunt worden genomen maar waarbij tevens voortgezette theorievorming als uitkomst van het onderzoeksproces wordt nagestreefd (5). Dergelijk onderzoek beschouwt het onderwijsleerproces niet als een soort 'blackbox' waarbij sprake is van een zekere input en waarbij zo goed mogelijk gekeken wordt wat er qua resultaten uitkomt. Veeleer grijpt het de complexiteit van het onderwijs aan om tot interventies te komen waarvan op grond van bepaalde verwachtingen verondersteld wordt dat het tot verbeteringen kan leiden. Kelly (2006) typeert het daarmee gepaard gaande proces als volgt:

'It uses ongoing *in situ* monitoring of the *failure or success* of (alternative versions of) some *designed artefact* (software, curricular intervention, tutoring session, etc.) to provide immediate (and accumu-

lating) feedback on the viability of its 'learning theory' or 'hypothetical learning trajectory' (Cobb et alt. 2003).' (Kelly, 2006, p. 107; cursivering auteur).

Zoals de hierboven genoemde auteurs signaleren, is ontwerponderzoek bepaald geen volledig uitgekristalliseerde onderzoeksvorm. Er is behoefte aan kwaliteitscriteria op grond waarvan de kwaliteit van onderzoeken op een eenduidige manier ingeschat kan worden. In het licht daarvan bepleit Kelly (2006), in navolging van Brown (1992), om in de gehanteerde onderzoeksbenadering zowel kwalitatieve als kwantitatieve elementen op te nemen. Het onderzoek dient dus niet alleen gericht te zijn op het ontwikkelen van een zo rijk mogelijk beeld van de beoogde leeromgeving of het beoogde onderwijsleertraject, maar ook op het in kaart brengen van de omvang van de resultaten en leereffecten daarvan, inclusief statistische analyses. Verder bepleit hij, eveneens in navolging van Brown, om de bruikbaarheid van een ontworpen leeromgeving of onderwijsleertraject onder verschillende onderzoeksomstandigheden te testen. In eerste instantie kan een ontwerp onder zeer kleinschalige, betrekkelijk ideale omstandigheden door de onderzoeker(s) zelf beproefd worden (de 'alfa-fase'); in tweede instantie in een bredere onderwijssetting onder minder ideale omstandigheden waarbij de beoogde interventies door goed ondersteunde leraren worden uitgevoerd (de 'béta-fase'); en in derde instantie bij voorkeur in een grootschalig experiment waarbij de leraren die de interventies uitvoeren, nog slechts minimaal ondersteund worden (de 'gamma-fase'). Cruciaal is volgens Brown en Kelly de derde fase die moet voorkomen dat een ontwerp niet veel meer dan een leven op de boekenplank beschoren blijft.

In het geval van het onderhavige onderzoek kan gesteld worden dat in zoverre rekening gehouden is met de genoemde criteria dat zeer bewust is gekozen voor een combinatie van kwalitatieve en kwantitatieve onderzoeksdoelen. Enerzijds is ernaar gestreefd om een aantal 'kwaliteiten' van het beoogde onderwijsleertraject te achterhalen, inclusief een passende lokale onderwijstheorie. Anderzijds is gepoogd om zo nauwkeurig mogelijk over kwantitatieve aspecten van het experimentele onderwijsleertraject te rapporteren. In de voorgaande hoofdstukken alsmede in de voorgaande paragrafen van dit hoofdstuk is over dit alles uitgebreid verslag gedaan. Wel kan men zich afvragen in hoeverre aan de door Brown en Kelly bepleite variatie in onderzoeksomstandigheden is voldaan. Weliswaar heeft op drie scholen een vooronderzoek plaatsgevonden die als alfa-fase zou kunnen worden getypeerd omdat onder betrekkelijk ideale omstandigheden een aantal grondideeën met betrekking tot het beoogde onderwijsleertraject met kleine groepjes leerlingen werden uitgeprobeerd.

Maar van een aparte béta-fase en gamma-fase is geen sprake geweest. Hoogstens zou men kunnen zeggen dat geprobeerd is om deze beide fasen te combineren in een experiment waarbij in ieder geval een zekere breedte van de onderzoekspopulatie is nagestreefd (vijf scholen van uiteenlopende signatuur, vijf leraren met in totaal 112 deelnemende leerlingen), en waarbij de ondersteuning van deze leraren vrij beperkt is geweest. Gezien het feit dat het beoogde onderwijsleertraject niet alleen op alle vijf scholen samen maar ook op deze scholen afzonderlijk tot zeer bevredigende resultaten heeft geleid, is de bruikbaarheid van het ontworpen onderwijsleertraject en de daarbij behorende lokale onderwijstheorie hiermee tot op zekere hoogte aannemelijk gemaakt. Van een werkelijke gamma-fase is evenwel geen sprake geweest, en het zou de moeite waard zijn om zo'n fase alsnog tot stand te brengen. Niettemin heeft het onderzoek, naar ik meen, een aantal waardevolle inzichten opgeleverd ten aanzien van opzet, inhoud en achterliggende onderwijstheorie van het onderwijsleerproces rond het meercijferige vermenigvuldigen waarop in een eventueel vervolgonderzoek in hoge mate voortgebouwd zou kunnen worden.

voetnoten

1 Een omstandigheid die eveneens van invloed kan zijn geweest op het feit dat nogal wat leerlingen zich primair richtten op formele oplossingswijzen in de sfeer van het decimale splitsen, wordt gevormd door de intensieve aandacht die in de betreffende groepen in de tweede helft van groep 6 is besteed aan het cijfermatige rekenen bij vermenigvuldigopgaven van het type eencijferig maal meercijferig. Juist in deze situatie moet het door deze leerlingen als een stap terug zijn ervaren om bij opgaven met louter meercijferige getallen te gaan werken met kleine groepjes.

2 Het gebruik van een positiekaart waarop verduidelijkt wordt hoe de centen bij vermenigvuldigen met 10 in wezen dubbeltjes worden, de dubbeltjes hele euro's, de hele euro's tientjes, enzovoorts, kan hierbij ondersteuning bieden en tevens het inzicht in het positiestelsel verder verdiepen.

3 Dat deze overgang inderdaad niet groot meer is, blijkt onder meer uit het feit dat nogal wat leerlingen tegen het einde van de leergang min of meer uit zichzelf min of meer gestandaardiseerde werkwijzen gaan volgen. Gedeeltelijk betreft dit de standaard-cijferprocedure (die waarschijnlijk van bronnen buiten school is overgenomen), maar gedeeltelijk ook een meer gestandaardiseerde vorm van gestileerd hoofdrekenen.

4 Deze optie van eerst een kolomsgewijze procedure introduceren gevolgd door de cijferprocedure, wordt in de methode Wis en Reken aangehouden. De ervaringen uit de try out hebben geleerd dat het in veel gevallen vooral de leraar is die doorslaggevend is voor de keuze die leerlingen voor de ene dan wel voor de andere procedure maakten. Aan de ene kant kwamen groepen voor waarin verreweg de meeste leerlingen een kolomsgewijze procedure hanteerden, aan de andere kant groepen waarin het overgrote deel van de leerlingen de voorkeur aan de cijferprocedure gaf.

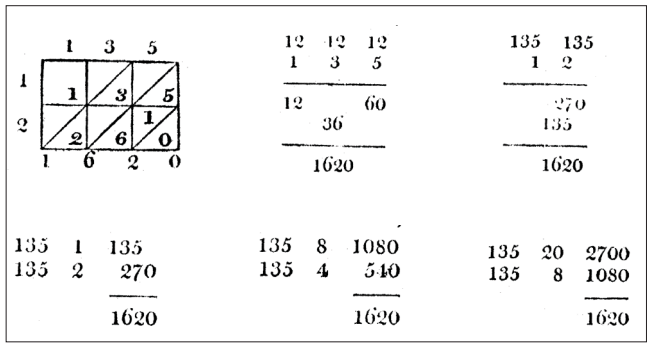
5 Gezien het feit dat het bij deze niveauaanduiding niet alleen om wiskundig handelen maar ook om wiskundig denken gaat, zou er iets voor te zeggen zijn om bij voorkeur te spreken van 'denken-en-handelen'. Dit verwijst naar het feit dat het bij het leren van rekenen-wiskunde niet alleen om het steeds beter onder de knie krijgen van bepaalde handelingen gaat, maar ook om de begripsmatige groei waarmee dat proces gepaard gaat. In de TAL-brochure *Jonge kinderen leren rekenen* (Treffers (red.) e.a., 1999) wordt voor het gebied van het elementaire getalbegrip overigens gesproken van niveaus van 'tellen-en-rekenen' (p. 17).

6 De hier beschreven manier om de niveauverhoging van realistische leergangen te typeren wijkt enigszins af van wat in andere publicaties soms gedaan wordt. Menne (2001, p. 31-33) onderscheidt behalve de niveaus van formalisering en de mate van structurering van rekenstrategieën de mate van toepasbaarheid als een derde dimensie. Deze laatste 'dimensie' wordt door Treffers (2005, p. 140) als 'de algemeenheid van de rekenhandelingen' aangeduid.

7 Ambrose c.s. geven in hun onderzoek naar informele oplossingsstrategieën van leerlingen bij het meercijferige vermenigvuldigen het voorbeeld van een leerling Sean die een opgave rond 43 groepen van 24 kinderen oplost via 40x20, 40x4, 3x20 en 3x4, en merken over deze werkwijze op:

'When Sean decomposed both numbers, is seems that he lifted the quantities out of the particular context of the problem and worked with them independently. Decomposing both quantities suggests a higher level of understanding of multidigit multiplication' (Ambrose c.s., 2003, p. 318).

8 Veel van deze oplossingswijzen kunnen beschouwd worden als vormen van gestileerd hoofdrekenen. Een treffend voorbeeld van zulke oplossingswijzen zijn te vinden in het werk van de klassieke Indiase geleerde Brahmegupta uit 628 na Chr. dat door Colebrooke (1817) in het Engels is vertaald. Brahmegupta beschrijft voor de opgave 12x135 maar liefst zes verschillende strategieën. Het frappante is dat deze strategieën voor het overgrote deel overeenkomen met de verschillende soorten strategieën die in deze studie onderscheiden zijn (zie bijvoorbeeld paragraaf 7.4.1). Hieronder een overzicht van de zes typen strategieën, genoteerd op de manier waarop dat in enkele latere commentaren op het werk van Brahmegupta gebeurt (Colebrooke, chapter II, p. 7). (zie figuur op de volgende pagina)



Linksboven de strategie die in deze studie de AS-strategie is genoemd, midden boven de S2-strategie, rechtsboven en linksonder twee varianten van de S1-strategie, midden onder een vorm van de GR-strategie en rechtsonder een vorm van de compensatie-strategie (12x135 via 20x135 min 8x135).

9 Voor het opleidingsonderwijs worden deze kennis en vaardigheden wel omschreven met de term repertoire, waarbij het vakinhoudelijke repertoire waarover een leraar dient te beschikken, als een belangrijke aanvulling wordt gezien op de competenties van meer algemene aard die hij/zij tot zijn/haar beschikking moet hebben. Zie voor een nadere typering van deze terminologie bijvoorbeeld Klep & Paus (2006) en M. van Zanten & A. van Gool (2007).

10 Een typerend voorbeeld van de wijze waarop in de bovenbouw van de basisschool tijdens de instructie rekening gehouden kan worden met niveauverschillen tussen leerlingen is te vinden in het artikel Wie het kan verwoorden, snapt het (Buijs, 2004), in het blad Volgens Bartjens… Verder belicht Huitema (2002) een aantal waardevolle aspecten van wat hij noemt 'differentiatie in interactie' in zijn bijdrage in het Panamacursusboek 2002.

11 Het samengaan van horizontale en verticale interactie wordt door Nelissen (2002, p. 27) aangeduid als simultane interactie, dat wil zeggen interactie waarbij geprofiteerd kan worden van de voordelen van horizontale zowel als verticale interactie.

12 Hoewel hierover geen harde gegevens zijn achterhaald, lijkt het vermoeden gerechtvaardigd dat de geneigdheid van leerlingen om rechthoeksituaties op een formeel niveau als vermenigvuldiging te interpreteren, te maken heeft met het feit dat dit rechthoekmodel in de voorgaande leerjaren bij de verkenning van de tafels van vermenigvuldiging een dominante rol speelde.

Literatuur

Akker, J. van den, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (2006). Introducing educational design research. In: J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (eds.). *Educational Design Research*. London: Routledge.

Ambrose, R., Baek, J.M. & T.P. Carpenter (2003). Children's Invention of Multidigit Multiplication and Division Algorithms. In: Baroody, A.J. & A. Dowker, *The Development of Arithmetic Concepts and Skills*, p. 305-335. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Anghileri, J. (1995). Issues in teaching multiplication and division. In: Thompson, I., *Issues in Teaching Numeracy in Primary Schools,* p.184-194. Cambridge: Open University Press.

Anghileri, J. (ed.) (2001). *Principles and Practices in Arithmetic Teaching*. Buckingham: Open University Press.

Baroody, A.J. & A. Dowker (red.) (2003). *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive Expertise.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Beishuizen, M. (1997). Development of mathematical strategies and procedures up to 100. In: Beishuizen, M., K.P.E. Gravemeijer & E.C.D.M. van Lieshout (Eds.). *The role of Contexts and Models in the Development of Mathematical Strategies and Procedures.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Beishuizen, M. (2001). Het Nederlandse rekenonderwijs als exportartikel. *Mental calculation* ingevoerd in Engeland. *Willem Bartjens, (20)4,* p.7-11.

Beishuizen, M., C. M. van Putten & F. van Mulken (1997). Mental arithmetic and strategy use with indirect number problems up to one hundred. *Learning and Instruction,* 7(1), p. 87-106.

Beusekom, N. van (red.), S. Bergervoet, P. Roijackers & R. Rouvroye (1998). *Pluspunt. Reken-wiskundemethode voor de basisschool.* (eerste versie). 's Hertogenbosch: Malmberg.

Bokhove, J., S. Huitema & A. Noteboom (1991). *Tafels van vermenigvuldiging – Nascholing Zorgverbreding Speerpunt Rekenen*. 's Hertogenbosch: KPC.

Bokhove, J., K. Kuipers & J. Postema (2000). *Rekenrijk. Realistische rekenmethode voor het basisonderwijs.* Groningen: Wolters Noordhoff.

Brink, F.J. van den (1989). *Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen*. (diss.) Utrecht: OW&OC.

Brown, A. L. (1992). Design Experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *Journal of the Learning Sciences, 2,* 141-178.

Buys, K. en D. van Eerde (red.) (1991). *Tellen en rekenen tot 20 – Nascholing Zorgverbreding Speerpunt Rekenen*. 's Hertogenbosch: KPC.

Buys, K. (1994). De rol van vingerbeelden bij het rekenen tot 10. *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 12,* 3, p.19-24.

Buys, K. (1997). Hoofdrekenen, je krijgt er nooit genoeg van. *Willem Bartjens, (17)1,* p.32-38.

Buys, K. (2000). Hoofdrekenen anno 2000: aandachtspunten voor de leerlijn. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, *18*, 3, p.28-36.

Buijs, K. (2001a). Hoofdrekenen. In M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Buys & A. Treffers (Eds.), *Kinderen leren rekenen* (p.35-54). Utrecht: CD-ß Press / Freudenthal Instituut.

Buys, K. (2001b). 2400, daar hoef je niet eens naar te kijken. Getalgevoel als grondslag voor reken-wiskundige kennis. *Willem Bartjens, (20)5,* p.11-16.

Buijs, K. (2003). Ontwikkeling van een leerlijn: meten. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, *22*, 2, p. 3-17.

Buijs, K. (2004). Wie het kan verwoorden, snapt het. Niveaudifferentiatie in de bovenbouw. *Volgens Bartjens…, 24*(1), p. 4-8.

Buijs, K. (2005). Wiskunde leren, een kwestie van steeds gezonder verstand. In: In: H. ter Heege, T. Goris, R. Keijzer & L. Wesker (red.). *Freudenthal 100 (Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 24(3) / Nieuwe Wiskrant, 25(1)).* Utrecht: Freudenthal Instituut, 98-105.

Buys K. (red.), C. Bergmans, N. Boswinkel, F. Moerlands & M. Torn (2000). *Wis en Reken. Een methode voor realistisch reken- en wiskundeonderwijs voor de basisschool.* Baarn: Bekadidact.

Cameron, A., S.B. Hersch & C.T. Fosnot. (2005). *Turkey Investigations. A Context for Multiplication.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Cobb, P., E. Yackel & T. Wood (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 23(1),* p.2-33.

Cobb, P., T. Wood & E. Yackel (1993). Discourse, Mathematical Thinking, and Classroom Practice. In: N. Minick, E. Forman, and A. Stone (Eds.). *Contexts for learning: Social Dynamics in Childrens Development.* Oxford: Oxford University Press, p.91-119.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design Experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Colebrooke, H. T. (1817). *Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara.* London: John Murray, Albemarble Street.

Craats, J. van de (2007). Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen. *Nieuw Archief voor de Wiskunde, 5/8 nr. 2*, juni 2007, p. 132-136.

Damerow, P., Lefébre, W. (eds.) (1981) *Rechenstein, Experiment, Sprache. Historische Fallstudien zur Entstehung der exacten Wissenschaften.* Stuttgart: Klett-Cotta.

Dekker, A., H. ter Heege en A. Treffers (1982). *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens*

wiskobas. Utrecht: OW&OC.

Design-Based Research Collective, The (2003). Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. *Educational Researcher, 32*(1), 5-8.

Dolk, M. & W. Uittenbogaard (1989). De ouderavond. *Willem Bartjens, (9)1,* p.14-20.

Drijvers, P. (red.) (2006). *Wat a is dat kun je niet weten*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Eerde, D. van (1995). Interactie in diagnostiek en didactiek. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, *14*, 1, p.21-27.

Eerde, D. van (1996). *Kwantiwijzer. Diagnostiek in reken-wiskundeonderwijs* (diss.). Tilburg: Zwijsen.

Fennema, E., T. Carpenter, M. L. Franke & L. Levi (1999). *Children's Mathematics: Cognitively Guided Instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Fosnot, C.T. & M. Dolk (2001a). *Young Mathematicians at Work. Constructing Number Sense, Addition and Subtraction.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Fosnot, C.T. & M. Dolk (2001b). *Young Mathematicians at Work. Constructing Multiplication and Division.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Fosnot, C.T. & M. Dolk (2003). Het leerlandschap. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, *21*, 2, p.29-37.

Foxman, D. & M. Beishuizen (2003). Mental Calculation Methods used by 11-year-olds in Different Attainment Bands: a Reanalysis of Data from the 1987 APU Survey in the UK. *Educational Studies in Mathematics,* 51, 2003, p. 41-69.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and Sowing. Preface to a Science of Mathematical Education*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1979). Wiskunde waarvoor? Voor wie? *School. Veertiendaags tijdschrift over onderwijs en opvoeding. 7*(5), p. 14-16.

Freudenthal, H. (1981). Major Problems of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics, 12,* p.133-150.

Freudenthal, H. (1984). *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren.* Utrecht: OW & OC.

Freudenthal, H. (1988). Ontwikkelingsonderzoek. In: K. Gravemeijer en K. Koster (red.). *Onderzoek, ontwikkeling en ontwikkelingsonderzoek*. Utrecht: OW&OC.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures.* Dordrecht: Kluwer.

Goddijn, A. (2005). Breuk, komma, getal. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, *24*, 2, p.30-36.

