

Het leren van lineaire algebra: effecten van feedback op motivatie en efficiëntie van het leren

Gemma Corbalan
Open Universiteit Nederland

Hans Cuypers
Technische Universiteit Eindhoven

Fred Paas
Erasmus Universiteit

Samenvatting

Bij het oplossen van wiskundige opgaven kan een verkeerde aanpak of fout in één onderdeel van de opgave problemen veroorzaken bij het oplossen van volgende delen. Berekeningen kunnen veel moeilijker worden, of de onderdelen kunnen zelfs geen oplossing meer hebben. Door het onmiddellijk leveren van feedback bij een verkeerde aanpak of oplossing van een deelprobleem, kunnen deze effecten vermeden worden. In dit onderzoek worden de leer- en motivatie-effecten van feedback op verschillende stappen in het oplossen van wiskundige vraagstukken uit het domein van de lineaire algebra onderzocht. Onmiddellijke feedback op alle onderdelen van een opgave werd verondersteld beter te motiveren en een hoger rendement op te leveren, dan enkel de 'goed-fout' feedback op de uiteindelijke oplossing. Deze hypothese werd in dit onderzoek gedeeltelijk bevestigd.

1. Inleiding

In het wiskundeonderwijs blijken studenten vaak moeite te hebben met het algebraïsch definiëren van relaties tussen variabelen en het begrijpen van de verschillende representatievormen van wiskundige functies (Baki & Güveli, 2008). In het bijzonder wordt van studenten in het hoger onderwijs verwacht dat ze bij het oplossen van wiskundige opgaven niet alleen enig wiskundig inzicht hebben, maar ook een aantal standaardprocedures beheersen. De kennis van deze procedures is vaak cruciaal. Binnen de wiskunde bestaat de procedurele kennis uit de vaardigheden die studenten nodig hebben om opgaven te kunnen oplossen (Canobi, 2009); conceptuele kennis verwijst naar de kennis van en het inzicht in de onderliggende wiskundige principes, en strategische kennis refereert naar de heuristische en systematische aanpak van het probleemoplossen. Procedures beschrijven hoe verschillende basisstappen gecombineerd kunnen worden om een (wiskundig) probleem aan te pakken. Binnen de lineaire algebra kan men hierbij denken aan het optellen van vectoren, matrixvermenigvuldiging, maar ook Gauss-eliminatie of het vegen van matrices. Studenten moeten deze procedures beheersen om wiskundige opgaven op te

kunnen lossen. Een beter begrip van en grotere vaardigheid in deze procedures is cruciaal voor kennistransfer, waarbij de opgedane kennis gebruikt wordt in andere, nieuwe situaties, waarbij de student niet de standaardprocedures, op de voor hem bekende en geoefende wijzen, kan toepassen.

Van Merriënboer, Kirschner en Kester (2003) hebben laten zien dat procedurele informatie het best stapsgewijs aan de student gepresenteerd kan worden op het moment dat deze de informatie nodig heeft (just-in-time). Immers, als een student bij het oplossen van wiskundige opgaven toch fouten maakt of de methode niet kent, dan kan dit leiden tot foute eindantwoorden of deelproblemen die niet meer door studenten op te lossen zijn (Moreno, Reisslein & Delgoda, 2006). Het geven van feedback direct nadat een fout is gemaakt of een verkeerde stap wordt gezet, kan dit voorkomen. Het algoritmische karakter van veel wiskundige opgaven zorgt ervoor dat het geven van feedback (i.e., elke informatie aan de student over diens antwoorden op de opgaven, zie bijvoorbeeld Mory, 2003) relatief eenvoudig kan zijn, zowel op de tussenliggende stappen als op de eindoplossing van een opgave. Deze feedback kan echter alleen gegeven worden als de fout tijdens het oplossen van de opgave ontdekt en onderkend wordt. Het is echter niet of nauwelijks mogelijk dat een docent constant een hele klas in de gaten houdt en dit soort problemen detecteert (Baki & Güveli, 2008). Het ontbreken van feedback kan negatieve invloeden hebben op zowel de motivatie van de student alsook de efficiëntie van het leren (i.e., een combinatie van de bereikte prestatie en de mentale inspanning die daarvoor nodig was) in vergelijking met een situatie waarbij feedback op alle (tussen)stappen gegeven wordt.

