

*Een discussiebijdrage***Transdisciplinair vakdidactisch onderzoek: wiskundige verbanden in de wetenschappen als casus**

Mieke De Cock

Academische Lerarenopleiding Natuurkunde & LESEC, Katholieke Universiteit Leuven

1. Inleiding

In dit themadeel werden drie artikelen gepresenteerd. In deze artikelen gaat het telkens over wiskunde binnen een ander vak. Dit kan natuurkunde zijn, maar ook economie of scheikunde. In elk van deze artikelen krijgt de wiskunde binnen dat andere vak een concrete betekenis. Niet de wiskunde om de wiskunde – waarin begrippen worden opgetild naar een hoger abstractieniveau – staat centraal, maar de wiskundige beschrijving van een concrete realiteit: een karretje dat versnelt, een veer die wordt uitgerekt, een verandering van snelheid, of marginale kosten. Toch wordt in de verschillende bijdragen een verschillend gezichtspunt ingenomen. De Bock et al. en Van Dooren et al. kijken naar de manier waarop leerlingen wiskunde gebruiken binnen fysica: zijn zij in staat een concrete fysische situatie wiskundig te beschrijven; wanneer wel, wanneer niet? Bij Vos et al. staan de leraren/docenten centraal: welke wiskundekennis bezitten zij (nog), hoe kijken zij naar wiskunde vanuit het vak dat ze onderwijzen, hoe behandelen ze wiskundige concepten en methoden in hun eigen onderwijs, en in welke mate zijn ze op de hoogte van het wiskundecurriculum van hun leerlingen? Zo komen de twee protagonisten bij onderwijsleerprocessen in beeld: de leerling en de leraar/docent. Vanuit mijn achtergrond als natuurkundige zoom ik in deze discussiebijdrage exemplarisch in op een aspect dat in elk van de drie bijdragen terugkomt: het gebruik van wiskunde binnen fysica.

2. Fysica en wiskunde: een haat-liefdeverhouding?

Fysica is de wetenschap die algemene eigenschappen van fenomenen rondom ons bestudeert: de beweging van de planeten, het vallen van een bal, het koken van water, ... De taal waarin fysici deze realiteiten beschrijven, is wiskunde. Dit is (voor leerlingen) alles-behalve evident: een concrete werkelijkheid – een appel die uit een boom valt – wordt beschreven met behulp van een abstract formalisme: $\vec{F} = m\vec{a}$.

Enerzijds blijken uit de studies van De Bock et al. en van Van Dooren et al. de moeilijkheden die leerlingen ondervinden bij het beschrijven van concrete situaties met behulp van wiskundige – al dan niet lineaire – verbanden. De studies tonen aan dat *leerlingen* een concrete situatie vaak betekenisloos vertalen in een foutieve (lineaire) formule. De oorzaak kan liggen in een incorrect begrip van de onderliggende fysische principes, in het niet effectief inschakelen van aanwezige kennis, of in een gebrekkige interpretatie van of

inzicht in de betekenis van formules. Anderzijds tonen Vos et al. aan dat *leraren*, bij het omgekeerde vertaalproces (vertrekken van de formule), juist een concrete realiteit gebruiken om betekenis te geven aan abstracte formules. De abstracte wiskundekennis van de docenten lijkt weggezaakt en hun kennis is verschoven naar kennis die bruikbaar is in het eigen vakdomein. Hoe leerlingen met dit omgekeerde vertaalproces omgaan, komt niet aan bod in de artikelen, maar het is niet uitgesloten dat ze hiermee minder (of andere) problemen hebben.

Het is dus uiterst belangrijk dat leraren beseffen dat de koppeling tussen concrete realiteit en abstracte wiskunde – die ze zelf gebruiken bij het betekenis geven aan formules – voor leerlingen misschien niet evident is en dat het vertalen van een situatie naar een formule bij leerlingen niet altijd betekenisvol gebeurt!