Goeij, de E. & J. Nelissen (2004). Kolomsgewijs rekenen. Optellen en aftrekken tot 1000. In: Speciaal rekenen. *Optellen en aftrekken tot 100 en tot 1000. Groep 4 en 5.* Utrecht:

Freudenthal Instituut.
Goffree, F. (1974). Doorkijkspiegelingen – vijftien bespiegelingen bij onderwijspakketten. *Wiskobas Bulletin, 3*(6), p. 474-495.
Goffree, F. (1979). *Leren onderwijzen met wiskobas*. (diss.) Utrecht: IOWO.
Goffree, F. (1982). *Wiskunde & didactiek voor aanstaande leraren basisonderwijs (tweede deel)*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
Goffree, F. (1984). *Van redactiesom naar rijk probleem.* Enschede: SLO.
Gravemeijer, K., F. van Galen, J.M. Kraemer, T. Meeuwisse & W. Vermeulen (1988). *Rekenen & Wiskunde.* Baarn: Bekadidact.
Gravemeijer, K. (1992a). Socio-constructivisme en realistisch reken-wiskundeonderwijs. In: *Panama Cursusboek 10,* 50-59.
Gravemeijer (1992b). Onderwijsontwikkeling en ontwikkelingsonderzoek. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, *10*, 3, p.3-13.
Gravemeijer, K., M. van den Heuvel-Panhuizen, G. van Donselaar, N. Ruesink, L. Streefland, W. Vermeulen, E. te Woerd & D. van der Ploeg (1993). *Methoden in het reken-wiskundeonderwijs, een rijke context voor vergelijkend onderzoek.* Utrecht: CD-β Press.
Gravemeijer, K. (1993). Ontwikkelingsonderzoek als basis voor theorievorming. In: De Jong, R. & M. Wijers (red.). *Ontwikkelingsonderzoek. Theorie en praktijk.* Utrecht: Freudenthal Instituut.
Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education.* (Diss.) Utrecht: Freudenthal Instituut.
Gravemeijer, K. (1995). Het belang van social norms en socio-math norms voor realistisch reken-wiskundeonderwijs. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, *14*, 2, p.17-23.
Gravemeijer, K. (1998). Developmental Research as a Research Method. In: J. Kilpatrick & A. Sierpinska (eds.). *What is Research in Mathematics Education and what are its Results?* Icme Study Publication, Book 2, p.277-295.
Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 155-177.
Gravemeijer, K., (2001). *Reken-wiskundeonderwijs voor de 21e eeuw.* (oratie) Utrecht: Freudenthal Instituut.
Gravemeijer, K.P.E. (2003a). Didactisch gebruik van de lege getallenlijn. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, *21*, 2, p.11-23.
Gravemeijer, K. (2003b). Preamble: from models to modelling. In: Gravemeijer, K. P. E., R. Lehrer, B. van Oers & L. Verschaffel, *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education,* p. 7-22. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (2005). Revisiting 'Mathematics education revisited'. In: H. ter Heege, T. Goris, R. Keijzer & L. Wesker (red.). *Freudenthal 100 (Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 24(3) / Nieuwe Wiskrant, 25(1))*. Utrecht: Freudenthal Instituut, 106-113.

Gravemeijer, K. & P. Cobb (2006). Design research from a learning design perspective. In: J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (eds.). *Educational Design Research*. London: Routledge.

Heege, H. ter (1985). The acquisition of basic multiplication skills. *Educational Studies in Mathematics,* 16, 1985, pag. 375-389.

Heege, H. ter (1986). *Een goed product. Onderzoek en ontwikkeling ten behoeve van een leergang vermenigvuldigen* (doct. scriptie). Utrecht: Rijksuniversiteit Utrecht, vakgroep onderwijskunde.

Heege, H. ter (1987). *Studies in leerplanontwikkeling 9: Een goed product.* SLO, Enschede.

Heege, H. ter & A. Treffers (1979). Hoofdstuk 4: Peiling. In: Treffers, A. (red.): *Cijferend vermenigvuldigen en delen (1), leerplanpublicatie 10 Wiskobas.* Utrecht: IOWO.

Heuvel-Panhuizen, M. van den (1996). *Assessment and Realistic Mathematics Education*. (diss.) Utrecht: Freudenthal Instituut.

Heuvel-Panhuizen, M. van den (1999). Bomen over rekenen boven 2000. In: Keijzer, R. & W. Uittenbogaard. *Overzicht en samenhang. Leerlijnen in / en een uitdagende praktijk*. (Verslag Panamaconferentie 1998; p. 11-34). Utrecht: Freudenthal Instituut.

Heuvel-Panhuizen, van den M., & E. de Goeij (1999a). De resultaten van een nationale bezinning op het rekenen in de bovenbouw van de basisschool (1). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, *17*, 4, p.3-14.

Heuvel-Panhuizen, van den M., & E. de Goeij (1999b). De resultaten van een nationale bezinning op het rekenen in de bovenbouw van de basisschool (2). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, *18*, 1, p.3-20.

Heuvel-Panhuizen, M. van den, Buys K. & Treffers A. (eds.) (2001). *Kinderen leren rekenen. Hele Getallen Bovenbouw Basisschool.* Groningen: Wolters Noordhoff.

Heuvel-Panhuizen, van den M. & C. Bodin-Baarends (2004). Alles of niets. Probleemoplossen door goede rekenaars. *Volgens Bartjens..., 24*(2), 12-15.

Hiebert, J., T.P. Carpenter, E. Fennema, K. Fuson, P. Human, H. Murray, A. Olivier & D. Wearne (1996). Problem Solving as a Base for Reform in Curriculum and Instruction: The Case of Mathematics. *Educational Researcher. 25*(4), p.12-21.

Hiele, P.M. van (1973). *Begrip en inzicht*. (diss.) Purmerend: Muusses.

Hutton, J. (1977). Memoirs of a math teacher 5. Logical reasoning. *Mathematics Teaching, 81*, p.8-12.

Huitema, S. (1991). Meer hoofdrekenen, minder cijferen. *Willem Bartjens, 11*(1), p. 4-7.

Huitema, S. (2002). Interactie en de dilemma's van de leerkracht. Differentiatie in interactie. In: Keijzer, R. & W. Uittenbogaard (red.). *Interactie in het reken-wiskundeonderwijs. Panamacursusboek 2002.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Huitema, S., A. van der Klis, F. van de Molengraaf & M. Timmermans (1990). *De Wereld in Getallen.* Tweede versie. 's Hertogenbosch: Malmberg.

Huitema, S., A. van der Klis, M. Timmermans, L. Erich & P. Man. *De Wereld in Getallen.* Derde versie. 's Hertogenbosch: Malmberg.

Jansen, H. (1973). Wat hoofdrekenen is, weet iedereen. *Wiskobasbulletin, 2*(3), p. 784-786.

Jansen, J.W., J.M. Reijnders & J. Snijders (1964). *Gefundeerd hoofdrekenen. Leidraad voor leerlingen van kweekscholen en onderwijzers(essen).* Amsterdam: Versluijs.

Janssen, J., F. van der Schoot B. Hemker & N. D. Verhelst (1999). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 3.* Arnhem: Cito.

Janssen, J., F. van der Schoot & B. Hemker (2005). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4.* Arnhem: Cito.

Janssen, G.M. (1974). *Kijk op kans. Wiskunde voor de hoogste klassen van de basisschool.* Purmerend: Muusses.

Jong, R. de, A. Treffers & E. Wijdeveld (red.) (1975). *Overzicht van wiskundeonderwijs op de basisschool. Model voor een schoolwerkplan.* Leerplanpublicatie nr. 2. Utrecht: IOWO.

Jong, R. de (red.) (1977). *De abakus. Een belangrijk leermiddel voor het wiskundeonderwijs op de basisschool.* Leerplanpublicatie nr. 6. Utrecht: IOWO.

Jong, R. de (1986). *Wiskobas in methoden.* (diss.) Utrecht: vakgroep OW & OC.

Juschkewitsch, A.P. (1961). *Geschichte der Mathematik im Mittelalter.* Leipzig: Edition Leipzig.

Kaput, J. (1987). Towards a Theory of Symbol Use in Mathematics. In C. Janvier (Ed.). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, p. 159-196.

Kelly, A.E. (2003). Research as design. Theme issue: The role of design in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 3-4.

Kelly, A.E. (2006). Quality criteria for design research: evidence and commitments. In: J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (eds.). *Educational Design Research.* London: Routledge.

Keijzer, R., L. Kerstens, G. Baars & W. Uittenbogaard (2004). Competentiegericht opleiden. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk 25*(1), 3-8.

Keijzer, R., N. Figueiredo, F. van Galen, K. Gravemeijer & E. van Herpen (2005). *Breuken, Procenten, kommagetallen en verhoudingen. Tussendoelen Annex Leerlijnen.* Groningen: Wolters-Noordhoff.

Kindt, M. (2006). Oefening baart kunst. In: Drijvers (red.), *Wat a is, dat kun je niet weten. Een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school* (p. 105-159). Utrecht: Freudenthal Instituut.

Klavier, C. (red.) (1976). *Uitkomst. Rekenmethode op moderne grondslag.* Tilburg: Zwijsen.

Klein, A. S. (1998). *Flexibilization of mental arithmetic strategies on a different knowledge base: The Empty Number Line in al Realistic versus Gradual Program Design* (diss.). Utrecht: CD-β Press / Freudenthal Instituut.

Klep, J. (1986). Een wereld rond tafels. *Willem Bartjens, 6*(2), p. 145-152.

Klep, J. & H. Paus (2006). Geen competentie zonder repertoire. *VELON Tijdschrift voor lerarenopleiders, 27*(1), 5-12.

Klep, J., K. Buijs & A. Noteboom (2006). *Uitwerking van de kerndoelen rekenen-wiskunde.* Publicatie op de website bij het onderdeel TULE. SLO: Enschede.

Kline, M. (1973). *Why Johnny can't add. The failure of the New-Math.* New York: St. Martin's Press.

Krauthausen, G. (1993). Kopfrechnen, halbschriftliches rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner: für eine Neubestimmung des Stellenwertes der vier Rechenmethoden. *Journal für Mathematikdidaktik 14*(3/4), p.189-219.

Lampert, M. (1986). Teaching multiplication. *The Journal of Mathematical Behaviour (5)*3, p. 241-280.

McIntosh, A., B.J. Reys & R.E. Reys (1992). A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the learning of Mathematics, 12* (3), 2-9.

Meira, L. (2003). Mathematical Representations as Systems of Notations-in-use, in Gravemeijer, K., R. Lehrer, B. van Oers & L. Verschaffel, *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education*, p. 87-104. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Menne, J. (2001). *Met sprongen vooruit. Een productief oefenprogramma voor zwakke rekenaars in he getallengebied tot 100 – een onderwijsexperiment* (diss.). Utrecht: CD-β Press / Freudenthal Instituut.

Moerlands, F. & N. Boswinkel (1997). Van poffertjes tot supersom. Een lijn in tafels. In: Van den Boer, C. & M. Dolk (red.). *Naar een balans in de reken-wiskundeles. Panamacursusboek 1997.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Molengraaf, G.W.J. van de (red.) (1985). *De Wereld in Getallen. Rekenmethode voor de basisschool.* Eerste versie. 's Hertogenbosch: Malmberg.

Moor, E. de (1983). *Pluspunt Handboek.* NOT, Hilversum.

Moor, E. de (1999). *Van vormleer naar realistische meetkunde.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Murray, H., A. Olivier & P. Human (1994). Fifth graders multi-digit multiplication and division strategies after five years' problem-centered learning. In: *Proceedings of the*

Eighteenth International Conference on the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, p. 399-406).

Needham, J. (1959). *Science and Civilisation in China. Volume 3: Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth*. Cambridge: University Press.

Nelissen, J. (1987). *Kinderen leren wiskunde* (diss.). Gorinchem: De Ruiter.

Nelissen, J. (2002). Interactie: een vakpsychologische analyse. In: Keijzer, R. & W. Uittenbogaard (red.). *Interactie in het reken-wiskundeonderwijs. Panamacursusboek 2002*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Nelissen, J., A. Vuurmans, W. Klukhuhn, S. Gribling & W. Brok (1988). *Rekenwerk. Methode rekenen/wiskunde voor het basisonderwijs.* Gorinchem: De Ruiter.

Nieland, J. (1986). Wat was en is hoofdrekenen eigenlijk? *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, *4/5*, 1, p.6-10.

Noteboom, A. & J. Verwaal (2005). Interactie. Vasthouden betekent opgeven. *Volgens Bartjens, 2*(25), p. 12-13.

NRC (National Research Council) (1989). *Everybody Counts. A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education*. Washington D.C.: National Academic Press.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (1990). *Mathematics for the young child*. Reston, Va: Author.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Va: Author.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2006). *Curriculum Focal Points. A Quest for Coherence.* Reston, Va: Author.

Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically: Communication in Mathematics Classrooms.* London: Routledge. Plunkett, S. (1979). Decomposition and all that rot. *Mathematics in School, 8*(3), p. 2-6.

Putten, C.M. van & M. Hickendorff (2006). Strategieën van leerlingen bij het beantwoorden van deelopgaven in de periodieke peilingen aan het eind van de basisschool van 2004 en 1997. *Tijdschrift voor nascholling en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, *25*, 2, p.16-25.

QCA (Qualifications and Curriculum Agency) (1999). *The National Numeracy Strategy. Framework for teaching Mathematics from Reception to Year 6.* London: QCA Publications.

Radatz, H. & W. Schipper (1983). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag.

ReAlproject (2007). *Leerlijnen van rekenen naar algebra*. (Intern discussiestuk). Enschede: SLO.

Ruesink, N., K. Gravemeijer, M. van den Heuvel-Panhuizen, L. Streefland (1992).

Methoden in het reken-wiskundeonderwijs – een contextrijke opgave. In: M. Dolk (red.). *Panamacursusboek 10: rekenen onder en boven de 10*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Ruthven, K. (1998). The use of Mental, Written and Calculator Strategies of Numerical Computation by Upper Primary Pupils within a 'Calculator-aware' Number Curriculum. *British Educational Research Journal, 24* (1), p. 21-42.

Scholten, P. & H. ter Heege (1983). Pluspunt, samenwerkingsproject van NOT, SLO en SOL (werkboek en handleiding). Purmerend: Muusses.

Scholten, P., J. Nieland & K. Buys (1986). *Rekenwerk. Een schooltelevisieproject hoofdrekenen voor de groepen 6 en 7 van de basisschool* (Handleiding en werkboek). Purmerend: Muusses.

Scholten, P. (1988). Uitlijnen en uitbalanceren. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, *6(* 3), p.39-44.

Selter, Chr. (1998). Building on Children's Mathematics – A Teaching Experiment in Grade three. *Educational Studies in Mathematics*, *36*(1) p. 1-27.

Smaling, A. (1990). Enige aspecten van kwalitatief onderzoek en het klinische interview. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, *8*, 3, p.4-10.

Smith, D. E. (1958). *History of Mathematics, volume 1 en 2*. New York: Dover Publications, Inc.

Streefland, L. (1983). *Aanzet tot een nieuwe breukendidactiek volgens Wiskobas.* Utrecht: vakgroep OW & OC. Streefland, L. (1985). Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron. *Nieuwe Wiskrant 5*(1), p. 60-67.

Streefland, L. (1988). *Realistisch Breukenonderwijs* (diss.), Utrecht, Freudenthal Instituut, 1988.

Streun, A. van (2007). Parate kennis en algebra. Wiskundedidactiek anno 2010. *Euclides. Vakblad voor de wiskundeleraar. 33(4),* p.151-152.

Streun, A. van (red.), S. van Boven, L. van den Broek, K. Buijs, A. Knop, A. Moeies & M. Wijers (2008). *Verkennen, gebruiken, verdiepen. Rapport van de programmacommissie onderbouw van Ctwo.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Struik, D. J. (1977). *Geschiedenis van de wiskunde.* Amsterdam: SUA.

Thompson I. (red.) (1997). *Teaching and learning early number.* Buckingham (UK): Open University Press.

Thompson, I. (2004). To jot or not to jot? *Mathematics in school,33*(3), p. 6-7.

Treffers, A. (1975). *De Kiekkas van Wiskobas. Beschouwingen over uitgangspunten en doelstellingen van het aanvangs- en vervolgonderwijs in de wiskunde.* Leerplanpublicatie nr. 1. Utrecht: IOWO.

Treffers, A. (1978). *Wiskobas doelgericht*. (diss.) Utrecht: IOWO.

Treffers, A. (red.) (1979). *Cijferend vermenigvuldigen en delen (1), leerplanpublicatie 10 Wiskobas.*

Utrecht: IOWO.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: a Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction. The Wiskobas Project*. Dordrecht: Kluwer.

Treffers, A. (1990). Beknopte schets van een Onderwijsprogramma voor het Rekenen tot Twintig met het Rekenrek. *Willem Bartjens, 10(1)*, p. 35-45.

Treffers, A. (1991). Hoofdrekenen toen en nu. In: Dolk, M. & E. Feijs (red.) *Panama Cursusboek 9. Deskundigheid*. (p. 41-47) Utrecht: Vakgroep OW & OC.

Treffers, A. (1993). Ontwikkelingsonderzoek in eerste aanzet. In: De Jong, R. & M. Wijers (red.). *Ontwikkelingsonderzoek. Theorie en praktijk.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Treffers, A. (1994). Basale (on)gecijferdheid. In: Dolk, M., H. van Luit & E. te Woerd (red.): *Speciaal rekenen* (Verslag Panamaconferentie 1993; p. 11-28). Utrecht: Freudenthal Instituut.

Treffers, A. (1995). Kerndoelen cijferen. Voorstel tot nadere uitwerking. In: Boer, van den C. & M. Dolk (red.). *Rekenen in de bovenbouw van de basisschool.* (Verslag Panamaconferentie 1994; p. 11-18) Utrecht: Freudenthal Instituut.

Treffers, A. (1999). Rekenen tot 20. In A. Treffers, M. van den Heuvel-Panhuizen & K. Buys (Eds.), *Jonge kinderen leren rekenen* (p. 45-71). Groningen: Wolters-Noordhoff.

Treffers, A. (2001). De rekenruimte van TAL. *Intern discussiestuk van het TAL-project.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Treffers, A. (2005). De (on)navolgbare Freudenthal. In: H. ter Heege, T. Goris, R. Keijzer & L. Wesker (red.). *Freudenthal 100. (Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 24(3) / Nieuwe Wiskrant, 25*(1), p.135-144. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Treffers, A. & E. de Moor (1984). *10 voor de basisvorming rekenen/wiskunde (werkboek).* Utrecht: vakgroep OW&OC.

Treffers, A., E. de Moor & E. Feijs (1989). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 1: Overzicht Einddoelen.* Tilburg: Zwijsen.

Treffers, A. & E. de Moor (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2: Basisvaardigheden en cijferen.* Tilburg: Zwijsen.

Treffers, A., L. Streefland & E. de Moor (1996). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 3B: kommagetallen.* Tilburg: Zwijsen.

Treffers, A. & K. Buys (1999). Groep 4 (5). Rekenen tot honderd. In A. Treffers, M. van den Heuvel-Panhuizen & K. Buys (Eds.), *Jonge kinderen leren rekenen* (p. 45-71). Groningen: Wolters-Noordhoff.

Treffers, A., Heuvel-Panhuizen, M. van den & Buys, K. (Eds.) (1999). *Jonge kinderen leren rekenen. Hele Getallen Onderbouw Basisschool.* Groningen: Wolters-Noordhoff.

Treffers, A. (2005). De (on)navolgbare Freudenthal. In: H. ter Heege, T. Goris, R. Keijzer & L. Wesker (red.). *Freudenthal 100 (Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 24(3) / Nieuwe Wiskrant, 25(1))*. Utrecht: Freudenthal Instituut, 135-144.

Uittenbogaard, W. (2007). Hoe Juliette en Jonas leren rekenen. *Volgens Bartjens…27*(1), p. 4-9.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In: Lesh, R. & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, p.127-174. New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In: Hiebert, J. & M. Behr (eds.), *Number concepts and Operations in the Middle Grades*, p. 141-161. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Verschaffel, L. (1993). Inleiding. Ontwikkelingen en perspectieven in de methodologie van onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs. In: De Jong, R. & M. Wijers (red.). *Ontwikkelingsonderzoek. Theorie en praktijk.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Versluijs, J. (1899). *De methodiek van het rekenen. Ten dienste van Kweekelingen.* (2e druk) Amsterdam: Versluijs.

Vuurmans, A.C. (red.) (1991). *Rekenen tot 100 – Nascholing Zorgverbreding Speerpunt Rekenen.* 's Hertogenbosch: KPC.

Wittman, E.Ch. & G.N. Müller (1992). *Handbuch produktiver Rechenübungen, Bd. 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen.* Stuttgart: Klett.

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. In: Heuvel-Panhuizen, van den M. (red.). *Proceedings of the twenty-fifth conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1, p. 9-24. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Zandvoort, R.H., H.M. Venekamp & N. Kuijpers (1970). *Naar Zelfstandig Rekenen. Rekenmethode voor de lagere school.* Groningen: Wolters Noordhoff.

Zanten, M. van & A. van Gool (2007). *Opleiden in geuren en kleuren. Bakens voor rekenen-wiskunde & didactiek op de pabo.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Zwaart, P. van der, T. Dekker, W. Spek & M. Weijers (2008). *Leerlijn van rekenen naar algebra.* Internetpublicatie op de website van SLO (Enschede) en Freudenthal Instituut (Utrecht)

Summary

Introduction (Chapter 1)

The reason for this study lies in the fact that efforts to create a learning trajectory[1] for the domain of multidigit multiplication based on the realistic approach of mathematics education and building on children's own informal strategies with the aim of transforming these strategies into efficient notation-supported mental strategies, have not been quite successful. That this is the case, can not only be concluded from an analysis of common learning trajectories in recent Dutch mathematics textbooks, but also from a number of personal experiences of the researcher with the development of one of these textbooks[2]. Moreover recent research in the field of multidigit multiplication in The Netherlands, shows that the success rates being obtained by 11-12 year old Dutch students with solving problems in this field such as the one below, have dropped over the last ten years substantially from about .75 to .60.

> On a ferry-boat 23 cars can be transported in one time.
> How many cars can be transported at most when the ferry-boat crosses 56 times?

