

Hoe begrijpen en gebruiken docenten van de schoolvakken natuurkunde, scheikunde en economie het wiskundige concept ‘afgeleide’?

Pauline Vos
Universiteit van Amsterdam

Nelleke den Braber
Stichting Leerplan Ontwikkeling

Gerrit Roorda
Rijksuniversiteit Groningen

Martin Goedhart
Rijksuniversiteit Groningen

Samenvatting

Wiskundige concepten worden ingezet in niet-wiskundelessen zoals natuurkunde, scheikunde en economie; dit betekent dat deze lessen ook een leeromgeving vormen voor het leren van wiskunde. Om een beeld te krijgen van deze leeromgeving, en als bijdrage aan discussies rondom *samenhangend* onderwijs, hebben wij een exploratieve studie uitgevoerd naar de kennis en het gebruik van wiskundige concepten van docenten natuur-, scheikunde en economie. Het onderzoek richtte zich op het concept *afgeleide*, dat bij natuurkunde gebruikt wordt voor bijvoorbeeld snelheden en versnelling, bij scheikunde voor reactiesnelheid en bij economie voor marginale kosten. We splitsten docentenkennis met betrekking tot dit concept op in *Content Knowledge* (CK) en *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) (Shulman, 1986). Tien docenten werden geïnterviewd over en getoetst op hun kennis van de afgeleide en manieren van uitleg in de klas. Het bleek dat veel wiskundekennis uit de studie weggezaakt was en voor de lespraktijk als onnodig werd ervaren, en dat het repertoire van oplossingsmethoden van wiskunde problemen beperkt was. De docenten benaderden het wiskundige concept niet vanuit de abstractie, maar zochten naar concrete betekenisgeving. In de onderwijspraktijk ontweken zij wiskundige achtergronden, technieken en verbanden, en hielden zij hun uitleg situatiegebonden. We observeerden een geringe afstemming tussen de exacte vakken, zowel in conventies van terminologie en symbolengebruik, alsmede van de curricula en van manieren van uitleg. Eén docent, een natuurkundedocent die ook wiskundeonderwijs verzorgde, vormde een uitzondering door in de klas expliciet verbanden tussen vakken te leggen. Wij bevelen daarom meer interdisciplinaire professionalisering aan om zowel voor CK als voor PCK een betere afstemming tussen de exacte vakken te creëren.

1. Inleiding

In deze bijdrage van het TD β -thema-deel over transdisciplinair onderzoek kijken we naar natuurkunde-, scheikunde- en economieonderwijs als leeromgevingen van wiskunde. In deze vakken wordt wiskunde gebruikt voor het onderwijs van niet-wiskundige concepten. Zo steunen natuurkundige concepten als versnelling en radioactief verval, of een economisch concept als marginale kosten op de wiskundige beschrijving van 'verandering', waarbij door middel van differentiëren de *afgeleide functie*, of kortweg: de *afgeleide*, wordt bepaald. Leerlingen maken dus niet alleen in wiskundelessen kennis met wiskundige concepten. Een dergelijke variatie aan invalshoeken kan een verrijking voor de leerling zijn, waarbij enerzijds wiskunde haar bruikbaarheid toont voor andere disciplines, en anderzijds natuurkundige of economische contexten betekenis geven aan wiskundige concepten.

Sinds Thorndike & Woodworth (1901) wordt echter geconstateerd dat wisselwerkingen tussen kennisgebieden haperen, onder andere als vakken afzonderlijk worden aangeboden: leerlingen slaan dan kennis op verschillende plaatsen in het geheugen op, hetgeen door Van Parreren (1982) is aangeduid als systeemscheiding. Hierdoor worden kennis en vaardigheden die al aan de orde zijn geweest bij wiskunde, vaak niet als zodanig door leerlingen herkend en ingezet in een ander schoolvak.

Om effectiviteit en efficiëntie van het onderwijs te vergroten is daarom, zowel nationaal als internationaal, gepleit voor het verbeteren van samenhang tussen schoolvakken (Berlin, 1991; Reulen & Rosmalen, 2000; WRR, 1986). In Nederland kreeg deze aanbeveling vorm bij de invoering van de Basisvorming in 1993, waarbij de begrippen *toepassing*, *vaardigheid* en *samenhang* (TVS) centraal werden gesteld (Van Luyn, 1998). Ook in de Tweede Fase havo-vwo werd samenhang nagestreefd, enerzijds met de invoering van vier profielen (een combinatie van vakken die opleiden voor een segment in het vervolgonderwijs), en anderzijds met de invoering van vakken waarin monodisciplines geïntegreerd werden, zoals ANW (algemene natuurwetenschappen) en NLT (Natuur, Leven en Technologie).

Beleidsintenties zijn belangrijk, maar uiteindelijk kenmerkt samenhangend onderwijs zich door de mate waarin leerlingen in hun onderwijs samenhang ervaren. Dit betekent dat (1) er verbanden zijn tussen de verschillende vakdisciplines, (2) kennis niet geïsoleerd ontstaat en (3) hetgeen geleerd wordt binnen één vak gebruikt kan worden in een ander vakgebied (Krüger, Paus & Van der Zwaard, 2005; Roorda & Van Streun, 2002).

De Werkgroep Afstemming Wiskunde-Natuurkunde (2007) constateert dat er van samenhangend onderwijs geen sprake kan zijn, zolang er geen afstemming van vakinhouden is. Afstemming betreft bijvoorbeeld de curriculaire tijdsfasering zodat wiskundige concepten tijdig zijn geleerd voordat deze in andere vakken worden toegepast. Curriculaire afstemming betreft ook notatiewijzen, bijvoorbeeld als natuurwetenschappelijke contexten in wiskundeopgaven dimensieloos met x en y worden beschreven, terwijl de betreffende discipline hiervoor vakspecifieke symbolen voor een grootheid gebruikt. Afstemming betreft ook het gebruik van terminologie. Den Braber (2007) noemt bijvoor-

beeld dat de term *lijn* in niet-wiskundige schoolboeken gebruikt kan worden voor een *kromme* of voor een *coördinaat-as*. Het afstemmen van notatiewijzen en terminologie impliceert dan niet het op-één-lijn brengen van gebruikte symbolen en termen, maar het onderkennen van verschillen en overeenkomsten tussen vakken, het erkennen van de vakspecificiteit en deze aan leerlingen voorleggen.

Oorzaken van een tekortschietende afstemming zijn onder andere dat het veel tijd en inzet vergt om gemeenschappelijke doelen te stellen, dat docenten uitsluitend binnen de kaders van hun eigen discipline geschoold zijn en dat lesmaterialen gericht op samenhangend onderwijs (nog) niet goed functioneren (Doorman, 2005; Geraedts, Boersma & Eijkelhof, 2006; Werkgroep Afstemming Wiskunde-Natuurkunde, 2007; Zegers e.a., 2003).

Landelijk beleid voor samenhangend onderwijs en veelbelovende initiatieven op schoolniveau (zie o.a. Geraedts, Boersma & Eijkelhof, 2006; Mooldijk & Lichtenegger, 2006) zijn nodig omdat het gebruik van wiskundige concepten en technieken in niet-wiskundige lessen nochtans geïsoleerd gebeurt van wiskundelessen. Basson (2002) noemt het voorbeeld hoe leerlingen het natuurkundige concept *versnelling* leren als $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ zonder dat aandacht wordt besteed aan de complexe achtergronden hiervan. Den Braber (2007) constateert dat in economieboeken voor de Tweede Fase vwo termen als *differentie-* en *differentiaalquotiënt* worden gebruikt, en in natuurkundeboeken gesproken wordt over *differentialen*, terwijl deze termen niet in de parallel gebruikte wiskundeboeken voorkomen. Aldus leren leerlingen in vakken verwant aan wiskunde óók wiskunde en spelen docenten van deze vakken dus ook een rol in wiskundige kennisconstructie en in hoe leerlingen wiskunde gaan waarderen (Fennema & Franke, 1992; Cooney & Wiegel, 2003). Deze leeromgevingen voor wiskunde, die geen wiskundelessen zijn, geven aanleiding tot diverse vragen, bijvoorbeeld naar de mate waarin leerlingen samenhang of een gebrek daaraan ervaren. Wij hebben ons in het voorliggende onderzoek gericht op het niveau van het geïmplementeerd curriculum en een onderzoek opgezet naar hetgeen docenten van deze leeromgevingen weten en doen, voor zover relevant voor het leren van wiskunde door leerlingen. Een beschrijving hiervan kan een basis bieden voor het verklaren van leerlingprestaties, die niet geduid kunnen worden door het genoten wiskundeonderwijs. Tevens kan ons onderzoek achtergronden geven voor de problematiek rond samenhangend onderwijs en kan het bijdragen aan, onder andere, onderzoek naar docentenkennis en naar houdingen van leerlingen ten opzichte van wiskunde.

