Algebra: snel én goedkoop met de Formulemaker

Huub Nilwik en Aad Goddijn
Freudenthal Institute voor Science and Mathematics Education

Samenvatting
Klachten over gebrekkige algebraïsche vaardigheden van eerstejaars studenten HBO en WO haalden dit jaar de voorpagina's van de Nederlandse dagbladen. 'Ze' kunnen geen haakjes meer verdrijven, breuken onder één noemer brengen en staartdelen. Er verschijnen oproepen met een sterk back-to-the-basics karakter: droog oefenen, gericht op basisvaardigheden en met soms expliciet uitsluiten van 'leren via begrijpen' lijkt daarin het belangrijkste van het wiskundeonderwijs, vooral als het om de aansluiting naar vervolgonderwijs gaat.
De auteurs van deze bijdrage stellen zich op het breedgedragen standpunt dat het verwerven van vaardigheden niet van begripsvorming dient te worden gescheiden en zowel verbonden moet zijn met wiskundige probleemsituaties als in een op speciale activiteiten gerichte setting dient plaats te vinden.
Deze bijdrage beschrijft exploratief onderzoek waarin nog een stap verder wordt gegaan; er worden namelijk algebra-activiteiten beschreven en onderzocht waarmee leerlingen worden uitgedaagd te reflecteren over algebraïsche handelingen. De leerling gaat daarin dus op een metaniveau om met de basale vaardigheden, die vooral betrekking hebben op algoritmische uitvoering.
Hierbij wordt gebruik gemaakt van software die een tussenvorm is tussen een computeralgebra systeem en een schoolbord waarop de algebraïsche resultaten van de leerling zichtblaar blijven en hergebruikt kunnen worden. De tool zou een voor leerlingen goed toegankelijke werkomgeving moeten zijn, waarin met algebra geëxperimenteerd kan worden, doordat bijvoorbeeld algebraïsche bewerkingen als formuleconstructie, substitutie, expanderen, standaardiseren en op complexiteit beoordelen van expressies sterk visueel ondersteund worden .
Enkele eerste experimenten laten zien dat leerlingen met de software uit de voeten kunnen, dat de gestelde problemen uitdagend zijn om algebraïsche activiteiten uit te lokken die boven het basale niveau van haakjes verdrijven gaan en de basisvaardigheden een plaats geven in een inzichtelijk en betekenisvol geheel; het zijn algebra-activiteiten waarbij vooral beslissingen over uit te voeren acties moeten worden genomen, acties die dan hoofdzakelijk door de computer worden uitgevoerd. Er zijn indicaties dat het denken op een dergelijk algebraïsch metaniveau een extra stimulans geeft aan de ontwikkeling van (basis)vaardigheden, maar hier is nog veel nader onderzoek nodig.

1. Inleiding: het dilemma

In een eerder artikel in dit tijdschrift over algebra in het VO (Goddijn & Kindt, 2001) is geconstateerd dat er bij de huidige generatie leerlingen een hiaat bestaat in de manipulatie-vaardigheid met en het inzicht in de opbouw van formules. Op dit moment staan algebraïsche vaardigheden en vooral het ontbreken ervan centraal in de verhitte discussie over de doorstromingsproblematiek VO/HO, ook de doorsnee krantenlezer treft berichten over instaptoetsen van het WO op de voorpagina van zijn krant en weet te melden 'dat ze niet meer leren rekenen'. De roep om méér vaardigheden is luid, en om basisvaardigheden nog luider, waarbij de onderbouwing van de voorgestelde methode zich beperkt tot karikatureren van de bestaande onderwijspraktijk: het zou daar alleen maar gaan om platte verhaaltjessommen en het vragen om antwoord aan de rekenmachine. De website (Resonansgroep wiskunde, 2006) van de Resonansgroep wiskunde maakt dit duidelijk. Deze Resonansgroep heeft als taak het beoordelen van de voorstellen voor eindexamenprogramma's wiskunde vwo en havo zoals geformuleerd door de commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO, 2005) op hun relevantie voor doorstroming naar het wetenschappelijk onderwijs en het hoger beroepsonderwijs. De cTWO-voorstellen voor nieuwe examenprogramma's 2011 ademen een verwante sfeer: er wordt sterk de nadruk gelegd op het correct uitvoeren van wiskundige operaties met een reken-algebraïsch karakter.
Het is goed dat de discussie over de balans tussen begripsontwikkeling en basisvaardigheden gevoerd wordt, maar de wat eenzijdige behavioristische benadering van algebraïsche basisvaardigheden lijkt weinig effectief en is wellicht voor een aantal leerlingen geestdodend. Een tegenaccent, in de vorm van een breed pleidooi voor betekenisrijke algebra staat in *Wat a is dat kun je niet weten* (Drijvers,

2006). Daar is ook aandacht voor explorerende werkwijzen, die ondermeer gebruik maken van de nieuwe mogelijkheden die de ICT anno 2007 biedt.
Milde maar ook zeer gemengde geluiden zijn te horen in kringen van de praktiserende docenten van het VO, zoals in Euclides, het tijdschrift van de Nederlandse Vereninging van Wiskundeleraren. Een recente bijdrage is *Parate kennis en Algebra* (van Streun, 2007), die expliciet oproept tot een consensusgericht debat dat uitgaat van de complexe werkelijkheid die de school is.

2. De accentverlegging die voorafging

In de onderbouw is het accent in de algebra al in de jaren tachtig en vroege jaren '90 verschoven van eenzijdig formeel gericht naar het onderzoeken van samenhangen tussen variabelen, waarbij uitgegaan wordt van min of meer realistische situaties, beschreven d.m.v. tabellen, grafieken en formules. Deze invalshoek is samenhangend beschreven in publicaties van de Commissie Wiskunde Onderwijs 12-16, (Abels e.a., 1992). Verschillende vertaalacties tussen de situatie zelf en de representatievormen ervan in tabel, grafiek, formule werden onderscheiden en beoefend, o.a. geïnspireerd door werk van Claude Janvier (Janvier, 1978). In de publicaties van het COW werd het element formulemanipulatie in verband gebracht met de andere genoemde aspecten van algebra bedrijven. Deze accentverschuiving werkte goed uit voor een grote groep van leerlingen, speciaal die van de toenmalige mavo. Politieke interventies maakten het onmogelijk voldoende aandacht te besteden aan zowel het lager beroepsonderwijs als het havo en vwo. Gevolg was dat ook voor de havo- en vwo-stroom van leerlingen het aantal algebratechnische oefeningen in de onderbouw sterk werd beperkt. Tel daarbij dat in de nieuwe tweede fase en het studiehuis het aantal wiskundecontacturen in de bovenbouw feitelijk bijna werd gehalveerd en het wordt enigszins begrijpelijk dat leerlingen in de bovenbouw anno 2006-2007 problemen hebben bij het herleiden van algebraïsche expressies.