Research also shows that the number of students that use mental strategies without supporting those strategies with appropriate auxiliary notations, is increasing considerably. With these facts in mind a research was conducted that addresses the following questions:

(1) *How can a learning trajectory for multidigit multiplication be shaped that builds on students' own, informal strategies and that helps them to develop theses strategies into efficient, notation-supported mental strategies in the domain of stylized mental computation[3]?*
(2) *How do the solutions and the notations[4] of the students develop under influence of such a learning trajectory? And to what extent does this learning trajectory provide also weaker students with sufficient support to develop the intended strategies?*
(3) *What are the key elements of a local instruction theory that constitutes the rationale for such a learning trajectory?*

The research fits in with the tradition of developmental research that has been established in The Netherlands as a type of research in which, on the basis of an overarching domain specific theory (known as Realistic Mathematics Education, RME),

an experimental learning trajectory is developed together with a corresponding local instruction theory that is being put to the test in a classroom teaching experiment. The whole process of designing, trying and revising is recorded and analyzed as carefully as possible in order to be able to develop an empirically grounded instruction theory.

An important background of the research was constituted by the fact that in recent documents on curriculum development in The Netherlands, there is clear tendency to pay less attention to the traditional standard written algorithms in education, and to focus more on topics like number sense, mental calculation and measurement. In the light of this tendency it is important to dispose of a well outlined learning trajectory that is primarily aiming at stylized mental computation and that can offer also weaker students that do not arrive at the ultimate goals of most abbreviated procedures, sufficient opportunities to arrive at satisfactory achievements.

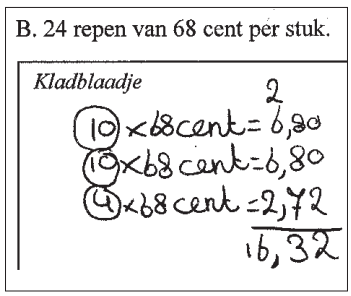


Fig. 1: Example of a notation supported mental strategy that occurred during the present research (problem: what is the price of 24 chocolate bars of 68 cents?).

The results of the present study primarily consist of a description of the outline of a learning trajectory with a corresponding local instruction theory for multidigit multiplication. Within this theory special attention is paid to the level structure of the learning process. Next to this, a number of more general findings and recommendations is presented that refer to actual aspects of the RME-approach and the corresponding process of progressive mathematization. In the following, a summary of each of the remaining eight chapters of the research will be given.

Chapter 2: Theoretical framework

Chapter 2 describes the theoretical framework that serves as a basis for the research. This applies in the first place to the realistic instruction theory RME mentioned above. To do justice to the *a posteriori* character of this theory, it is rendered here from a historic-genetic point of view. The first part of the chapter describes how

the theory came into being in the period 1970-1985 as a result of repeated reflections on a series of design activities by the wiskobasgroup[5]. Numerous prototypes of learning trajectories for domains such as arithmetic up to 20, column arithmetic, area and fractions were designed together with a number of more theoretical ideas that were construed as common characteristics of these learning trajectories. These ideas are related to concepts such as mathematics as a human activity, with mathematizing as a core-activity, and didactical phenomenology as a basis for the construction of prototypes of learning trajectories (Freudenthal, 1973; 1978; 1991). In a more crystallized and coherent form these characteristics were presented some years later as a theoretical framework for mathematics instruction in Treffers' book *Three dimensions* (1987). By means of a synthesis of the regarding basic notions about the level character of the mathematical learning process (see Fig. 2 below; Van Hiele, 1973) and progressive mathematization (Freudenthal, 1973; Treffers, 1975; Streefland, 1985), five fundamental 'tenets' are reconstructed that constitute the central framework of this theory. These tenets apply, amongst others, to the use of contexts (meaningful real life situations) as starting points for mathematical activities; the use of models as a means of level raising for mathematical acting and thinking; and the interactive nature of the instruction – a type of instruction to which the students contribute substantially by presenting their own informal solution strategies and by discussing these strategies together.

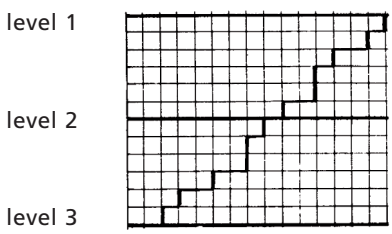


Fig. 2: Scheme in which the relation between the microlevels of Freudenthal and the macrolevels of Van Hiele are visualized (Treffers, 1987, p. 248)

Later in chapter 2 it is argued that the theory should not be seen as a completely fixed and prescriptive model for mathematics instruction, but rather as a global guideline for the way the teaching-learning process can be arranged. As an illustration of this, two fundamental new trends in the process of progressive theory building are discussed that were emerging in the period 1990-2005. The first one applies to a number of ideas that were developed in the course of the TAL-project[6]. These ideas relate to global learning trajectories with embedded intermediate learning goals, as well as to more advanced views about the level character of the learning process. The second one is related to a recent influential educational approach called socio-constructivism. In this approach mathematical knowledge is considered as something

that has to be built up mainly by the students themselves, while the teacher predominantly functions as 'facilitator' and guide for the learning process (Gravemeijer, 1992a; 1995). A central place in this approach is assigned to the 'mathematical discourse' in which the students share their ideas and solution strategies with each other; as well as to the social and socio-mathematical classroom norms that have to be established in order to create a fruitful learning environment.

In the last part of chapter 2 some of the main local instruction theories for multidigit multiplication that were available in The Netherlands, are described. This concerns amongst others the theory of progressive schematization that was developed by wiskobas in two variants: one with a repeated addition-model as central model, the other with an intersection-model. Both models are discussed briefly.

Chapter 3: background of the research

In this chapter the background of the research is outlined. First of all, this regards a more precise elaboration of what is meant by terms such as mental computation, mental strategies and stylized mental computation. The use of these terms corresponds to the way they are used in the TAL-project. Thus, mental computation refers to a fluent and flexible way of computation that is mainly done by heart and in which appropriate number relations and mathematical properties are used. Not everything needs to be done by heart – auxiliary notations are employed when this appears to be useful. Mental strategies are defined as the strategies that are being used in the process of mental computation, for instance when 516-98 is solved by reasoning: 516-100=416; 416+2=418. In line with this, stylized mental computation is defined as a form of mental computation in which the various steps that are executed during the solution process, are written down in a systematic way. Moreover these steps are usually carried out in a more or less fixed order, which makes this form of mental computation very suitable as a transition phase towards standard written algorithms. See Fig. 3 for two examples taken from the experimental learning trajectory.

In the next part of chapter 3 the domain of multidigit multiplication is considered more closely. This subject has to be seen as a domain on a crossroads of learning trajectories. In the preceding period important subjects have been explored such as arithmetic up to 100 and to 1000, the times-tables, measurement, and multiplication and division with 'round' numbers (8x30, 20x15, 200:5, 600:4). Afterwards, when the field of multidigit multiplication has been explored sufficiently, it is

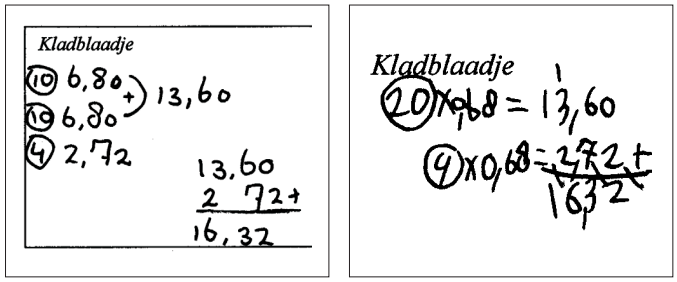


Fig.3: Two forms of stylized mental computation (problem: 24 chocolate bars of 68 cent)

followed by other important domains such as fractions, decimal numbers, ratio and proportion, and elementary algebra. On the one hand what has been learned before the introduction of multidigit multiplication, has to support the learning within that area. On the other hand what is being raised within that domain has to anticipate the things yet to come. This has some significant implications for some of the fundamental mathematical ideas that the students have to get acquainted with, such as the distributive property.
On the basis of this outline of the position of multidigit multiplication within the curriculum, an analysis is made of the way this domain is being dealt with in recent textbooks in The Netherlands. It is established that the approach in these textbooks generally is in agreement with the ideas that were introduced by wiskobas. Central to this approach is the fact that the strategy of repeated addition is taken as a starting point and that this strategy is abbreviated by taking the multiplicand 10 times and thus using the 'zero rule'[7]. Although there are some obvious differences between the textbooks, the learning trajectories in question generally show some common drawbacks in that the transition from repeated addition to taking the multiplicand 10 times often seems rather artificial. Also the notations that are used, sometimes seem to be quite laborious, whereas the transition from stylized mental computation to the standard written algorithm in some cases appears to be hard to understand for students.

Subsequently three important examples of international research projects on multidigit multiplication are discussed. The first of these is an American project by Ambrose, Baek and Carpenter (2003) in which an educational approach called 'cognitively guided instruction' is followed and in which 'self invented algorithms' of students are investigated. In a longitudinal survey the researchers map out what kind of strategies in multidigit multiplication problems are used by students that haven't had any for-

mal instruction on the subject. Their study results in an overview of such algorithms, varying from elementary solution strategies such as repeated addition and various forms of doubling (see Fig. 4) to more sophisticated strategies based on decimal splitting. Within this last category a distinction is made between strategies in which only the multiplier is split (which is seen as more basic) and strategies in which both multiplier and multiplicand are split (more advanced).

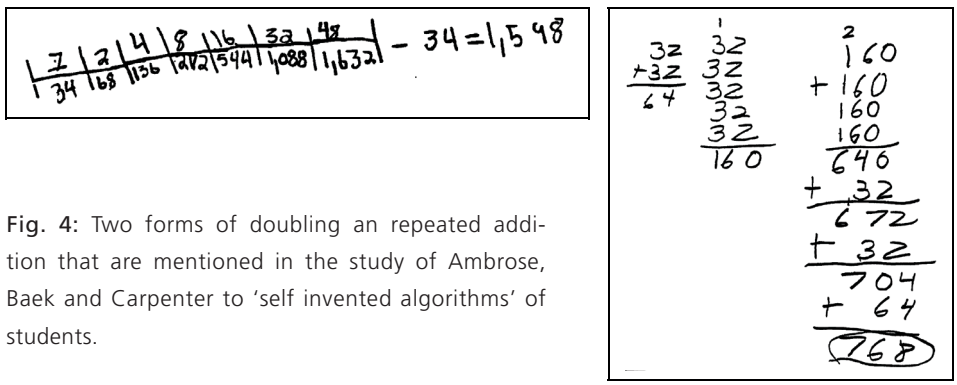


Fig. 4: Two forms of doubling an repeated addition that are mentioned in the study of Ambrose, Baek and Carpenter to 'self invented algorithms' of students.

Some important remarks in this study are made concerning the way the more basic strategies can evolve into more advanced strategies in a process of progressive abbreviation and level raising.

The second example is also an American project, carried out by Fosnot and Dolk (2001a, 2001b) who elaborated a socio-constructivist approach for various domains in elementary mathematics education. One of these is related to multidigit multiplication. In this approach special attention is paid to the use of contexts and models, and to the way a 'mathematical conference' can play a central role in the process of acquiring mathematical knowledge. Further, they point out the importance of fundamental mathematical concepts ('big ideas') of which the students should develop a clear understanding in the course of the learning process. In the case of multidigit multiplication such concepts apply for instance to 'unitizing', the commutative and distributive properties, and 'arrays'.

The third example is a South-African research project (Murray, Olivier and Human, 1994) in which a socio-constructivist approach is elaborated for a number of domains, including multidigit multiplication. The various types of solution strategies that are distinguished by these researchers agree considerably with the classification of Ambrose c.s., although they do mention a type of incorrect strategy that is not reported by Ambrose c.s. Later on, this strategy would also

occur rather frequently in the present study where it was named 'wrong splitting' (for instance: solving 24x32 via 20x30=600; 4x2=8; 600+8=608).

After a reflection on the possibilities and limitations of a constructivist approach to mathematics education, chapter 3 concludes with a survey of recent results of multidigit multiplication problems in The Netherlands. An analysis is made of the results of two problems (one of which concerns the ferry-boat problem mentioned in the introduction of this summary) in two major assessments of the PPON-project in 1997 and 2004, carried out by the national institute for educational measurement Cito. From this analysis it appears that the success rates for solving this type of problems have dropped considerably from about .75 to about .60. Also it appears that the frequency of the use of mental strategies has increased substantially whereas at the same time the number of students that are supporting their mental strategy with auxiliary notations, has decreased. All in all this phenomenon is seen as a sign that the use of such notations in primary school mathematics education is a rather underexposed issue.

Chapter 4: Design of the research

Starting point for the description of the research design is formed by an outline of the way developmental research has come into being in the footsteps of the RME-approach of mathematics education under the influence of researchers like Freudenthal, Streefland, Treffers and Gravemeijer. It is established that although developmental research is still fully developing, three phases and five basic features can be distinguished that are generally accepted as essential components of this type of research. The three phases apply to a preparatory phase, an experimental phase and a retrospective phase. And the five basic features concern the role of thought-experiments; the cyclic character of the process of designing, experimenting/evaluating and revision; the emphasis on documenting the research process in a systematic and detailed way; the orientation on theory building as a major outcome of the research; and the aspiration of credibility by virtual replicability (by which is meant that the research is reported in such a manner that it can be retraced or virtually replicated by other researchers).

Subsequently the three phases of the present research are described in detail. In this section of chapter 4 it is shown how in phase one a number of reflections on former

design experiences of the researcher took place and how this led to a first notion of the outline of the learning trajectory. This led to a preliminary investigation in which small groups of students were presented a series of multiplication problems under rather ideal educational circumstances. The results of this investigation constituted the basis for the actual process of designing the learning trajectory, including the devising of working sheets for the students, a teacher guide and an assessment that was to be held at the start, halfway and at the end of the experimental learning trajectory. In relation to the second phase it is described how five schools were selected in which the experimental learning trajectory would be tried (in a total research population of 112 students) and how the teachers in question were prepared to some extent to give the planned experimental lessons. Furthermore is sketched which data were collected during the experiment and how these data were gained by observing the experimental lessons, analyzing students' materials, interviewing students after the assessment, analyzing videotaped lessons, and so on. Finally, concerning the retrospective phase it is indicated how an analysis was made of the question to what extent the initially formulated expectations related to the mathematical progress of the students, were confirmed in the experiment. Other essential activities in this phase include an analysis of the results of the learning trajectory in terms of success rates, development of solution strategies and of auxiliary notations, as well as an analysis aimed at comparing the results of the 25% weakest students with those of the 25% best students. The last part of the retrospective phase consists of the framing of a number of more general findings that formed the basis for the description of an adapted version of the local instruction theory, and for an elaboration of some major issues that somehow raised during the research.

Two of the basic features mentioned above are elaborated in the final section of chapter 4. This concerns a more precise indication of the manner in which thought-experiments functioned as a major source of information during the research process; and of the way in which the cyclic character of designing, experimenting and revising was shaped during the process (see Fig. 5 for a schematic overview of this cyclic character).

Chapter 5: The development of the learning trajectory

In chapter 5 a core activity of the preparatory phase is described: the development of the experimental learning trajectory. In a reflection on some of the findings in the preceding chapters, two important starting points are rendered. The first of these

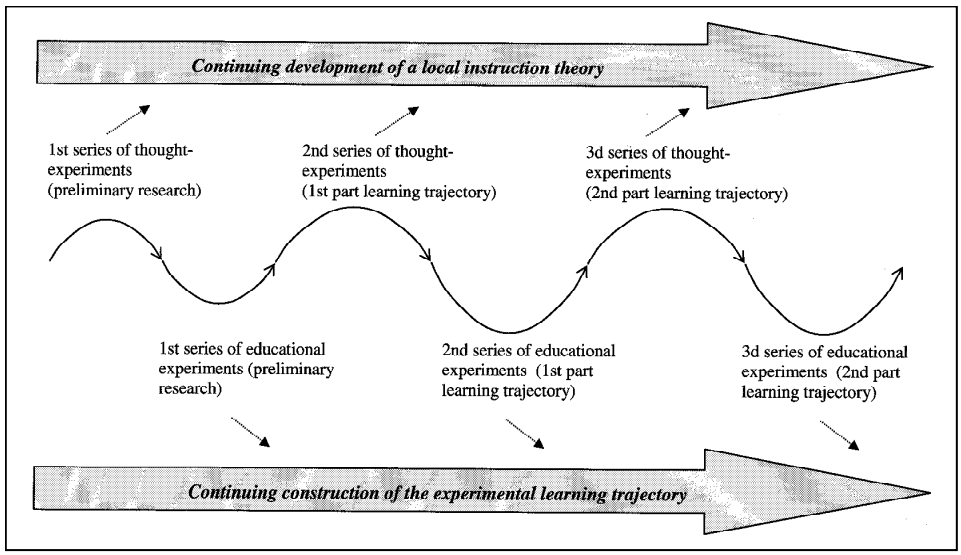


Fig. 5: Overview of the way the cyclic character of the research process taken shape during the research.

concerns the fact that the already existing learning trajectories for multidigit multiplication in recent textbooks, have some major drawbacks. The second is related to the fact that there is essential new information available about the informal strategies of students and about the way these strategies may develop into the kind of advanced notation supported mental strategies that are aimed for in the experimental learning trajectory.
Subsequently a phenomenological analysis is made that is inherent to the process of developing learning trajectories within to the RME-approach. In this analysis the most significant contexts and models that may play a role in the learning trajectory, are mustered. Also it is envisaged in which order these contexts can be presented to the students and what kind of solution strategies might be expected to come to the fore. Being a focus point of the research, special attention in the analysis is paid to the way that students could develop suitable auxiliary notations, and to the process by which these notations were to be schematized and abbreviated progressively.

In a follow up to this analysis, there is an account of the way the most important ideas that had been developed up to that moment, were put to the test in a small scale experiment with small groups of students in three schools. The experiences in this experiment led to some major decisions about the outline of the learning trajectory. It was decided to start the trajectory mainly with two types of multiplicative

situations: proportional situations and group situations[8]. Moreover it was determined that the objects in question within these situations initially would be presented visually in such a manner that the students would feel invited to use these drawings and the adjacent scrap paper to arrive at a solution (see the upmost problem in Fig. 6). As a central solution strategy that could emerge as an abbreviation of own informal strategies, the so called S1-strategy was taken; the strategy in which the multiplier is split decimally. For instance when a problem like '26 boxes with 65 pots of apple-sauce' is solved by doing: 10x65=650; 10x65=650; 6x65=390; 650+650+390=1690. In connection with this, the group model was supposed to provide the students with sufficient support for level raising (see Fig. 6).

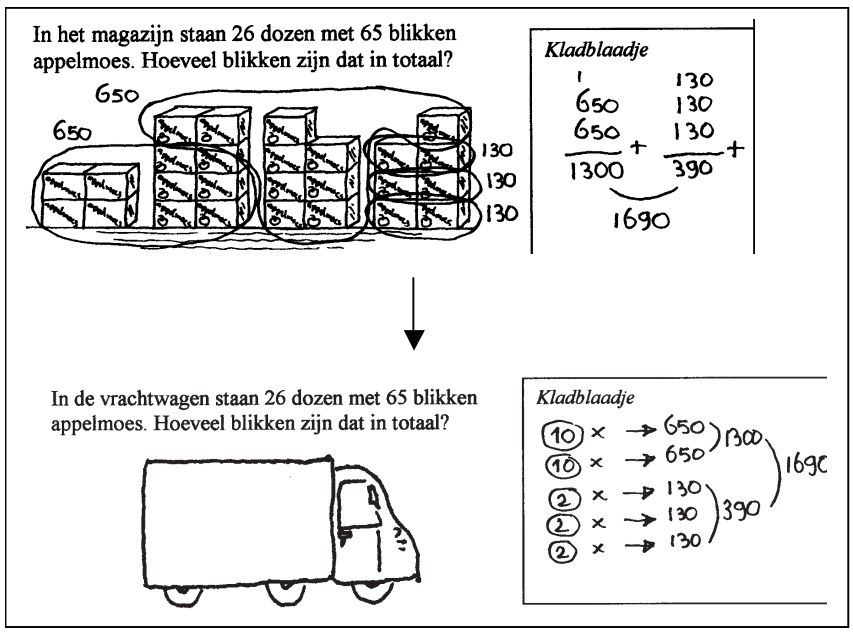


Fig. 6: Two examples of the same problem ('26 boxes with 65 pots of apple-sauce') being solved by using the S1-strategy. In the upper example the drawing of the boxes is used to create groups of 10, in the lower example the same strategy is applied on a more symbolic level.

It was assumed that the rectangle model could play a role later on in the learning trajectory, for instance to further clarify the incorrectness of the so called WS-strategy (wrong splitting-strategy) that is used when a problem like 'a rectangular field with 36 rows of 45 flowers' is solved by doing: 30x40=1200; 6x5=30; 1200+30=1230. In total the trajectory was made up out of 17 lessons of about half an hour.