Moet het onderwijs in fysica voor alle leerlingen wel kwantitatief georiënteerd zijn, of volstaat voor sommige studierichtingen een kwalitatieve benadering, waarbij de klemtoon dan ligt op de concepten en hun onderlinge verbanden (Hewitt, 2001), maar niet op de wiskundige beschrijving? En als zowel een kwalitatieve als een kwantitatieve beschrijving aan bod moet komen, in welke volgorde gebeurt dit dan het beste? Hierover zijn de meningen onder natuurkundedidactici verdeeld, maar wat duidelijk is, is dat de link tussen een kwalitatieve benadering en een wiskundige beschrijving meer aandacht verdient.

Uit de onderzoeksresultaten van De Bock et al. en Van Dooren et al. blijkt dat kwalitatieve fysicaopgaven doorgaans beter beantwoord worden dan kwantitatieve. Bij De Bock et al. wordt 'kwalitatief' ook zo genoemd, bij Van Dooren et al. wordt de kwalitatieve kennis eerder uitgelokt in de impliciete en expliciete conditie. Leerlingen moeten in deze condities immers niets kwantificeren. Uit de resultaten blijkt verder dat zowat alle leerlingen – ook voordat ze formeel fysicaonderwijs hebben genoten – in een *aantal* topics al een goed kwalitatief inzicht hebben, maar dat het kwantificeren van dat inzicht moeilijk is, zeker als er een niet-lineaire relatie aan de orde is. Toch past hierbij een kanttekening: deze resultaten zijn niet zomaar veralgemeenbaar naar alle fysicadomeinen. Zo blijkt uit de resultaten van De Bock et al. dat het kwalitatief inzicht in de wet van Archimedes te wensen overlaat en bij Van Dooren et al. zien we dat leerlingen in het algemeen geen goed kwalitatief inzicht hebben in de invloed van de massa op de valversnelling. Dat het missen van een goed kwalitatief inzicht echter niet altijd het succes op schoolse fysicatoetsen in de weg staat, blijkt uit onderzoek van Mazur (1997): na het volgen van traditioneel onderwijs blijken heel wat studenten in staat te zijn kwantitatieve oefeningen rond elektrische circuits op te lossen zonder kwalitatief te kunnen aangeven wat er gebeurt.

De relatie tussen fysische realiteit en intuïtie ligt niet zo eenvoudig. Enerzijds bouwen kinderen door hun dagelijkse ervaringen een groot aantal inzichten op, zonder dat ze die noodzakelijk expliciet kunnen verwoorden of benoemen. Van Dooren et al. verwezen in dat verband reeds naar de term 'intuitive physics' (Anderson, 1983). Anderzijds stroken onze intuïtieve inzichten zeker niet altijd met de wetten van de natuur (bijvoorbeeld McCloskey, 1983; Vosniadou & Brewer, 1992, 1994; Wisner & Amin, 2001)! Het zit bij velen

van ons diepgeworteld dat zware voorwerpen sneller vallen, of dat een voorwerp waar geen kracht op inwerkt, stilvalt. Je moet toch blijven trappen op je fiets om te blijven vooruitgaan?

Uit de eerste twee manuscripten in dit themadeel wordt duidelijk dat sommige fenomenen kwalitatief niet goed begrepen worden en dat leerlingen foute intuïties hebben én behouden, ondanks formeel fysicaonderricht. Blijkbaar is het gangbare onderwijs niet in staat deze leerlingendenkbeelden om te buigen tot correcte wetenschappelijke inzichten. Dit wordt bevestigd door een groot aantal studies in physics education (voor een uitvoerig overzicht, zie Duit, 2009). Er moet in het onderwijs wellicht meer én op adequatere wijze aandacht worden geschonken aan – correcte, maar ook incorrecte – leerlingendenkbeelden. Dit vraagt onderzoek, zowel naar de denkbeelden zelf, als naar methodes om er op in te spelen. Dit behoort ook een expliciet aandachtspunt te zijn bij de vorming van leraren. Immers, de leraar moet weten wat de leerlingen moeilijk vinden.