3. Nieuwe weg: vaardigheden in algebraïsch betekenisvolle situaties?

Door gebrek aan inzicht in de opbouw van formules hebben de leerlingen ook minder inzicht in optimale strategieën voor het oplossen van algebraproblemen (Gravemijer, 1990). Drijvers (2002) stelt dat de invoering van ICT in het algebra-onderwijs (Grafische Rekenmachine, Computer Algebra) vaardigheden in elementaire basisprocedures zoals haakjes uitwerken en eenvoudige vergelijkingen oplossen van de leerling overnemen, maar dat juist voor het zinvol en correct gebruik van ICT-middelen en het toepassen van vaardigheden inzicht in de struktuur en betekenis van formules een noodzaak zijn. De schrijver spreekt hierbij over 'symbol sense', een begrip waarop wij in de discussie nog zullen terugkomen.
In *Algebra met Applets* (Wisweb-team, 2004) wordt een leerlijn algebra klas 3 havo/vwo gerealiseerd, waarbij ICT essentieel is. De gebruikte applets sluiten dicht aan bij de aard van de algebra zoals die in de leerboeken verschijnt, maar bieden ook veel mogelijkheden tot exploratie; vooral het vinden van een strategie voor het oplossen van (traditionele) vergelijkingen, waarbij de leerling bewerkingskeuzes maakt en de computer het dagelijks werk doet, functioneert prima. Later is rond deze aanpak een DLO gebouwd die in zekere zin de twee uitersten van oefenen en exploreren bij elkaar brengt; het geven van goede feedback aan de ICT-gebruikende leerling is een belangrijke component in deze benadering (Wisweb-team, 2002/7; Boon, 2004; Boon & van Reeuwijk, 2006).
Goddijn & Kindt (2001) stellen voor ruimte te creeren in het onderwijs voor algebraïsche problemen met een ruimere structuur; problemen die in eerste instantie uitdagen tot het organiseren van de probleemsituatie en in tweede instantie leiden tot beoefenen van de 'basale' vaardigheden. Aandachtspunten daarbij zijn de ontwikkeling van symbolisch taalgevoel, doorgronden en testen van formules, vertalen en redeneren met algebra. Ook Arcavi (1994) gebruikt het begrip 'symbol sense' en stelt dat het aanleren van symbolische manipulatie plaats moet vinden binnen een rijke context. Problemen met een puur wiskundig karakter geven vaak die uitdaging.
Een evident voorbeeld is een opgave, die in het project *Algebra met Applets* gebruikt is. Derde klassers werkten daar met een applet die de mogelijkheid geeft een formule als $(x + y) \cdot (y + 2)$ als de oppervlakte van een rechthoek met deelrechthoeken op het computerscherm in beeld te brengen. In dit geval verschijnen 4 deelrechthoeken: $x \cdot y$, $2 \cdot x$, $2 \cdot y$ en $y \cdot y$. De betreffende opgave was een formule

te bedenken die tot 100 deelrechthoeken zou leiden. De vertaling van algebraïsch uitwerken naar combinatorisch redeneren – waar de leerlingen weinig moeite mee hadden – markeert de overgang van het basale niveau naar het metaniveau waarop niet meer expliciet algebraïsch wordt uitgevoerd, maar zeker wel impliciet wordt geredeneerd en gegeneraliseerd óver de algoritmisch-algebraïsche uitvoering van tien opgetelde letters tussen haakjes, vermenigvuldigd met tien andere opgetelde letters tussen een ander haakjespaar . [1]

In dit artikel beschrijven we resultaten van een exploratief onderzoek waarmee de ontwikkeling van algebraïsche metavaardigheden, zoals 'symbol sense' wordt geïllustreerd. Het gaat daarbij on de inzet van puur algebraïsche probleemsituaties om zowel het denken op een algebraïsch metaniveau als het aanleren en onderhouden van (basis)vaardigheden te stimuleren.

Eerst worden enkele voorbeelden van dergelijke algebraïsche probleemsituaties beschreven; probleemsituaties waarbij algebraïsche bewerkingen ondergeschikt zijn aan het nadenken over de probleemsituaties. De speciaal hiervoor ontwikkelde applet Formulemaker (Nilwik, 2005) wordt daarna kort toegelicht. Vervolgens worden observaties van het werk van enkele VWO-leerlingen die met het bijhorende lesmateriaal en ICT gewerkt hebben besproken.

In een evaluatie van het geheel, in het kader van de huidige discussie rond het thema algebraïsche vaardigheden, wordt de balans opgemaakt.

4. Enkele algebraïsche probleemsituaties en bijhorende metavaardigheden

De hier volgende voorbeelden, die de kern aangeven van wat de leerlingen in de experimenteersituatie werd voorgelegd, bevatten vragen die nogal afwijken van de het gebruikelijke 'herleid, vereenvoudig, ontbind, etcetera', waar de vraagstelling de uit te voeren algebraïsche activiteit al compleet aangeeft. Bij de volgende vragen wordt in zekere zin de aard van de algebraïsche equivalentie zelf tot voorwerp van onderzoek gemaakt en onder de microscoop gehouden. Een voorgeschreven algebraïsch uitvoeringsplan is daarbij steeds afwezig, de gestelde vragen dagen uit tot een denkspel op een ander (hoger) niveau.

Snelle formules

a. Stel je voor je moet a^{64} uitrekenen voor een of andere waarde van de variable a. Je wilt het doen met weinig vermenigvuldigingen.
   Wat is wijsheid? Met a beginnnen en dan 63 keer de operatie '$\times\ a$' uitvoeren? Of misschien a met zichzelf en het resultaat nog eens met zichzelf vermenigvuldigen, je krijgt dan a^4, enzovoort? Of nog anders?
b. Je hebt vast wel eens $(x + 5)(y + 5)$ uitgewerkt tot $xy + 5x + 5y + 25$. Dat betekent dat als je een bepaalde x en een bepaalde y invult er bij beide hetzelfde uitkomt. Stel je voor, jij (of een computer) moet voor heel veel x-en en y-en deze formule uitrekenen. Welke van de twee formules kies je dan, $(x + 5)(y + 5)$ of $xy + 5x + 5y + 25$? Of kies je nog een andere vorm?
c. De volgende gelijkheid is makkelijker dan hij lijkt:
   $$x^6 - 3x^5 + 7x^4 + 4x^3 + 2x^2 -6x + 1 = 1 +x(-6 +x(2 +x(4+ x(7 +x(-3+x)))))$$
   Onderzoek dezelfde vraag als bij b.! En hoe gaat het bij kortere of langere formules van dit type?

Elke van deze drie probleemaanduidingen vraagt voorbereiding voordat de leerling aan onderzoek en aan precisering toe is. Het gaat er duidelijk om te onderzoeken hoe de uitvoertijd als het ware beperkt kan blijven. Een preciesere definitie van het begrip 'complexiteit' is daarvoor op zeker moment nodig. Een mogelijkheid deze rekenkundige complexiteit intuïtief duidelijk te maken is de *kosten*-metafoor: aanroepen van een variabele en het gebruiken van een bewerking (ook een onuitgeschreven

[1] Ervaringen met de WiskundeB-dagen laten ook zien dat zeker VWO-leerlingen niet vragen naar toepassingen zolang het probleem maar wiskundig uitdagend is, d.w.z. de context moet boeiend zijn of aanleiding vormen tot wiskundig handelen, maar niet noodzakelijk "real life". Zie bijvoorbeeld de opgave voor de Wiskunde B-dag van 2002: *1 +1 = 2 en hoe nu verder.* (Wisb-dag-team, 2002); een variant hiervan kwam in het hier besproken onderzoek aan bod.

vermenigvuldiging) *kost* 1 punt, getallen zijn gratis. Uit de structuur van de formules volgt nu de totaalprijs. Equivalente formules met verschillende structuur kunnen aanzienlijk in *prijs* verschillen; bij het voorbeeld c. van hierboven zijn de prijzen 37 en 17. De straks te bespreken applet hanteert uiteraard een preciese omschrijving.
In deze probleemsituatie wordt via dit prijs-begrijp een nieuw kriterium aangegeven waaraan formules en de daarin voorkomende bewerkingen getoetst kunnen worden. Het kriterium is heel precies, maar dwingt toch tot een open onderzoek naar de structuur van mogelijke equivalente formules omdat een eenvoudige algoritmische aanpak bij de deelvraag ‘Of nog anders?’ ten enenmale ontbreekt.[2]

Grote breuken

d. Als de functie

$$f_1(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

op zichzelf toegepast wordt, ontstaat

$$f_2(x) = f_1(f_1(x)) = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}$$

.

en vervolgens

$$f_3(x) = f_1(f_2(x)) = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}$$

.