After the position and role of the trajectory within the curriculum of group 6 and 7 have been sketched, chapter 5 concludes with a description of the principal expectations related to the mathematical progression that the students were supposed to make. These expectations apply, amongst others, to the way the strategy of grouping (for instance when a problem like '16 sheep of 350 euro's' is solved by making 4 groups of 4 sheep, each group costing 700+700 is 1400 euro) might develop into a basic albeit somewhat laborious strategy for solving various kinds of problems; and to the way the notations of the students could develop in the course of the trajectory. Furthermore one of the expectations concerns the realization of a thorough understanding of the zero rule in order to foster working with groups of 10 (cq. the S1-strategy); and the way that the growing insight in the distributive property could contribute to avoid the use of the incorrect WS-strategy.

Chapter 6: Crucial instruction moments

In chapter 6 the transition is made to the experimental phase of the research. The central goal of this chapter is to describe a number of crucial moments that occurred during the experiment with the devised learning trajectory in the five schools; moments that offered empirically grounded indications for the confirmation or rejection of the previously formulated expectations regarding the mathematical progress that the students were supposed to make.
The chapter starts with a description of a number of preliminary activities, such as the elaboration of the instruction materials, the manner in which various kinds of data were collected during the experiment, and the way some activities regarding the preparation of the teachers were carried out. Subsequently it is discussed what has to be understood by crucial moments. By means of an example of a series of situations in which students show a lack of understanding of the zero rule, it is elucidated that the central point in identifying crucial moments is to seek out a sequence of significant events in the classroom in which a pattern can be discerned that provides clear evidence for the way the mathematical progress of the students is brought about (or not).

In the next section seven of these moments are outlined successively. For each case it is described how a presumption about some aspect of the students' progress arose, how additional data were collected that could confirm this presumption and how an analysis of those data led to a more definitive conclusion about the issue in question. The first crucial moment that was established in this way, relates to the fact that, con-

trary to what was assumed at first, during the initial activities of the trajectory quite some students were inclined to try and find a solution for the presented problems on a rather formal level, while ignoring the opportunities to make small groups or use some other elementary strategy. Many of these formal solutions turned out to be wrong (such as the WS-strategy discussed above), and in some occasions it showed that special efforts had to be made to make students more aware of the possibilities to employ more elementary strategies.

The second moment concerns the fact that, also in the beginning of the trajectory, quite a few students appeared to lose sight of the sequence of actions to be executed, and were apt to forget some of the steps 'on the way'. Just by using the drawing of the objects in question and by indicating in this drawing which totals had been determined already, it proved to be possible to overcome this problem (see the examples in Fig. 7). The third moment applies to the level of basic arithmetic skills that were needed to be able to participate successfully in the trajectory. It could be established that the assumption that there wouldn't rise problems in this respect because of the fact that there were ample opportunities to solve problems on a basic level, turned out to be true. Although errors occurred regularly, these errors didn't seem to be caused by a lack of basic arithmetic skills. They seemed to be more a consequence of other factors, such as the heavy burdening of the working memory. The fourth moment is related to the fact that students showed a lack of understanding of the zero rule in quite some occasions. This appeared to keep them from making a smooth transition to working with groups of 10, and thus to using the S1-strategy. Special efforts directed at clarifying what exactly happens to a number when multiplied by 10, turned out to be needed to create a better understanding of this rule.

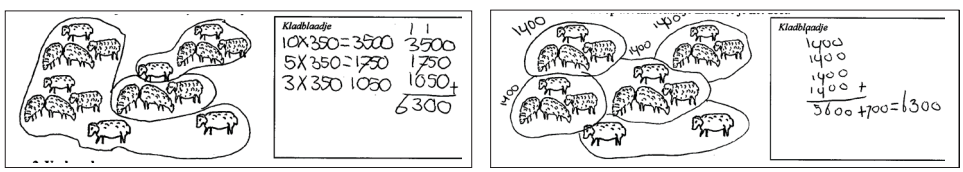


Fig. 7: Two examples of a solution (the left one on a more elementary level, the right one more advanced) in which the student has marked in the drawing what kind of groups he or she made.

The way the students succeeded in using auxiliary notations to support their calculations (the fifth moment), generally appeared to proceed quite satisfactory. Especially because of intensive sessions on exchanging solution strategies, but also because

of the use of the blackboard for depicting and discussing those strategies with the whole group under guidance of the teacher, the students became increasingly aware of the possibility to use such notations to their own insight. The alternating use of more pictorial and more symbolic notations proved to be no obstacle for progress in the use of adequate notations. Insightful use of the distributive property (the sixth moment) turned out to be much more complicated than was assumed in advance. This became particularly manifest in the fact that the incorrect WS-strategy (solving 12x15 by doing 10x10 plus 2x5) was used much more frequently and tenaciously than was expected. Even up to halfway the trajectory quite a number students kept on using this strategy now and again. As a consequence, the conclusion had to be drawn that the understanding of the distributive property for many students is a rather complicated affair that has to be dealt with intensively and repeatedly in the classroom.
The seventh crucial moment relates to the way the process of progressive schematization evolved. On the one hand it could be established that the expected homogenisation of auxiliary notations indeed came about as a result of the exchange and collective discussion of solution strategies. On the other hand it had to be acknowledged that even so, many students kept using their own variants of the S1-strategy up to the end of the trajectory, apparently without feeling the need of a more standardized procedure.

Chapter 7: Analysing the results: the development of success rates and solution strategies

In this chapter the transition is made from the experimental phase to the retrospective phase. The central goal of the chapter is to present and analyze the main results of the experimental learning trajectory in terms of success rates and solution strategies. The chapter starts with a categorization of the most important types of solution strategies employed by the students during the teaching experiment. Twelve different types of strategies are distinguished that are brought together later on in three main categories. The category of low level strategies includes repeated addition, (repeated) doubling, making groups and the incorrect strategy of wrong splitting (WS-strategy). The category of medium level strategies encompasses the various forms of decimal splitting: the S1-strategy in which only the first number is split (for instance calculating 18x35 by doing 10x35 plus 8x35), the S2-strategy in which the second number is split (18x35 by doing 18x30 plus 18x5), the AS-strategy in which both numbers are split (18x35 by doing 10x30 plus 10x5 plus 8x30 plus 8x5) and the S12-strategy

in which initially the first number is split, and later on the second number (18x35 by doing: 10x35 plus 8x30 plus 8x5). Finally, the category of high level strategies includes the compensation-strategy (18x35 by doing 20x35 minus 2x35) and the halving-doubling-strategy (18x35 by doing 9x70). See for a more elaborate illustration of these strategies chapter 7. In Fig. 8 three examples of strategies from the three main categories are shown.

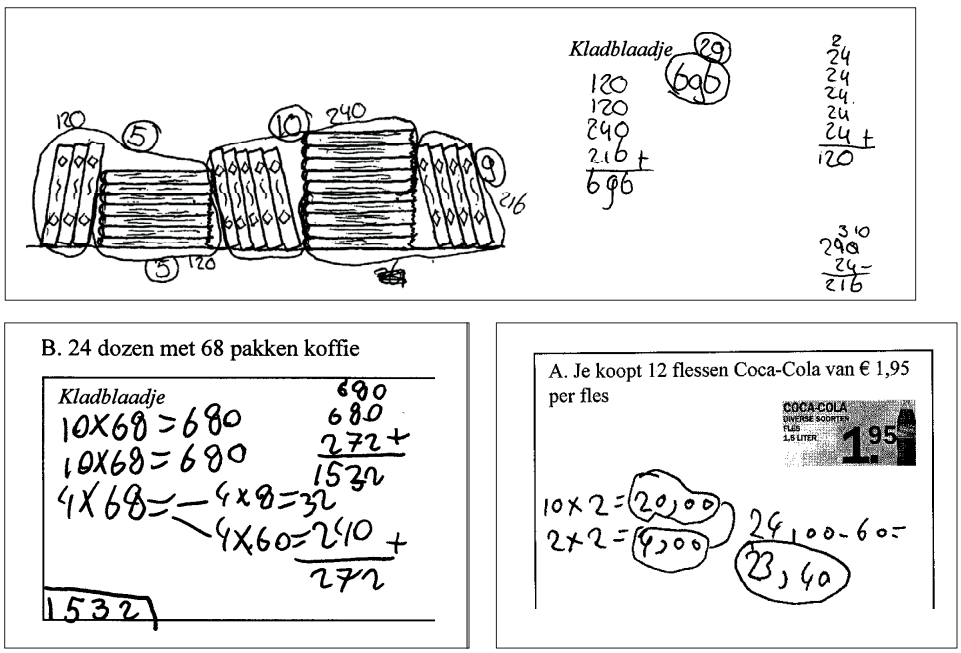


Fig. 8: Three examples of solution strategies from the three main categories. At the top a form of working with groups (low level; problem '29 atlases of 24 euros'), below left the S12-strategy (medium level; problem '24 boxes of 68 packs of coffee') and below right the compensation-strategy (high level; problem 12 bottles of Coca-cola of €1,95)

Subsequently the method is described that was employed for collecting and analyzing the data. As a basis functioned all the material from the three assessments that were held at the beginning, halfway and at the end of the experimental learning trajectory. Because of the fact that the items in these assessments were kept almost the same (only the contexts varied), it was possible to compare the results and to determine the progression of the students. In three rounds of analysis all the results were collected, analyzed and statistically processed. Preliminary findings and assumptions of a preceding round were investigated closer in the next round.

In the following section the most important results and conclusions are presented. First, the results for all schools together are rendered in a number of tables and graphics. See Fig. 9 for an overview of the results per category of solution strategies.

All schools (n=112)	Rep. Add./ Doubling/ Grouping	WS (wrong splitting)	S1 (b en v)	AS / S2 / S12	Comp / Halving-doubling	Different	Success rates
T1	6%	19%	29%	30%	6%	10%	.47
	.51	.00	.67	.57	.84	.42	
T2	11%	4%	56%	15%	9%	4%	.65
	.57	.00	.71	.72	.74	.65	
T3	3%	--	69%	8%	15%	5%	.84
	.80	--	.85	.89	.86	.81	

Fig. 9: Table with the results for all schools together, arranged per category of solution strategies. The signs T1, T2 and T3 refer to the three assessments taken at the start, halfway and at the end of the experimental trajectory. Per category is given the percentage of students that used the strategy in question, and the success rate. In the most right column the overall success rates are shown.

It is concluded that there was a continuous and substantial progress during the teaching experiment in which the incorrect WS-strategy gradually disappeared while the preferred S1-strategy was used increasingly by the students. After the presentation of some differences between the separate schools and between boys and girls (differences that are very limited), the results of the 25% weakest students are compared with the results of the 25% best students. This leads to the conclusion that both the group of weakest and the group of best students have benefitted sufficiently from the trajectory, although the progress is stronger for the group of weakest students. Moreover a converging tendency can be established: the difference in performance between the two groups decreases gradually. See the graph in Fig. 10.

Chapter 7 finishes with a number of points of interest that relate to the realisation of the intended whole class interactive teaching. One of these concerns the finding that, also in the highest years of the primary school, whole class interactive teaching can be realised in efficient ways. This is especially the case when students are given ample opportunities to solve problems at their own level and to make mathematical progress in their own pace. In addition it is considered to be important that during whole class discussions of solution strategies, an effort is made to involve the weaker students to formulating their solutions, to justifying their solutions with arguments, and so on.

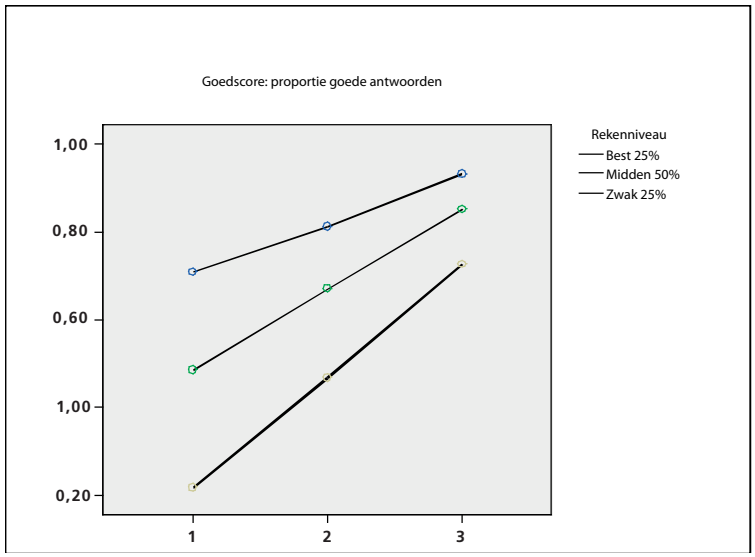


Fig. 10: Graph of the success rates of the three groups of 25% best students, 50% medium students and 25% weakest students. On the horizontal axis are indicated the three assessments, on the vertical axis the average success rates.

Chapter 8: Analysing the results: the development of the use of notations

The second part of the analysis of the results of the study, which relates to the development of the use of notations, is presented in this chapter. As is emphasized in the first section, a positive development in notation behaviour was considered of great importance for the success of the experimental trajectory. The national PPON-assessments not only revealed serious deficiencies in the use of auxiliary notations by students. The development of such notations was also considered to foster insight of students in the pursued solution strategies and in the corresponding mathematical properties.

To be able to evaluate the notation behaviour demonstrated by the students, an evaluation instrument had to be developed. The next section of the chapter describes how such an instrument came into being. The starting point was formed by an analysis of the notations used by two students during the three assessments (see Fig. 11). On the basis of this analysis two criteria were derived that could serve as a measure for the quality of the notation behaviour: the level of conciseness and the level of surveyability. For both of these criteria a three point-scale was devised, with 3 as an

indication for high level, 2 for medium level, and 1 for low level. Two other criteria were added to these. The first one concerns the fact that certain types of solution strategies that in itself are incorrect, had to be excluded from the evaluation. This applies for instance to the WS-strategy that was mentioned above, but also to situations in which a student had chosen the wrong operation (division instead of multiplication). It was decided that when this exclusion criterion was applicable in three or more cases within one assessment of a student, this student was to be excluded from the evaluation altogether. The fourth criterion was introduced in order to prevent undesirable cumulative effects when evaluating the work of a student. This criterion implies that when a notation had to be qualified in two respects as moderate (level 2), this didn't mean the qualification should become low level (1).

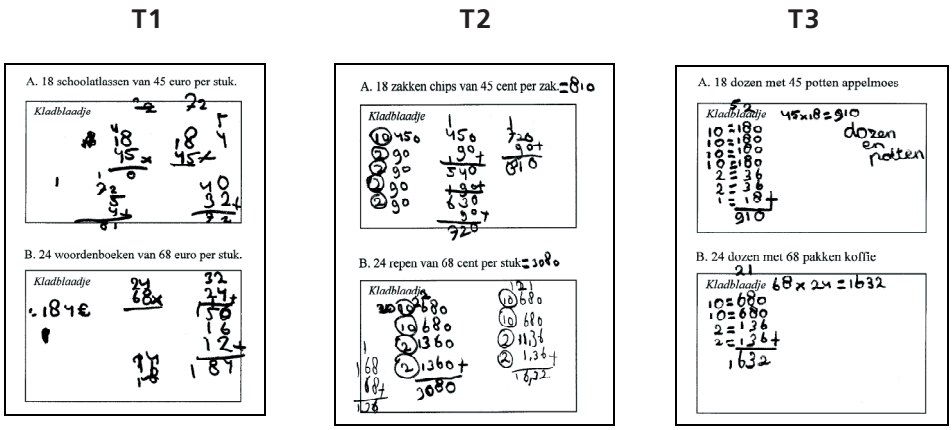


Fig. 11: The notation behaviour shown by student 209 in three problems (all of them relating to 18x45) taken from the first, second and third assessment. These notations were used to distinguish the first two criteria (level of conciseness and level of surveyability) for the evaluation of notation behaviour.

By analyzing a number of additional examples of notation behaviour, the instrument was elaborated and refined in such a manner that it could be used to evaluate all notation forms adequately.

In the last part of chapter 8 all results that relate to the evaluation of notation behaviour are presented and analysed. The main conclusion is that an even and gradual increase of the quality of this behaviour can be perceived during the teaching experiment for both criteria of conciseness and surveyability (see Fig. 12).

Although there were some occasional differences between the separate schools, this increase appeared to be a rather general feature, that also occurred for the individual groups of 25% weakest en 25% best performing students, and for boys and girls.

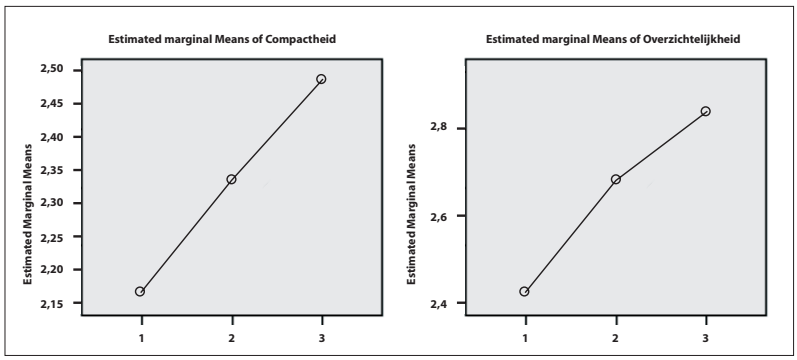


Fig. 12: Two graphs showing the progress of the quality of notation behaviour during the first, second and third assessment for the two central criteria conciseness (left) and surveyability (right).

In the concluding section of the chapter some remarks are made concerning more general points of interest that are supposed to be important for a favourable development of the notation behaviour. One of these applies to the use of the blackboard during the lessons. It is considered of great importance that the solution strategies employed by the students, are regularly written down on the blackboard (by themselves or by the teacher) as 'natural' as possible, and that these notations are discussed collectively both in terms of the strategies as such, and in terms of the quality of the demonstrated notations. In addition to this it is seen as most valuable that there is an appropriate 'classroom culture' in which promising forms of notation are evaluated constructively.

Chapter 9: Findings, discussion and recommendations

In the concluding chapter of this study the main findings and the new local instruction theory to which the research has led, are presented. Furthermore some important points of discussion are raised that lead to some recommendations for continued research. The chapter begins with a review of the research process in which the question is addressed to what extent the expectations about the intended mathematical

progress of the students were fulfilled. It is established that three of those expectations did not come fully true. The first of these concerns the fact that it appeared considerably less easy to convince the students of the usefulness of the grouping strategy that is used when a problem such as '16 sheep of 240 euro's' for instance is solved by taking first 4 sheep together (4x240 is 960 euro), and then calculate the total by doubling: 960+960 is 1920; 1920+1920 is 3840. As was described in the summary of chapter 6, numerous students were initially inclined to adopt a formal strategy, with a rather great chance on wrong answers. Connected with that, a second expectation that did not come true relates to the fact that the incorrect strategy of wrong splitting (WS-strategy) was employed far more frequently and tenaciously than was assumed. It also proved much more complicated to have the students develop a thorough insight in the zero rule. After all, it showed that this asked for a much longer and more intensive learning process than was presumed at first.

Following this analysis, a proposal is presented for an improved learning trajectory that consists of three phases. For each of these phases a description is given what contexts could be used, what strategies could be brought about by these contexts, how these strategies could evolve during the trajectory, and which models could be used to enhance level raising. Special attention is paid to the central role of the S1-strategy in the trajectory and to the manner in which growing insight into two mathematical core-ideas (i.e. the zero rule and the distributive property) can contribute to an increasingly efficient use of the S1-strategy. In a diagram the process of level raising is expressed as shown in Fig. 13. In line with this proposal subsequently the essence of the local instruction theory is outlined. This runs as follows:

During the exploration of the domain of multidigit multiplication, the focus is initially on building on children's elementary informal solution strategies such as repeated addition, doubling and making small groups. By visually representing the objects to which the multiplication applies and by encouraging students to use this representation, the strategy of making groups is further explored. Effective use of this strategy is being attained by forming groups of 10 and multiples of 10. The decimal group model that emerges from this process of progressive modelling and schematization, serves as a bridge between the students own informal strategies and the intended S1-strategy and other forms of decimal splitting. Because of the fact that the students are intensively involved in the development of this model and thereby develop their own auxiliary notations, they learn to keep a good overview of the various acts to be executed. Two essential insights that facilitate efficient use of the decimal grouping model concern the zero rule and the distributive property.