Topics of verschijnselen waar onze intuïtie ons op het verkeerde been zet, of waarover we niet gemakkelijk intuïtieve kennis kunnen opbouwen, worden kwalitatief vaak minder goed begrepen. Zonder kwalitatief basisinzicht wordt kwantificeren moeilijk... Ook voor onderwerpen die wel kwalitatief begrepen zijn, kan het in het beschrijven van een fenomeen echter fout lopen door een gebrekkige of ontbrekende wiskundekennis. Het is bij dit aspect dat de curriculaire component van de PCK uit het artikel van Vos et al. aansluit: een leraar fysica moet niet alleen weten welke (foutieve) fysicadenkbeelden er leven bij de leerlingen, maar moet ook op de hoogte zijn van de wiskundige inhoud uit het curriculum en van de wiskundige problemen die zich voordoen in zijn/haar vak. Uit de studie van Vos et al. blijkt echter dat leraren deze interdisciplinaire component van PCK nog (te) weinig bezitten.

3. Kwantificeren = lineariseren?

Het Leuvense Centrum voor Instructiepsychologie en -technologie bouwde de voorbije 10 tot 15 jaar een uitgebreide expertise op omtrent het ontbrekend lineair redeneren van leerlingen in diverse deeldomeinen van de wiskunde: meetkunde (De Bock, Van Dooren, Janssens, & Verschaffel, 2007), kansrekening (Van Dooren, De Bock, Depaepe, Janssens, & Verschaffel, 2003), elementaire rekenkunde (Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, & Verschaffel, 2005). Binnen die domeinen gebruiken leerlingen massaal het lineaire model in situaties waarin dit niet geoorloofd is, mede omwille van het intuïtieve karakter van dit model (De Bock et al., 2007). Tegen de verwachting in blijken leerlingen zich minder snel te laten verleiden tot een blinde toepassing van het lineair model wanneer ze geconfronteerd worden met diverse contexten in de fysica. Fysica vertroebelt en compliceert blijkbaar het beeld, maakt het wiskundig minder zuiver. Zowel de resultaten van De Bock et al. als die van Van Dooren et al. suggereren dat leerlingen in een aantal gevallen toch rekening (proberen te) houden met hun inzicht in een specifieke fysische

werkelijkheid, dat ze meer aandacht besteden aan het interpreteren van de probleemsituatie alvorens tot oplossen over te gaan:

- In de impliciete conditie bij Van Dooren et al. zijn de resultaten voor de vraag over het verband tussen de afstand en de tijd verrassend goed bij kinderen van acht jaar! Blijkbaar zijn leerlingen in die concrete setting wel in staat 'versnelling' om te zetten in correcte grootteordes van afstanden (niet expliciet in getallen). In de schoolse conditie, waar expliciet naar getallen wordt gevraagd, gebeurt dit echter niet.
- Hoewel uit het artikel van De Bock et al. blijkt dat leerlingen ook bij fysicaproblemen vaak (onterecht) lineair redeneren, is deze neiging toch minder uitgesproken dan wat in bovenvermelde studies binnen wiskunde werd gerapporteerd. Dit wijst er op dat leerlingen de specificiteit van de context meer au sérieux nemen.

Een kanttekening hierbij is dat niet elke toepassing van het lineaire model in een situatie die strikt genomen niet-lineair is, noodzakelijk ontmoedigd moet worden! Lineaire verbanden zijn nu eenmaal eenvoudiger dan kwadratische, exponentiële of omgekeerd evenredige verbanden. Wanneer wiskundigen of natuurwetenschappers er in slagen iets te 'lineariseren' dan is dat vaak een pluspunt, het maakt de situatie 'berekenbaar'. Een methode zoals 'curve fitting' wordt door de meesten dan ook onmiddellijk geassocieerd met 'lineaire regressie'... . Vaak vormen lineaire of 'eerste-orde-benaderingen' ook een goed startpunt dat, afhankelijk van de vereiste nauwkeurigheid, achteraf verder verfijnd kan worden. Op die manier bekeken, vormt het antwoord van de leerlingen op de vraag bij De Bock et al. over de tijd die nodig is om 1000 m te lopen niet eens een slechte 'eerste benadering'!