Te onderzoeken is het gedrag van de rij formules die bij verdere iteratie ontstaat; als eerste blijkt dat alle functies van de rij van de vorm

$$\frac{ax + b}{cx + d}$$

zijn. Uiteindelijk moet een betrekkelijk eenvoudige manier worden gevonden om de hele rij te voorspellen.
De coëfficienten in de formules blijken uit de rij van Fibonacci te komen.

e. Probeer hetzelfde als in vraag d., nu met

$$g_1(x) = \frac{1}{x} - 1$$

In dit voorbeeld gaat het om herkenning en verklaring van het patroon in een rij formules, die ontstaat door iteratie. De wiskundige contekst is daarom niet meer de rekencontekst maar de redeneercontekst, omdat een patroon verklaard moet worden opgrond van inzicht in het algoritmisch proces.

Op te merken valt dat de vaststelling dat iteratie van de gegeven formule steeds tot gebroken lineaire functies leidt, op zich ook van groot belang is. In een traditioneel wiskundeprogramma komt zo’n thema (en dat van de geslotenheid van de verzameling gebroken lineaire functies onder functiecompositie in het algemeen) pas veel later aan de orde, het begrip ‘groep’ speelt dan een rol. In dit geval is het voorbeeld gekozen omdat er veel mogelijkheden zijn vanuit een hoger standpunt naar de basale algebraïsche activiteiten te kijken. Zo kan de bedoelde geslotenheid onder samenstelling als

[2] Dit type vraagstelling speelt een grote rol in de toegepaste wiskunde, vooral in de informatica, maar heeft ook zeer ‘zuivere trekken’. Men zie voor dat laatste bijvoorbeeld Stephen Smale (1996). In andere vorm is vraag a. het onderwerp geweest van de wiskunde B-dag 2002.
Vraag c. is een voorbeeld van de zogenaamde regel van Horner, gedateerd 1819, voor het herschrijven van veeltermen. De methode is eerder genoemd door Newton en door Ch’in Chiu-Shao (China, dertiende eeuw).

gevolg van rekenregels voor breukvorm worden gezien, zonder dat de hele uitwerking handmatig hoeft te worden gedaan.

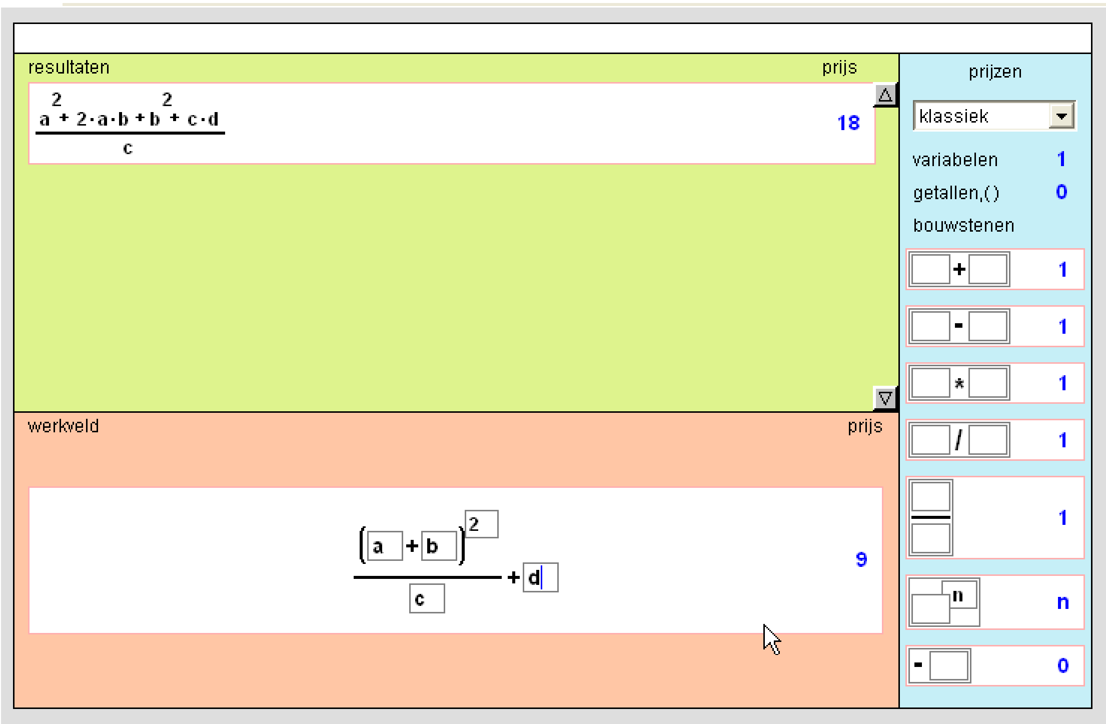
Bij onderzoek aan beide probleemsituaties is aan reflectie over de aard van de algebraïsche acties zelf moeilijk te ontkomen. De acties op zich zijn niet het hoofdprobleem (door leerlingen wordt er echter wel flink mee geoefend), maar het metaniveau waarop gewerkt wordt.
Totale abstractie is een ander kenmerk van de probleemsituaties. Er is zelfs geen verwijzing naar de mogelijke waarde van de variabelen. Puur de structuur van de formules, en de daarbij aan het licht komende kenmerken van equivalentie, substitutie (met enerzijds de daarbij ontstane complexiteit en anderzijds de vereenvoudigbaarheid) staan ter discussie.
Daarmee onderscheiden de opdrachten zich van zowel de 'droog oefenen' benadering bij het oefenen van algebraïsche basisvaardigheden als van het oefenen van algebra in toepassingssituaties van minder wiskundige aard.

5. De Applet Formulemaker

Het spreekt vanzelf dat voor het onderzoeken van de eerder beschreven probleemsituaties de behoefte aan een computerprogramma dat het 'vuile werk' doet, groot is.
De verschuiving van aandacht van het elementair grammaticaal-algoritmische naar het syntaxtische en naar het metaniveau van reflectie over formules, zou goed ondersteund kunnen worden met adequate software; software die de basale algorithmische activiteiten uitvoert, en zo ruimte biedt voor en een visuele basis geeft aan de beoogde redeneringen op algebraïsch metaniveau. Dit was de aanleiding voor de ontwikkeling van de applet Formulemaker.
De basis van een dergelijk het programma zou een formule-editor moeten zijn, die de visuele structuur van formules benadrukt. Het programma zou goed zichtbare en gevarieerde mogelijkheden moeten hebben voor substitutie. Het zou een 'schoolbord' moeten hebben waar formules bewaard kunnen worden om te worden hergebruikt.
Daarbij moet het een programma zijn dat helpt om op een eenduidige en beslisbare wijze de 'complexiteit' van formules te meten, het fenomeen dat in de eerste algebraïsche probleemsituatie centraal staat. Herhaaldelijk uittellen van bewerkingen is in het begin zeker nuttig, maar na enkele voorbeelden niet meer. Het moet hier dan ook om denken op een metaniveau gaan en niet om basaal tellen. Bij de regel van Horner in het voorbeeld is dat heel evident: de redenering die aantoont dat Horner efficiënter is vanaf een zekere graad van het polynoom, berust op het inkaart brengen van de algemene structuur van de formule en niet op specifiek natellen.
Hieronder volgt eerst een korte beschrijving van de werking van de applet, daarna worden de experimenteermogelijkheden van de gebruiker toegelicht en tot slot wordt op enkele kenmerken gewezen die Formulemaker didactisch onderscheiden van reguliere Computer Algebra Systems zoals bijvoorbeeld Maple.

5.1: KORTE BESCHRIJVING

Een afbeelding van de gebruikers-interface van de applet Formulemaker met een korte toelichting geeft snel een beeld van uiterlijk en mogelijkheden van het programma.