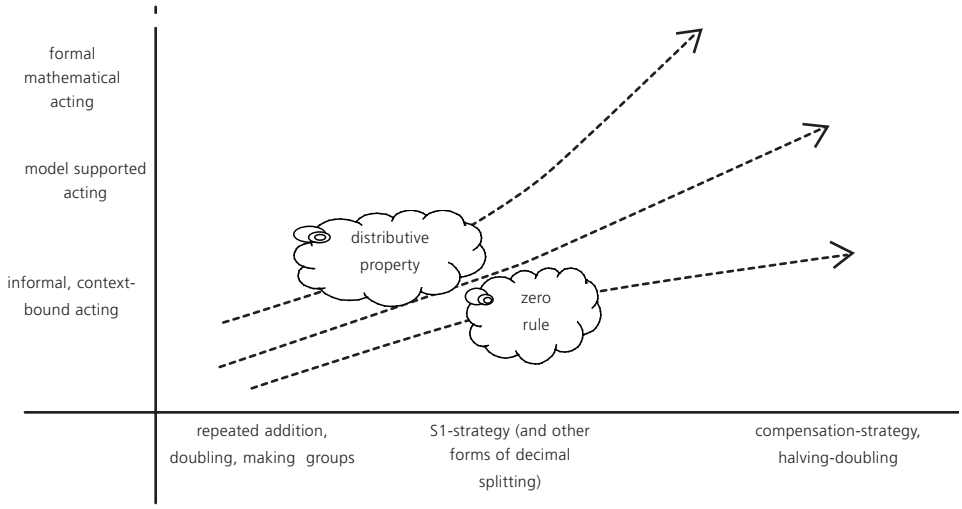


Fig. 13: Characteristic of the process of level raising with on the horizontal axis the three categories of strategies, and on the vertical axis the three general levels of formalization as used for realistic learning trajectories.

In the following section of chapter 9 four aspects of the process of progressive mathematisation are described that come to the fore as the most conspicuous findings that the research has led to. These concern:

(1) Progressive insight of the students in the distributive property;
(2) Progressive structuring of the S1-strategy as preferred strategy during the trajectory;
(3) Progressive insight in the zero rule and the corresponding positional nature of our number system;
(4) Progressive schematisation of notations by the students.

After these four points have been elucidated, the chapter concludes with four discussion topics and some corresponding recommendations. The first of these topics applies to the question as to what extent there will still be a substantial place for multidigit multiplication in the curriculum of the primary school in the future. On the one hand the social relevance of being able to calculate quickly and efficiently multiplications with bigger and more complex numbers is decreasing drastically. Also it takes a lot of time and energy in school to teach such procedures. One might even

wonder whether it wouldn't be much more recommendable to spend more time to other subjects such as measurement or graphic representations.
On the other hand, as was shown in the preceding chapters, the domain of multidigit multiplication may give rise to a rich variety of mathematical experiences and insights. Moreover a proper proficiency in executing multidigit multiplication strategies (including insight in fundamental mathematical principles like the zero rule and the distributive property) may be considered as a most valuable preparation for subject matter that will be dealt with later on in the curriculum, such as calculating with decimal numbers and elementary algebra. In addition to that, a good mastery of stylized mental calculation strategies can also be regarded as a solid foundation for estimation and for intelligent use of the calculator. Further, the knowledge of multiplication strategies can be seen as the result of the efforts of many different cultures, varying from ancient Chinese and Indian cultures to Arabian and Western-European cultures. In today's multicultural society it can be quite valuable to attribute a substantial place in the curriculum to the reconstruction of such knowledge.

The second point of discussion is related to the attainability of realistic mathematics education. Sometimes doubts are rising about this attainability because this type of education puts high demands upon the professional knowledge and practical know-how of teachers. Up to a certain extent this is certainly the case, but on the other hand it is not necessary that the starting teacher is already completely at home with this knowledge. It can be developed gradually, for instance concerning the way instruction is taking place in the classroom.

The third point of discussion addresses the pros and cons of two central models that are being weighed against one another. In certain educational programs (such as the program developed in the American project of Fosnot and Dolk) the rectangle model is taken as a central model. It is established that there are good reasons to do so, for instance because it seems to be of major importance to be able as a student to conceive a multiplication in terms of rectangular forms. On the other hand this model does not concur properly with informal solution strategies like repeated addition and doubling. And in the present study it became also clear that students were inclined to associate rectangular situations (like a field with 35 rows of 48 flowers) much easier with formal strategies based on decimal splitting than was the case with group situations and proportional situations. Thus it seems justifiable to choose for the group model as central model in the first part of the learning trajectory, and to let the rectangle model play a vital role later on.

Finally, the fourth point of discussion applies to developmental research as a research method. As has been described above, the present study can be considered as a typical example of this type of research for various reasons. Recently, developmental research is associated with a wider range of research methods that are usually defined as 'design research' (Kelly, 2003;Van den Akker et al (eds.), 2006). Characteristic for this type of research is that it hasn't yet taken on a completely crystallized form. One of the trends in this field is that research projects should pay more attention to quantitative aspects of the research, rather than focusing mainly on qualitative research. Also there is being called for better efforts to test the designed artefact (learning trajectory or educational environment) under varying circumstances (Kelly, 2006). In the case of the present research it may be noted that the project both had obvious qualitative and quantitative aspects. But as for variation of test circumstances, there could have been created more varied conditions. Especially a large scale test setting in which the participating teachers wouldn't get much support while carrying out the experimental lessons, could have contributed to more information about the usefulness of the designed materials. Despite and given this, because of the fact that the learning trajectory resulted in satisfactory achievements of the students in all of the five schools, the usefulness of the learning trajectory is quite plausible.

endnotes

1 The term learning trajectory is used in the sense of teaching-learning trajectory as a sequence of instruction activities in which certain goals are pursued related to insights, knowledge and skills in the field of multidigit multiplication.

2 The textbook series referred to is *Wis en Reken* (Buys et. alt., 2000), published by Bekadidact, Baarn, The Netherlands.

3 The term 'stylized mental computation' is used to indicate a type of mental computation in which the various steps within the strategy being used are executed in a rather fixed way and in which these steps are being noted to support the solution process. See the example on the first page of this summary.

4 In the Dutch version of the dissertation the terms 'solution behaviour' and 'notation behaviour' are used. Because there is no generally accepted English equivalent for these terms, in the English version the terms 'solutions' and 'notations' mostly are used. 'Solution behaviour' is a term used to indicate the behaviour that students demonstrate while solving mathematical problems, especially as far as the type of strategy is concerned that's being employed. And the term 'notation behaviour' is used to indicate the kind of notations (or lack of notations) that are being employed when solving these problems.

5 Wiskobas was the primary school department of the IOWO, the institute of which Freudenthal was director and which was established by the Dutch government to improve the quality of the Dutch mathematics education.

6 TAL stands for Tussendoelen Annex Leerlijnen: intermediate attainment targets in learning-teaching trajectories. See for a further elucidation for example Van den Heuvel-Panhuizen e.a. (eds.), 2004.

7 The zero rule or ten rule as it is called sometimes means that a zero can be put behind a number when this number is multiplied by 10. For instance: 10x48 makes 480 (48 with a zero behind), 10x125 makes 1250, etc.

8 These terms are a little bit arbitrary but nevertheless frequently used in Dutch educational literature. Proportional situations are related primarily to situations with money, like: 1 new school atlas costs 29 euro's; how much do 24 atlases cost? Group situations are related to situations with equal groups like: in one box there are 48 packs of coffee; how many packs of coffee are there in 35 boxes?

1 Voorbeeld van een criteriumtoets

Zoals in hoofdstuk 4 wordt beschreven, werd tijdens het onderwijsexperiment bij alle leerlingen drie keer een criteriumtoets afgenomen, namelijk aan het begin, halverwege en aan het eind van het experimentele onderwijsleertraject. De inhoud van deze toetsen was qua opgavetypen en qua gebruikte getallen vrijwel hetzelfde. Alleen de contexten werden per toets gevarieerd. Hieronder bij wijze van voorbeeld criteriumtoets 2 (afgenomen halverwege het onderwijsleertraject).

2e criteriumtoets van ..... **School:** ..... **Datum:** .....

1. Sparen voor een nieuwe fiets
Mohammed is aan het sparen voor een nieuwe fiets.
Per maand spaart hij 25 euro.



A. Hoeveel spaart hij in 6 maanden? .....

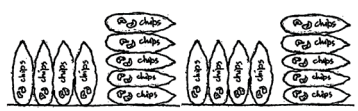
B. Hoeveel spaart hij in 12 maanden? .....

C. Hoeveel spaart hij in 24 maanden? .....

2. Schoolkamp
Op de Havenschool doen ze inkopen voor het schoolkamp. Hoeveel moet er betaald worden?
Probeer het op het kladblaadje uit te rekenen.

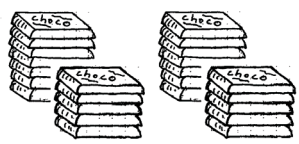
A. 18 zakken chips van 45 cent per zak.

Kladblaadje



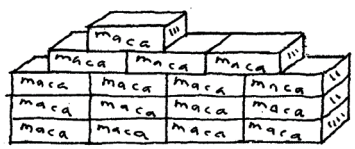
B. 24 repen van 68 cent per stuk.

Kladblaadje

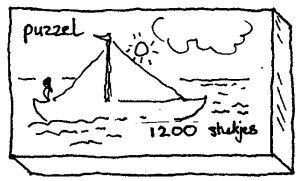


C. 16 pakken macaroni van 325 cent per pak

Kladblaadje



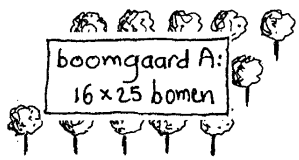
3. Een grote puzzel
Sibel heeft een hele grote puzzel gekocht.
De puzzel heeft in totaal 1200 stukjes.
Hoeveel stukjes lang en hoeveel stukjes breed kan de puzzel zijn? Probeer een mogelijkheid te bedenken.



..... stukjes lang en ..... stukjes breed

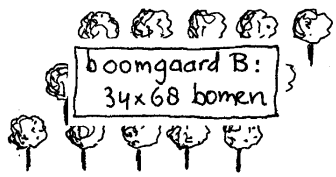
4. Boomgaarden
Hoeveel bomen staan er in de boomgaard? Probeer het uit te rekenen op het kladblaadje.

A.



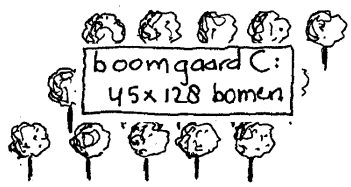
Kladblaadje

B.



Kladblaadje

C.



Kladblaadje

5. Hoeveel moet je in de supermarkt betalen?
Laat op het kladblaadje zien hoe je het uitrekent.

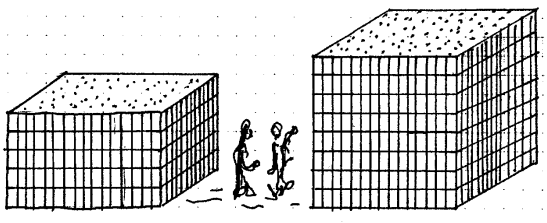
A. Je koopt 12 flessen limonadesiroop van € 2,95 per fles



B. Je koopt 16 slagroomtaarten van € 4,95 per taart



6. Bij het bouwbedrijf
Op het terrein van een bouwbedrijf liggen twee hele grote stapels stenen:



A. De ene stapel is 16 stenen lang, 12 stenen breed en 5 stenen hoog. Hoeveel stenen zijn dat in totaal? Laat op het kladblaadje zien hoe je het uitrekent.

kladblaadje

B. De andere stapel is 15 stenen lang, 14 stenen breed en 8 stenen hoog. Hoeveel stenen zijn dat in totaal? Laat weer op het kladblaadje zien hoe je het uitrekent.

kladblaadje

2 Overzicht resultaten per school bij T1, T2 en T3, met bijbehorende beknopte analyse

Hieronder volgen de vijf overzichten met toetsresultaten die door de leerlingen bij de drie criteriumtoetsen behaald werden. Steeds wordt het aantal keren vermeld dat een bepaald type strategie werd gebruikt, en het aantal keren dat deze strategie goed dan wel fout werd gebruikt. Bij elk overzicht wordt in steekwoorden de bijbehorende voorlopige analyse gegeven die naar aanleiding van dat overzicht werd uitgevoerd.

OVERZICHT STRATEGIEGEBRUIK T1, T2 EN T3 OP SCHOOL 100 (n=22)

T1	Hopt/ verd	GR	VS	S1b	S1v	AS	S12	S2	S1 comp	Comp	Halv Verd	Cijf	An- ders	
+	4			5	25	21	6	6	3	7			2	79
-	3		48	4	10	12	3	5		1		1	10	97
Tot.	7		48	9	35	33	9	11	3	8		1	12	**176**

T2	Hopt/ verd	GR	VS	S1b	S1v	AS	S12	S2	S1 comp	Comp	Halv Verd	Cijf	An- ders	
+	7			18	47	5		15	4	8			2	106
-	2	4	10	9	26			14	1	4				70
Tot.	9	4	10	27	73	5		29	5	12			2	**176**

T3	Hopt/ verd	GR	VS	S1b	S1v	AS	S12	S2	S1 comp	Comp	Halv Verd	Cijf	An- ders	
+				26	101		1	5	4	11			1	149
-	2			6	12			1	1	5				27
Tot.	2			32	113		1	6	5	16			1	**176**

Voorlopige analyse school 100

- De VS-strategie is bij T1 nog sterk dominant (meest voorkomende aanpak, 27%!), bij T2 nog maar schaars en bij T3 zelfs helemaal verdwenen. Iets soortgelijks geldt voor AS: bij T1 nog frequent aanwezig (zowel goed als fout gebruikt), bij T2 al sterk verminderd en bij T3 verdwenen.
- De S1-strategie komt bij T1 al tamelijk frequent voor, in de b- en de v-variant (totaal 25%). Beide subcategorieën breiden zich naar T2 en T3 steeds verder uit, waarbij de goedscore zich in positieve zin ontwikkelt van .68 via .65 tot .88.
- Laag niveau-strategieën komen zowel bij T1, T2 als bij T3 weinig voor.
- De categorie 'Anders' is bij T1 relatief groot doordat een aantal keren een leerling niet tot een antwoord is gekomen. Bij T2 en T3 komt deze categorie nauwelijks voor.
- Het gebruik van de strategie Comp neemt geleidelijk aan toe, maar blijft ook bij T3 mondjesmaat.
- De goedscore ontwikkelt zich van T1 naar T3 steeds verder in positieve zin: van .45 via .60 naar .85.

(Het veelvuldig optreden van VS zou wellicht als een teken opgevat kunnen worden dat leerlingen geneigd zijn te denken: ik kan dit vast al wel. Ook het sporadisch gebruik van laag niveau-strategieën bij T1 lijkt hierop te wijzen. Verder opvallend dat het gebruik van S1 fors toeneemt van T1 naar T2, maar qua goedscore ongeveer op hetzelfde niveau blijft.)

Voorlopige analyse school 200

- De 11 'Anders'-oplossingen bij T1 zijn voornamelijk gevallen waarbij geen antwoord wordt gegeven.
- Bij T1 is er een flink aantal oplossingen via cijferen (31) waarvan ongeveer 2/3 deel fout. Dit in tegenstelling tot school 100 waar cijferen nauwelijks voorkwam. Zou dat een gevolg zijn van het onderwijs in voorgaande jaren?
- Bij T2 komt S2 bijna niet voor, terwijl deze strategie bij T1 juist vrij veel voorkwam (9%, goedscore .50). Verder komt AS relatief veel voor bij T2 (10%, goedscore .51), in tegenstelling tot school 100.
- Bij T2 is er net als op school 100 een forse toename van S1b en S1v. De goedscore verandert bij dit type strategie nog niet zo sterk (van .62 naar .69). Bij T3 geen verdere toename S1b en S1v, maar wel een hogere goedscore (.78).
- Verder bij T3 een duidelijke verdere stijging van Comp. Na S1b en S1v is dit de meest gebruikte strategie bij T3 (14%) met ook een mooie goedscore (.91).

- Het beeld van de ontwikkeling van de gemiddelde goedscore is enigszins vergelijkbaar met school 100, met dien verstande dat deze bij T1 voor school 200 tamelijk lager ligt (.35 om .45) maar dat dit verschil bij T2 reeds is overbrugd (.61 om .60)! Bij T3 scoort school 100 dan toch weer wat beter (.81 om .85).

OVERZICHT STRATEGIEGEBRUIK T1, T2 EN T3 OP SCHOOL 200 (n=28)

T1	Hopt/ verd	GR	VS	S1b	S1v	AS	S12	S2	S1 comp	Comp	Halv Verd	Cijf	An- ders	
+	3	2		5	35	11		10		3		10		79
-	7	1	53	4	21	13	3	10	1			21	11	145
Tot.	10	3	53	9	56	24	3	20	1	3		31	11	**224**

T2	Hopt/ verd	GR	VS	S1b	S1v	AS	S12	S2	S1 comp	Comp	Halv Verd	Cijf	An- ders	
+	1	11		32	65	12	3		3	6			4	137
-	3	8	11	12	31	11	1	2		6			2	87
Tot.	4	19	11	44	96	23	4	2	3	12			6	**224**

T3	Hopt/ verd	GR	VS	S1b	S1v	AS	S12	S2	S1 comp	Comp	Halv Verd	Cijf	An- ders	
+		12		29	79	15	7	3	1	29		6		181
-		3	1	13	17	1	2	1		3		2		43
Tot.		15	1	42	96	16	9	4	1	32		8		**224**

(Het is duidelijk dat er waarschijnlijk lokale 'trends' zijn die slechts voor enkele scholen gelden. Bijvoorbeeld: AS-strategie komt bij school 200 tamelijk veel voor, terwijl dit bij school 100 juist de S2-strategie is. Verder wordt het interessant om na te gaan of de trend wat betreft het gebruik van de S1-strategie (flinke toename van T1 naar T2, maar goedscore blijft rond de .60 hangen; verdere toename naar T3, maar nu ook met fors gestegen goedscore) zich ook bij de andere scholen voordoet.)

OVERZICHT STRATEGIEGEBRUIK T1, T2 EN T3 OP SCHOOL 300 (n=18)

T1	Hopt/ verd	GR	VS	S1b	S1v	AS	S12	S2	S1 comp	Comp	Halv Verd	Cijf	An- ders	
+	2			6	22	2	8	8	2			5	4	59
-	7		37	7	11		3	10	1			2	7	85
Tot.	9		37	13	33	2	11	18	3			7	11	**144**

T2	Hopt/ verd	GR	VS	S1b	S1v	AS	S12	S2	S1 comp	Comp	Halv Verd	Cijf	An- ders	
+	3	9		12	21	1	11	3	1	2	6	5	1	75
-	7	5	20	14	7	1	8	2		2	1	1	1	69
Tot.	10	14	20	26	28	2	19	5	1	4	7	6	2	**144**

T3	Hopt/ verd	GR	VS	S1b	S1v	AS	S12	S2	S1 comp	Comp	Halv Verd	Cijf	An- ders	
+	6			26	61		1	3	1	5	6	4	1	114
-	1		3	3	13					4		4	2	30
Tot.	7		3	29	74		1	3	1	9	6	8	3	**144**

Voorlopige analyse school 300

- Net als in de twee andere tot nu toe geanalyseerde scholen is er bij T1 tamelijk sterke gerichtheid op de VS-strategie waarbij alle antwoorden dus per definitie fout zijn. Bij 26% van alle opgaven wordt dit type strategie gebruikt.
- Ook de verschillende vormen van decimaal splitsen zijn bij T1 ruim vertegenwoordigd. Dit betreft met name de categorieën S1 (32%; goedscore .61), S12 (8%; goedscore .73) en S2 (13%; goedscore .44). De categorie AS komt beduidend minder frequent voor (1%; goedscore 1.00). Terwijl deze AS-strategie op de scholen 100 en 200 bij T1 juist tamelijk veel voorkomt (resp. 19%, goedscore .64 en 11%, goedscore .46), blijkt deze dus op school 300 maar heel weinig op te treden.

- Strategieën van een laag niveau, te weten herhaald optellen, verdubbelen en groeperend rekenen komen bij T1 weinig voor: 6% met een goedscore van .22, terwijl bij T2 een zekere toename tot 17% te zien is (goedscore .50).
- Het gebruik van VS treedt ook bij T2 nog tamelijk frequent op (14%!). Kennelijk is het niet voldoende gelukt om de leerlingen te doen inzien dat het antwoord bij het gebruik van deze strategie nooit goed kan zijn.
- De categorie AS blijft zeer laag (1%) terwijl de categorie S2 bij T2 sterk gekrompen is tot 3%. Dit laatste weer in tegenstelling tot school 200 waar deze categorie bij T2 juist op het peil van T1 is gebleven (10%) met een goedscore van .52. Daarnaast gaat, in tegenstelling tot de scholen 100 en 200, het percentage strategieën uit de categorie S12 omhoog van 8% naar 13%, met goedscore van .58.
- Er doet zich bij T3 een sterke groei voor van de S1-strategie naar 72% met navenant toegenomen goedscore van .84. De andere categorieën met betrekking tot decimaal splitsen zijn vrijwel verdwenen, in totaal slechts 3%.
- Totale goedscore ontwikkelt zich bevredigend van .41 via .52 (flink lager dan bij school 100 en 200) tot .79.