Een rapport van de *National Council of Teachers of Mathematics*¹ (2000) benadrukt het belang van technologie voor het onderwijzen en leren van wiskunde. In een rapport over het Nederlandse taal- en rekenonderwijs (Meijerink, 2008) werd vastgesteld dat nieuwe vormen van leren en onderwijzen, evenals technologie om dat te ondersteunen, nodig zijn om meer leerlingen op streefniveau voor rekenen te laten presteren. Echter, binnen het domein van de (lineaire) algebra geven de standaard elektronische leeromgevingen nauwelijks mogelijkheden om de (deel-) antwoorden te controleren en de correctheid van een antwoord vast te stellen (Nicaud, Bouhineau & Chaachoua, 2004). Het aantal beschikbare e-learning tools dat feedback geeft op meerdere tussenstappen van een opgave is nog beperkt (Jeurink & Pasman, 2007) maar groeiende, zie bijvoorbeeld DWO (www.fi.uu.nl/dwo), Aplusix (aplustix.imag.fr), LeActiveMath (www.leactivemath.de) of Wortel TU/e (wortel.tue.nl). Het doel van het hier beschreven onderzoek was een studie van de effecten van verschillende soorten automatisch gegenereerde feedback bij opgaven in het domein van de lineaire algebra op de efficiëntie van het leren en op de motivatie van studenten in een technische universitaire opleiding. Meer specifiek onderzocht deze studie of feedback op meerdere deeloplossingen van een opgave positievere resultaten levert dan enkel feedback op de eindoplossing van een opgave. In de volgende secties beschrijven we hoe de feedback op deelstappen de student of leerling kan motiveren en het leren ondersteunt.

2. Feedback en leren

Feedback verschaft studenten informatie omtrent hun leerproces en leerresultaten (Butler & Winne, 1995) en geeft hen de mogelijkheid hun cognitieve strategieën gedurende de leerfase aan te passen en misconcepties te herstellen (Azevedo & Bernard, 1995). Feedback speelt een belangrijke rol bij het leren (Hattie & Timperley, 2007; Mory, 2003) en kan de prestaties op verschillende wijzen, afhankelijk van hoe de feedback is geïmplementeerd, beïnvloeden (Moreno, 2004). In het bijzonder tijdens de initiële oefening zou feedback bij elke stap moeten worden gegeven (Mory, 2003). Feedback op alle deelstappen geeft de leerling de mogelijkheid onmiddellijk de correctheid van een oplossing te verifiëren, terwijl de vraagstelling en gebruikte strategie nog in het werkgeheugen van de leerling aanwezig zijn (Moreno et al., 2006). Verder geeft het de leerling de mogelijkheid te focussen op de verschillende stappen naar een oplossing (Mory, 2003). Deze voordelen zijn zeker aanwezig in het domein van de wiskunde, waar opgaven vaak opgedeeld kunnen worden in verschillende deelopdrachten, en waar fouten en verkeerde strategiekeuzen op deelstappen grote gevolgen kunnen hebben op andere deelstappen.

Als voorbeeld noemen we het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen. Een standaardprocedure voor dit probleem is Gauss-eliminatie, een procedure waarbij met behulp van elementaire veegoperaties (optellen/afrekken van verschillende vergelijkingen, vermenigvuldigen met een constante) het stelsel herschreven wordt tot een equivalent stelsel in een eenvoudigere vorm, waaruit de oplossingen eenvoudig zijn af te lezen (zie bijvoorbeeld Kolman & Hill, 2006 of Lay, 2002). Een kleine fout in een van de elementaire stappen kan een totaal andere (maar even aannemelijke) oplossing geven dan de correcte oplossing. Aangezien de gemaakte fout moeilijker af te lezen is uit de finale foute oplossing dan uit foute tussenoplossingen, kan feedback op de uiteindelijke oplossing de student minder helpen bij het vinden van de fout. Een elektronische tool die de fout signaleert in de deelstap van de oplossing, kan de student direct van relevante feedback voorzien.

3. Cognitieve belasting

Hoewel de scores op een test meestal gebruikt worden om leereffecten te meten, wordt binnen de *Cognitive Load Theory* (CLT: Paas, Renkl & Sweller, 2003; Paas, Tuovinen, Tabbers & van Gerven, 2003; Sweller, van Merriënboer & Paas, 1998) beargumenteerd dat tevens de cognitieve belasting bij de evaluatie van testresultaten meegenomen dient te worden. Met cognitieve belasting wordt dan bedoeld het beslag dat de uit te voeren taak legt op de cognitieve capaciteit van de leerling. Deze cognitieve belasting wordt gemeten als de hoeveelheid mentale inspanning of moeite die de leerling in het oplossen van de taak investeert. Paas en Van Merriënboer (1993; zie ook Van Gog & Paas, 2008) hebben een methode geïntroduceerd om de metingen van taakprestatie en mentale inspanning te combineren en zo betrouwbare informatie te vergaren omtrent de relatieve *efficiëntie* van een gebruikte leermethode. Volgens deze methode is de efficiëntie hoog bij een hoge

taakprestatie die bereikt werd met weinig mentale inspanning, en laag bij een lage prestatie die bereikt werd met veel mentale inspanning.