Van Dooren et al. geven aan dat sommige leerlingen die correct antwoorden in de expliciete conditie toch (onterecht) lineair redeneren op het schoolse vraagstuk. Blijkbaar gebruiken die leerlingen hun kwalitatief inzicht niet of onvoldoende bij het oplossen van vraagstukken in een schoolse context. Dergelijke dissociatie van kennis wordt ook beschreven in andere studies. Kanim (1999) onderzocht het oplossen van kwalitatieve en kwantitatieve vragen in verband met elektrische circuits. Uit de resultaten blijkt dat studenten eenzelfde vraag anders beantwoorden naargelang die in kwalitatieve dan wel in kwantitatieve vorm wordt gesteld. Studenten maken bij het beantwoorden van de kwantitatieve vraag geen gebruik van hun conceptueel inzicht in de gegeven situatie, doch werken zuiver 'formula driven'.

Ook bij het besluit over het niet-gebruiken van kwalitatief inzicht door de leerlingen van acht jaar bij Van Dooren et al. past een bedenking. Een vraag die in deze situatie rijst, is of dit wel van leerlingen kan verwacht worden. Op basis van de geziene leerstof kunnen ze het probleem van 'Jan die met de fiets naar beneden rolt' onmogelijk wiskundig correct oplossen! Om toch een correct antwoord te kunnen geven, moeten ze dus steunen op hun intuïtie. 'Ook dat is verre van evident, zelfs niet indien...' deze intuïtie daadwerkelijk aanwezig is. Heel vaak wordt immers op een vraagstuk één correct én exact te berekenen

antwoord verwacht. Het druist in tegen de 'klascultuur' om een uitkomst aan te duiden die niet echt 'berekend' kan worden. Dat toch doen, vraagt veel 'leef' van een kind van acht.

4. Over de vorm van de vraag en taal

Bij Van Dooren et al. is één van de centrale thema's de rol van de 'vorm' waarin een vraag wordt gesteld. Uit de resultaten blijkt dat de antwoorden sterk variëren naargelang de vraag gesteld wordt in een schoolse dan wel in een meer authentieke context. De invloed van de presentatie van een vraag komt ook in de andere bijdragen terug. De Bock et al. vergelijken, telkens in een eerder schoolse setting, de antwoorden op vragen die gesteld zijn in een ontbrekende-waarde- en in een vergelijkingsstructuur. Uit voorafgaand onderzoek binnen wiskunde (De Bock, Verschaffel, & Janssens, 2002) blijkt dat het antwoordpatroon in beide structuren sterk kan verschillen: opgaven in ontbrekende-waarde-opgaven zetten leerlingen sterker aan tot lineair redeneren dan vergelijkingsopgaven. In de in dit themadeel voorgestelde onderzoeksresultaten binnen fysica is deze tendens opnieuw veel minder duidelijk: leerlingen lijken wel degelijk rekening te houden met de betekenis van de begrippen en de aard van de context kan hen (soms) behouden voor het maken van (lineaire) fouten.

We merken hierbij ook op dat dit gelinkt is aan een gewoonte die deel uitmaakt van de klascultuur. Leerlingen zijn gewoon om met opgaven in een ontbrekende-waarde-structuur te werken en lineaire problemen worden quasi altijd in deze structuur aangeboden. Ook in de studie van Vos et al., waar vanuit het lerarenperspectief wordt gekeken, speelt de vorm van de vraagstelling een rol. Immers, bij niet standaard-opgaven blijken ook docenten in de war te geraken en bij een opgave over de wet van Torricelli hindert een dimensieloze formule hen.

Daarbij aansluitend past nog een volgende bedenking in verband met taal. Uit de studie van Vos et al. blijkt dat qua conventies over terminologie en symbolengebruik er slechts een geringe afstemming is tussen de exacte vakken. Vanuit het perspectief van deze studie betreffen de aangehaalde voorbeelden verschillen in verband met wiskunde-begrippen. Het spreekt voor zich dat een betere afstemming leerlingen zou kunnen helpen bij het slaan van de brug tussen wiskunde en fysica. Babylonische spraakverwarring zou aldus vermeden worden. Dit geldt echter niet alleen voor technische begrippen uit de wiskunde, maar ook voor meer vertrouwde concepten uit de fysica. Een nauwkeurig gebruik van vaktaal blijft een voortdurend aandachtspunt, niet enkel binnen een discipline maar ook wanneer de disciplinegrenzen worden overgestoken: massa is niet hetzelfde als gewicht, er is een verschil tussen 'snelheid' en de 'grootte van de snelheid', het maatgetal voor een fysische grootte wordt uitgedrukt in een bepaalde eenheid.