(Al met al roept dit wederom de vraag op hoe het komt dat de frequentie van de categorie VS zo hoog ligt. Ook het aantal gevallen waarin sprake is van decimaal splitsen (al dan niet correct uitgevoerd), is betrekkelijk hoog. Dit wijst op een sterke geneigdheid bij veel leerlingen om de opgaven in eerste instantie op een formeel-getalsmatig niveau aan te pakken. Een mogelijke verklaring hiervoor zou gelegen kunnen zijn in het feit dat de experimentele leergang op een relatief laat tijdstip doorlopen wordt (eerste helft groep 7) en dat sommige leerlingen het al gauw als 'primitief' ervaren om basale strategieën zoals herhaald optellen of verdubbelen te hanteren. Een tweede verklaring zou gelegen kunnen zijn in wat Streefland het distractie-effect noemt (Streefland, 1988, p.309-312). Bij het optellen en aftrekken met grotere getallen is het decimale splitsen namelijk al geruime tijd gemeengoed voor de leerlingen. En bij het leren vermenigvuldigen van een eencijferig met een meercijferig getal is vanaf een zeker moment (medio groep 6) het decimaal splitsen ook in zwang geraakt. Waarom zou je deze werkwijze, zo zou de redenering van veel leerlingen kunnen zijn, dan ook niet proberen te gebruiken bij het vermenigvuldigen van twee meercijferige getallen? Het lijkt aanbeveling te verdienen om, zoals Streefland dit noemt, 'meer weerstand bij de leerlingen aan te kweken' tegen dit distractie-effect (ibid., p. 312).

(Verder is het beeld voor de drie scholen 100, 200 en 300 enigszins diffuus ten aanzien van het gebruik van strategieën uit de categorieën van het decimaal splitsen. Terwijl bij school 100 bij T2 naast de S1-strategie alleen de S2-strategie een stijging laat zien (van 6% naar

16% met in het laatste geval goedscore van .52), bleef bij school 200 naast S1 alleen de AS-strategie enigszins stabiel (eerst 11%, later 10% met goedscore van .52). En bij school 300 laat dus behalve S1 alleen de S12-strategie een stijging zien. Kennelijk is hier sprake van 'lokale effecten' die niet zoveel van doen hebben met de opzet van de experimentele leergang.
Verder zou het kunnen zijn dat de geringere progressie qua goedscore in school 300 te maken heeft met het feit dat het hier om een tamelijk heterogene groep gaat met veel allochtone leerlingen en weinig leerlingen van een uigesproken hoog niveau. Het zou kunnen zijn dat de taalontwikkeling alsmede de ontwikkeling van het notatiegedrag daardoor achterblijven.
De ontwikkeling in de goedscores bevestigt het beeld dat er tijdens de leergang een flinke progressie wordt geboekt. Dit kan als een aanwijzing worden opgevat dat de gekozen didactische benadering waarbij geprobeerd werd aan te sluiten bij de eigen informele strategieën van de leerlingen en waarbij de S1-strategie centraal werd gesteld, tot op zekere hoogte als succesvol kan worden beschouwd.)

Voorlopige analyse school 400

- De VS-strategie komt bij T1 beduidend minder voor (13%) dan bij de tot nu toe geanalyseerde scholen, terwijl deze strategie bij T2 reeds helemaal is verdwenen.
- Interessant is verder dat GR-strategieën een flinke stijging van T1 naar T2 doormaken (tot 14% met betrekkelijk hoge goedscore van .77 bij T2) terwijl deze categorie bij T3 weer grotendeels verdwenen is.
- Het gebruik van de S1-strategie laat van T1 naar T2 een flinke toename zien (van 33% met goedscore .74 naar 48% met goedscore .84), maar daalt weer iets van T2 naar T3 tot 43% met goedscore van .86. Dit beeld lijkt eveneens een lokale trend te zijn die wel overeenkomt met het beeld van school 200 maar niet met dat bij school 100 en 300.
- De overige strategieën uit de categorie decimaal splitsen AS (22%, goedscore .65), S12 (6%, goedscore .22) en S2 (12%, goedscore .56) zijn eveneens ruimschoots vertegenwoordigd bij T1. Bij T2 is sprake van een flinke afname van AS tot 11% (goedscore .87) terwijl S12 juist toeneemt tot 11% (goedscore .81). De S2-strategie is bij T2 al bijna verdwenen. Bij T3 zet deze neerwaartse trend verder door.
- Strategieën waarbij sprake is van compenseren (Comp en S1comp) komen bij T1 en T2 beperkt voor, maar bij T3 treedt een duidelijke toename op: tot 17% met hoge goedscore van .96.
- Het cijferen is bij T1 en T2 maar mondjesmaat aanwezig, maar neemt bij T3 flink toe (tot 13%) met een goedscore van 1.00!

OVERZICHT STRATEGIEGEBRUIK T1, T2 EN T3 OP SCHOOL 400 (n=19)

T1	Hopt/ verd	GR	VS	S1b	S1v	AS	S12	S2	S1 comp	Comp	Halv Verd	Cijf	An- ders	
+				1	36	22	2	10		8		2	3	84
-	1		19	3	10	12	7	8		4		4		68
Tot.	1		19	4	46	34	9	18		12		6	3	**152**

T2	Hopt/ verd	GR	VS	S1b	S1v	AS	S12	S2	S1 comp	Comp	Halv Verd	Cijf	An- ders	
+		15		17	44	14	13	3	2	8		4	2	122
-		6		5	7	2	3	1	1	1		4		30
Tot.		21		22	51	16	16	4	3	9		8	2	**152**

T3	Hopt/ verd	GR	VS	S1b	S1v	AS	S12	S2	S1 comp	Comp	Halv Verd	Cijf	An- ders	
+		3		17	40	12	4	10	2	23	7	20	1	139
-				2	7		1	1		1	1			13
Tot.		3		19	47	12	5	11	2	24	8	20	1	**152**

- De gemiddelde goedscore stijgt van .55 bij T1 via .80 bij T2 tot .91 bij T3. Grootste stijging zit hem bij deze school dus duidelijk bij de overgang van T1 naar T2.

(Zou de flinke toename van strategieën waarbij gecompenseerd wordt opgevat kunnen worden als een teken van toegenomen vaardigheid in het oplossen van meercijferige vermenigvuldigingen waardoor als het ware meer aandacht beschikbaar komt om op getalkenmerken te letten die mogelijk aanleiding geven tot compenseren? Overwogen zou kunnen worden om Comp en S1comp onder te brengen in dezelfde categorie.

Verder rijst de vraag of het beeld van de stijging van goedscores bij deze school (forse stijging van T1 naar T2, daarna een meer bescheiden toename) samenhangt met het feit dat het hier

om een tamelijk homogene groep met veel leerlingen van hoog niveau gaat. Een argument hiervoor zou kunnen zijn dat de meeste leerlingen op zo'n school snel efficiënte strategieën oppikken die naderhand niet zo gek veel meer verbeterd kunnen worden. Echter, school 100 heeft een min of meer vergelijkbare populatie leerlingen, en daar is het beeld toch weer anders: zowel van T1 naar T2 als van T2 naar T3 doet zich een flinke stijging voor.)

OVERZICHT STRATEGIEGEBRUIK T1, T2 EN T3 OP SCHOOL 500 (n=25)

T1	Hopt/ verd	GR	VS	S1b	S1v	AS	S12	S2	S1 comp	Comp	Halv Verd	Cijf	An- ders	
+	6	11		9	29	17	18	10	6	18				124
-	4	4	16	2	13	8	10	10	1	1		1	6	76
Tot.	10	15	16	11	42	25	28	20	7	19		1	6	**200**

T2	Hopt/ verd	GR	VS	S1b	S1v	AS	S12	S2	S1 comp	Comp	Halv Verd	Cijf	An- ders	
+		9		17	84	2	7	2	9	13	1		4	148
-	1	5		8	26		1	1	3	3			4	52
Tot.	1	14		25	110	2	8	3	12	16	1		8	**200**

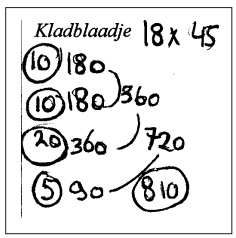
T3	Hopt/ verd	GR	VS	S1b	S1v	AS	S12	S2	S1 comp	Comp	Halv Verd	Cijf	An- ders	
+	3			23	120		1		7	18	2		1	175
-				4	19	1				1				25
Tot.	3			27	139	1	1		7	19	2		1	**200**

Voorlopige analyse school 500

- Het beeld bij T1 op deze school lijkt nog wat gemêleerder dan op de andere scholen in die zin dat strategieën waarbij decimaal gesplitst wordt in allerlei varianten,

zoals S12, AS en S2 relatief veel voorkomen. Daarbij is de goedscore ongeveer het dubbele van de foutscore. Bijvoorbeeld: S12 goed 18 keer en fout 10 keer. Ook Comp komt relatief veel voor (10%) met een uitstekende goedscore: .95! (zou je S1comp hierbij optellen, dan wordt het .92). Een en ander lijkt erop te wijzen dat deze leerlingen al wat meer inzicht in getalstructuren en bewerkingseigenschappen hebben, en zich minder laten leiden door ogenschijnlijk aardige maar onjuiste strategieën zoals VS, die 'maar' 16 keer voorkomt bij T1 (8%) en vanaf T2 helemaal niet meer.

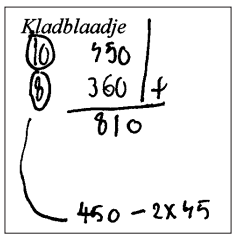
- De strategie 'Herhaald verdubbelen en handig combineren' (bijv.: 18x45 via 1x, 2x, 4x, 8x, 16x en dan 16x en 2x combineren; de Egyptische methode dus eigenlijk) is een betrekkelijk geavanceerde zij het niet altijd even handige aanpak die onder de huidige categorisering toch maar gewoon in de categorie HoptVerd wordt gerekend.
- Bij T2 zie je de genoemde aanpakken op basis van decimale splitsing (AS, S12, S2) drastisch teruglopen terwijl compensatiestrategieën stabiel blijven (14%, goedscore .79). Ook hier dus een zekere uniformering waarbij S1 in de b- en v-variant sterker gaan domineren: in totaal 68% met goedscore van .75.
- Bij T3 doet zich weer het verschijnsel voor dat strategieën die aanvankelijk als S2 werden aangemerkt, bij nader inzien toch beter als S1 kunnen worden geïnterpreteerd. Zie het voorbeeld hiernaast waarbij van 18x45 45x18 wordt gemaakt en vervolgens S1 wordt toegepast, in dit geval S1v. Eigenlijk zou je dit S1comm of CommS1 (S1 in combinatie met 'commutatief') moeten noemen, maar dit hebben we niet als aparte (sub)categorie aangemerkt. Het lijkt toch beter om dit dan maar gewoon als S1 te categoriseren, in dit geval dus S1v, omdat dit toch het hoofdelement van de strategie is. Deze aanpassing is in totaal een keer of 5 doorgevoerd.



S2 of S1v?

- Bij T3 verder een sterke uniformering: S1 wordt steeds dominanter maar ook succesvoller: alleen al in de S1v-vorm wordt zij139 keer gebruikt (60%) met goedscore .86. Nogal wat leerlingen gaan met deze strategie zo efficiënt zij het vaak toch gevarieerd om, dat hier een soort van eindstadium bereikt lijkt te zijn zonder dat er verder nog veel geoefend hoeft te worden. Ook de notaties zijn vaak compact, overzichtelijk en efficiënt. De enige strategie die naast S1v en S1b nog redelijk frequent voorkomt is S1comp en Comp. Zou je deze categorieën samenvoegen, dan komt de gebruiksfrequentie op 13% met goedscore .96.

Een mooi voorbeeld van S1comp is de leerling hieronder die het als volgt noteert:



(Als ik zo het werk van deze leerlingen bij T3 nog eens doorblader, dan kom ik zoveel fraaie voorbeelden tegen van semi-procedurele strategieën met toch een handig element erin en vaak super-helder genoteerd, dat ik geneigd ben om het een 'tovertuin van strategieën' te noemen. Het kan bijna niet anders dan dat de leraar op deze school daar toch een zeer stimulerende invloed bij heeft gehad.)

3 Overzicht strategiegebruik bij T1, T2 en T3 op alle scholen samen

Overzicht van strategiegebruik en goedscores bij de drie criteriumtoetsen voor alle vijf de scholen samen. Per type strategie is steeds aangegeven hoeveel keer deze correct werd gebruikt (absoluut en als fractie van het totaal), en hoeveel keer op onjuiste wijze (idem). In de meest rechtse kolom kan afgelezen worden wat de totale goedscore per criteriumtoets was, terwijl in de onderste rij te zien is hoe vaak de betreffende categorie als fractie van het geheel voorkwam.

OVERZICHT STRATEGIEGEBRUIK T1, T2 EN T3 OP ALLE VIJF SCHOLEN SAMEN (n=112)

T1	Hopt/ verd	GR	VS	S1b	S1v	AS	S12	S2	S1 comp	Comp	Halv Verd	Cijf	An-ders	
+	15	13		26	147	73	34	44	11	36	-	17	9	425
	0.02	0.01		0.03	0.16	0.08	0.04	0.05	0.01	0.04		0.02	0.01	0.47
-	22	5	173	20	65	45	26	43	3	6	-	29	34	471
	0.03	0.01	0.19	0.02	0.07	0.05	0.03	0.05	-	0.01		0.03	0.04	0.53
Tot.	37	18	173	46	212	118	60	87	14	42	-	46	43	**896**
	0.05	0.02	0.19	0.05	0.23	0.13	0.07	0.10	0.01	0.05	-	0.05	0.05	1.00

T2	Hopt/ verd	GR	VS	S1b	S1v	AS	S12	S2	S1 comp	Comp	Halv Verd	Cijf	An-ders	
+	11	44		96	261	34	34	23	19	37	7	9	13	588
	0.01	0.05		0.11	0.29	0.03	0.03	0.03	0.02	0.04	0.01	0.01	0.02	0.65
-	13	28	41	48	97	14	13	20	5	16	1	5	7	310
	0.02	0.03	0.04	0.05	0.11	0.02	0.02	0.02	0.01	0.02	-	0.01	0.01	0.35
Tot.	24	72	41	144	358	48	47	43	24	53	8	14	20	**896**
	0.03	0.08	0.04	0.16	0.40	0.05	0.05	0.05	0.03	0.06	0.01	0.02	0.03	1.00

T3	Hopt/ verd	GR	VS	S1b	S1v	AS	S12	S2	S1 comp	Comp	Halv Verd	Cijf	An-ders	
+	9	15		121	401	27	14	21	15	86	13	30	4	756
	0.01	0.02		0.14	0.45	0.03	0.02	0.02	0.02	0.10	0.01	0.03	-	0.84
-	3	3	4	28	68	2	3	3	1	14	3	6	2	140
	-	-	-	0.03	0.07	-	-	-	-	0.02	-	0.01	-	0.16
Tot.	12	18	4	149	469	29	17	24	16	100	16	36	6	**896**
	0.01	0.02	-	0.17	0.52	0.03	0.02	0.03	0.02	0.11	0.02	0.04	0.01	1.00

4 Tabellen behorende bij de statistische toets die werd uitgevoerd met behulp van het spss-programma

Hieronder volgen de tabellen met betrekking tot 'within-subjects effecten' en 'between-subjects effecten'. Deze tabellen werden samengesteld met behulp van het SPSS-programma om na te gaan in hoeverre geconstateerde veranderingen in de tijd mogelijk op toeval zouden kunnen berusten.

Tabel 1: Toets naar de 'within-subjects effecten' voor wat betreft de verandering van de gemiddelde goedscore (Measure 1) over de drie tijdstippen van T1, T2 en T3 voor alle scholen samen.

Measure: MEASURE_1

Tests of Within-Subjects Effects

Source		Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
tijd	Sphericity Assumed	7,270	2	3,635	95,628	,000
	Greenhouse-Geisser	7,270	1,843	3,946	95,628	,000
	Huynh-Feldt	7,270	1,943	3,741	95,628	,000
	Lower-bound	7,270	1,000	7,270	95,628	,000
tijd * School	Sphericity Assumed	,464	8	,058	1,527	,149
	Greenhouse-Geisser	,464	7,370	,063	1,527	,156
	Huynh-Feldt	,464	7,774	,060	1,527	,152
	Lower-bound	,464	4,000	,116	1,527	,200
Error(tijd)	Sphericity Assumed	8,135	214	,038		
	Greenhouse-Geisser	8,135	197,156	,041		
	Huynh-Feldt	8,135	207,950	,039		
	Lower-bound	8,135	107,000	,076		

Tabel 2: Toets naar 'between-subjects effecten' voor wat betreft de veranderingen per school van de gemiddelde goedscore (Measure 1) over de tijdstippen T1, T2 en T3.

Measure: MEASURE_1
Transformed Variable: Average

Tests of Between-Subjects Effects

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Intercept	141,869	1	141,869	1367,365	,000
School	1,903	4	,476	4,585	,002
Error	11,102	107	,104		

Measure: MEASURE_1

1.School

School	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval	
			Lower Bound	Upper Bound
1	,633	,040	,554	,711
2	,591	,035	,521	,660
3	,572	,044	,485	,659
4	,757	,043	,672	,841
5	,742	,037	,668	,815

Tabel 3: Tabel met de gemiddelde goedscore per school over alle drie de toetsen samen, met standaarddeviatie en het betrouwbaarheidsinterval van de gemiddelde goedscores.

Tabel 4: Tabel met de ontwikkeling van gemiddelde goedscores naar geslacht bij de drie toetsen T1, T2 en T3, met standaarddeviatie en betrouwbaarheidsinterval.

Measure: MEASURE_1

2. geslacht*tijd

geslacht	tijd	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval	
				Lower Bound	Upper Bound
1	1	,458	,037	,385	,531
	2	,641	,031	,579	,702
	3	,854	,021	,812	,895
2	1	,487	,039	,410	,565
	2	,663	,033	,598	,729
	3	,820	,022	,776	,865

Tabel 5: Toets naar de 'within-subjects contrasten' tussen jongens en meisjes, tussen Z25 en B25, en tussen jongens en meisjes onderverdeeld naar subcategorie Z25 en B25.

Measure: MEASURE_1

Test of Within-Subjects Contrasts

Source	tijd	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
tijd	Linear	6,644	1	6,644	184,289	,000
	Quadratic	,001	1	,001	,015	,902
tijd * Kwarten	Linear	,583	2	,292	8,091	,001
	Quadratic	,001	2	,001	,015	,985
tijd * geslacht	Linear	,049	1	,049	1,354	,247
	Quadratic	,010	1	,010	,274	,601
tijd * Kwarten * geslacht	Linear	,062	2	,031	,862	,425
	Quadratic	,151	2	,075	2,037	,135
Error(tijd)	Linear	3,821	106	,036		
	Quadratic	3,919	106	,037		

Tabel 6: Toets naar 'between-subjects effecten' voor wat betreft veranderingen naar geslacht in combinatie met rekenniveau.

Measure: MEASURE_1

Transformed Variable: Average

Test of Between-Subjects Effects

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Intercept	128,215	1	128,215	1728,762	,000
Kwarten	5,085	2	2,542	34,281	,000
geslacht	,003	1	,003	,038	,846
Kwarten * geslacht	,030	2	,015	,203	,817
Error	7,862	106	,074		

Tabel 7: Vergelijking van de groepen Z25, M50 en B25 qua gemiddelde goedscores bij T1, T2 en T3.

Dependent Variable: PG3
Scheffe

Multiple Comparisons

(I) Kwarten	(J) Kwarten	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
1	2	-,1250 *	,03545	,003	-,2130	-,0370
	3	-,2054 *	,04093	,000	-,3070	-,1037
2	1	,1250 *	,03545	,003	,0370	,2130
	3	-,0804	,03545	,081	-,1684	,0076
3	1	,2054 *	,04093	,000	,1037	,3070
	2	,0804	,03545	,081	-,0076	,1684

Based on observed means.

*. The mean difference is significant at the ,05 level.

Tabel 8: Toets naar 'between-subjects effecten' voor wat betreft veranderingen naar rekenniveau.

Measure: MEASURE_1
Transformed Variable: Average

Test of Between-Subjects Effects

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Intercept	129,152	1	129,152	1781,634	,000
Kwarten	5,103	2	2,551	35,197	,000
Error	7,902	109	,072		

Measure: MEASURE_1

1. Kwarten

Kwarten	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval	
			Lower Bound	Upper Bound
1	,472	,029	,414	,530
2	,670	,021	,629	,712
3	,818	,029	,760	,877

Tabel 9: Overzicht van de gemiddelde goedscores over alle drie de toetsen samen naar rekenniveau.

5 Beoordelingsinstrument notatiegedrag

Inleiding

Om tot een goede beoordeling van het notatiegedrag te kunnen komen, is een instrument ontwikkeld aan de hand waarvan aan alle door de leerlingen gebruikte notatievormen een score van 1 (laagste score), 2 (matige score) of 3 (hoogste score) toegekend kan worden voor de twee centrale criteria in het instrument, te weten compactheid en overzichtelijkheid. In paragraaf 8.3 is de globale opzet van dit instrument uiteengezet. Hieronder worden de beide genoemde criteria tot in details uitgewerkt. Omdat er een categorie notatievormen is die om verschillende redenen niet in aanmerking komt voor beoordeling, wordt hierover

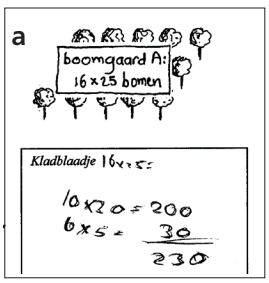
eerst een opmerking gemaakt. Tenslotte wordt aangegeven hoe beoordeeld dient te worden in het geval van cumulatieve effecten bij de beoordeling.