CLT onderscheidt drie typen van cognitieve belasting: intrinsieke, ineffectieve (i.e., *extraneous*) en effectieve (i.e., *germane*). Volgens Sweller et al. (1998) is intrinsieke cognitieve belasting gerelateerd aan het type van het leermateriaal en wordt ze veroorzaakt door het aantal interacterende informatie-elementen in een opdracht. Behalve de belasting als gevolg van een opdracht is de belasting tevens afhankelijk van de wijze waarop de opdracht wordt aangeboden aan de lerende. Als de wijze van aanbieden of het ontwerp van de opdracht niet effectief is voor het leren, noemen we de belasting *extraneous*. Is het design van de opdracht wel effectief, dan wordt gesproken van een *germane* cognitieve inspanning (Sweller et al., 1998). Volgens CLT kan uitgebreide feedback op alle onderdelen van een opdracht de effectieve cognitieve belasting voor de leerling verhogen, terwijl beperkte feedback op slechts het eindresultaat van een opdracht de ineffectieve belasting kan verhogen (Moreno, 2004). Hoewel meerder studies zijn gedaan naar efficiëntie van leermethoden (zie Paas et al., 2003), zijn ons slechts drie studies bekend waarin het effect van uitgebreide feedback op de efficiëntie werd bestudeerd (Corbalan, Kester & van Merriënboer, 2009; Halabi, 2006; en Moreno, 2004).

4. Feedback en motivatie

De effecten van feedback op motivatie zijn reeds door velen onderkend (bijvoorbeeld, Azevedo & Bernard, 1995; Chai, 2003; Hyland, 2001; Keller, 1983; Mory, 2003; Ross & Morrison, 1993; Vollmeyer & Rheinberg, 2005). Gemotiveerde studenten nemen deel aan leeractiviteiten die hen interesseren; ze hebben er plezier in en halen voldoening uit hun prestaties (Deci, Vallerand, Pelletier & Ryan, 1991). Omdat feedback tijdens het proces van opgaven oplossen studenten helpt te focussen op deelstappen, wordt de relevantie van het leermateriaal voor de student duidelijker. Ook de samenhang tussen de te leren stof en hoe deze toegepast kan worden wordt duidelijker. De student ziet bij elke stap hoe het geleerde toegepast kan worden (Keller, 1983, 1987). Verder, zo betogen Schunk en Pajares (2002), werkt het geven van feedback op het juiste moment ook motiverend. Keller en Burkman (1993) leggen er nog eens de nadruk op dat het voor een student zeer demotiverend werkt als er geen feedback op de prestaties gegeven wordt. Tenslotte, benadrukken Dick, Carey en Carey (2001) dat wanneer studenten fouten maken, het van belang is hen direct op de aard van de fout te wijzen.

De cognitieve effecten op motivatie resulteren voornamelijk in inzicht in de relevantie van wat er bestudeerd werd. Dat stimuleert het gebruik van een cognitieve strategie, en zal uiteindelijk het leren verbeteren (Means, Jonassen & Dwyer, 1997). Dit werd ook opgemerkt door Hattie en Timperley (2007) in een review van studies over feedback. De auteurs merken op dat:

'whether students engage in error correction strategies following error detection depends on their motivation to continue to pursue the goal or to reduce the gap between current knowledge and the goal' (p. 93).

5. Het onderzoek

In deze studie onderzochten we de effectiviteit van uitgebreide feedback bij een verzameling opgaven uit het domein van de lineaire algebra. De studie werd voorafgegaan door een studie naar de percepties van de leerlingen van drie verschillende typen van feedback, namelijk enkel op het eindantwoord, waarbij aangegeven wordt of het eindantwoord correct of incorrect is (feedback A), eenmalig op alle onderdelen en *alle* tussenstappen, bestaande uit een gehele uitwerking van alle stappen van de opdracht (feedback B), en bij elke deelstap (feedback C). Bij deze laatste feedback krijgen de studenten bij elke deelstap van de opdracht directe informatie over de correctheid van hun antwoord, kunnen ze een hint opvragen of een uitwerking van de deelopdracht. Uit het onderzoek bleek dat de studenten feedback B en C veruit prefereerden boven feedback A.

In de hier te beschrijven studie werd het effect op de prestaties en kennistransfer, de efficiëntie (kennisoverdracht in relatie met geïnvesteerde mentale inspanning) en effecten op de motivatie onderzocht van twee typen feedback, namelijk feedback A en een combinatie van feedback B en C, waarbij zowel de oplossing van de gehele opdracht als ook van deelstappen aangeboden wordt. Feedback op alle deelstappen zal naar verwachting, de studenten helpen de problemen die zij tegenkomen bij het oplossen van opgaven te lokaliseren en identificeren. Daarentegen levert enkel feedback op het eindantwoord niet voldoende informatie op om deze problemen op te sporen, met als gevolg dat leerlingen meer mentale inspanning moeten investeren in het uitvoeren van de opdracht (Halabi, 2006).

De starthypothese van ons onderzoek is dat deelnemers, die de gecombineerde feedback van type B en C ontvangen, effectiever en efficiënter leren. Tevens verwachten we van deze feedback een positieve invloed op de motivatie.