We hebben de volgende onderzoeksvragen gesteld: *wat is de kennis van docenten natuurkunde, scheikunde en economie in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs over wiskundige concepten en methoden die in hun vakgebieden toegepast worden? Hoe worden wiskundige concepten en methoden in hun onderwijs behandeld en toegelicht door deze docenten?* Om het onderzoek in te perken, hebben we ons gericht op het concept *afgeleide* als belangrijk en exemplarisch wiskundig concept. Deze focus maakte dat

we ons richten op natuur-, scheikunde en economie en niet op exacte vakken waarin het concept niet of nauwelijks aan de orde komt, zoals biologie en informatica.

2. Theoretisch kader

Centraal in dit onderzoek staat de kennis van docenten natuurkunde, scheikunde en economie. Cobb & Bowers (1999) hebben erop gewezen dat docentenkennis sociaal ingebedde praktijkkennis is: sommige kenniscomponenten ontstaan of worden gedeeld binnen een gemeenschap van leraren en sommige kenniscomponenten zijn gebonden aan bepaalde (onderwijs-)situaties. Shulman (1986) splitst docentenkennis in vakkennis (content knowledge, CK), vakdidactische kennis (pedagogical content knowledge, PCK) en algemene didactische kennis (pedagogical knowledge, PK). Een goede afbakening van bovenstaande begrippen, het onderlinge verband tussen deze vormen van kennis, en een domeinspecifieke toespitsing van bovenstaande categorieën voor het wiskundeonderwijs zijn nochtans onderwerp van discussie (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Even, 1993; Monk, 1994; Hill, Ball, Sleep, & Lewis, 2007; Hill, Rowan & Ball, 2005).

Het eerste type kennis, vakkennis (CK), wordt door Shulman omschreven als:

'.. going beyond knowledge of the facts or concepts of a domain. It requires understanding the structures of the subject matter' (Shulman, 1986, p.9).

Hierop aansluitend gaat ons onderzoek van CK erom in hoeverre de docenten de *afgeleide* niet alleen gebruiken in hun eigen vak, maar ook de achterliggende wiskunde 'begrijpen'. Hiebert & Carpenter (1992) beschrijven 'begrijpen' als de manier waarop informatie is gestructureerd in relaties tussen feiten, representaties, procedures en ideeën. Ook Kilpatrick, Swafford & Findell brengen 'begrip' in verband met *representaties*:

'.. being able to represent mathematical situations in different ways and knowing how different representations can be useful for different purposes. To find one's way around the mathematical terrain, it is important to see how the various representations connect with each other, how they are similar, and how they are different' (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, p. 119).

De CK van het concept *afgeleide* operationaliseren we dan in de relaties die men legt tussen wiskundige representaties (numeriek, grafisch, symbolisch), binnen representaties (discreet, met een limiet, continu) en tussen wiskundige representaties en toepassingen in andere domeinen. Om deze relaties te beschrijven, gebruiken we het analyse-framework van Roorda, Vos & Goedhart (2007), gebaseerd op Zandieh (2000) en Kendal & Stacey (2003). Dit schema bevat kolommen, elk behorende tot een representatievorm van de *afgeleide*, namelijk symbolisch, grafisch, numeriek of tot een toegepast domein. In figuur 1 maakt de vierde kolom duidelijk hoe de natuurkundige afleiding van de afgelegde weg $s(t)$ naar de snelheid $v(t)$ in overeenkomstige stappen verloopt als de wiskundige afleidingen. Het schema kan worden uitgebreid met andere voorbeeldkolommen die verband

houden met de afgeleide, niet alleen uit de kinematica, maar ook uit de elektriciteitsleer (ontladende condensator), uit de scheikunde (reactiesnelheden) of uit de economie (marginale kosten). Het begrijpen van de *afgeleide* betreft dan het kunnen leggen van verbanden tussen cellen en tussen kolommen. Daarmee omvat het begrijpen van de afgeleide dus ook het toepassen en overstijgt het de vaardigheid van het symbolisch differentiëren (van een functie naar een afgeleide functie).

Symbolisch	Grafisch	Numeriek	Natuurkundig
S1: $f(x)$ functie	G1: grafiek	N1: tabel	Na1: afgelegde weg $s(t)$
S2: differentiequotient $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$	G2: gemiddelde helling (van koorde)	N2: gemiddelde verandering	Na2: gemiddelde snelheid (over traject) $v_{gem} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$
S3: differentiaalquotient $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$	G3: richtingscoëfficiënt raaklijn	N3: mate van verandering	Na3: momentane snelheid $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$
S4: $f'(x)$ afgeleide functie	G4: hellinggrafiek	N4: tabel met veranderingen	Na4: snelheid $v(t) = s'(t)$

Figuur 1. schema van wiskundige representaties m.b.t. afgeleide

Naast Content Knowledge, bestuderen we ook 'Pedagogical Content Knowledge' (PCK). Volgens Van Driel (2008) gaat het bij PCK – kort gezegd – om inzicht van docenten in de manieren waarop leerlingen vakinhoudelijke zaken begrijpen (of niet) en om de kennis van doceeractiviteiten waarmee dit begrip bevorderd kan worden. Veal en MaKinster (1999) geven een overzicht van verschillende classificaties van PCK, waaronder de verdeling in vijf componenten door Magnussen, Krajcik en Borko (1999). Zij onderscheiden voor docenten in de natuurwetenschappen: a) 'orientations towards science teaching', b) 'knowledge of curriculum', c) 'knowledge of science assessment', d) 'knowledge of science learners', en e) 'knowledge of instructional strategies'. In dergelijke classificaties wordt geen specificatie gegeven van de kennis van een docent ten bate van de afstemming met andere vakken en de benodigde (wiskunde-)kennis voor zijn/haar eigen vak, zoals wij willen onderzoeken. De manier waarop een docent verbanden legt (of niet) met wiskunde kunnen we echter wel associëren met bovengenoemde componenten: a) houding ten opzichte van wiskundeonderwijs en het belang ervan inzien voor het eigen vak, b) kennis

van het wiskundeleerplan in relatie tot het eigen vak, c) kennis van wiskundige toetsvormen in relatie tot het eigen vak, d) kennis van de wiskundige kennis van de leerlingen, e) kennis van instructiestrategieën van wiskundige begrippen in de context van het eigen vak. We specificeren aldus voor PCK vier componenten met betrekking tot het wiskundige concept *afgeleide* binnen het natuurwetenschappelijk onderwijs:

1. een affectieve component (zie a) hierboven),
2. een curriculaire component (zie b), c) en d) hierboven),
3. een instructionele component (zie e) hierboven), en
4. een interdisciplinaire component: een nieuwe component van PCK voor de kennis die nodig is voor het leggen van verbanden tussen het eigen vak en wiskunde.

3. Methode

Dit onderzoek is een exploratief onderzoek naar kennis van ervaren docenten. Om drie redenen is het onderzoek exploratief: er werden nieuwe onderzoeksaspecten verkend voor a) de manier van selecteren van deelnemers, b) de manier van toetsen van CK en PCK en voor c) het analysekader voor samenhangend onderwijs. We lichten dit hieronder toe.

In onderzoek naar docentenkennis worden data doorgaans verzameld in studies van professionalisering en doorlopen de deelnemers een professionaliseringstraject, bijvoorbeeld gericht op vakvernieuwing. Wij wilden echter docenten niet binnen dergelijke kaders spreken maar binnen hun schoolomgeving. We interviewden uiteindelijk tien bovenbouwdocenten van vier scholen: vijf natuurkundedocenten aangeduid met namen met een P (van Physics), twee scheikundedocenten aangeduid met namen met een S, en drie economiedocenten aangeduid met namen met een E (zie tabel 1). We nodigden in eerste instantie alle natuurkunde-, scheikunde- en economiedocenten uit die lesgeven aan een groep vwo-leerlingen uit een flankerend onderzoek. Dit onderzoek vond plaats aan twee scholen in de regio Groningen en hierover zal elders gepubliceerd worden (Roorda, in voorbereiding). Aan deze twee scholen reageerden zes docenten positief (aan elke school twee natuurkunde- en één economiedocent); de andere docenten konden niet deelnemen (reden: tijdgebrek, niet op kennis getoetst willen worden). We hebben vervolgens de steekproef aangevuld met docenten van andere scholen, waarbij we streefden naar variatie in de steekproef door alleen docenten toe te voegen indien zij een ander schoolboek voor hun vak gebruikten, zie tabel 1. Aldus bereikten we een *convenience sample* met tien docenten.

De ondervijverservaring van de geïnterviewden was gemiddeld 20 jaar. Allen hadden een eerstegraads bevoegdheid voor hun vak; met uitzondering van de twee zij-instromers Erik en Ewout hadden allen aan een universiteit gestudeerd; Peter, Philip en Simone waren na hun studie gepromoveerd; vier van de vijf natuurkundedocenten had ook een wiskundebevoegdheid, maar slechts één van hen, Peter, gaf les in beide vakken.