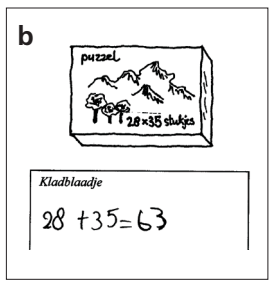
1. Typen notatievormen die niet in aanmerking voor beoordeling komen

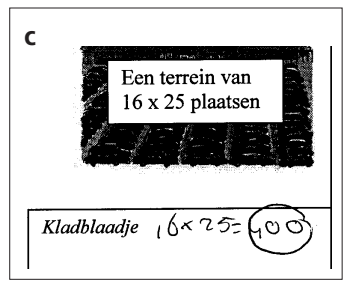
Er zijn een aantal notatievormen die niet in aanmerking voor beoordeling komen zoals dat met het instrument beoogd wordt, omdat ze tot een verkeerd beeld van de kwaliteit van het notatiegedrag leiden en derhalve niet 'scoorbaar' zijn. In het algemeen geldt dit in de volgende gevallen:

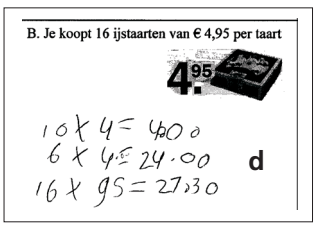
- notatievormen bij gebruik van een per definitie onjuiste strategie zoals VS (verkeerd splitsen); dit geldt ook voor het geval dat gekozen is voor een onjuiste bewerking zoals optellen of delen;
- er wordt in het geheel geen antwoord gegeven (het kladblaadje is leeg), of er is wel een berekening maar geen antwoord;
- er wordt alleen een antwoord gegeven terwijl een berekening ontbreekt.

Het laatste type oplossing lijkt in twee varianten voor te komen: een variant waarbij een leerling met de opgave in kwestie geen raad wist en gewoon maar een antwoord 'ins blaue hinein' heeft gegeven; en een variant waarbij een leerling het juiste antwoord direct uit het hoofd kon uitrekenen en dus niet de moeite heeft genomen om een berekening te noteren. Hoewel deze laatste oplossingswijze natuurlijk volkomen legitiem is, is er dan niet sprake van een notatievorm, en dus is deze ook niet beoordeelbaar.









a. Oplossing volgens de onjuiste VS-strategie: niet beoordeelbaar

b. Oplossing waarbij voor de verkeerde bewerking is gekozen: niet beoordeelbaar

c. Oplossing waarbij alleen het antwoord wordt gegeven: niet beoordeelbaar

d. Oplossing waarbij wel een berekening staat genoteerd maar geen antwoord: niet beoordeelbaarw

Opgaven waarbij een van de bovengenoemde notatievormen wordt gebruikt, worden in de beoordeling dus buiten beschouwing gelaten. Indien volgens deze maatstaf meer dan drie opgaven binnen dezelfde toets niet beoordeelbaar zijn, wordt de betreffende leerling in de analyse van het notatiegedrag helemaal buiten beschouwing gelaten.

2. Het criterium Compactheid

Bij dit criterium, in de overzichten aangeduid met Cp, gaat het om twee hoofdaspecten, te weten:

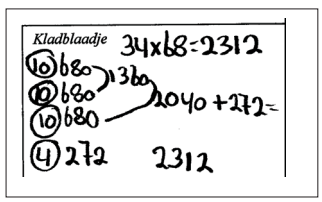
- de mate van compactheid van de notatie als zodanig
- de mate van verkorting van de gehanteerde strategie

Compactheid van de notatie als zodanig

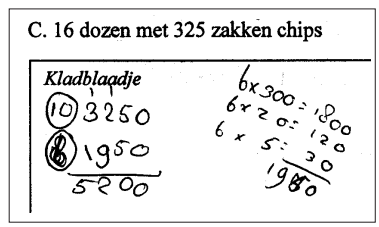
Hiervoor zijn drie kenmerken te onderscheiden:

- Is er in een berekening sprake van hulpstappen (die veelal apart genoteerd worden) of tussenantwoorden, dan is Cp maximaal 2

a



b

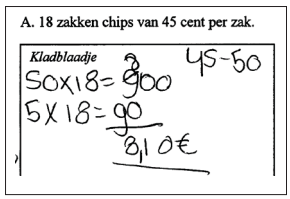


a. berekening met tussen-antwoorden: Cp 2

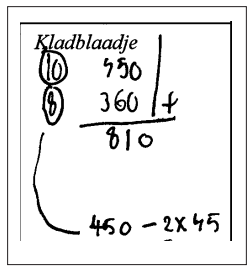
b. berekening met apart genoteerde hulpstappen: Cp 2

Het komt ook voor dat een tussenstap alleen maar genoteerd lijkt te zijn om het eigen handelen te verduidelijken, bijvoorbeeld als wordt aangegeven welke getalrelatie is benut, of welke tussenstap uit het hoofd is uitgevoerd. In zulke gevallen zou in principe Cp 3 gegeven kunnen worden. Maar omdat lang niet altijd duidelijk is wanneer daarvan sprake is, wordt in zulke gevallen toch Cp 2 gegeven.

a



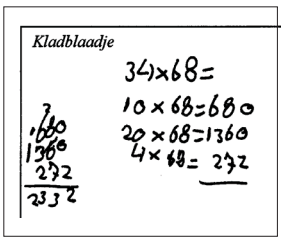
b



a. Ll. 119 geeft aan hoe ze van 50 ipv. 45 is uitgegaan: Cp 2

b. Ll. 521 geeft aan hoe hij 8x45 uit het hoofd via 10x – 2x heeft gedaan: Cp 2

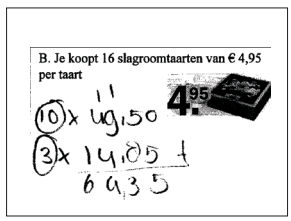
- Is er sprake van een berekening met apart genoteerde en uitgevoerde optellingen, dan is de Cp-score ook maximaal 2



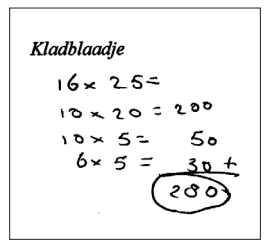
berekening met apart genoteerde optelling: Cp 2

- Is er sprake van een notatievorm waarbij slechts in zeer beperkte zin tussenstappen of –antwoorden zijn genoteerd waardoor moeilijk te achterhalen is welke handelingen of bewerkingen een leerling precies heeft uitgevoerd, dan is de Cp-score eveneens maximaal 2. Hetzelfde geldt voor notatievormen waarbij een leerling een stap in de berekening vergeten is.

a



b



a. berekening (T2, ll. 503) waarbij vergeten is om er nog eens 3x4,95 bij te doen

b. ll. 106 gebruikt AS-aanpak, maar vergeet de factor 6x20 (Cp 2)

Mate van verkortheid van de gehanteerde strategie

In het algemeen worden aanpakken waarbij met kleine groepjes wordt gewerkt, als Cp 1 aangemerkt. Aanpakken waarbij de S1-strategie wordt gebruikt terwijl steeds met groepjes van 10 en van 2 wordt gewerkt, worden tot Cp 2 gerekend. Treden bij de S1-strategie verdere verkortingen op (bijvoorbeeld: groepen van 20, eerst een groep van 10 en dan van 20; eerst een groep van 2 en dan van 4), dan wordt dit als Cp 3 gekwalificeerd. Verder wordt de AS-strategie tot Cp 2 gerekend (gezien het aantal te noteren tussenstappen, minimaal vier), terwijl de S2-aanpak en de Comp-aanpak tot Cp3 worden aangemerkt, met dien verstande dat zulke aanpakken als Cp 2 worden gerekend indien er nog weer apart tussenstappen zijn genoteerd. Een en ander leidt nader uitgewerkt tot de volgende indeling:

Cp 1:

18x via 4x, 4x, 4x, 4x, 2x

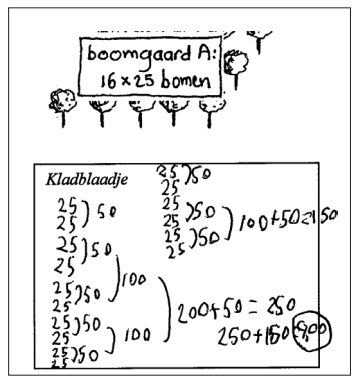
18x via 2x, 4x, 8x, 16x + 2x

16x via 4x, 4x, 4x, 4x

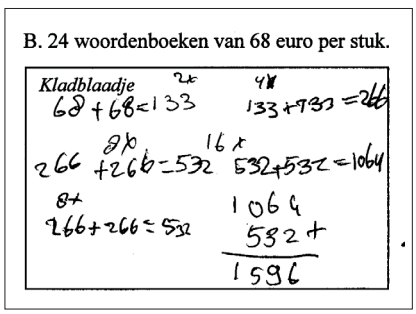
24x via 2x, 4x, 8x, (8+4) 12x, 24x

12x via 5x, 5x, 2x

a



b



a. Herhaald optellen en verdubbelen: Cp 1

b. Herhaald verdubbelen en combineren: Cp 1

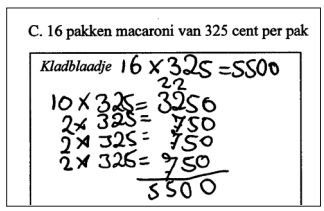
Cp 2:

12x via 5x, 5x, 2x	S12:	18x45 via	10x45,	8x40,	8x5		
16x via 5x, 5x, 5x, 1x		16x25 via	10x25,	6x20,	6x5		
18x via 10x, 2x, 2x, 2x, 2x							
18x via 10x, 5x, 2x, 1x	AS:	18x45 via	10x40	24x68 via	20x60	16x325 via	10x300
18x via 10x, 10x, -2x			10x5		20x8		10x20
24x via 10x, 10x, 2x, 2x			8x40		4x60		10x5
24x via 10x, 10x, 4x			8x5		4x8		6x300
24x via 10x, 10x, 5x, -1x (comp)							6x20
24x via 20x, 2x, 2x							6x5

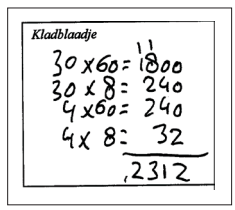
28x via 10x, 10x, 8x
28x via 10x, 10x, 10x, -2x (comp)
45x via 10x, 10x, 10x, 10x, 2x, 2x, 1x
45x via 10x, 10x, 10x, 10x, 5x
45x via 20x, 20x, 2x, 2x, 1x
12x1,95 via 10x2, 2x2, -12x0,05 (comp)
12x2,95 via 10x3, 2x3, -12x0,05 (comp)

16x325 via 10x325
6x300 HV (halv./verd.) met notatie
6x20 van meerdere tussenstappen
6x5 16x325 via 8x650, 4x1300 en 2x2600
16x4,95 via 10x, 2x, 2x, 2x

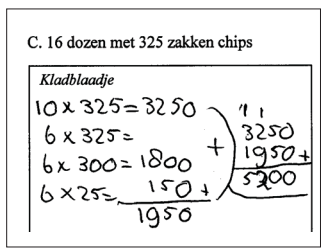
a



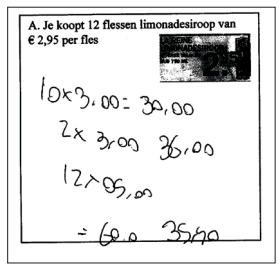
b



c



d



a. De S1b-strategie (10x, 2x, 2x, 2x): Cp 2
b. De AS-strategie: Cp 2
c. De S12-strategie (16x325 via 10x325, 6x300,6x25): Cp 2
d. De Comp-strategie (10x3, 2x3, -12x0,05):Cp2

Cp 3:

18x via 10x, 4x, 4x
18x via 10x, 5x, 3x
18x via 9x, 9x
18x via 20x –2x (comp)
24x via 20x, 4x
24x via 12x, 12x
24x via 20x, 5x, -1x (comp)
16x via 10x, 5x, 1x
16x via 10x, 3x, 3x
16x via 8x, 8x
45x via 20x, 20x, 5x
45x via 10x, 20x, 10x, 5x

16x 4,95 via 10x, 2x, 4x
16x 4,95 via 10x, 6x
16x 5,-- – 16x 0,05 (comp)

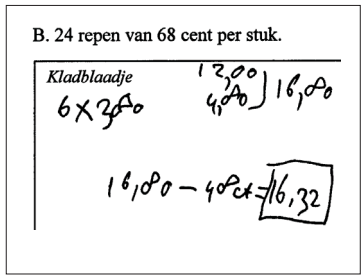
16x 4,95 via cijferen
28x 35 via cijferen

12x2,95 via 10x, 2x

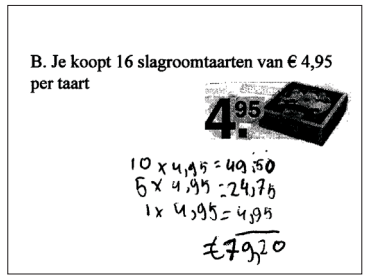
HV (halv./verd.) zonder notatie van tussenstappen: 16x325 via 8x650

18x45 via 18x40, 18x5 (S2)
24x68 via 24x60, 24x8 (S2)
16x325 via 16x300, 16x25 (S2)
16x325 via 16x300, 16x20, 16x5 (S2)

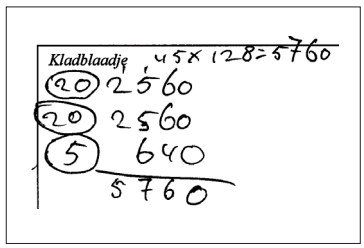
a



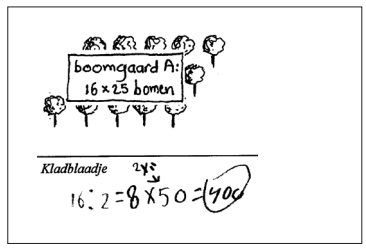
b



c



d



a. De Comp-strategie (24x68 via 24x70): Cp 2
b. De S1-strategie (16x4,95 via 10x, 5x en 1x): Cp
c. De S1-strategie (45x128 via 20x, 20x en 5x): Cp 3
d. De HV-strategie (16x25 via 8x50): Cp 3

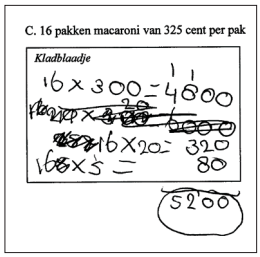
3. Het criterium Overzichtelijkheid

Hieronder worden per 'niveau' de belangrijkste onderscheidende factoren voor dit criterium op een rij gezet.

Ov 1:

- De berekening heeft geen duidelijke volgorde van links naar rechts en van boven naar onder; tussenuitkomsten staan betrekkelijk willekeurig over het kladblaadje verspreid; de einduitkomst is moeilijk te onderscheiden.
- De hele berekening staat twee keer genoteerd waarvan één keer grotendeels of helemaal doorgestreept.
- Een complete regel van de berekening is doorgehaald en vervangen door een andere.
- De getallen en bewerkingen zijn zeer rommelig en buiten het kader van het kladblaadje genoteerd.

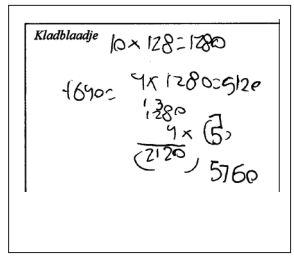
a



b



c



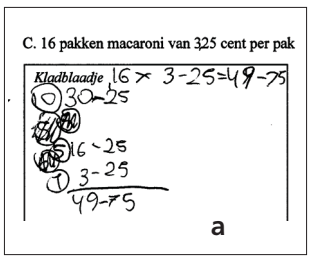
a. S2-strategie bij 16x325 via 16x300, 16x20 en 16x5; een groot deel van de berekening is weer doorgehaald: Ov 1

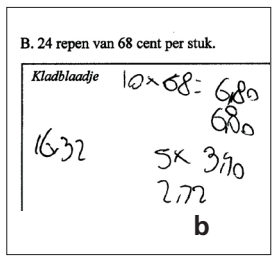
b. S1v-strategie bij 34x68 via 10x, 10x, 10x en 4x; rommelig en vol hanenpoten genoteerd, buiten het kader: Ov 1

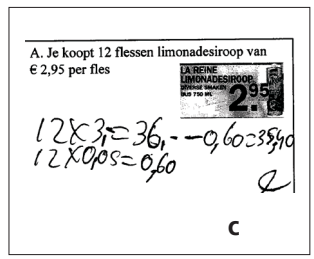
c. S1v-strategie bij 45x128 via 10x, 10x, 10x, 10x en 5x; rommelig en cryptisch genoteerd, met doorhalingen: Ov 1

Ov 2:

- Er is sprake van incidentele doorhalingen.
- Er is niet aangegeven welke bewerking is uitgevoerd, noch via het bewerkingssymbool, noch door middel van boogjes oid.
- De stappen zijn onvolledig of fragmentarisch genoteerd, zodat moeilijk te achterhalen is wat er precies gedaan is.
- De stappen zijn moeilijk te onderscheiden doordat alles achter elkaar door genoteerd staat.







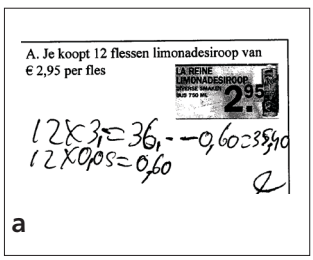
a. S1v-strategie bij 16x325 via 10x, 5x en 1x; met enkele incidentele doorhalingen: Ov 2

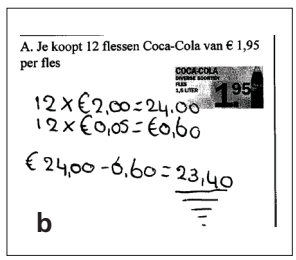
b. S1v/comp-strategie bij 24x68 via 10x, 10x, 5x, -1x; stappen fragmentarisch genoteerd, antwoord helemaal links: Ov 2

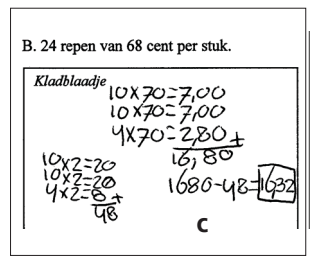
c. Comp-strategie waarbij op de bovenste regel alles achter elkaar door is genoteerd: Ov 2

Ov 3:

- Er is sprake van een goed geordende berekening die bij voorkeur van boven naar onder en van links naar rechts loopt; de verschillende handelingen zijn enigszins 'beeldend' beschreven.
- Hulpstappen zijn in de berekening duidelijk gescheiden genoteerd van de 'hoofdberekening'.
- Indien subtotalen onder elkaar bij elkaar zijn opgeteld, staan de betreffende getallen redelijk recht onder elkaar (maar dit hoeft niet zuiver positiegewijs te zijn).
- De uitkomst laat zich makkelijk aflezen doordat deze enigszins apart is geplaatst of omcirkeld of onderstreept is.







a. Combinatie van herhaald optellen en vermenigvuldigen keurig van links naar rechts en van boven naar onder genoteerd, antwoord omcirkeld: Ov 3

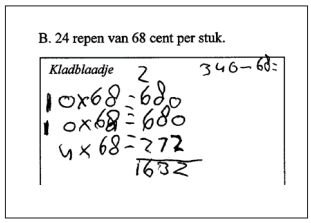
b. Comp-strategie, glashelder genoteerd; kleine verschrijving (0 enigszins als 6 genoteerd) is niet van invloed: Ov 3

c. Comp-strategie, enigszins omslachtig uitgevoerd, maar zeer doordacht genoteerd met duidelijk onderscheid tussen verschillende stappen: Ov 3

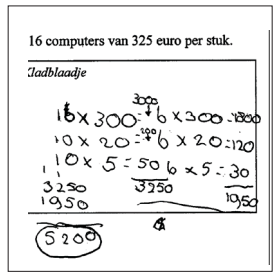
4. Cumulatief effect van twee aspecten bij een criterium

Het komt nogal eens voor dat een notatievorm in twee opzichten in aanmerking komt voor een minder hoge waardering. Voor wat betreft het criterium compactheid is dit nogal eens het geval als in een berekening zowel sprake is van apart genoteerde hulpstappen of tussenantwoorden (het eerste compactheidsaspect), als van een minder verkorte aanpak (het tweede aspect). Voor beide factoren afzonderlijk wordt Cp 2 toegekend. Echter, ook in combinatie wordt dan Cp 2 toegekend. Zou dat namelijk niet gedaan worden, dan komen zulke notatievormen namelijk gelijk te staan aan het niveau van Cp1 zoals bij herhaald optellen e.d.

a



b

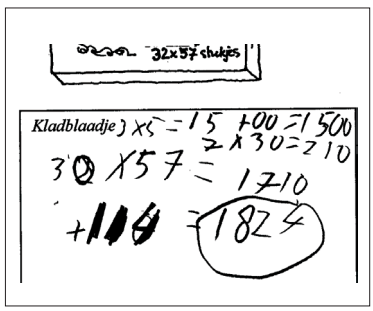


a. S1v-strategie via 10x, 10x en 4x, in combinatie met hulpstap 340-68: 2x Cp2 blijft Cp2

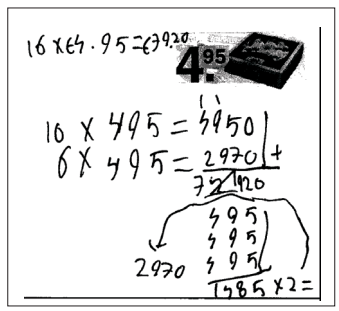
b. AS-strategie met aparte optellingen: 2x Cp2 blijft Cp2.