6. Het Experiment

Aan de test deden 34 studenten van de Technische Universiteit Eindhoven mee (5 vrouwelijk en 29 mannelijk; gemiddelde leeftijd = 20.29 jaar; SD = 2.98). Voor alle deelnemers was Nederlands, de taal waarin de instructie gegeven werd, de moedertaal. Het betrof hier studenten in de wiskunde en in de informatica. Voor deelname ontvingen de deelnemers € 100. De studenten werden random verdeeld over de twee experimentele groepen en werkten gedurende drie sessies van twee uur aan een aantal opgaven. De drie sessies vonden binnen een week plaats. De deelnemers beantwoordden voorafgaand aan de eerste sessie enkele vragen over hun voorkennis in lineaire algebra. In de eerste twee sessies werd met de computer gewerkt. De groepen werden geconfronteerd met een tiental opdrachten uit de lineaire algebra waarbij de ene groep enkel feedback van type A werd

aangeboden, terwijl de ander groep zowel feedback B als ook C ontving (zie figuur 1 beneden voor een opgave met feedback in deelopgave).

De derde sessie was een pen-en-papier sessie die voor beide groepen gelijk was en als post-test diende. De studenten werkten gedurende de eerste twee sessies in de elektronische leeromgeving Wortel TU/e² van de Technische Universiteit Eindhoven. De eerste set opgaven bevatte 10 problemen omtrent het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen en over deelruimten, bases en dimensies van vectorruimten. De tweede set bestond uit 10 opgaven die handelden over matrices en lineaire afbeeldingen. Figuur 1a toont een opgave zoals die gepresenteerd werd aan alle studenten. Figuur 1b laat een deelstap van een opgave zien zoals die gepresenteerd werd aan studenten die feedback B en C ontvingen. Deze deelstap werd getoond aan studenten die voor de optie kozen om de opgave in stappen te doen.

Bepaal een eigenwaarde x en bijbehorende eigenvector v voor de matrix

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -20 & 9 \end{pmatrix}.$$

Geef je antwoord in de vorm $(x = ?) \wedge (v = ?)$.

+	-	^	v	cos(■)	√■	()
<	≤	=	>	sin(■)	√■	()
π	e	i	∞	tan(■)	{■}	()
■	■	■	■	e [■]	ln(■)	log(10,■)

Controleer je antwoord
uitwerking
instappen

Figuur 1 a.

Bepaal een eigenwaarde x en bijbehorende eigenvector v voor de matrix

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -20 & 9 \end{pmatrix}.$$

Om dit probleem op te lossen kun je de volgende drie stappen doorlopen:

- Bepaal het karakteristieke polynoom van de matrix.
- Vind de eigenwaarden als nulpunten van het karakteristieke polynoom van de matrix.
- Vind voor elk van de eigenwaarden een eigenvector.

Om het karakteristiek vergelijking van A te bepalen, bereken je eerst de determinant van $A - x \cdot I$.

Wat is deze determinant?

Controleer je antwoord

Figuur 1 b. Voorbeeld van een probleem dat gepresenteerd werd in beide feedback condities (fig. 1 a) en de voortzetting van hetzelfde probleem met B + C (fig. 1 b).

De opgaven voor de derde sessie, de post-test, werden op papier aangeboden. Deze post-test bestond uit 8 opgaven, waarvan 4 *retention tasks* en 4 *transfer tasks* waren. De *retention tasks* waren vergelijkbaar met de opgaven uit de oefensessies en bepaalden of de deelnemers in staat waren de geleerde procedures toe te passen in vergelijkbare omstandigheden. De *transfer tasks* eisten van de deelnemers een flexibele manier van toepassen van het geleerde in algemenere en meer abstracte situaties dan geoefend.

Een voorbeeld van een *retention* en een *transfer* opdracht is respectievelijk afgebeeld in figuren 2 en 3.

De matrix van de afbeelding $A: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ is $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Het vlak V wordt opgespannen door de vectoren $(1, 1, 0)$ en $(0, 1, 2)$.
 Wat is een basis voor de ruimte $A(V)$?

Figuur 2. Voorbeeld van een retentieprobleem.

Gegeven is een lineaire afbeelding $A: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$. Het vlak V snijdt de kern van de afbeelding A in een lijn door de oorsprong. Wat is de dimensie van $A(V)$?

Figuur 3. Voorbeeld van een transferprobleem.

Bij deze opgave (figuur 3), moet de student niet een afbeelding $A: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ beschouwen, waarmee geoefend werd, maar juist de beperking van A tot V , een verder niet gedefiniëerde 2-dimensionale deelruimte. De kern van deze afbeelding is een lijn en heeft dus dimensie 1. Uit deze informatie kan dan afgeleid worden dat de ruimte $A(V)$ dimensie 2 heeft.