De vaststellingen uit de artikelen over de invloed van DE vorm van vraagstelling hebben mijns inziens belangrijke repercussies voor het onderwijs. In de eerste plaats is het belangrijk dat leraren zich ervan bewust zijn dat verschillende wijzen van probleemformulering verschillende soorten kennis en vaardigheden oproepen. Zo blijkt het geen goed

idee te zijn het kwalitatief inzicht van leerlingen te toetsen met een opgave geformuleerd in een ontbrekende-waarde-structuur. Het stellen van een vraag in die vorm lokt bij de leerlingen immers een kwantitatieve redenering uit. Als de leraar het kwalitatief inzicht van leerlingen wil toetsen, kan hij de vraag beter stellen in een vorm die kwalitatieve kennis oproept. Ook dergelijke onderzoeksresultaten moeten aan bod komen in de lerarenopleiding.

Het aanspreken van de verschillende vormen van kennis in verschillende settings zou – tijdens het leerproces – echter een krachtig didactisch instrument kunnen zijn. Kan de leraar het belang van de link tussen kwalitatieve kennis enerzijds en de beschrijving van een fysische realiteit in getallen en/of formules anderzijds aan de leerlingen duidelijk maken door hen te confronteren met de contradicties in hun antwoorden op verschillende soorten vragen? Het is dan ook een uitdaging voor het onderwijs om te variëren in de vraagstelling, zodat leerlingen de inhoudelijke – wiskundige, fysische, ... – kern leren loskoppelen van de formuleringswijze van de opgave en flexibel leren omgaan met de verschillende vraagvormen.

5. Tot slot

Fysica en wiskunde zijn sterk op elkaar aangewezen, maar de link is voor leerlingen niet altijd evident. Uit de eerste twee studies blijkt wel dat een *fysicacontext* leerlingen kan behoeden voor het maken van wiskundefouten. Bij de vakleraren die Vos et al. interviewden, blijkt duidelijk dat zij wiskunde invullen vanuit het eigen vakperspectief. Omdat leerlingen moeilijkheden ondervinden bij het slaan van bruggen tussen aanverwante disciplines, in casu fysica en wiskunde, moeten vakleraren dit proces mee begeleiden, onder meer door dwarsverbanden duidelijker te expliciteren. Om dit proces van ‘mathematiseren’ te vergemakkelijken is een optimale afstemming tussen de vakken noodzakelijk. Uit de studie van Vos et al. blijkt echter dat dit nog erg weinig en zeker niet op een consequente wijze gebeurt: niet alleen is er nauwelijks sprake van afstemming qua terminologie en symbolengebruik, de docenten zijn ook amper vertrouwd met het wiskundecurriculum. Uit deze studie blijkt bovendien dat de ‘zuivere’ wiskundekennis van de (andere) vakleraren is weggeëbd, wat het expliciet refereren ernaar uiteraard bemoeilijkt.

Persoonlijk denk ik dat de afstemming tussen fysica en wiskunde (en ook tussen andere verwante disciplines) meer aandacht verdient en dat de manier waarop die afstemming het beste gerealiseerd kan worden, het voorwerp moet uitmaken van trans- en/of interdisciplinair wetenschappelijk onderzoek. Een samenwerking tussen math educators, science educators en (algemene) onderwijskundigen kan hier zeker een meerwaarde bieden!