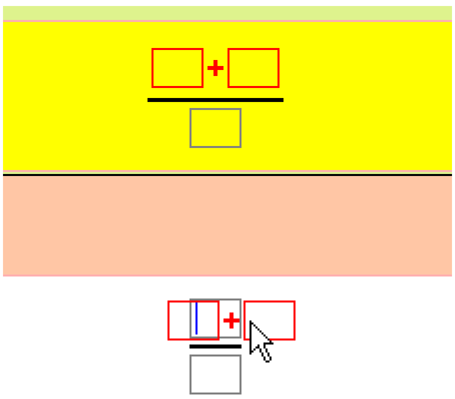


- Het blauwe gedeelte aan de rechterkant bevat de *bouwstenen* waarmee formules stapsgewijs opgebouwd worden. Variabelen, getallen, haakjes en bouwstenen hebben een prijs; er kan uit meerdere prijsstellingen gekozen worden.
- Het rode gedeelte linksonder, het *werkveld,* bevat de formule die gebouwd wordt.
- Het groene gedeelte linksboven, de *resultaten*, bevat formules of delen van formules die de gebruiker wil bewaren voor hergebruik; wanneer (zoals in deze afbeelding) een formule op standaardvorm gebracht wordt, dan verschijnt deze standaardvorm in de resultatenlijst.

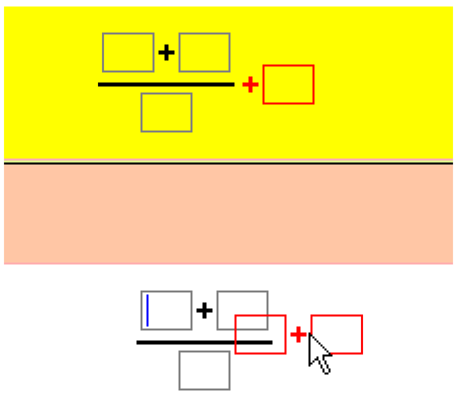
Formuleconstructie
De gebruiker bouwt stapsgewijs een formule door het aanslepen van bouwstenen, die bestaan uit een operator met 2 invoervelden (uitzondering: 1 invoerveld voor de unitaire minus). In een invoerveld kunnen alleen een of meer letters (de naam van een variabele) of een geheel getal ingetypt worden.
Nieuwe bouwstenen kunnen direkt in een bestaand invoerveld geplaatst worden (*invoegen*); ook kan de hele formule als linker- of rechterlid in nieuwe bouwsteen worden opgenomen (*voor- of achtervoegen*).

Tijdens het bouwen van de formules heeft de gebruiker de beschikking over een ‘preview-mogelijkheid’ (in de afbeeldingen hieronder staat de *preview* afgebeeld boven de actie van de gebruiker).

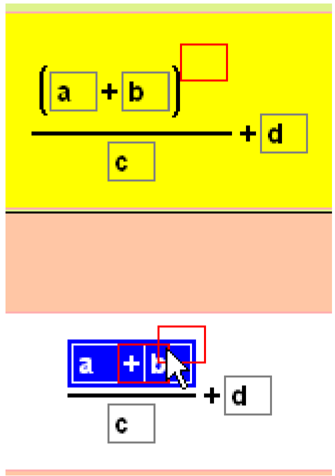
invoegen



achtervoegen



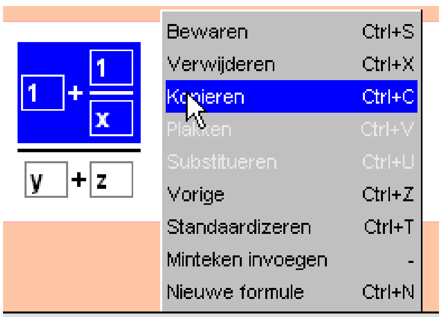
Reeds geconstrueerde delen van de formule (die zelf natuurlijk zinvolle formules zijn) kunnen geselecteerd worden; plaatsing van een bouwsteen links of rechts OP de selectie voegt een bouwsteen toe met als rechter- of linkerlid het geselecteerde deel van de formule (*tussenvoegen*).
Waar nodig worden automatisch haakjes toegevoegd.



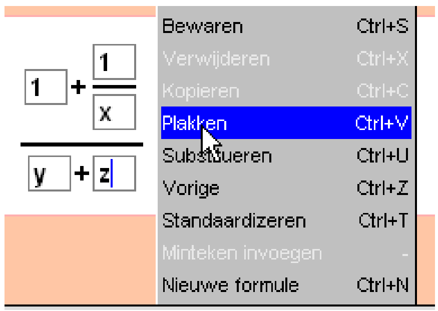
Schoolbordfunktie
Formules of delen van formules die de gebruiker wil bewaren voor hergebruik kunnen worden toegevoegd aan een lijst met *resultaten*.

Substitutie
Geselecteerde delen van de formule kunnen via ‘copy/paste’ direct in een invoerveld geplaatst worden.

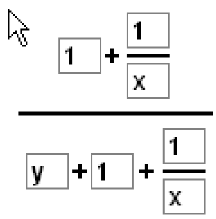
kopieren



plakken



resultaat



Een geselecteerd formule-onderdeel kan ook gesubstitueerd worden voor alle voorkomens van een variabele in de invoervelden.
De substitutie-mogelijkheden zijn ook beschikbaar voor geselecteerde onderdelen van formules die de gebruiker bewaard heeft in de lijst met resultaten; in dit geval worden de geselecteerde onderdelen naar de formule gesleept die de gebruiker aan het bouwen is, en is ook de ‘preview-mogelijkheid’ beschikbaar.

Standaardvorm
De Formulemaker bouwt onder andere rationale functies in een of meer variabelen.
De gebruiker kan deze formules op standaardvorm brengen; deze standaardvorm bevat een zo klein mogelijk aantal haakjes en maximaal één deling; het resultaat wordt automatisch toegevoegd aan de lijst van resultaten.

Prijsstelling
Variabelen, getallen, haakjes en bouwstenen hebben een prijs; in de klassieke prijsstelling kosten variabelen en alle operatoren 1 punt, machtsverheffen evenveel punten als de macht, terwijl getallen en haakjes gratis zijn; er kunnen ook andere prijsstellingen gekozen worden; de prijs van alle gemaakte formules wordt automatisch berekend.

5.2: ALGEBRAÏSCH EXPERIMENTEREN EN DE FORMULEMAKER.
Uitgangspunt voor de werking en bediening van de applet Formulemaker was de behoefte aan een goed toegankelijke werkomgeving waarbinnen op zeer visuele wijze met algebra geëxperimenteerd kan worden:

- formules worden stapsgewijs opgebouwd uit meerdere delen en de formulestructuur is ten allen tijde zichtbaar; de gebruiker wordt gestimuleerd eerst de struktuur van de te bouwen formule te analyseren om deze daarna op zo efficiënt mogelijke wijze te bouwen, gebruik makend van, bijvoorbeeld, het substitutie-mechanisme.
- formules kunnen op eenvoudige wijze gestandaardiseerd en geëxpandeerd worden (het ‘vuile werk’)
- (delen van) geconstrueerde formules en hun standaardvormen kunnen bewaard worden om deze vervolgens op een goed zichtbare wijze en op verschillende manieren opnieuw te gebruiken (‘copy/paste’, substitutie)
- de formulecomplexiteit kan gekwantificeerd worden

De hierboven beschreven funktionaliteit lijkt overigens op het door Gravemijer (1990) aangekondigde computerprogramma ‘algebra-editor’. In de algebra-editor moet echter eerst een (complexe) vergelijking ingetypt worden (met alle problemen vandien) waarna strukturele brokstukken van deze vergelijking vervangen worden door eenvoudiger symbolen (de zgn. frames). In dit geval bouwt de gebruiker de structuur van de formule dus niet zelf op, maar wordt pas achteraf naar struktuur gezocht.

5.3: FORMULEMAKER VERSUS CAS.