Het toetsen van docenten op CK en PCK middels een interview is niet nieuw, maar wel de toetsing van kennis op een aangrenzend vakgebied. Het interview bestond uit twee delen.

Tabel 1. Namen en kenmerken van de geïnterviewde docenten

Naam	onderwijs- ervaring (in jaren)	vak	schoolboek in vwo Tweede Fase	opmerkingen*
Paul	12	Natuurkunde	Pulsar	ook bevoegd voor wiskunde
Peter	9	Natuur- en Wisk.	Scoop	gepromoveerd, ook bevoegd voor wiskunde
Philip	11	Natuurkunde	Scoop	gepromoveerd, ook bevoegd voor wiskunde
Piet	39	Natuurkunde	Newton	
Pim	18	Natuurkunde	Pulsar	ook bevoegd voor wiskunde
Simone	22	Scheikunde	Chemie	gepromoveerd
Stefan	18	Scheikunde	Chemie Overal	eerst HBO-analistenopleiding gedaan
Enno	32	Economie	Prakt. Econ.	eerst twee jaar Econometrie gestudeerd
Erik	26	Economie	Econ. in Balans	eerst HTS bouwkunde gestudeerd, zij-instromer
Ewout	19	Economie	LWEO**	zij-instromer, ook bevoegd voor geschiedenis & aardrijkskunde

* Enkele docenten zijn *zij-instromer*, de overige werkten vanaf de studie in het onderwijs.

** Lesbrieven van de Landelijke Werkgroep Economie Onderwijs.

Het eerste deel van het interview was *task-based* (Goldin, 2000) met drie opdrachten voor het toetsen van CK. De docenten werden verzocht de opgaven hardop denkend te maken. Eén opgave was geselecteerd uit het schoolvak van de docent, zie appendix A. De tweede opgave ging over de snelheid van het pompen van water uit een vat, en is sterk gelijkend aan opgaven zoals frequent gebruikt in het Nederlandse wiskundeonderwijs, zie appendix B. Bij deze opgave vroegen we expliciet naar verschillende oplossingsmethoden, zodat de docenten verschillende representaties konden gebruiken en met elkaar konden verbinden. In het flankerend onderzoek van Roorda (in voorbereiding) met het-

zelfde instrument waren tenminste zes oplossingsmethoden geïdentificeerd: het gemiddelde over een interval bepaald met verschilwaarden (numeriek), de helling van een koorde (grafisch), de helling van een getekende raaklijn (grafisch), de knop 'dy/dx' in een Grafische Rekenmachine (grafisch), de knop 'Tangent' in een grafische rekenmachine (grafisch) en tenslotte: differentiëren (symbolisch). Om de variatie in oplossingsmethoden van de geïnterviewden te vergelijken, weten we uit Roorda's onderzoek dat acht van de tien vwo6-wiskunde B-leerlingen twee of meer oplossingsmethoden konden toepassen.

De derde opgave was een opgave ontleend aan Bezuidenhout (1997), zie appendix B. Deze opgave gaat over de relatie tussen de snelheid van een auto en de lengte van de remweg. In deze opgave is geen functievoorschrift gegeven en speelt de variabele tijd t geen rol, maar wordt een interpretatie gevraagd. Onderdeel a) is een instapopgave voor het interpreteren van de afhankelijke variabele R en de onafhankelijke variabele v . Onderdeel b) gaat over het interpreteren van de afgeleide R' , waarvoor een toename van de remweg moet worden gerelateerd aan een toename van snelheid; $R'(80)=1,15$ is een afstand per snelheid. Dergelijke interpretatievragen wijken af van veel standaardopgaven. Een geïnterviewde kan zijn manier van 'begrijpen' van het concept afgeleide hier tonen met bijvoorbeeld een grafische interpretatie vanuit een R - v -grafiek, een symbolische interpretatie met $\Delta R / \Delta v$ of met een numerieke interpretatie: '*als de snelheid toeneemt van 80 km/uur naar 81 km/uur, dan neemt de remweg toe met 1,15 m*'. Om de interpretaties van de geïnterviewden te vergelijken, weten we uit Roorda's onderzoek dat onderdeel b) door drie van de tien vwo-6-wiskunde B-leerlingen correct werd geïnterpreteerd als afstand per snelheid.

Het tweede deel van het interview was *semi-gestructureerd* en ging over affectieve, curriculaire, instructionele en interdisciplinaire componenten van PCK. De vragen volgden thema's als de vooropleiding, aantal jaren onderwijservaring, de houding ten opzichte van wiskunde, de voorkennis van leerlingen, overleg met de wiskundecollega's, (de afstemming van) curricula en verbanden die de docent legt tussen wiskunde en het eigen vak. Een deel van het instrument bestond uit geselecteerde pagina's over de *afgeleide* uit het schoolboek natuurkunde, scheikunde of economie dat de docent voor zijn eigen vaklessen in de Tweede Fase vwo gebruikte (zie tabel 1). Dit deel was dus docentspecifiek en bedoeld om het interview praktijkgericht te houden. Bij deze pagina's werd de docent gevraagd naar zijn/haar manieren van uitleg bij deze betreffende pagina's en gebruik van wiskundige termen als *formule, functie, grafiek of afgeleide*.

De interviews werden op geluidsdrager vastgelegd. Transcripten zijn geanalyseerd op CK en PCK. Voor CK keken we naar het 'begrijpen' van het concept *afgeleide* (geanalyseerd met het schema in figuur 1), zoals zichtbaar uit spreken en handelen bij het oplossen van de drie opgaven. Voor de PCK hebben we uitspraken geselecteerd voor de affectieve, curriculaire, instructionele en interdisciplinaire componenten, waarvan de laatste een nieuw aspect is van PCK.

We realiseren ons de beperkingen van de gekozen onderzoeksmethode. Het aantal deelnemende docenten is laag, natuurkundedocenten zijn over-, en jonge docenten zijn ondervertegenwoordigd. Ook genereert een interview slechts data van beperkte betrouwbaarheid voor het uitgevoerde curriculum: met klassenobservaties hadden we de beweringen van de docenten kunnen valideren. Klassenbezoek op precies die momenten dat een niet-wiskundedocent de afgeleide gebruikt, bleek echter binnen het bestek van ons onderzoek organisatorisch onhaalbaar. Op basis van de interviews kunnen we daarom onderzoeksvraag 2, naar behandeling en toelichting van het concept afgeleide in de lespraktijk, slechts indicatief beantwoorden.

4. Resultaten

4.1 CK van de afgeleide

Op één na, losten alle docenten de eerste twee opgaven correct op. De voorkeursmethode van alle natuur- en scheikundedocenten was de raaklijnmethode: een raaklijn aan de grafiek tekenen en daarvan de helling berekenen, zijnde de momentane verandering (in figuur 1: een verband leggen tussen cel G3 en Na3). Zie tabel 2 voor de gegeven oplossingsmethoden bij een vraag naar momentane snelheid (vraag b uit de opgave Leegpompen, zie appendix B).

Bij een correcte oplossing vroegen we naar alternatieve oplossingsmethoden voor dezelfde opgave. Zo antwoordde een scheikundedocent op de vraag naar een alternatieve manier:

'Oh, dan heb ik even wat meer tijd nodig. Dan moet je de formules volgens mij gaan integreren of zo...oh nee differentiëren, de raaklijn, dan moet je de differentiaal nemen van zo'n lijn, dat zou wel kunnen en dan stop je 40 erin ...zal ik eens kijken, ik heb geen idee of dat goed gaat...hoe ging dat ook al weer, dit doe ik niet alle dagen' (Simone).

Het symbolisch differentiëren werd dus door de meeste docenten als alternatieve methode gebruikt, met de aantekening dat het geen gangbare techniek was:

'Als je dat wiskundig zou doen, dan moet je de afgeleiden aan elkaar gelijk stellen, maar dat doet geen enkele natuurkundeflerling, dat doen ze niet. De eerste [helling] heb je uitgerekend, en dan ga je dus een raaklijn trekken met een helling van 4' (Piet).