We sluiten af met enkele concrete vragen die in de voorgestelde studies nog geen afdoend antwoord kregen en om vervolgonderzoek vragen:

- De onderzoeksresultaten van De Bock et al. en van Van Dooren et al. tonen aan dat leerlingen – ook in fysica – geregeld onterecht lineair redeneren. Het wordt evenwel niet helemaal duidelijk waarom zij dit doen. Zijn leerlingen inderdaad overtuigd van de juistheid van

het lineaire model in een gegeven situatie? Of ligt het probleem bij het kwantificeren zelf? Misschien willen leerlingen wel hun intuïtie gebruiken, maar weten zij niet precies hoe (wegens een te beperkte wiskundige kennis, geen of een onvoldoende diep inzicht in de manier waarop fenomenen wiskundig worden beschreven, ...). Het lijkt aangewezen hierover meer wetenschappelijk onderbouwde inzichten te verwerven, bijvoorbeeld aan de hand van diepte-interviews met leerlingen.

- Wat zouden we kunnen verwachten indien de impliciete en expliciete conditie in de studie van Van Dooren et al. niet zo drastisch waren, met andere woorden als de situatie bijvoorbeeld enkel geschetst werd, zonder de concrete opstelling met Lego-wagentjes? Welke soort kennis zou er dan worden opgeroepen?
- Werd er ook gekeken naar het perspectief van de *wiskundeleraar*? In welke mate heeft die zicht op het gebruik van elementen uit het wiskundecurriculum in andere disciplines? In welke mate is hij zelf vertrouwd met de toepassingen van wiskunde in deze disciplines? Welke attitude hebben wiskundeleraars ten opzichte van het gebruik van contexten uit andere disciplines?
- Wat zijn (mogelijke) oorzaken van het geconstateerde gebrek aan samenhangend onderwijs? Wat hebben leraren nodig om te werken naar meer samenhangend onderwijs?
- Het lijkt ook bijzonder interessant en relevant om te kijken door de ogen van de leerlingen: (hoe) voelen zij de geringe afstemming tussen wiskunde en fysica aan, heeft een betere afstemming invloed op hun prestaties in wiskunde en fysica?
- Kunnen er op basis van de voorgestelde onderzoeksresultaten concrete voorstellen worden geformuleerd voor een betere afstemming tussen aanverwante disciplines in het algemeen en tussen fysica en wiskunde in het bijzonder?

We hopen dat verder onderzoek een antwoord kan geven op deze vragen en dat op die manier verder wordt gebouwd aan trans- en interdisciplinair onderzoek.

Literatuur

- Anderson, N. H. (1983). Intuitive physics: Understanding and learning of physical relations. In T. J. Tighe & B. E. Shepp (Eds.), *Perception, cognition and development: Interactional analyses* (pp. 231-265). Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement* (Mathematics Education Library). New York: Springer.
- De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (2002). The effects of different problem presentations and formulations on the illusion of linearity in secondary school students. *Mathematical Thinking and Learning*, 4(1), 65-89.
- Duit, R. (2009). *Bibliography - STCSE: Students' and teachers' conceptions and science education*. Op 19 augustus 2009 geraadpleegd op http://www.ipn.uni-kiel.de/aktuell/stcse/download_stcse.html

- Hewitt, P. (2001). *Conceptual physics*. San Francisco: Addison Wesley.
- Kanim, S. (1999). *An investigation of student difficulties in qualitative and quantitative problem solving: Examples from electric circuits and electrostatics*. Unpublished doctoral dissertation, University of Washington, Washington, US.
- Mazur, E. (1997). *Peer instruction: A user's manual*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- McCloskey, M. (1983). Naïve theories of motion. In D. Gentner & A. L. Stevens (Eds.), *Mental models* (pp. 299-324). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23(1), 57-86.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D., & Verschaffel L. (2003). The illusion of linearity: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 113-138.
- Vosniadou, S., & Brewer, W. F. (1992). Mental models of the earth. A study of conceptual change in childhood. *Cognitive Psychology*, 24, 535-585.
- Vosniadou, S., & Brewer, W. F. (1994). Mental models of the day/night cycle. *Cognitive Science*, 18, 123-183.
- Wiser, M., & Amin, T. (2001). 'Is heat hot?' Inducing *conceptual change* by integrating everyday and scientific perspectives on thermal phenomena. *Learning and Instruction*, 11(4-5), 331-355.