Een tweede voorbeeld van een transfer opdracht is het volgende. De studenten trainden tijdens de oefensessies het bepalen van de nulruimte van een 2×2 of 3×3 matrix en werden in een *transfer task* geconfronteerd met het volgende probleem (figuur 4):

Gegeven drie differentieerbare functies f, g en h met voor de afgeleiden de volgende identiteiten:

$$\begin{aligned} f' &= f + g + h, \\ g' &= 2g + h, \text{ and} \\ h' &= 2f - 2g. \end{aligned}$$

Is het mogelijk de functie k , met $k(x)=1$ voor alle x , te schrijven als lineaire combinatie van f, g en h ?

Figuur 4. Voorbeeld van een transferprobleem.

Hier moet een student zich realiseren dat differentiëren een lineaire afbeelding is op de vectorruimte van alle differentieerbare functies, die de deelruimte opgespannen door f, g en h invariant laat en op deze ruimte voorgesteld kan worden door een 3×3 matrix. De functie k is te schrijven als een lineaire combinatie van f, g en h als hij in de nulruimte van de matrix ligt.

7. Metingen

Mentale inspanning

Mentale inspanning werd gebruikt als een index voor cognitieve belasting, wat refereert naar de hoeveelheid van cognitieve capaciteit die werd aangesproken voor het oplossen van de vraagstukken. Mentale inspanning werd gemeten als de 'inspanning nodig voor het oplossen van de opdracht' (Paas, 1992; Paas et al., 2003) na elke opgave en na elke ses-

sie met behulp van een 1-item 9-punts Likert schaal van 1 (zeer zeer weinig mentale inspanning) tot 9 (zeer zeer veel mentale inspanning).

Efficiëntie

De resultaten van de deelnemers op de *retention en transfer* opgaven en de mentale inspanning benodigde voor het maken van de opgaven werden gecombineerd met de procedure van Paas en van Merriënboer (1993) om de efficiëntie *E* voor zowel de *retentie* als ook *transfer* opdrachten te meten. Bij een hogere taakprestatie dan verwacht, gebaseerd op de geleverde mentale inspanning wordt de instructie efficiënt genoemd bij een lagere taakprestatie inefficiënt.

Motivatie

De effecten op motivatie werden getoetst aan de hand van een vragenlijst (gebaseerd op de *Instructional Materials Motivation Survey*, IMMS; Keller, 1983), waarin de effecten op motivatie aan de orde kwamen. De studenten werd gevraagd 36 stellingen aangaande aandacht, relevantie, vertrouwen, voldoening op waarde te schatten.

Perceptie

Tot slot werd via een vragenlijst de perceptie van de aangeboden feedback gemeten. Hierin werd de student gevraagd naar de duidelijkheid en waarde van de gegeven feedback.

8. Resultaten van de metingen

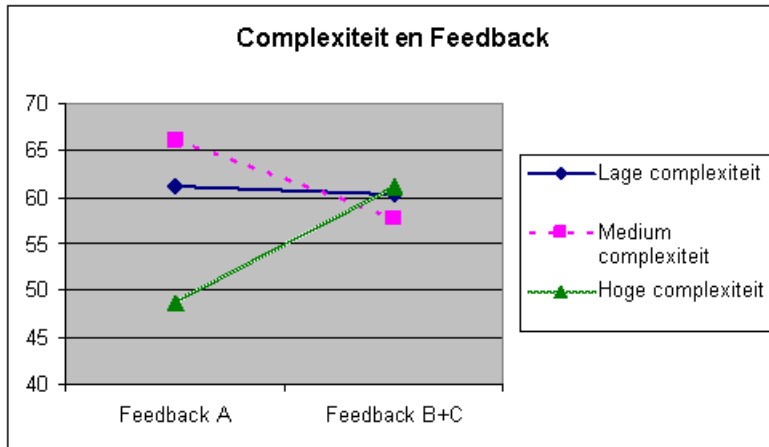
Gezien de random verdeling van de studenten over de verschillende condities, en het feit dat de aantallen studenten die aangaven over een lage, gemiddelde of grote voorkennis te beschikken in beide groepen gelijk lagen, is het onwaarschijnlijk dat verschillen in voorkennis de verschillen tussen de twee testgroepen hebben beïnvloed.

We bespreken nu de verschillende resultaten van de verrichte metingen. We beginnen met de metingen verricht gedurende de twee oefensessies.

Prestatie

Gedurende de eerste twee sessies werd geen verschil in prestatie geconstateerd tussen de twee testgroepen. Wel kan worden opgemerkt dat meer uitleg vooral gewaardeerd werd bij de lastigere en complexere vragen. Dit motiveerde om een nadere analyse van de prestatie uit te voeren, waarbij ook rekening werd gehouden met de complexiteit van de opgaven.

Zoals blijkt uit onderstaand figuur 5, presteerden studenten die meer feedback (B-C) ontvingen beter dan de studenten uit de groep die enkel feedback (1) op het eindantwoord ontving. Echter, het verschil in prestatie kan niet als significant worden aangemerkt.