Een van de economiedocenten gebruikte de begrippen *raaklijn* en *afgeleide* door elkaar, als een soort gelijkshakeling van de grafische en de symbolische representatie:

'En dan moet je de snelheid weten. Met andere woorden ...eh...snelheid is, dat is weer de afgeleide van die lijn. De verandering van volume per minuut. Dus de verandering in volume gedeeld door de verandering in t. Raaklijn maken. De afgeleide dV/dt

Tabel 2: oplossingsmethoden en uitspraken bij toetsvragen

Naam	aanpak bij opgave 'Leegpompen b'	uitspraken bij opgave 'Remweg b' en 'Remweg c'
Paul	<ol style="list-style-type: none"> 1. differentiëren (symbolisch) 2. raaklijn (grafisch) 3. op groot interval tussen 0 en 80 (numeriek) 	<p>R is een afstand, dus $1/2 \text{ m}^2$ [maakt gedurende vele minuten een eenhedenanalyse]. R' is de remtijd, als je uren tegen seconden wegstreept, moet je maal 3.6 doen, dus hij doet er 4,14 seconden over om stil te staan.</p> <p>R'', is dat niet gewoon een versnelling?</p>
Peter	<ol style="list-style-type: none"> 1. differentiëren (symbolisch) 2. raaklijn (grafisch) 3. GR gebruiken met verschuiffunctie en 'trace' (grafisch) 4. GR gebruiken met afgeleide en 'intersect' (symbolisch) 	<p>R' is hoeveel de remweg toeneemt per km per uur. Dus als je 80 rijdt en je kijkt wat de snelheidsverandering van 1 km per uur betekent.</p> <p>$R'' > 0$ betekent dat een toename van de snelheid betekent een ergere toename van de remweg.</p>
Philip	<ol style="list-style-type: none"> 1. raaklijn (grafisch) 2. differentiëren (symbolisch) 	<p>R' is de remsnelheid en die is 1,15 meter per seconde.</p> <p>R'' hoe moet ik dat nu duiden? [schrijft: $R = 0,5ct^2$ $R' = ct$ $R'' = c$]</p>
Pim	<ol style="list-style-type: none"> 1. raaklijn (grafisch) 2. differentiëren (symbolisch) 	<p>R' is de snelheid, maar dat is een wiskundig opgesteld gebeuren dat natuurkundig nog niet helemaal klopt, de afgeleide van de remweg is helemaal niet een continu iets.</p> <p>$R'' > 0$ voor de vertraging, dat kan helemaal niet, die moet negatief zijn.</p>
Piet	<ol style="list-style-type: none"> 1. raaklijn (grafisch) 2. differentiëren (symbolisch) 	<p>R' is de afgeleide van de remweg, dus de snelheid, maar bij natuurkunde differentiëren we altijd naar de tijd en niet naar de snelheid. Natuurkundig worden deze vragen niet gesteld.</p>
Simone	<ol style="list-style-type: none"> 1. raaklijn (grafisch) 2. differentiëren (symbolisch) 	<p>R' is een ander geval: die heeft hele goede remmen en staat al na 1,15 m stil, of een heel goed wegdek.</p> <p>En $R'' > 0$ betekent, dat je altijd een stukje remweg nodig hebt.</p>
Stefan	<ol style="list-style-type: none"> 1. raaklijn (grafisch) 	<p>R' is de eerste afgeleide, maar wat heb ik dan? Geen idee. Dan weet ik R'' ook niet. Ik pas.</p>
Enno	<ol style="list-style-type: none"> 1. differentiëren (symbolisch) 2. schattend aflezen uit de grafiek (grafisch) 	<p>R' is een verandering in meters, dat als de auto 80 km/uur is en hij remt, dat hij bij die rem 1,15 gemiddeld heeft, hoe moet ik het zeggen? Ik kom er niet uit.</p> <p>$R'' > 0$ betekent: de vertraging neemt steeds toe.</p>
Erik		<p>– [vanwege weigering bij de tweede opgave, is deze derde opgave niet voorgelegd]</p>
Ewout	<ol style="list-style-type: none"> 1. Op klein interval tussen 40 en 41 (numeriek) 	<p>R' is een andere functie, voor een frontale botsing waar je na 1,15 m stil staat.</p> <p>En $R'' > 0$ betekent dat je altijd een stukje remweg nodig hebt om stil te staan.</p>

is...nou daar gaan we. Productregel, quotiëntregel ken ik niet meer, maar ik kan het wel zo afleiden...dan op de ouderwetse manier' [gaat haakjes uitwerken] (Enno).

Ondanks de concreetheid gebruiken slechts twee docenten een numerieke methode, waarbij een toe- of afname over een interval op basis van verschilwaarden wordt bepaald. Over het niet noemen van deze methode zei een docent in de nabespreking:

'Omdat ik denk, als je de snelheid op dat moment wil hebben zijn er mijn inziens alleen maar twee methoden [raaklijn en differentiëren]. Als je deze methode [numerieke] gebruikt is het een benadering die slechter is dan de eerste twee. Ik heb dat ook nooit zo geleerd, dat zal wel het allerbelangrijkste zijn' (Pim).

Het repertoire bestond dus bij de meeste docenten uit twee oplossingsmethoden, namelijk een grafische en een symbolische. Eén docent, Peter, week in dit onderzoek af van zijn collega's: een natuurkundedocent die naast zijn eigen vak ook wiskundeonderwijs verzorgde. Hij was de enige docent die de grafische rekenmachine kon inzetten als alternatieve oplosmethode. Hij was ook de enige die de *remwegopgave* (zie appendix B) probleemloos oploste. Bij deze niet-standaardopgave raakten alle andere docenten in verwarring en ontbrak het abstractievermogen om de standaardoplossingsaanpak te verlaten. Ze zochten naar bekende elementen of methodes uit het eigen vak om een oplossing voor het probleem te vinden, zoals: de *afgeleide* van de afgelegde weg is de snelheid, of: de *afgeleide* van de snelheid is de versnelling. Een natuurkundedocent probeerde met een zeer uitgebreide eenhedenanalyse de oplossing (tevergeefs) te achterhalen:

'[...] ... dus bij 80 km /uur is mijn remtijd 1,15, maar die 1,15 is...eh wat is de eenheid ervan? Die massa dat is kg...die v in km/u delen door newtons...dan moet ik even newtons in kgkg ...m...per s² kg valt weg.. (schrijft dit allemaal op) er komt dus een tijd uit...je moet dus een....als je dat wegstreept....dan moet je dus delen door 1000 en als.....dan klopt hij.....we zijn er!!.....er blijft seconden staan' (Paul).

Bij de opgave over de leeglopende tank (Leeglopen b, zie appendix B) konden vijf van de tien docenten twee oplossingsmethoden inzetten en twee docenten konden meer dan twee oplossingsmethoden inzetten (zie tabel 2). Daarmee bleek het repertoire niet breder dan dat van vwo6-wiskunde B-leerlingen: bij dezelfde opgave gebruikten acht van de tien leerlingen meer dan twee oplossingsmethoden (raaklijnmethode, symbolisch differentiëren, gebruik grafische rekenmachine) en de niet-standaardopgave over de remweg werd door slechts één van de docenten tegen drie van de tien leerlingen goed volbracht. We zien dus, dat de CK van de afgeleide bij de docenten aanwezig is, maar vooral grafisch georiënteerd en gericht op een vakgebonden, instrumenteel gebruik.

4.2 Affectieve componenten van PCK

Op één na gaven alle docenten aan wiskunde leuk te vinden:

'Nou ja wiskunde is altijd leuk natuurlijk, ik vind wiskunde erg leuk' (Simone).

De docenten beschouwden wiskunde, begrijpelijkerwijs, als een ondersteunend vak:

'Voor natuurkundigen is het een gereedschap. En dat is ook echt een beetje zo' (Paul).

En:

'Bij de economie gebruik je het inderdaad als hulpmiddel. Niet cijferen om het cijferen zoals bij zuivere wiskunde wel eens het geval is, maar puur om iets helder te krijgen' (Enno).

Een meerderheid van de docenten gaf aan dat de opgedane wiskundekennis tijdens hun studie veelal niet nodig of onbruikbaar bleek in de onderwijspraktijk:

'Ik zag het nut er niet zo van in. Veel van die wiskunde gebruikte je nooit. Het was wiskunde om de wiskunde. Veel van die wiskunde zie ik hier ook niet gebruikt worden' (Pim).

De wiskundekennis zakte weg, zonder dat dit een probleem opleverde:

'O jee, kijk, we zeggen op een gegeven moment kun je dingen en weet je dat het zo is, maar hoe het precies zit, ik weet het niet meer. Ik weet nog iets van het verhaal van de limiet tot...het wordt steeds kleiner, nadert naar nul. Dan zeg ik, jongens als je het precies wil weten, ga je naar je wiskundedocent' (Erik).

Alle docenten gaven aan, dat hen de abstractie van wiskunde minder en de toepassingen meer aanspraken:

'Wiskundig zit zo'n wereld heel mooi in elkaar. Dat is denk ik ook de reden dat ik van de wiskunde afgestapt ben, ik wil het toch wat concreter hebben, dat past beter bij me' (Enno).

Alle docenten onderkenden het belang van wiskunde voor hun vak, maar ze benadrukten tevens verschillen. Een van de natuurkundedocenten illustreerde de verschillen tussen de vakken in de omgang met eenheden, waarbij hij verwees naar een opgave uit de Kangoeroewedstrijd¹:

18. De omtrek (in cm) van een cirkel is gelijk aan zijn oppervlakte (in cm²). Hoeveel cm is de straal van de cirkel?

A. 1 B. 2 C. π D. 4 E. 2π

De omtrek en oppervlakte worden aan elkaar gelijk gesteld, hetgeen

'je wiskundig wel kunt doen, maar natuurkundig niet, omdat we praten over verschillende eenheden' (Peter).