Hetzelfde geldt voor het criterium van de overzichtelijkheid. Zo komt het bijvoorbeeld wel voor dat een leerling tussenantwoorden of tussenstappen niet goed van elkaar onderscheiden in de berekening heeft opgenomen, terwijl er bovendien enkele doorhalingen in de berekening zitten. In feite gaat het dan om 'dubbel Ov 2', maar dit blijft dan Ov 2 en wordt geen Ov 1.

a



b



a. S12-strategie via 30x50, 30x7 en 2x57; stappen zijn niet zo makkelijk van elkaar te onderscheiden, bovendien doorhaling 2x Ov 2 blijft Ov 2

b. S1v-strategie via 10x en 6x, rommelig genoteerd met bovendien doorhaling in het antwoord; 2x Ov 2 blijft Ov 2

6 Overzicht scoreverschillen notatiegedrag van alle vijf scholen

In deze bijlage wordt een overzicht gegeven van de scoreverschillen die zich voordeden bij de beoordeling van de beide onderzoekers zoals beschreven in paragraaf 5 van hoofdstuk 8.

School 100 (n=22)

101	3
102	2
105	10
106	4
107	10
108	4
109	13
110	3
111	5
112	9
113	5
114	4
115	6
116	5
117	2
118	3
119	1
120	8
121	2
122	7
123	3
124	1
Tot.	**110**

Percentage verschillen:
110:1056=10%
Van de 110 verschillen
68 bij O v, de rest bij Cp.

School 200 (n=28)

202	2
203	6
204	8
205	18
206	3
207	6
208	2
209	3
210	11
211	5
212	2
213	3
214	12
215	7
216	4
217	9
218	7
219	7
220	3
221	16
222	6
223	6
224	6
225	5
226	3
227	11
228	3
229	1
Totaal	**175**

Percentage verschillen:
175:1344=13%

School 300 (n=18)

301	2
302	7
303	7
304	4
305	7
306	14
307	6
308	12
309	6
310	3
311	7
312	9
313	4
314	5
315	6
316	5
318	18
319	7
Tot.	**127**

Percentage verschillen:
127:864= **15%**

School 400 (n=15; 4 lln. niet meegerekend)

403	7
404	2
405	4
406	5
407	3
408	3
409[1]	-
410	-
411	5
412	8
413	-
414	-
415	2
416	2
417	4
418	7
419	9
420	16
421	8
	85

Percentage verschillen:
85:720=12%

School 500 (n=22; 3 lln. niet meegerekend)

501	2
502[1]	-
503	8
506	10
507	6
508	7
509	3
510	7
511	-
512	11
513	-
514	3
515	4
517	7
518	4
519	7
520	16
521	10
522	4
523	2
524	6
525	11
526	10
528	1
529	8
Tot.	**147**

Percentage verschillen:
147:1056=14 %
Van de 147 verschillen zijn er 76 bij Ov, de rest bij Cp.

Alle vijf de scholen bij elkaar: 22+28+18+15+22=105
(7 lln. niet meegerekend)
Totaal aantal verschillen: 110+175+127+85+147=644
Percentage verschillen: 644:(48x105)=12.8%

7 De resultaten van de vijf scholen afzonderlijk

Hieronder volgen de tabellen met betrekking tot de ontwikkeling van het notatiegedrag zoals deze werden samengesteld met behulp van het SPSS-programma om na te gaan in hoeverre geconstateerde veranderingen in de tijd mogelijk op toeval zouden kunnen berusten.

Descriptive Statistics

	School	Mean	Std. Deviation	N
T1Cp	1	2.050	.4690	16
	2	2.150	.5793	18
	3	2.300	.5152	12
	4	2.400	.3521	16
	5	1.983	.3762	23
	Total	2.154	.4752	85
T2Cp	1	2.525	.3276	16
	2	2.422	.2819	18
	3	2.033	.4519	12
	4	2.269	.2272	16
	5	2.387	.3841	23
	Total	2.348	.3644	85
T3Cp	1	2.588	.2680	16
	2	2.439	.3310	18
	3	2.400	.3191	12
	4	2.494	.3356	16
	5	2.522	.3316	23
	Total	2.494	.3179	85
T1Ov	1	2.356	.5465	16
	2	2.378	.4784	18
	3	2.400	.3247	12
	4	2.619	.2762	16
	5	2.400	.2763	23
	Total	2.428	.3948	85
T2Ov	1	2.706	.2294	16
	2	2.711	.3179	18
	3	2.550	.3398	12
	4	2.556	.3183	16
	5	2.770	.1845	23
	Total	2.674	.2825	85
T3Ov	1	2.888	.1928	16
	2	2.856	.1580	18
	3	2.725	.2379	12
	4	2.794	.2516	16
	5	2.900	.1168	23
	Total	2.844	.1942	85

Tabel 1: Overzicht van de gemiddelde score en standaarddeviatie voor de beide criteria compactheid (Cp) en overzichtelijkheid (Ov) bij T1, T2 en T3 voor alle vijf scholen afzonderlijk. In de laatste kolom staat het aantal leerlingen per school aangegeven. Omdat er op grond van het uitsluitingscriterium 27 van de 112 leerlingen zijn afgevallen, is het totaal in deze tabel steeds 85.

Tabel 2: Toetsing van verschillen in notatiegedrag in de tijd in combinatie met verschillen tussen scholen in de verandering van notatiegedrag in de tijd.

Univariate Tests

Source	Measure		Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Tijd	Compactheid	Sphericity Assumed	3.957	2	1.978	24.481	.000
		Greenhouse-Geisser	3.957	1.755	2.255	24.481	.000
		Huynh-Feldt	3.957	1.881	2.104	24.481	.000
		Lower-bound	3.957	1.000	3.957	24.481	.000
	Overzichtelijkheid	Sphericity Assumed	6.606	2	3.303	44.519	.000
		Greenhouse-Geisser	6.606	1.703	3.879	44.519	.000
		Huynh-Feldt	6.606	1.823	3.623	44.519	.000
		Lower-bound	6.606	1.000	6.606	44.519	.000
Tijd * School	Compactheid	Sphericity Assumed	3.658	8	.457	5.659	.000
		Greenhouse-Geisser	3.658	7.019	.521	5.659	.000
		Huynh-Feldt	3.658	7.523	.486	5.659	.000
		Lower-bound	3.658	4.000	.915	5.659	.000
	Overzichtelijkheid	Sphericity Assumed	1.297	8	.162	2.185	.031
		Greenhouse-Geisser	1.297	6.813	.190	2.185	.041
		Huynh-Feldt	1.297	7.294	.178	2.185	.037
		Lower-bound	1.297	4.000	.324	2.185	.078
Error(Tijd)	Compactheid	Sphericity Assumed	12.929	160	.081		
		Greenhouse-Geisser	12.929	140.387	.092		
		Huynh-Feldt	12.929	150.462	.086		
		Lower-bound	12.929	80.000	.162		
	Overzichtelijkheid	Sphericity Assumed	11.871	160	.074		
		Greenhouse-Geisser	11.871	136.255	.087		
		Huynh-Feldt	11.871	145.876	.081		
		Lower-bound	11.871	80.000	.148		

Tabel 3: Toetsing van 'within-subjects effecten' voor wat betreft de verschillen per school voor de beide criteria compactheid en overzichtelijkheid, gemeten naar de tijd T1, T2 en T3.

Tests of Within-Subjects Contrasts

Source	Measure	Tijd	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Tijd	Compactheid	Linear	3.955	1	3.955	38.920	.000
		Quadratic	.001	1	.001	.024	.876
	Overzichtelijkheid	Linear	6.566	1	6.566	77.029	.000
		Quadratic	.040	1	.040	.634	.428
Tijd * School	Compactheid	Linear	1.622	4	.406	3.991	.005
		Quadratic	2.036	4	.509	8.484	.000
	Overzichtelijkheid	Linear	.736	4	.184	2.159	.081
		Quadratic	.561	4	.140	2.219	.074
Error(Tijd)	Compactheid	Linear	8.130	80	.102		
		Quadratic	4.799	80	.060		
	Overzichtelijkheid	Linear	6.819	80	.085		
		Quadratic	5.052	80	.063		

Tabel 4: Toetsing van verschillen in de verandering van notatiegedrag in combinatie met het rekenniveau van de leerlingen.

Tests of Within-Subjects Contrasts

Source	Measure	Tijd	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Tijd	Compactheid	Linear	3.955	1	3.955	38.920	.000
		Quadratic	.001	1	.001	.024	.876
	Overzichtelijkheid	Linear	6.566	1	6.566	77.029	.000
		Quadratic	.040	1	.040	.634	.428
Tijd * School	Compactheid	Linear	1.622	4	.406	3.991	.005
		Quadratic	2.036	4	.509	8.484	.000
	Overzichtelijkheid	Linear	.736	4	.184	2.159	.081
		Quadratic	.561	4	.140	2.219	.074
Error(Tijd)	Compactheid	Linear	8.130	80	.102		
		Quadratic	4.799	80	.060		
	Overzichtelijkheid	Linear	6.819	80	.085		
		Quadratic	5.052	80	.063		

Tabel 5: Toetsing van verschillen in de verandering van notatiegedrag tussen jongens en meisjes.

Univariate Tests

Source	Measure		Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Tijd	Compactheid	Sphericity Assumed	5.009	2	2.504	25.361	.000
		Greenhouse-Geisser	5.009	1.681	2.980	25.361	.000
		Huynh-Feldt	5.009	1.732	2.892	25.361	.000
		Lower-bound	5.009	1.000	5.009	25.361	.000
	Overzichtelijkheid	Sphericity Assumed	7.502	2	3.751	47.757	.000
		Greenhouse-Geisser	7.502	1.640	4.575	47.757	.000
		Huynh-Feldt	7.502	1.689	4.443	47.757	.000
		Lower-bound	7.502	1.000	7.502	47.757	.000
Tijd * geslacht1j2m	Compactheid	Sphericity Assumed	.194	2	.097	.984	.376
		Greenhouse-Geisser	.194	1.681	.116	.984	.364
		Huynh-Feldt	.194	1.732	.112	.984	.366
		Lower-bound	.194	1.000	.194	.984	.324
	Overzichtelijkheid	Sphericity Assumed	.129	2	.065	.822	.441
		Greenhouse-Geisser	.129	1.640	.079	.822	.420
		Huynh-Feldt	.129	1.689	.077	.822	.423
		Lower-bound	.129	1.000	.129	.822	.367
Error(Tijd)	Compactheid	Sphericity Assumed	16.393	166	.099		
		Greenhouse-Geisser	16.393	139.493	.118		
		Huynh-Feldt	16.393	143.765	.114		
		Lower-bound	16.393	83.000	.198		
	Overzichtelijkheid	Sphericity Assumed	13.038	166	.079		
		Greenhouse-Geisser	13.038	136.109	.096		
		Huynh-Feldt	13.038	140.158	.093		
		Lower-bound	13.038	83.000	.157		

Tabel 6: Toetsing van verschillen tussen jongens en meisjes in het notatiegedrag gemiddeld over de drie tijdstippen.

1. geslacht: 1=j; 2=m

Measure	geslacht: 1=j; 2=m	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval	
				Lower Bound	Upper Bound
Compactheid	1	2.384	.044	2.297	2.470
	2	2.274	.046	2.182	2.366
Overzichtelijkheid	1	2.645	.030	2.586	2.704
	2	2.653	.031	2.590	2.715

Curriculum vitae

Kees Buijs werd geboren op 29 mei 1949. Na voltooiing van het gymnasium in 1967 studeerde hij wis- en natuurkunde aan de Universiteit van Amsterdam. In de jaren '70 en '80 wisselde hij een baan als leraar wiskunde en didactiek op de pedagogische academie (pabo) te Heemstede en Beverwijk af met enkele wereldreizen. Vanaf 1981 werkte hij als auteur rekenen-wiskunde voor uitgeverij Bekadidact. In eerste instantie betrof dit de afronding van de methode Rekenen & Wiskunde, naderhand werkte hij als coördinator en auteur aan de methode Wis en Reken. Daarnaast was hij als ontwikkelaar rekenen-wiskunde betrokken bij de ontwikkeling van enkele educatieve programma's voor de NOT (Rekenwerk en Geld).

Vanaf 1988 werkt Kees Buijs als leerplanontwikkelaar bij de SLO. In die hoedanigheid participeerde hij in het landelijke project Speerpunt Rekenen waarbij met name voor het aanvangsonderwijs uiteenlopende onderwijsmaterialen werden ontwikkeld. In het verlengde daarvan was hij coördinator en ontwikkelaar van het SLO-project De Breukenbode. Vanaf 1996 nam hij namens de SLO deel aan het TAL-project, gericht op de ontwikkeling van tussendoelen en leerlijnen voor rekenen-wiskunde. In het verlengde daarvan heeft hij voor de SLO een aangepast leertraject voor zwakke leerlingen in groep 7 en 8 ontwikkeld. Thans is hij vooral bezig met de problematiek van de doorgaande lijn van het basisonderwijs naar het voortgezet onderwijs, met name voor wat betreft de overgang naar het vmbo.

FISME Serie, voortzetting van de.CD-ß Wetenschappelijke Bibliotheek

Onder redactie van:
K.P.E. Gravemeijer
A. Pilot
A.J. Waarlo

1. Didactiek in Perspectief - P.L. Lijnse, W. de Vos, eds.
2. Radiation and Risk in Physics Education - H.M.C. Eijkelhof
3. Natuurkunde-onderwijs tussen Leefwereld en Vakstructuur - R.F.A. Wierstra
4. Een Onverdeelbare Eenheid - M.J. Vogelezang
5. Betrokken bij Evenwicht - J.H. van Driel
6. Relating Macroscopic Phenomena to Microscopic particles: A Central Problem in Secondary Science Education - P.L. Lijnse, P. Licht, W. de Vos, A.J. Waarlo, eds.
7. Kwaliteit van Kwantiteit - H.E. Elzenga
8. Interactieve Video in de Nascholing Reken-wiskunde - F. van Galen, M. Dolk, E. Feijs, V. Jonker, N. Ruesink, W. Uittenbogaard
9. Realistic Mathematics Education in Primary Schools - L. Streefland, ed.
10. Ontwikkeling in Energieonderwijs - A.E. van der Valk
11. Methoden in het Reken-wiskundeonderwijs - K. Gravemeijer, M. van den Heuvel-Panhuizen, G. van Donselaar, N. Reusink, L. Streefland, W. Vermeulen, E. te Woerd, D. van de Ploeg
12. De Volgende Opgave van de Computer - J. Zuidema en L. van der Gaag
13. European Research in Science Education - P.L. Lijnse, ed.
14. Realistic Mathematics Education - K. Gravemeijer
15. De Grafische Rekenmachine in het Wiskundeonderwijs - L.M. Doorman, P. Drijvers, M. Kindt
16. Making sense - Simulation-of-Research in Organic Chemistry Education - H. van Keulen
17. Perspectives on Research in Chemical Education - O. de Jong, P.H. van Roon, W. de Vos, eds.
18. A Problem-Posing Approach to Teaching the Topic of Radioactivity - C.W.J.M. Klaassen
19. Assessment and Realistic Mathematics Education - M. van den Heuvel-Panhuizen
20. Teaching structures in chemistry - An Educational Structure for Chemical Bonding - G.M. van Hoeve-Brouwer
21. Regulatie en homeostase als onderwijsthema: een biologie-didactisch onderzoek - J. Buddingh'

22. Over Natuurkundedidactiek, Curriculumontwikkeling en Lerarenopleiding - P.L. Lijnse en T. Wubbels
23. Integratie en Toepassing van Biologische Kennis - Ontwikkeling en Onderzoek van een Curriculum rond het thema 'Lichaamsprocessen en Vergift' - H. Roebertsen
24. Het thema 'reproductie' in het schoolvak biologie - P.C.F. Reygel
25. Teaching Electrochemical Cells - A study on Teachers Conceptions and Teaching Problems in Secondary Education - J.J.C. Acampo
26. The role of Context and Models in the Development of Mathematical Strategies and Procedures - K. Gravemeijer
27. Thermodynamica leren onderwijzen - W.H. Kaper
28. Interessegeoriënteerd Natuur- en Scheikundeonderwijs - Een studie naar onderwijsontwikkeling op de Open Schoolgemeenschap Bijlmer - R. Genseberger
29. Flexibilization of mental arithmetics strategies on a different knowledge base - The empty number line in a realistic versus gradual program design - A.S. Klein
30. A Problem Posing Approach to Teaching an Initial Particle Model - M.J. Vollebregt
31. Met het oog op integratie - Een studie over integratie van leerstof uit de natuurwetenschappelijke vakken in de tweede fase van het voortgezet onderwijs - C. Beeftink
32. Verschillen tussen meisjes en jongens bij het vak rekenen-wiskunde op de basisschool – Eindrapport MOOJ-onderzoek – M. van den Heuvel-Panhuizen en H.J. Vermeer
33. Van vormleer naar realistische meetkunde – Een historisch-didactisch onderzoek van het meetkundeonderwijs aan kinderen van vier tot veertien jaar in Nederland gedurende de negentiende en twintigste eeuw – E.W.A. de Moor
34. Ontwerpend leren in het biologieonderwijs. Uitgewerkt en beproefd voor immunologie in het voortgezet onderwijs – F.J.J.M. Janssen
35. Natuur in pluralistisch perspectief; Theoretisch kader en voorbeeldlesmateriaal voor het omgaan met een veelheid aan natuurbeelden – M. Margadant-van Arcken en C.S. van den Berg
36. Duurzaamheid als leergebied; Conceptuele analyse en educatieve uitwerking – S. Lijmbach, M. Broens en D. Hovinga i.s.m. M. Margadant-van Arcken
37. A problem-posing approach to teaching decision making about the waste issue – J. Kortland
38. Teaching for Scientific Literacy: Context, Competency, and Curriculum – O. de Jong, E.R. Savelsbergh en A.H. Alblas
39. Met sprongen vooruit. Een productief oefenprogramma voor zwakke rekenaars in het getallengebied tot 100 – een onderwijsexperiment – J.J.M. Menne

40. A gateway to numeracy. A study of numeracy in adult basic education – M. van Groenestijn
41. Reinvention of early algebra. Developmental research on the transition from arithmetic to algebra – B.A. van Amerom
42. Education in Israel on collaborative management of shared water resources – M. Dressler
43. Coping with the abstract and complex nature of genetics in biology education. The yo-yo learning and teaching strategy – M.C.P.J. Knippels
44. Werken aan kwaliteitsverbetering van leerlingonderzoek. Een studie naar de ontwikkeling en het resultaat van een scholing voor docenten – Th.J.M. Smits
45. Teaching formal mathematics in primary education. Fraction learning as mathematising process – R. Keijzer
46. Leren kijken door de ontwerpersbril. Het vorm-functieperspectief als leerdoel van natuuronderwijs – D.J. Boerwinkel
47. Als je begrijpt wat ik bedoel. Een zoektocht naar verklaringen voor achterblijvende prestaties van allochtone leerlingen in het wiskundeonderwijs – C. van den Boer
48. Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter – P. Drijvers
49. Towards systems thinking in cell biology education – R.P. Verhoeff
50. Design research in statistics education. On symbolizing and computer tools – A. Bakker
51. Modelling motion: from trace graphs to instantaneous change – L.M. Doorman
52. Characteristics of meaningful chemistry education. The case of water quality – H.B. Westbroek
53. The structure of current school chemistry. A quest for conditions for escape – B. van Berkel
54. A new approach to teaching and learning mechanics – A.S. Westra
55. Ont-dekken en toe-dekken: leren over de veelvormige relatie van mensen met natuur in NME-leertrajecten duurzame ontwikkeling – D. Hovinga
56. Learning and teaching ecosystem behaviour in secondary education. Systems thinking and modelling in authentic practices. R.H.V. Westra
57 Leren vermenigvuldigen met meercijferige getallen – C. Buijs