Figuur 5. Prestatie op de training als functie van complexiteitsniveau (laag, middel en hoog).

Mentale inspanning Een t-test toonde tevens aan dat gedurende de eerste twee sessies de mentale inspanning geïnvesteerd door studenten met feedback A hoger was dan die van studenten met feedback B-C.

Tijd Er werden geen relevante verschillen geconstateerd in de tijd die studenten uit beide groepen nodig hadden om de training te doorlopen.

De metingen gedurende sessie 3, waarin de post-test werd afgenomen, leverden de volgende gegevens op.

Post-Test Prestatie Een analyse van de post-test liet geen significante verschillen zien tussen de twee groepen op de retention vragen. Een duidelijk verschil is echter wel geconstateerd bij de analyse van de resultaten op de transfer vragen. De groep met de uitgebreide feedback B-C scoorde hier beduidend beter.

Mentale inspanning Er werd geen significant onderscheid geconstateerd tussen de twee groepen.

Efficiëntie Ook hier leverde de analyse van de metingen geen significante verschillen tussen de twee groepen als we ons beperken tot de retention opgaven. Bij de transfer vragen werd echter wel een significant verschil gemeten. Voor de groep met de uitgebreide feedback was de efficiëntie beduidend hoger dan voor de andere groep. De metingen zijn terug te vinden in tabel 1 op de volgende bladzij.

Tabel 1. Gemiddelden en standaarddeviaties van de training en post-test fases

	Feedback type			
	A	B-C		
	Gemiddelde	Stand. Dev.	Gemiddelde	Stand. Dev.
Training				
Prestatie (0-100)	61.15	21.80	59.00	13.03
Mentale inspanning (1-9)	4.44	1.18	3.76	.95
Post-test				
Prestatie retention test (0-40)	32.65	10.517	35.59	4.68
Prestatie transfer test (0-40)	13.65	10.48	22.65	12.08
Mentale inspanning retention test (1-9)	3.91	1.51	3.38	1.08
Mentale inspanning transfer test (1-9)	5.92	1.70	5.68	1.59
Efficiënte retention test	-.31	1.63	.26	.59
Efficiënte transfer test	-.36	1.23	.31	.81

Tot slot berichten we nog over de resultaten van de metingen van de motivatie en perceptie.

Motivatie

Bij deelnemers die de uitgebreide feedback kregen, scoorde het aangeboden lesmateriaal duidelijk hoger op 'relevantie'. Deze groep had meer zelfvertrouwen en voldoening tijdens het maken van de opgaven gedurende de eerste twee sessies. Beide groepen scoorden nagenoeg gelijk op de 'aandacht' aan de opgaven.

Perceptie

Het perceptie-onderzoek toonde aan dat de uitgebreide feedback B-C significant beter werd gewaardeerd en nuttiger werd bevonden dan feedback A. Zie ook onderstaande tabel:

Tabel 2. Antwoordpercentages op de ee/Ja vragen per type feedback in de perceptievragenlijst

Responspercentages in Perceptievragenlijst	Feedback type	
	A	B-C
Wil je features aan dit type feedback toevoegen?		
% Nee	17.6	70.6
% Ja	82.4	29.4
Wil je features van dit type feedback verwijderen?		
% Ja	94.1	76.5
% Nee	5.9	23.5

9. Conclusies

Binnen de hier gepresenteerde studie werden de effecten van twee typen feedback op opgaven uit het domein van de lineaire algebra onderzocht op effecten op effectiviteit van het leren en motivatie. Het betrof enkel feedback op het eindantwoord van een opdracht, en feedback op alle deelstappen van een opdracht, die zowel in één keer in zijn geheel of per deelstap opgevraagd en geleverd kon worden. Onze veronderstelling was dat het leveren van uitgebreidere feedback een positief effect zou hebben op de effectiviteit en efficiëntie van het leerproces. Deze hypothese werd gedeeltelijk ondersteund door de bevindingen van deze studie. Leerlingen die een uitgebreide feedback genoten, scoorden beduidend hoger op transfer opdrachten dan leerlingen die de beperkte feedback hadden genoten. Bij het oplossen van transfer opdrachten zijn algemene oplosvaardigheden van groter belang dan bij de oefenopdrachten. De bekendheid met zulke problemen is immers geringer (Kester, Kirschner & van Merriënboer, 2006). Waarschijnlijk heeft de uitgebreide feedback studenten een grotere algemene vaardigheid bij het oplossen van problemen opgeleverd dan de beperkte feedback, waardoor de studenten met uitgebreide feedback in staat waren beter te scoren op de transferopdrachten. De scores op de transfer opdrachten van de studenten in de uitgebreidere feedback conditie waren niet alleen hoger dan van studenten in de minder uitgebreide feedback conditie, maar deze prestatie kon bovendien bereikt worden met minder mentale inspanning. Echter, bij de retention opdrachten werd geen significant verschil tussen de prestaties en mentale belasting van de twee groepen geconstateerd. Een mogelijke verklaring hiervoor is dat de retention problemen minder beroep doen op een *flexibele* toepassing van de algemeen probleemoplossingvaardigheden die studenten ontwikkelden gedurende de oefensessies, dan de transfer opdrachten (Kester et al., 2006; Sweller et al., 1998).