Bij het vak wiskunde kunnen dus opgaven zodanig geformuleerd zijn, dat ze niet goed verenigbaar zijn met de aanpak van de andere vakken. In plaats van ondersteunend, is wiskunde dan eerder storend of zelfs 'irritant'.

4.3 Curriculaire componenten van PCK

Voor de curriculaire componenten van PCK vroegen we naar kennis van het wiskundeleerplan in relatie tot het eigen vak, kennis van wiskundige toetsvormen in relatie tot het eigen vak en kennis van de wiskundige kennis van de leerlingen.

Met uitzondering van de natuurkundeleraar die ook wiskundeonderwijs verzorgde, gaven alle docenten in dit onderzoek aan niet precies te weten wat er in het wiskundeleerplan stond met betrekking tot relevante concepten voor hun vak. Ook gaven ze aan alleen informeel met de wiskundecollega's te overleggen, terwijl ze formeel overleg wel belangrijk achtten.

'Ik vind het wel belangrijk dat ik weet, als natuurkundeleraar, wat voor woord ze daarvoor [helling] leren bij wiskunde. Dat weet ik op dit moment niet, omdat het weer vernieuwd is' (Pim).

Kennis van het wiskundeleerplan werd ook niet nagestreefd door drie natuurkundeleraars met een wiskundebevoegdheid; zij gaven aan met deze bevoegdheid niets te (willen) doen.

Ondanks onbekendheid met het wiskundeleerplan, noemde men wel de hinder van tekortschietende leerplanafstemming en ontbrekende wiskundekennis bij leerlingen. Met name de basisrekenvaardigheden werden als problematisch ervaren:

'Wat ik wel merk is dat het gebruik van een rekenmachine, van de lagere school, de brugklas, eigenlijk dodelijk is voor het getalinzicht. Je ziet het overal in terug, 4 procent van 100 daar krijg je de antwoorden 4, 25, 60 en 96 op ... bijna standaard als je dat vraagt... 40 was ik nog vergeten trouwens' (Stefan).

In tegenstelling tot de gewone rekenmachine werden over de grafische rekenmachine, een veel gebruikt *tool* in het wiskundeonderwijs, vrijwel geen opmerkingen gemaakt en dus ook niet over het gebruik ervan in het eigen vak.

De docenten hadden kritiek op de manier waarop contextopgaven in het Nederlandse wiskunde curriculum worden gepresenteerd. Dit kwam naar voren bij de opgave over het Leeglopen (een gangbaar type opgave uit het wiskundeonderwijs). Bijna alle docenten maakten opmerkingen bij lezing van de opgavetekst, dus nog voordat ze aan de vraag toe kwamen. Ze probeerden bijvoorbeeld de in de tekst aangereikte formule te koppelen aan concepten uit hun eigen vak. Een natuurkundeleraar:

'Met behulp van de wet van Torricelli kun je een formule afleiden voor de hoeveelheid vloeistof in de tank. Die formule, die heb ik zo niet paraat. Eh... dat is toch de druk en

hoogte bij de uitstroomopening. Dan moet je toch weten hoe groot die is. Er staat niet bij hoe groot het gat is, of wel? Nou maakt niet uit. Ik ga eerst eens verder ... Een passende formule bij deze tank is: $V = 10(2 - 1/60t)^2$. En dan kom je weer met zo'n formule en dan weet ik ook niet waar die vandaan komt en dat vind ik niet leuk' (Paul).

'Deze formule, daar zou ik zelf nog even heel goed over moeten nadenken. Die leid je volgens mij af via een differentiaalvergelijking. Dat moet ik echt even op mijn gemak uitschrijven. Het is niet triviaal dat het dit is... het zal wel kloppen...' (Peter)

Naast het ontbreken van de natuurkundige achtergrond vonden de geïnterviewde docenten dat de gepresenteerde formule 'niet deugde': het ontbrak aan dimensies. Een docent:

'Hier heb ik iets raars. Hoe kun je het volume uitdrukken in t? Voor het volume van water in de tijd... V druk je uit in m³. Nou goed' (Enno).

Ook de scheikundedocenten benoemen hun verwarring over het gebrek aan eenheden in de formule $V = 40 - 1/3t$ eensluitend:

'1/3 is 1/3 kuub per minuut' (Stefan, Simone).

De curriculaire conventie bij wiskunde, om formules over concepten uit andere vakken 'uit de lucht te laten vallen' en dimensieloos te presenteren, bleek dus belemmerend.

4.4 Instructionele componenten van PCK

Bij confrontatie met de ondersteunende pagina's over de afgeleide in het schoolboek van hun eigen vak meldden de meeste docenten dat zij deze pagina's negeerden. De reden hiervoor was dat de uitleg in de boeken overbodig was of niet aansloot op de eigen didactische aanpak. Een economiedocent zei:

'Als ik denk: voor het examen heb je het niet echt nodig, vraag het dan even aan je wiskundedocent, die weet er veel meer van wat dat betreft dan ik. Ik verwijs gewoon door en ga verder met dingen die op het examen komen' (Ewout).

Aan zijn leerlingen gaf hij de volgende boodschap mee:

'Lees het geïnteresseerd door maar we richten ons op de opgaven zoals ze in het examen worden gesteld, dat is belangrijk en de wiskundige uitwerking, en hoe je dat wiskundig doet, dat is even buiten mijn competentie' (Ewout).

De docenten benadrukten dat de (economische/natuurkundige) concepten, begrijpelijkerwijs, prioriteit hebben binnen de beperkingen van hun lesprogramma. Over een economische opgave met een formule (symbolische representatie) zei een economiedocent dat hij in een proefwerk leerlingen eerst vragen zou stellen over economische interpretaties van de functie als: 'wat zijn de vaste kosten?', 'is er sprake van degressieve of progressieve groei?'. De docenten gaven aan dat zij hun uitleg vakspecifiek hielden, bijvoorbeeld

'je produceert... en dat levert één euro extra op...', zonder het noemen van het begrip 'limietovergang'.

In tegenstelling tot natuur- en scheikunde bleek bij economie de *afgeleide* onderdeel van het examenprogramma en ook opgenomen in de schoolboeken. Hier was de afstemming tussen de curricula een zorgpunt en noopte de economiedocenten tot het behandelen van iets dat bij wiskunde A nog niet aan de orde was geweest. Een economiedocent zei over zijn aanpak:

'Het probleem is... dit onderwerp [differentiëren] hebben we voor in het curriculum van de vijfde klas zitten. En dan hebben de 5 wiskunde alfa, eh... A-leerlingen het nog niet gehad of krijgen het helemaal niet. Dan moet ik het met wat kunst-en-vliegwerk wat proberen te bereiken en de wiskunde B-leerlingen beginnen een beetje aan afgeleiden te ruiken en die kunnen dan met behulp van de formulekaart de afgeleide bepalen. Dus limiet gebruik ik niet' (Enno).

De didactische aanpak voor de *afgeleide* bestond dus globaal uit: vermijden of concreet (situatiegebonden) houden. Verder gebruikten de meeste geïnterviewden termen en symbolen, zoals 'functie' of 'helling' op een andere manier dan bij wiskunde, net zoals de termen en symbolen in hun schoolboeken ook afwijken van de wiskundige gebruiken.

4.5 Interdisciplinaire componenten van PCK

In aanvulling op de affectieve, curriculaire en instructionele componenten van PCK hebben we de docenten ook gevraagd naar verbanden die ze in hun onderwijs leggen met het vak wiskunde. De scheikundedocenten gaven echter aan eerder verbanden met het vak natuurkunde te leggen dan met wiskunde:

'Ik zie wiskunde meer als een hulpvak bij de scheikunde dan scheikunde als een hulpvak bij wiskunde. Bij biologie en natuurkunde is het duidelijker. Daar zeg ik regelmatig, dat hebben jullie bij natuurkunde gehad of dat hebben jullie bij biologie gehad. Dat heb ik bij wiskunde niet zoveel' (Simone).

Voor het leggen van verbanden met wiskunde waren er een aantal belemmeringen. Als eerste waren de docenten meestal niet op de hoogte van kennis die in het schoolvak wiskunde wordt onderwezen (zie ook 4.3). Ten tweede was sinds de invoering van de Tweede Fase veel wiskunde weggesneden uit de examenprogramma's van natuurkunde, economie of scheikunde. Over het verbanden leggen met wiskunde zei een natuurkundedocent daarom:

'Wat dat betreft weinig. En als je naar de opgaven kijkt... als ze het [hij bedoelt: wiskunde] in de opgaven nodig zouden hebben, zou ik er meer aandacht aan besteden, maar ze hebben het niet meer nodig' (Philip).