Ter vergelijking is hier de in te voeren code voor Maple, die nodig is om de geïtereerde functies van voorbeeld d. te bepalen:

```
1 + 1/x ;
subs( x = %, %) ;
```

Driemaal herhalen van de laatse regel geeft de formule voor f_8; toepassen van de opdracht

```
simplify(%);
```

op het laatste resultaat (in Maple aangeduid met het %-teken) levert nu:

$$\frac{3\ x4+2}{2\ x1+1}\;\begin{matrix}1\\3\end{matrix}$$

Waarom dan nog applets als Formulemaker ontwikkelen als er software is die dit efficiënt kan?
De simpele reden is, dat een programma als Maple bedoeld is voor professioneel gebruik, waarbij het zichtbaar houden van de formulestructuur geen doel op zich is. Formulemaker heeft dat didactische doel wel. Uiteraard zijn de opties voor kwantificeren van de formulecomplexiteit alleen bereikbaar indien speciaal geprogrammeerd.
Door de opzet van de Formulemaker kunnen alleen syntactisch correcte formules geconstrueerd worden en worden fouten tijdens het intypen van formules in een conventionele computeralgebra-omgeving vermeden (Drijvers, 2002).
De Formulemaker funktioneert dus als een tussenvorm tussen zelf werken op papier en een CAS.
Formulemaker is bereikbaar op www.wisweb.nl (Wisweb-team, (2002/7), waar ook de gebruikte voorbeeldopdrachten beschikbaar zijn.

6. Onderzoeksopzet

De mogelijkheden van de inzet van Formulemaker voor het ondersteunen van algebraïsche experimenteren is onderzocht met 2 (goede) VWO-3, 1 VWO-5B en 2 Havo-5B leerlingen. De leerlingen werkten in groepjes (2 resp. 1+2). De bijeenkomsten met de leerlingen besloegen 2 middagen; op de eerste middag werd de applet gedemonstreerd en een aantal inleidende opgaven gemaakt. Op de tweede middag werden twee onderwerpen uitgebreider onderzocht m.b.v. werkbladen: de VWO-3 leerlingen werkten aan ‘Kunnen machten goedkoper’, de overige 3 leerlingen aan ‘Grote breuken’. De auteurs observeerden niet alleen de voortgang binnen de werkgroepjes, maar namen ook deel aan de discussie met het doel de werkwijze en redeneringen van de leerlingen duidelijk te krijgen. De leerlingen hebben van hun bevindingen op deze tweede middag een verslag gemaakt.

7. Ervaringen

De leerlingen begrijpen snel hoe je met de applet moet werken: het aanslepen van bouwstenen, de werking van de preview, het selecteren van stukken van een formule, het bewaren en standaardiseren. Het ‘tussenvoegen' van een bouwsteen is voor de VWO-5B en Havo-5B leerlingen heel natuurlijk, de VWO-3 leerlingen beginnen vaak maar weer met een nieuwe (lege) formule. De VWO-3 leerlingen hebben aanvankelijk ook wat moeite met ‘ongeschreven’ vermenigvuldigingen: xy in een invoerveld is de naam van een variabele, voor een vermenigvuldiging van de variabelen x en y is een aparte bouwsteen nodig.
Prijzen uitrekenen is niet moeilijk, maar de leerlingen zijn soms wat lui en gebruiken hiervoor, ook in elementaire gevallen, het applet.
In het vervolg schetsen we eerst de observaties bij de typerende vragen met Formulemaker en geven we vervolgens commentaar vanuit het perspectief van de kenmerken van het algebraïsche onderzoek door de leerlingen.

De gestelde problemen stimuleren algebraïsche activiteiten op metaniveau
Vraag: Als de formule $xy + x + y + 1$ met het applet maakt gemaakt wordt, moeten er 4 bouwstenen aangesleept worden en 5 invoervelden ingevuld worden, dat kost 8 punten; is er een manier om dit sneller te doen?
Observaties: Na wat puzzelen en wat tips ontstaat het idee dat er ‘iets buiten haakjes gehaald moet worden’. Het lijkt voor de leerlingen moeilijk voor te stellen dat je ook in een deel van de formule iets buiten haakjes kunt halen. Uiteindelijk komen ze tot $x\,(y + 1) + y + 1$, in ieder geval 1 punt goedkoper. De stap naar $(x + 1)(y + 1)$ is voor iedereen te moeilijk.
Commentaar: Om de vraag naar een ‘snellere vorm’ te beantwoorden moet de leerling eerst een keuze maken m.b.t. de aard van de te ondernemen algebraïsche activiteit, dit i.t.t. het oefenen van een vooraf gegeven basisvaardigheid; haakjes verdrijven is voor de leerlingen heel gebruikelijk, buiten haakjes halen niet; het herordenen van $x\,(y + 1) + y + 1$ tot $x\,(y + 1) + 1\,(y + 1)$ is voor de leerlingen vreemd.

Vragen: Wat kost a^{64} en wat kost $(a^8)^8$? Probeer a^{64} en a^{63} zo goedkoop mogelijk te schrijven.
Observaties: Bij de VWO-3 leerlingen moet het machtsverheffen weer opgehaald worden: $(a^2)^3$ wordt in eerste instantie als a^5 bestempeld. De prijs van $(a^8)^8$ brengt de leerlingen op het spoor van het ontbinden van de macht zodat a^{64} en a^{63} goedkoper kunnen via $a^{64} = ((a^4)^4)^4$ en $a^{63} = ((a^3)^3)^7$. Een VWO-5 leerlinge stelt voor ‘iets met a^{64} te doen zodat er a^{63} uitkomt’. Er wordt aanvankelijk gegokt op $a^{63} = a^{64} - a$, maar na een tijdje wordt dit $a^{63} = a^{64} / a$; helaas is deze uitdrukking 1 punt duurder dan $((a^3)^3)^7$.
Commentaar: Het rekenen met machten van machten is ongebruikelijk in de VO-algebra; door de vraagstelling worden de rekenregels weer opgefrist: $(a^9)^7 = a^{7\cdot 9}$; de fout $a^{63} = a^{64} - a$ kan geïnterpreteerd worden als een signaal van onvoldoende basisvaardigheid; in deze situatie wordt de fout echter wél gecorrigeerd: er moet namelijk vanwege de vraagstelling op metaniveau met de formule alsnog verder geredeneerd worden.

Vragen: Maak met het applet de formule $1+\frac{1}{x}$ en breng deze op standaardvorm. Je vindt dan de formule $\frac{x+1}{x}$. Hoe komt de applet aan deze standaardvorm?

Vervang nu de x in de formule $1+\frac{1}{x}$ door $1+\frac{1}{x}$ en breng deze ‘grote breuk’ op standaardvorm.

Je vindt dan de formule $\frac{2x+1}{x+1}$. Waarom staat er in deze formule maar één deelstreep en in teller en noemer alleen termen met een x erin, en bijvoorbeeld geen kwadraten van x?

Observaties: De standaardvorm van $1+\frac{1}{x}$ is in eerste instantie voor alle leerlingen een raadsel; niemand is in staat $1+\frac{1}{x}$ 'onder één noemer te brengen'. Na bestudering van het voorbeeld $1+\frac{1}{3}$ lukt het wel. Dat de standaardvorm van de substitutie van $1+\frac{1}{x}$ in zichzelf maar één deelstreep heeft 'lijkt wel logisch' maar de vraag 'hoe weet je dat nu zeker' is te moeilijk. Hetzelfde geldt voor de vraag over het ontbreken van kwadraten van x in teller en noemer.
Commentaar: Het 'onder één noemer te brengen' van een uitdrukking met breuken behoort duidelijk niet tot de parate kennis van alle leerlingen; alleen na introduktie van een getalvoorbeeld wordt de standaardvorm van $1+\frac{1}{x}$ begrepen; de leerlingen weten ook niet hoe ze van de 'grote breuk' die ontstaat door substitutie van $1+\frac{1}{x}$ in zichzelf een eenvoudigere uitdrukking kunnen maken, waardoor ze de vragen over één deelstreep en het ontbreken van kwadraten van x in teller en noemer niet kunnen beantwoorden.