Ook werd onze veronderstelling bevestigd, dat uitgebreidere feedback de studenten beter en meer stimuleert en motiveert en door hen als prettiger ervaren wordt dan de minder uitgebreide feedback. Dit kan erop duiden dat feedback op alle deelstappen van een probleem de student in staat stelt het gepresenteerde beter te verbinden met het hem bekende. Verder ondersteunen onze resultaten Kellers (1983) theorie van motivatie, waarin geclaimd wordt dat de motivatie van een leerling gemanipuleerd kan worden door het ontwerp van de hem aangeboden leermaterialen.

Tot slot nog enkele opmerkingen. Ten eerste, daar waar feedback op het eindantwoord de studenten alleen maar informeerde over de correctheid van een antwoord, gaf de uitgebreide feedback de studenten ook de mogelijkheid een correcte oplossing te zien. Deze additionele feedback kan ook (voor een deel) verantwoordelijk zijn voor de positieve effecten op zowel het leren als de motivatie. Ten tweede, de afsluitende post-test werd gedurende dezelfde week afgenomen als de twee trainingssessies en geeft daarmee alleen informatie over kortetermijneffecten op het leren en de motivatie. De effecten op langere termijn blijven daarmee onbelicht. Een laatste punt waar toekomstig onderzoek aan gewijd zou kunnen worden is het feit dat de feedback B en C de mogelijkheid bood om

oplossingen van vergelijkbare (deel)opgaven van tevoren te bekijken. Feedback A gaf deze mogelijkheid niet. Hiermee kan feedback B en C extra support gegeven hebben aan studenten, die mogelijk van invloed is geweest op het leren en de motivatie.

Afsluitend kunnen we concluderen dat het beschreven onderzoek erop duidt dat uitgebreide feedback op alle deelstappen van een opdracht positieve effecten op de efficiëntie van het leren en de motivatie van studenten in een technische universitaire opleiding heeft. De resultaten hebben implicaties voor de ontwikkeling van leeromgevingen die automatisch gegenereerde feedback leveren in sterk gestructureerde en complexe domeinen zoals de wiskunde (zie Sweller et al., 1998). Zulke leermiddelen bieden de mogelijkheid om groepen studenten van individuele, stapsgewijze en just-in-time feedback te voorzien. Verder onderzoek naar de toegevoegde waarde van deze automatisch gegenereerde feedback ten opzichte van meer traditionele feedback, zoals uitgewerkte voorbeelden uit een boek, is echter nog nodig.

Abstract (English)

When solving mathematical problems, an error made in one step of the procedure will carry over to the following steps. Consequently, calculations might become even more difficult, or part of the problem can not be solved anymore. Providing immediate feedback after an error is made during the problem-solving process could prevent such carry-over effects. This study investigated the learning and motivational effects of feedback given on the different problem solving steps when solving mathematical problems in the domain of linear algebra. Immediate feedback given on *all* problem-solving steps was hypothesized to yield higher motivation and better learning than feedback on the *final* problem-solving step (i.e., solution step) as *good-wrong*. These hypotheses were partly validated.

Noten

1. <http://standards.nctm.org/>
2. <http://wortel.tue.nl>

Literatuur

- Azevedo, R. & Bernard, R. M. (1995). A meta-analysis of the effects of feedback in computer-based instruction. *Journal of Educational Computing Research*, 13, 111–127.
- Baki, A. & Güveli, E. (2008). Evaluation of a web based mathematics teaching material on the subject of functions. *Computers and Education*, 51, 854–863.
- Butler, D. L. & Winne, P. H. (1995). Feedback and self-regulated learning: A theoretical synthesis. *Review of Educational Research*, 65, 245–281.
- Canobi, K. H. (2009). Concept-structure interactions in children's addition and subtraction. *Journal of Experimental Child Psychology*, 102(2), 131–149.
- Chai, L. (2003). To have or have not: An examination of feedback, learner control and knowledge type in online learning. In: R. H. Sprague (ed.), *Proceedings of the 36th*