Ten derde kón een verband niet altijd gelegd worden, omdat de bijbehorende wiskunde-technieken nog niet aan bod gekomen waren in de wiskundelessen:

'Soms probeer ik ook wel eens een differentiaalvergelijking, trillingen, de tweede afgeleide van een sinus is ook weer een sinus... Zeer summier allemaal. Dat ligt ook een beetje aan zo'n klas. Zijn ze een beetje geïnteresseerd, nou dan doe ik het... Heb je het gevoel dat het paarden voor de zwijnen zijn dan denk ik, laat maar' (Philip).

Ten slotte waren er weinig prikkels tot het leggen van verbanden, mede ook omdat er geen overleg werd gevoerd binnen de school tussen de eigen vaksectie en de wiskundesectie:

'Ja, er is informeel contact, scheikunde, natuurkunde en biologie zitten dan aan één tafel, en wiskunde zit apart' (Philip).

'We hebben het ooit geprobeerd met andere BiNaSk-vakken, maar nooit met wiskunde' (Piet).

Peter, de enige docent die naast zijn natuurkundelessen ook wiskundelessen gaf, legde veel verbanden met de wiskunde en gaf bovendien vanuit beide vakken de werkwijzen weer om zo de leerlingen op de verschillen tussen de vakken te wijzen. Hij gaf aan dat hij echt ging zoeken naar parallellen met wiskunde. Hij noemde de afgeleide en differentiëren en reikte de leerlingen extra diepgang en achtergronden aan. Hij probeerde ook aan te geven wat de verschillen zijn in de aanpak tussen de vakken:

'Maar ik vertel leerlingen er ook altijd bij dat we er anders mee omgaan bij natuurkunde. Bij wiskunde krijg je de formules, dan moet je hem differentiëren en de afgeleide op nul stellen en maxima berekenen en wat al nog maar meer. (...) Wij trekken raaklijnen, wij tellen hokjes. Het is hetzelfde. Het stelt hetzelfde voor, maar de techniek die je gebruikt, de manier waarop je er mee omgaat is anders' (Peter).

5. Conclusie en discussie

We hebben een verkennend onderzoek uitgevoerd naar de kennis van een veelgebruikt wiskundig concept en de bijbehorende behandeling ervan in hun onderwijs door docenten natuurkunde, scheikunde en economie. We hebben hiervoor enerzijds de wiskundekennis (Content Knowledge, CK) en anderzijds de kennis over het onderwijzen van die kennis (Pedagogical Content Knowledge, PCK) met betrekking tot het wiskundige concept *afgeleide* bij tien docenten van niet-wiskundevakken getoetst middels een interview.

De wiskundekennis (CK) uit hun opleiding was niet alleen weggezaakt, maar ook verschoven naar bruikbare kennis voor het eigen vakgebied. De geïnterviewde docenten benaderden het concept niet vanuit de wiskundige abstractie, maar geconcretiseerd in vakspecifieke betekenissen. De meest gebruikte methode bij het oplossen van de voorgelegde problemen was de grafische raaklijnmethode; de symbolische methode van het differentiëren had een meerderheid paraat, maar niet als routine. Alleen bij enkelen

omvatte het repertoire nog andere oplossingsmethoden, zoals numerieke of met de grafische rekenmachine. Een toegepaste, niet-standaardsituatie veroorzaakte verwarring – hierbij bleken de meeste docenten niet in staat om terug te vallen op wiskundige kennis van het concept. Uiteindelijk presteerden de docenten niet beter dan vwo6-wiskundeB-leerlingen uit een flankerend onderzoek waarin hetzelfde instrument werd gebruikt (Rooda, in voorbereiding).

Het onderzoek naar PCK hebben we uitgesplitst in vier componenten: een affectieve, een curriculaire, een instructionele en een interdisciplinaire component. Met betrekking tot de affectieve component gaven de meeste docenten aan wiskunde leuk te vinden, maar een voorkeur te hebben voor toepassingen boven abstractie. Allen onderkenden het nut van wiskunde voor hun eigen vak. Met betrekking tot de curriculaire component gaven alle docenten toe niet op de hoogte te zijn van het wiskundeleerplan, noch van de kennis die leerlingen opdoen bij wiskunde (met één uitzondering: de natuurkundedocent die ook wiskunde gaf). Daarnaast constateerden de docenten een tekort aan rekenvaardigheden bij de leerlingen en een gebrek aan aansluiting tussen conventies uit het eigen vak en de manier waarop in wiskundeopgaven natuurwetenschappelijke contexten dimensieloos gebruikt worden. Met betrekking tot de instructionele component bleek de aanpak van wiskundige aspecten in de vaklessen onafhankelijk te zijn van het gebruikte schoolboek (de pagina's met uitleg over de afgeleide werden overgeslagen), en ook onafhankelijk van de aanpak van de wiskundecollega (er was geen overleg tussen de vaksecties). Kortom, de benodigde wiskunde voor de vaklessen werd zo veel mogelijk beperkt of overgeslagen. Indien onvermijdelijk werd de uitleg vakspecifiek en concreet gehouden, waarbij wiskundige achtergronden, technieken of verbanden ook vaak niet noodzakelijk waren om te voldoen aan de exameneisen van het betreffende vak. Met betrekking tot de interdisciplinaire component gaven de docenten aan, dat zij geen expliciete verbanden tussen hun eigen vak en wiskunde legden, omdat hun eigen vak daar niet om vroeg. Er was echter één uitzondering: de natuurkundedocent die ook wiskundelessen verzorgde, gaf expliciete voorbeelden van bruggen die hij legde tussen de vakken.

Uit ons onderzoek komt een zwakke afstemming naar voren tussen enerzijds natuur-scheikunde en economie en anderzijds wiskunde. In natuurkunde-, scheikunde- en economielessen wordt een vakspecifieke aanpak van wiskunde gehanteerd, waarbij wiskundige methoden worden gehanteerd (met name de raaklijnmethode) zonder afstemming met de wiskundedocent. De geïnterviewde docenten beschouwden wiskunde als nuttig, maar ook als struikelblok. Ze zijn bijvoorbeeld ontevreden over de wiskundige voorbereiding van de leerlingen en over hoe in het schoolvak wiskunde vakspecifieke formules gevormd worden tot dimensieloze oefeningen, terwijl deze zouden kunnen functioneren als concretisering van wiskundige concepten. De zwakke afstemming is zowel curriculaire als instructioneel en lijkt niet gelegen in de affectieve component. De zwakke afstemming lijkt ook niet gelegen in de inhoudelijke kennis: de docenten hebben, hoewel enigszins weggezakt en met een voorkeur voor de grafische representatie, kennis van wiskundige

methoden. Deze kennis is voldoende voor het beoefenen van het eigen vak, maar bleek ook voldoende voor een interdisciplinaire uitwisseling met een interviewer met een wiskunde-achtergrond.

Naast curriculaire en instructionele componenten kent de zwakke afstemming een interdisciplinaire component. Vaksecties blijken nauwelijks met elkaar te overleggen en docenten slaan geen bruggen tussen hun vak en wiskunde, of geven aan wat de merites zijn van de verschillende invalshoeken. In ons onderzoek was er slechts één docent die expliciet bruggen bouwde tussen zijn eigen vak, natuurkunde, en wiskunde. Bijzonder kenmerk van deze docent was, dat hij zowel natuur- als wiskunde gaf en zich daardoor met name in de curriculaire en instructionele componenten van de twee vakken had verdiept. Voor de andere docenten ontbrak een dergelijke prikkel, zelfs bij de drie natuurkundedocenten met een slapende wiskundebevoegdheid. Voor het leggen van verbanden tussen vakken kunnen dergelijke 'dubbelvakkers' dus een exemplarische rol spelen. Voor een beleid gericht op samenhangend onderwijs zouden scholen dus meer gebruik kunnen maken van de docenten met meerdere bevoegdheden. Scholen kunnen, ten behoeve van interdisciplinaire contacten, stimuleren dat deze docenten in verschillende vakken lesgeven en hen ondersteuning bieden voor de studie van curriculaire en instructionele componenten van PCK van het tweede vak.

Daarnaast zal interdisciplinariteit een onderdeel van professionalisering moeten worden, zowel voor de CK als voor de PCK, en zowel voor de wiskundedocenten als voor hun collega's. Hierin kan bijvoorbeeld uitgewisseld worden over hoe concepten twintig jaar geleden en nu in het onderwijs worden geleerd. Een thema voor uitwisseling is ook het bestuderen van elkaars schoolboeken en bespreken waarom *differentiaal* en *differentiequotiënt* geen termen zijn in wiskundelessen en wel in natuur-, scheikunde en economielessen. Ook kan er uitgewisseld worden, hoe en waarom in natuur- en scheikunde gekozen is voor de grafische raaklijnmethode, in economie is gekozen voor een numerieke aanpak met een toename van één eenheid (bijvoorbeeld marginale kosten), en bij wiskunde een grafische rekenmachine wordt gehanteerd. In deze uitwisseling moet ook plaats ingeruimd worden voor een verbetering van de kennis (CK en PCK) van wiskundedocenten met betrekking tot natuurwetenschappelijke concepten die gebruikt worden als contexten in wiskundeopgaven (bijvoorbeeld de Wet van Torricelli bij de opgave over het leeglopen van een watervat).