'Kunnen machten goedkoper?' als motivatie voor formuletransformaties
Dit onderzoek werd uitgevoerd door de 2 VWO-3 leerlingen.

Vragen: a) Wat kost a^n en wat kost $a \times a \times \ldots. \times a$ (n keer)? Welke formule is goedkoper?
b) Je zou a^n ook kunnen schrijven als het product van twee lagere machten van a; onderzoek of dit goedkoper of duurder is.
c) Probeer een algemeen voorschrift te vinden om a^n zo goedkoop mogelijk te schrijven.
d) Beschrijf hoe je een produkt als $a^m b^n$ zo goedkoop mogelijk kan schrijven; hoe zou een voorschrift voor een produkt als $a^m b^n c^p$ eruit kunnen zien?

Observaties: a) De prijs van a^n is onbekend omdat n onbekend is. Hiervoor n+1 opschrijven is eigenlijk niet zo gek omdat het klopt wanneer je voor n getallen invult; $a \times a \times \ldots. \times a$ (n keer) kost in ieder geval n (het aantal a's) en, na enige aarzeling, ook nog eens n–1 (het aantal ×-tekens). Pas wanneer n vervangen wordt door x, is het duidelijk wat het produkt kost.
De formule $a \times a \times \ldots. \times a$ (n keer) is duurder dan a^n (uit het verslag):
a^2 en $a \times a$ kosten evenveel nl. 3. Maak je de macht een hoger, dan wordt a^3 1 punt duurder dan a^2, maar $a \times a \times a$ wordt 2 punten duurder dan $a \times a$. Dus wanneer n maar groter is dan 2, dan is het produkt altijd duurder dan de macht.
b) Kijken naar $a^{10} = a^6 \times a^4$ laat zien dat het product 2 duurder is. Het algemene geval lukt nu ook in de notatie $a^x = a^y \times a^z$. Dan is namelijk $x = y + z$ en het product dus ook weer 2 duurder.
c) De leerlingen weten al dat a^{64} en a^{63} goedkoper kunnen via $((a^4)^4)^4$ en $((a^3)^3)^7$; voor het algemene voorschrift 'moet je kijken of de macht ergens als uitkomst in de tafels van vermeningvuldiging staat, dan kun je splitsen en het met de rest nog eens proberen'. In een aantal gevallen is meer winst te behalen via een deling: $a^{11} = (a^3)^4/a$ en $a^{62} = a^{64}/ a^2$.
d) a^7b^3 is duurder dan $a^4(ab)^3$, na enige verwarring over de ongeschreven ×-tekens; a^xb^{10} is goedkoper te schrijven, maar hoe dat moet 'hangt van x af'. De leerlingen schrijven direkt op $a^{x-10}(ab)^{10}$ voor x groter dan 10 en $(ab)^xb^{10-x}$ voor x kleiner dan 10 (het geval x = 10 wordt vergeten). Het algemene geval a^xb^y is nu niet moeilijk meer en wordt correct opgeschreven.
De leerlingen kijken naar $a^7b^5c^3$ en $a^3b^5c^7$. 'Je krijgt in ieder geval abc tot de kleinste macht. Met wat er over is kan je nog zoiets doen'. Een van de leerlingen kijkt direkt naar het algemene geval $a^xb^yc^z$ en begint een lijst te maken met $x>y>z$, $y>x>z$ etc. Dit zijn wel veel mogelijkheden, maar 'in principe weet je dan precies wat je moet doen'.

Commentaar: a) De rol van de (gehele) variabele n als macht in a^n is voor de VWO-3 leerlingen nieuw: een formule als $2 \times n + a$ levert geen problemen (voor hen is dit een uitdrukking die voor

verschillende waarden van n en a een getal oplevert), terwijl de n in de formules a^n en $a \times a \times \ldots \times a$ (n keer) de *struktuur* generalizeert van de reeks uitdrukkingen $a^2 = a \times a$, $a^3 = a \times a \times a$, etc.; in de prijs duikt vervolgens dezelfde variabele op, en dit wordt (terecht) ervaren als een korte manier om vele gevallen samen te vatten; de keuze van n als naam voor deze variabele lijkt ongelukkig: voor deze leerlingen heten variabelen altijd x, y etc. De prijsvergelijking is een uiterst originele algebraïsche redenering.
b) De rekenregels voor het produkt van machten worden weer opgefrist; om te kijken 'waar het om draait' beginnen de leerlingen graag met een voorbeeld met getallen.
c) Dat voor het algemene voorschrift de (echte) delers van de macht een rol spelen is de leerlingen direkt duidelijk; voor de speciale gevallen worden de rekenregels voor het quotient van machten weer opgefrist.
d) Na een getalvoorbeeld met het produkt van machten van 2 variabelen, ontwikkelen de leerlingen een algemeen voorschrift door stapsgewijs de machten door een variabele te vervangen; bij de generalisatie naar het produkt van machten van 3 variabelen wordt echter *direkt* een algemene algorithme ontdekt, al ontbreekt het de leerlingen aan de vaardigheid deze netjes op te schrijven.

Patroonherkenning via 'Grote breuken', een uitdaging
Dit onderzoek werd uitgevoerd door de 2 Havo-5B en de VWO-5B leerlingen.

Vragen: a) Door de x in de formule $1+\frac{1}{x}$ (vorm-1) te vervangen door $1+\frac{1}{x}$ krijg je een 'grote breuk' (vorm-2); je kunt nu steeds grotere breuken maken door in zo'n grote breuk de x weer te vervangen door vorm-1; maak m.b.v. het applet een tabel met de standaardvormen van de vormen 1 t/m 7; dat kan door met het applet al deze grote breuken te maken en die te standaardiseren, maar wat gebeurt er als je de x'en in standaardvorm-2 vervangt door vorm-1 en dan weer standaardiseert? En wat krijg je als je de de x'en in standaardvorm-3 vervangt door standaardvorm-2; Kan je dit verklaren?
b) De tellers en noemers van de standaardvormen zijn steeds van de vorm *getal* $\times$ x + *getal*; er is eigenlijk maar één rij getallen waar alle getallen uit de tellers en noemers van de standaardvormen inzitten; vindt de eerste 15 getallen van die rij en het patroon; bereken dan *zonder* het applet hoe standaardvorm 15 eruit ziet; formuleer nu heel precies hoe standaardvorm-n eruit ziet.
c) We nemen even aan dat het patroon van de rij getallen klopt voor standaardvormen 1 t/m 7; probeer uit te leggen dat de getallen in standaardvorm-8 dan ook aan het patroon voldoen, *zonder* standaardvorm-8 uit te rekenen.
d) Neem nu als uitgangsformule $\frac{1}{x}-1$ en beantwoord dezelfde vragen als in a) t/m c).