- Hawaii International Conference on System Sciences* (CD-Rom, p. 10). Hawaii, Big Island: IEEE Computer Society.
- Corbalan, G., Kester, L. & van Merriënboer, J. J. G. (2009). Dynamic task selection: Effects of feedback and learner control on efficiency and motivation. *Learning and Instruction*.
- Deci, E. L., Vallerand, R. J., Pelletier, L. G. & Ryan, R. M. (1991). Motivation and education: The self-determination perspective. *Educational Psychologist*, 26, 32–346.
- Dick, W., Carey, L. & Carey, J. O. (2001). *The systematic design of instruction, 5th ed.* New York: Longman.
- Halabi, A. K. (2006). Applying an instructional learning efficiency model to determine the most efficient feedback for teaching introductory accounting. *Global Perspective on Accounting Education*, 3, 93–13.
- Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77, 81–112.
- Hyland, F. (2001). Providing effective support: Investigating feedback to distance language learners. *Open Learning*, 16, 233–247.
- Jeurig, J. & Pasman, W. (2007). Strategy feedback in an e-learning tool for mathematical exercises. *Technical report UU-CS-2007-007*. Utrecht University, Utrecht.
- Keller, J. M. (1983). Motivational design of instruction. In: C. M. Reigeluth (ed.), *Instructional theories and models: An overview of their current status* (pp. 383–434). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Keller, J. M. (1987). Development and use of the ARCS model of motivational design. *Journal of Instructional Development*, 10(3), 2–10.
- Keller, J. M. & Burkman, E. (1993). Motivation principles. In: M. Fleming & W.H. Levie (eds.), *Instructional message design: Principles for the behavioral and cognitive sciences, 2nd ed.* (pp. 3–53). New Jersey: Educational Technology Publications.
- Kester, L., Kirschner, P. A. & van Merriënboer, J. J. G. (2006). Just-in-time information presentation: Improving learning a troubleshooting skill. *Contemporary Educational Psychology*, 31, 167–185.
- Kolman, B. & Hill, D. R. (2006). *Introductory Linear Algebra: An Applied First Course*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Lay, D. C. (2002). *Linear Algebra and its Applications, 3th ed.* Boston: Addison Wesley.
- Means, T. B., Jonassen, D. H. & Dwyer, F. M. (1997). Enhancing relevance: Embedded ARCS strategies vs. purpose. *Educational Technology Research and Development*, 45(1), 5–17.
- Meijerink, H. (2008). *Over de drempels met taal en rekenen*. Enschede: SLO.
- Moreno, R. (2004). Decreasing cognitive load for novice students: Effects of explanatory versus corrective feedback in discovery-based multimedia. *Instructional Science*, 32, 99–13.
- Moreno, R., Reisslein, M., & Delgoda, G. M. (2006). *Toward a fundamental understanding of instruction: Impact of Means-Ends Practice, Backward/Forward Fading, and Adaptivity*. Frontiers in Education Conference, 36th Annual, 5–10.

- Mory, E. H. (2003). Feedback research revisited. In: D. H. Jonassen. *Handbook of research on educational communications and technology* (pp. 745-783). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, VA Reston.
- Nicaud, J.F., Bouhineau, D. & Chaachoua, H. (2004). Mixing Microworld and Cas. Features in Building Computer Systems that Help Students Learn Algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9 (2), 169–211.
- Paas, F. (1992). Training strategies for attaining transfer of problem-solving skill in statistics: A cognitive-load approach. *Journal of Educational Psychology*, 84, 429–434.
- Paas, F., Renkl, A. & Sweller, J. (2003). Cognitive load theory and instructional design: Recent developments. *Educational Psychologist*, 38, 1–4.
- Paas, F., Tuovinen, J., Tabbers, H. & van Gerven, P. W. M. (2003). Cognitive load measurement as a means to advance cognitive load theory. *Educational Psychologist*, 38, 63–71.
- Paas, F. & van Merriënboer, J. J. G. (1993). The efficiency of instructional conditions: An approach to combine mental-effort and performance measures. *Human Factors*, 35, 737–743.
- Passier, H. & Jeuring, J. (2006). Feedback in an interactive equation solver. Technical report UU-CS-2006-021. Utrecht University, Utrecht.
- Ross, S. M. & Morrison, G. R. (1993). Using feedback to adapt instruction for individuals. In: J. Dempsey and G. Sales (eds). *Interactive instruction and feedback* (pp. 177–195). Englewood Cliffs, NJ: Educational Technology Publications.
- Schunk, D.H. & Pajares, F. (2002). The development of academic self-efficacy. In: A. Wigfield & J. Eccles (eds.), *Development of Achievement Motivation*. (pp. 16–43). San Diego: Academic Press.
- Sweller, J., van Merriënboer, J. J. G., & Paas, F. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, 10, 251–296.
- Van Gog, T. & Paas, F. (2008). Instructional efficiency: Revisiting the original construct in educational research. *Educational Psychologist*, 43, 1–11.
- Van Merriënboer, J. J. G., Kirschner, P. A. & Kester, L. (2003). Taking the load off a learner's mind: Instructional design for complex learning. *Educational Psychologist*, 38, 5–13.
- Vollmeyer, R. & Rheinberg, F. (2005). A surprising effect of feedback on learning. *Learning and Instruction*, 15, 589–602.

Het gepresenteerde onderzoek in dit artikel is mogelijk gemaakt door de financiële ondersteuning van de stichting SURF, www.surf.nl.