We willen nog kort terugblikken op de gehanteerde onderzoeksmethode. De ervaringen uit ons onderzoek leren dat de respons negatief beïnvloed werd doordat ons interview een kennistoets omvatte. Dit is enerzijds begrijpelijk (getoetst worden kan onaangenaam zijn), maar anderzijds zorgelijk: de kwaliteit van onderwijs hangt mede af van het kennisniveau van docenten; er moeten dan ook methoden zijn om dit te meten en de beroepsgroep moet daaraan medewerking verlenen. Daarnaast leert ons onderzoek dat interviews informatieve data opleveren over de lespraktijk, met name met een instrument gebaseerd op schoolboeken die de docent gebruikt. Een dergelijk docent-specifiek instru-

ment komt dichterbij de praktijk dan een meer algemene vragenlijst. Aan de andere kant blijven dergelijke data gekleurd door de zelfrapportage. We willen daarom pleiten voor aanvullend onderzoek met lesobservaties, waarmee met name het onderzoek naar de PCK van ervaren docenten verdiept kan worden. In dit verband willen we ook wijzen op een beperking in de diverse theoretische kaders rond PCK waarop we in ons onderzoek stuitten. Deze kaders hebben steevast betrekking op het eigen schoolvak zonder raakvlakken met aangrenzende schoolvakken te beschrijven. We stellen daarom voor om de PCK uit te breiden met een component voor samenhangend onderwijs, namelijk de kennis om verbanden aan te brengen tussen vakken.

Ten slotte: leerlingen maken op verschillende plaatsen in het onderwijs kennis met wiskundige concepten. Deze variatie kan leiden tot een brede vorming, maar ook tot verwarring door de verschillen tussen de 'boodschappen' in opeenvolgende lessen. De effecten van de niet-samenhangende informatie die de leerling ontvangt verdienen nader onderzoek.

Noot

1. De Stichting Wiskunde Kangoeroe organiseert jaarlijks de reken- en wiskundewedstrijd in Nederland als onderdeel van een internationaal evenement.

English summary

Mathematical concepts are used in non-mathematical lessons, such as physics, chemistry and economics; consequently, these lessons are also a learning environment for mathematics. To characterize this environment, and to contribute to discussions on *coherent* education, we carried out an exploratory study on the knowledge and usage of mathematical concepts among teachers of physics, chemistry and economics. The study focused on the concept *derivative*, which is used for velocity and acceleration in physics, for reaction speed in chemistry, and for marginal costs in economics. For teacher knowledge with respect to the derivative we discerned *Content Knowledge* and *Pedagogical Content Knowledge* (Shulman, 1986). We interviewed and assessed ten teachers on their knowledge and their methods of explaining the derivative in the classroom. It turned out that mathematical knowledge had dwindled and was perceived as useless for classroom practice, and that the repertoire of solution methods for mathematics problems was limited. The teachers did not approach the mathematical concept as an abstraction, but looked for concrete signification. In classroom practice they avoided mathematical backgrounds, techniques and relationships, and they kept their explanations linked to situations. We observed little alignment between mathematics and the affiliated sciences, both in conventions of terminology and symbol usage, and between curricula and explanation methods. There was one exception: a physics teacher, who simultaneously taught mathematics, explicitly connected subjects in the classroom. Therefore, we recommend more

interdisciplinary professional development, both for CK and for PCK, as a basis for a better alignment between subjects.

Literatuur

- Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Basson, I. (2002). Physics and mathematics as interrelated fields of thought development using acceleration as an example. *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology*, 33(5), 679-690.
- Berlin, D.F. (1991). *Integrating Science and Mathematics in Teaching and Learning: A Bibliography*. Columbus, OH: ERIC/CSMEE Publications.
- Bezuidenhout, J. (1998). First-year university students' understanding of rate of change, *International Journal of Mathematics Education in Science & Technology*, 29(3), 389-399.
- Braber, N.S. den (2007). *Schoolboekenanalyse; tussenrapportage van het onderzoek 'Hellingen, snelheden en marginale kosten'*. Beschikbaar van: http://www.nwo.nl/nwo-home.nsf/pages/NWOA_763ATR. Den Haag: NWO.
- Cobb, P., & Bowers, J. (1999). Cognitive and situated learning: Perspectives in theory and practice. *Educational Researcher*, 28(2), 4-15.
- Cooney, T.J., & Wiegel, H. G. (2003). Examining the mathematics in mathematics education. In A. J. Bishop e.a. (red.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 795-828). Dordrecht: Kluwer.
- Doorman, L.M. (2005). *Modelling motion: from trace graphs to instantaneous change*. Utrecht: CD-Bèta Press.
- Driel, J.H. van (2008). Van een lerende vakdocent leer je het meest. *Tijdschrift voor Didactiek der Bètawetenschappen*, 25(1&2), 71-75.
- Even, R. (1993). Subject-Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge: Prospective Secondary Teachers and the Function Concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(2), 94-116.
- Fennema, E., & Franke, M.L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. Grouws (red.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 147-164). Reston, VA: NCTM.
- Geraedts C., Boersma K.Th., & Eijkelhof H.M.C. (2006). Towards coherent Science and Technology education. *Journal of Curriculum Studies*, 38(3), 307-325.
- Geraedts, C.L., Boersma, K. Th., Huijs, H.A.M., & Eijkelhof, H.M.C. (2001). Ruimte voor SONaTe; *onderzoek naar good practice op het gebied van samenhangend onderwijs in natuur en techniek in de basisvorming*. Delft: Stichting AXIS.
- Goldin, G.A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interview in mathematics education research. In A. E. Kelly & R.A. Lesh (red.), *Handbook of Research*

- Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517-545). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Hiebert, J., & Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grouws (red.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). Reston, VA: NCTM.
- Hill, H.C., Rowan, B., & Ball, D.L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal*, 42(2), 371-406.
- Hill, H.C., Ball, D.L., Sleep, L., & Lewis, J.M. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge: what knowledge matters and what evidence counts? In F. Lester (red.), *Second Handbook for Research on Mathematics Education* (pp. 111-155). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Inspectie van het Onderwijs (1999). *Werk aan de basis. Evaluatie van de basisvorming*. Den Haag: SDU.
- Kendal, M., & Stacey, K. (2003). Tracing Learning of Three Representations with the Differentiation Competency Framework. *Mathematics Education Research Journal*, 15(1), 22- 41.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Krüger, J., Paus, J., & Zwaard, P. van der (2005). *Samenhangend onderwijs voor natuurkunde en wiskunde; Tweede fase Voortgezet onderwijs*. Enschede: SLO.
- Luyn, J. van (1998). *Basisvorming: de basis van het studiehuis*. Den Haag: PMVO.
- Magnussen, S., Krajcik, J., & Borko, H. (1999). Nature, sources and development of pedagogical content knowledge. In J. Gess-Newsome & N.G. Lederman (red.), *Examining pedagogical content knowledge* (pp. 95-132). Dordrecht: Kluwer.
- Monk, D.H. (1994). Subject Area Preparation of Secondary Mathematics and Science Teachers and Student Achievement. *Economics of Education Review*, 13(2), 125-145.
- Moeldijk A.H., & Lichtenegger I. (2006). Biertje? SaLVO!, een samenwerkingsproject gericht op inhoudelijke samenhang van vakken. *NVOX*, 31(10), 482-484.
- Parreren, C.F. van (1982). *Leren op school*. Groningen: Wolters Noordhoff.
- Reulen, J.J.M., & Rosmalen, P.H.W. (2000). *Het voortgezet onderwijs in Nederland: ontwikkelingen, structuren en regelingen*. Tilburg: Remmers.
- Roorda, G. (in voorbereiding). *De ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid van leerlingen in de natuurprofielen van het VWO met betrekking tot het begrip 'afgeleide'*. Groningen: Rijksuniversiteit Groningen.
- Roorda, G., & Streun, A. van (2002). Criteria voor samenhangend (wiskunde)onderwijs. In J.F. Deinum, J. van Maanen, A. van Streun & J. Tolboom (red.), *Werken aan de kwaliteit van het onderwijs in de bètavakken*. Groningen: Rijksuniversiteit Groningen, UCLO.