Observaties: a) Het maken van de 'grote breuken' 1 t/m 7 en hun standaardvormen m.b.v. de applet vormt geen probleem. M.b.v. de applet wordt ook geverifieerd dat invullen van $1+\frac{1}{x}$ voor de x'en in standaardvorm- 2 na standaardisatie standaardvorm-3 oplevert. Ook laat het applet zien dat invullen van standaardvorm-2 voor de x'en in standaardvorm-3 na standaardisatie standaardvorm-5 oplevert.
Op de vraag naar een verklaring hiervoor volgt een 'visueel' antwoord: 'de standaardvormen staan voor grote breuken, en een grote breuk aan een grote breuk hangen levert weer zo'n grote breuk op'.
b) De rij van Fibonacci-getallen waarin alle getallen uit de tellers en noemers van de eerste 7 standaardvormen staan, wordt snel gevonden. Met deze rij kunnen de leerlingen zonder moeite standaardvorm 15 uitrekenen. De vraag naar een precieze formulering hoe standaardvorm-n eruit ziet in termen van de rij van Fibonacci vinden de leerlingen erg moeilijk. Na een precieze beschrijving van enige concrete standaardvormen lukt het wel.
c) Op zoek naar een bewijs van het gevonden patroon lopen alle leerlingen vast op het manipuleren met breuken. Invullen van vorm-1 voor de x'en in standaardvorm-7 en vervolgens handmatig standarizeren levert onoverkomelijke problemen op. Hetzelfde bij het invullen van standaardvorm-7 in

vorm-1. Terug naar $1+\frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)}$ met $\frac{5}{3}$ i.p.v. standaardvorm-7 is ook al zeer lastig en moet stap voor stap doorgenomen worden. Intuitief voelen de leerlingen nu wel aan dat ‘wanneer een standaardvorm aan het gevonden patroon voldoet, de volgende dat ook doet’.
d) Deze opgave levert nu nauwelijks problemen op.

Commentaar: a) Omdat de formulestruktuur in de applet voortdurend zichtbaar is, worden de leerlingen niet afgeschrikt door de ‘grote breuken’; ondanks het feit dat ze in de inleidende oefeningen niet begrepen hoe de standaardvormen tot stand kwamen, wordt de standaardvorm nu wel gezien als een (equivalente) verkorte formule en het substitueren van ‘grote breuken’ in ‘grote breuken’ als niets anders dan het substitueren van (veel eenvoudigere) standaardvormen in elkaar.
b) De rol van de variabele *n* in de vraag naar de precieze beschrijving van standaardvorm-*n* wekt in eerste instantie verwarring; het is geen variabele zoals de leerlingen die kennen (een rekenvoorschrift, waarin voor *n* getallen ingevuld kunnen worden), maar een variabele die de struktuur van de ‘grote breuken’ generalizeert; bijkomend probleem is dat in de precieze beschrijving van standaardvorm-*n* termen van de rij van Fibonacci voorkomen die ook via de variabele *n* geïndexeerd worden en niet expliciet uitgerekend worden.
c) Zoals al geconstateerd in de inleidende oefeningen beheersen de leerlingen het vereenvoudigen van breuken vaak niet op gebruikersniveau.
d) Deze opgave ligt dicht bij de vorige en de leerlingen hebben (ondanks enkele problemen bij de eerste opgave) duidelijk wat geleerd.

8. Enkele indrukken achteraf

Ondanks het feit dat de leerlingen behoorlijk hard moesten werken, waren ze zeer gemotiveerd. Ze hadden dit soort (abstracte) problemen nog niet eerder gezien, en verbaasden zich erover dat algebra doen uit meer kan bestaan dan het repetitief oefenen van basisvaardigheden, in dit geval het transformeren van formules met een doel, het ontdekken van patronen, generalisatie en het correct algebraïsch redeneren over de gevonden resultaten. Ze gaven te kennen nog wel eens zoiets te willen doen. De extra aandacht van de auteurs was natuurlijk prettig (en nodig), maar er was ook het gevoel dat er een aantal nieuwe en relatief moeilijke problemen opgelost waren.
Het zelf narekenen met pen en papier was, door de geringe algebraïsche ervaring van de leerlingen, behoorlijk lastig, maar vormde geen werkelijke belemmering voor het werken met de applet en het begrijpen van de probleemstelling. Tijdens het oplossingsproces werden door de leerlingen een aantal algebraïsche vaardigheden zoals substitutie, de introductie van haakjes en de equivalentie van formules i.h.b. die met breuken (her)ontdekt; omdat deze vaardigheden essentieel waren om de voor de leerlingen uitdagende problemen op te lossen, mag verwacht worden deze (her)ontdekte vaardigheden op deze manier beter beklijven dan door repetitief oefenen.

9. Discussie met theoretisch kader

Algebraïsch denken

Sfard & Linchevski (1994) beschrijven een model voor de manier waarop het algebraïsch denken zich historisch heeft ontwikkeld en passen dit toe op het individuele leerproces. Een algebraïsch concept kan enerzijds geïnterpreteerd worden als een proces, anderzijds als een object. In een eerder artikel (Sfard, 1991) werden hiervoor de termen *operationeel* en *structureel* gebruikt. Vanuit de operationele invalshoek kan de algebraïsche expressie $3(x + 1) + 5$ staan voor een rekenvoorschrift in een bepaalde specifieke context (een proces dat voor een concrete waarde van x een getal oplevert) of voor het linkerlid van een vergelijking (een proces waarmee het getal x opgelost kan worden). Vanuit de strukturele invalshoek is $3(x + 1) + 5$ een formule waarin, ondanks de aanwezigheid van operationele elementen (de operatoren), geen onderscheidt gemaakt kan worden tussen het proces waartoe de

operatoren aansporen en de uitkomst van dit proces i.e. de formule is een object geworden waarmee algebraïsch gemanipuleerd kan worden.
Verder merkt Sfard (1991) op dat zowel vanuit historisch als cognitief oogpunt het operationele concept voorafgaat aan het structurele concept. Op deze manier ontstaat een hierarchie waarin steeds het procesmatige werken met eerdere objecten verandert in nieuwe abstracte objecten, de zgn. *reïficatie*.
Ook Freudenthal (1991) signaleert in zijn analyse van wiskunde als menselijke activiteit deze voordurende verandering van invalshoek.
Gray & Tall (1993) gebruiken voor een algebraïsche expressie als $3(x + 1) + 5$ de term *procept*: de expressie is een object bestaande uit een *pro*ces (het rekenvoorschrift), een con*cept* (de formule) en de symbolische uitdrukking die naar het proces en/of het concept verwijst. Ook hier gaat vanuit cognitief oogpunt het proces vooraf aan het concept, en is impliciet een hierarchie aanwezig: delen van de algebraïsche expressie zijn zelf procepts van eenvoudiger vorm. *Proceptual thinking* d.w.z. het stapsgewijs mentaal vervangen van een proces door een procept wordt nu een voorwaarde om met succes wiskunde te leren Gray & Tall (1994).
In bovenstaande theoretische modellen voor de ontwikkeling van het algebraïsch denken wordt niet concreet aangegeven hoe de overgang van operationeel naar structureel (Sfard, 1991) of van proces naar procept (Gray & Tall, 1993) in de praktijk van het algebra-onderwijs gefaciliteerd kan worden. Zoals de ervaringen in dit artikel laten zien, is een eerste belangrijke stap het stimuleren van reflectie over algebraïsche concepten die zich, cognitief gezien, nog op operationeel resp. procesmatig niveau bevinden (in dit geval de basisvaardigheden). Door een juiste keuze van algebra-activiteiten wordt de leerling uitgedaagd op een metaniveau met deze concepten om te gaan waardoor deze hun zuiver arithmetisch karakter verliezen en tot volwaardig object van algebraïsch redeneren worden.
Overigens is bovengenoemde hierarchie ook terug te vinden in de werking van de applet Formulemaker: de gebruiker wordt gestimuleerd binnen de te bouwen formule eenvoudigere deelformules te herkennen, om daarna de formule op zo efficient mogelijke wijze te bouwen, gebruik makend van de mogelijkheden van 'copy/paste' en het substitutie-mechanisme.