- Roorda, G., Vos, P., & Goedhart, M. (2007). Derivatives in Applications: Describing Students' Understanding. In G. Kaiser, F. Garcia, & B. Sriraman (red.), *Proceedings of the Working Group on Mathematical Modelling and Applications at the 5th Conference on European Research in Mathematics Education (CERME-5)*. Nicosia, Cyprus: University of Cyprus.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Thorndike, J.G.L., & Woodworth, R.S. (1901). The influence of improvement in one mental function upon the efficiency of other functions. *Psychological Review*, 8, 247-261, 384-395, 553-564.
- Veal, W.R., & MaKinster, J.G. (1999). Pedagogical Content Knowledge Taxonomies. *Electronic Journal of Science Education*, 3(4).
- Werkgroep afstemming wiskunde-natuurkunde. (2007). Eindverslag van Werkgroep *Afstemming Wiskunde-Natuurkunde aan vernieuwingscommissies wiskunde (cTWO) en natuurkunde (NiNa)*. Rapport. Utrecht: WAWN.
- Wetenschappelijke Raad voor het Regeringsbeleid (WRR) (1986). *Basisvorming in het onderwijs*. Den Haag: WRR.
- Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld & J. Kaput (red.), *Research in Collegiate Mathematics Education, Volume IV* (pp. 103-127). Providence, RI: AMS.
- Zegers, G.E., Boersma, K.Th., Genseberger, R.J., Jambroes-Willebrand, A.G., Kooij, H. van der, Mooldijk, A.H., Wijers, M., & Eijkelhof, H.M.C. (2003). *Een basis voor SONa-Te. Voorbeelden van inhoudelijke samenhang tussen de natuurwetenschappelijke vakken en wiskunde in de tweede fase havo/vwo*. Delft: Stichting Axis.

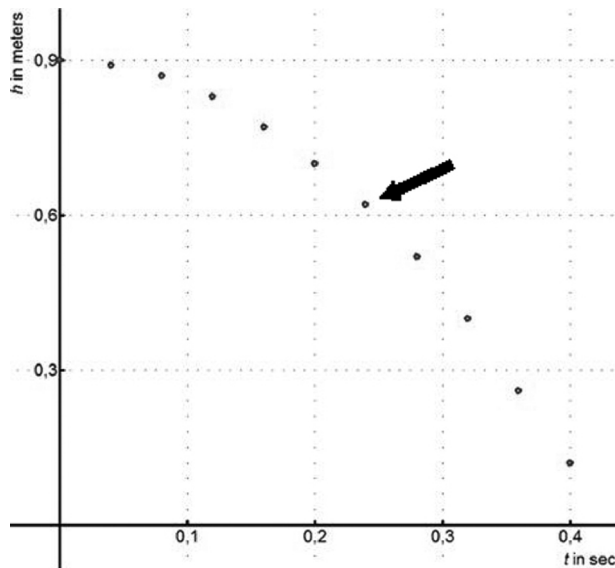
Appendix A – Vakspecifieke opdrachten in de interviews

Kogel (natuurkunde)

Bij een practicum voor natuurkunde laten twee leerlingen een kogel van een hoogte van 90 cm vallen. Ze gebruiken een opstelling waardoor er geen wrijving optreedt. Tijdens de val maken ze een stroboscopische foto van de kogel. De stroboscoop geeft 25 flitsen per seconde.

De leerlingen hebben hun metingen eerst in een tabel, en vervolgens in een grafiek weergegeven. Je ziet de tabel en de grafiek hieronder.

<i>tijd (s)</i>	0	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20	0,24	0,28	0,32	0,36	0,40
<i>hoogte (cm)</i>	90	89	87	83	77	70	62	52	40	26	12



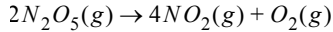
De leerlingen hebben ontdekt dat de grafiek een deel van een parabool is. Daarom is het hun gelukt om een formule op te stellen voor de hoogte (m) van de kogel afhankelijk van de tijd (s), namelijk $h(t) = 0,9 - 4,9t^2$

Bij één van de punten staat een pijl. In het practicumverslag beschrijven de leerlingen hoe ze op dat moment de snelheid van de kogel kunnen berekenen.

Hoe kunnen ze die snelheid berekenen?

Distikstofpenta-oxyde (scheikunde)

Distikstofpenta-oxyde is een kleurloze stof die bij hogere temperaturen ontleedt onder vorming van het bruine stikstofdioxide en het eveneens kleurloze zuurstof volgens de vergelijking:



In een experiment werden bij een constante temperatuur de volgende meetresultaten verkregen

Reactietijd (seconden)	$[NO_2](molL^{-1})$
0	0,00
500	2,96
1500	6,50
2500	8,26

- Op tijdstip $t = 0$ was $[N_2O_5]$ gelijk aan $5,00 L^{-1}$.
Bereken $[N_2O_5]$ en $[O_2]$ op elk van de tijdstippen die in de tabel vermeld zijn.
- Maak een zo nauwkeurig mogelijke schatting van de reactiesnelheid op $t = 0$.

Monopolie (economie)

Wanneer een firma de alleenverkoop (het monopolie) bezit van een bepaald product, dan moeten alle consumenten bij die ene firma kopen. Als het product volgens de consumenten te duur wordt, dan neemt het aantal verkochte eenheden van dat product af.

Een bedrijf produceert een bepaald product. Door een marktonderzoek is vastgesteld dat voor het verband tussen de prijs en de verkochte hoeveelheid geldt $p = -0,5q + 12$, hierin is q het aantal verkochte eenheden in duizendtallen en p de prijs in euro per stuk. Voor de totale opbrengst in duizenden euro's geldt dan $TO = -0,5q^2 + 12q$

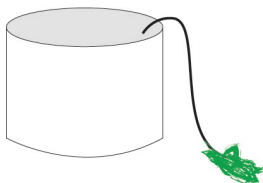
Als het bedrijf meer produceert zullen de kosten voor de productie ook toenemen. Het wiskundig model dat het bedrijf voor de totale kosten heeft opgesteld is $TK = 0,03q^3 - 0,5q^2 + 4q + 15$. Hierin is q in duizendtallen en TK in duizenden euro's.

- Als het bedrijf meer gaat produceren is er geen constante toename van de totale kosten. Bij welke productieomvang is de toename van de totale kosten het laagst?
- Onderzoek bij welke productie de kosten en de opbrengst even snel toenemen.

Appendix B – Opdrachten gebruikt in alle tien interviews

Leegpompen of leeglopen

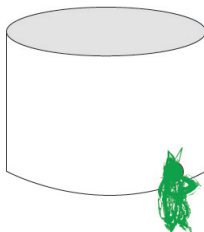
Een grote tank wordt leeggepompt (zie figuur 1). De tank heeft een inhoud van 40 m^3 dat is 40.000 liter. Voor het volume van het water in de tank geldt de formule $V = 40 - \frac{1}{3}t$. Hierin is V het volume in m^3 , en t de tijd in minuten.



Figuur 1.

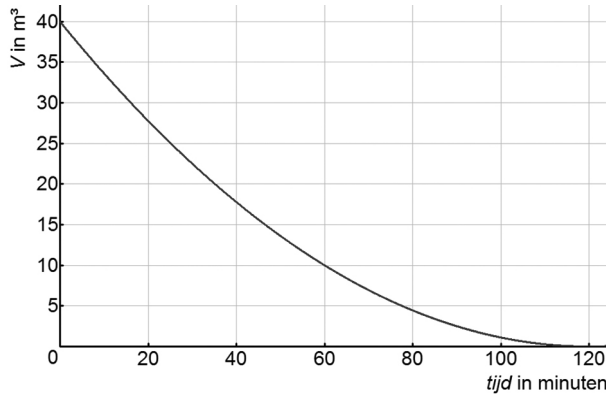
- a. Met welke snelheid (liter/minuut) wordt deze tank (figuur 1) leeggemaakt?

Een andere manier om deze tank leeg te maken is door aan de onderkant van de tank een opening te maken (figuur 2). Met behulp van de wet van Torricelli kun je een formule afleiden voor de hoeveelheid vloeistof in de tank.



Figuur 2. Tank leeg laten lopen (zie opdracht b)

De snelheid van leeglopen hangt namelijk af van de hoeveelheid water die op een bepaald moment nog aanwezig is in de tank. Als er minder water in de tank zit is de waterdruk bij de opening ook lager. Een passende formule bij deze tank is: $V = 10\left(2 - \frac{1}{60}t\right)^2$. Hierin is V het volume van het water in de tank in m^3 en t de tijd in minuten. In figuur 3 zie je de grafiek waarin V is uitgezet tegen t .



Figuur 3. grafiek van het leeglopen van een tank waar onderin een gat is gemaakt

- Met welke snelheid (liter/minuut) stroomt de tank leeg op $t = 40$ minuten?
- Beide tanks (figuur 1 en figuur 2) zijn na 2 uur leeg. Onderzoek op welk moment de uitstroomsnelheid in beide tanks gelijk is.

Remweg

De remweg $R(v)$ van een auto is de afstand die een auto nog rijdt, nadat de bestuurder begint te remmen. Deze remweg R in meter, is een functie van de snelheid v in km/u.

Ga ervan uit dat de maximumsnelheid van een auto 200 km/uur is.

Wat betekenen de volgende formules in termen van remweg en snelheid?

- $R(100) = 80$
- $R'(80) = 1,15$
- $R''(v) > 0$