Algebra in het VO

Kijkend naar de algebra in de onderbouw (Goddijn & Kindt, 2001) worden (eenvoudige) formules in eerste instantie geïntroduceerd in contextrijke omgeving. De variabelen spelen de rol van 'vervangers', waarbij de betekenis van deze vervangers steeds met de context verbonden is.
De benadering van formules is hier *operationeel*: zij dienen ter beschrijving van een veelvuldig uit te voeren rekenoperatie of een numeriek patroon. Sfard (1994) noemt dit de algebra *van een vaste waarde*. De formules zijn het resultaat van een pijlenketting, hebben ook een representatie als een tabel of een grafiek en dienen als aanzet voor het leren oplossen van eenvoudige vergelijkingen; er bestaan een aantal applets om deze aanpak ondersteunen (Wisweb-team, 2004).
De volgende stap in de algebra in de onderbouw is dan de introduktie van het 'letterrekenen'. In deze stap worden variabelen losgekoppeld van enige context en komt het accent te liggen op het aanleren van elementaire rekenregels met deze 'onbekenden' zoals merkwaardige produkten en machten. De uitdrukkingen $3(x + 1) + 5$ of $3(x + 1) + a$ bevatten nu de gegeven grootheden x en a waarvan de waarde achteraf eventueel ingevuld kan worden. Door de afwezigheid van een context voor deze onbekende grootheden verdwijnt het operationele karakter van de uitdrukkingen en worden de uitdrukkingen een object, kortom er heeft *reïficatie* plaatsgevonden (Sfard, 1994). Op het moment dat deze 'uitdrukkingen met letters' objecten zijn geworden onstaat er een nieuwe operationele fase waarin gekeken wordt hoe dergelijke 'uitdrukkingen met letters' gemanipuleerd kunnen worden. Sfard (1994) noemt dit *funktionele algebra (van een variabele)*. Er zijn dus twee stappen te nemen: de reïficatie van uitdrukkingen met variabelen en vervolgens het aanleren van operationele vaardigheden met deze nieuwe objecten (voor het aanleren van deze vaardigheden m.b.v. applets zie Boon (2004)).
Zoals al eerder opgemerkt heeft de accentverlegging van een meer formele naar een in eerste instantie meer operationele vorm van algebrabeoefening in de onderbouw ertoe geleid dat het aantal algebratechnische oefeningen in de onderbouw sterk beperkt werden.
Verder ligt bij de wiskunde in de bovenbouw het accent meer op analyse, meetkunde en kansrekening/statistiek, waardoor eerder aangeleerde algebraïsche vaardigheden niet onderhouden worden (Drijvers (2006), hoofdstuk 8: Algebra in de tweede fase van havo en vwo).

De VWO-3 leerlingen hebben geen moeite met het gebruik van variabelen in meer traditionele zin, maar hun kijk op de variable *n* in a^n bevindt zich nog op operationeel niveau, zodat zij algemene formules voor de prijs van machten steeds met getalvoorbeelden willen checken. Tall & Thomas (1991) noemen dit het *lack of closure obstacle*: voor de leerlingen staat a^n voor een proces dat niet uitgevoerd kan worden, zolang de waarde van *n* niet bekend is.
De VO-5 leerlingen hebben minder problemen met het gebruik van variabelen om strukturen te generaliseren; bij het handmatig verifiëren van resultaten lopen zij echter vast, omdat een aantal algebraïsche vaardigheden niet of nauwelijks aangeleerd zijn en al zeker niet onderhouden zijn in de bovenbouw.

Algebraïsche (meta)vaardigheden

Wat betreft de algebraïsche vaardigheden die nodig zijn voor het zinvol manipuleren met formules spreken Linchevsky & Livneh (1999) van *structure sense*. Zij formuleren dit als 'het flexibel en creatief gebruiken van de equivalente strukturen van een vergelijking of een formule' en stellen dat niet alleen aandacht besteed moet worden aan het uitwerken, maar ook aan het recombineren van expressies. Ook Hoch (2003) spreekt van structure sense wanneer zij analyseert hoe een groot aantal studenten tijdens een examen een algebraïsche gelijkheid bewijst. Afhankelijk van de manier waarop de studenten tegen de gelijkheid aankijken (het *pattern*) kiezen zij een aanpak (de *logic*) en de daarvoor benodigde algebraïsche operaties. Een meerderheid van de studenten maakt het zichzelf daarbij extra moeilijk door een pattern en logic te kiezen waarbinnen alle haakjes weggewerkt worden.
Ook Gravemijer (1990) stelt dat het ontbreken van globaal inzicht in de struktuur van een formule of vergelijking de optimale strategie voor het oplossen van algebraproblemen in de weg staat. Hij bepleit meer aandacht voor substitutie, d.w.z. het herkennen van deelformules (b.v. stukken tussen haakjes) die vervangen kunnen worden door een nieuw symbool.
Voor Arcavi (1994) is structure sense slechts een onderdeel van het veel bredere begrip *symbol sense*. Behalve de vaardigheid om, afhankelijk van het op te lossen probleem, structuur te herkennen of door algebraïsche manipulaties structuur aan te brengen in uitdrukkingen met symbolen, behelst Arcavi's symbol sense ook de vaardigheid een formule op de stellen met behulp waarvan een gegeven probleem opgelost kan worden, de flexibiliteit om tijdens het oplossingsproces de gekozen formule te vervangen door een meer geschikte en in staat te zijn generalisaties te formuleren en bewijzen te leveren.
Goddijn & Kindt (2001) noemen dit laatste 'vertalen in en redeneren met algebra' en stellen dat het belangrijk is de leerling te laten inzien dat algebra een krachtig middel is bij het oplossen van problemen en het sluitend krijgen van redeneringen.
Arcavi (1994) stelt verder dat het aanleren van symbolische manipulatie binnen een rijke en uitdagende context moet plaatsvinden en dat juist problemen met een puur wiskundig karakter vaak die uitdaging geven.
De ervaringen laten zien dat leerlingen inderdaad gestimuleerd kunnen worden in het verwerven van bovengenoemde algebraïsche (meta)vaardigheden, wanneer zij uitgedaagd worden om te werken aan relatief complexe abstracte algebraïsche probleemsituaties (zoals formuletransformatie in 'Kunnen machten goedkoper', en patroonherkenning in 'Grote breuken'); een voorwaarde is wel dat e.e.a. plaatsvindt in een op speciale algebra-activiteiten gerichte setting, aangestuurd door een reeks concrete probleemaanduidingen op werkbladen en ondersteund door adequate software; een bijkomend voordeel is dat de leerlingen bovendien krachtig gestimuleerd worden hun verworven basisvaardigheden opnieuw te oefenen.

Algebraïsche vaardigheden en ICT

Drijvers (2002) bespreekt de algebraïsche vaardigheden die nodig zijn voor het zinvol en correct gebruik van ICT-middelen als de Grafische Rekenmachine en Computer Algebra omgevingen. Deze vaardigheden worden ook samengevat onder het begrip *symbol sense* en bestaan o.a. uit het inzicht hebben in de struktuur en equivalentie van formules omdat bovengenoemde ICT-middelen geen formule-editor hebben, en de gedaante van een oplossing nogal eens afwijkt van wat de gebruiker verwacht. Pierce & Stacey (2002) spreken in dit verband van *algebraic insight*.
Drijvers & Gravemijer (2004) schetsen een theoretisch kader voor het gebruik van ICT-gereedschap. Zij maken een onderscheid tussen het *artefact* (een computeralgebra-omgeving, een applet) en het *instrument*, hetgeen bestaat uit het artefact en de conceptuele en technische mentale schema's die de leerling ontwikkelt om het artefact zinvol te kunnen gebruiken. Het instrument ontstaat door

voortdurende wisselwerking tussen het artefact en deze mentale schema's (de zgn. *instrumentele genese*). Bij het gebruik van gecompliceerd ICT-gereedschap moet de leerling niet alleen conceptuele schema's ontwikkelen die gerelateerd zijn aan algebraïsche begrippen en eigenschappen, maar ook technische schema's, die betrekking hebben op de omgang met het artefact.
In het geval van de applet Formulemaker behoeft de leerling nauwelijks complexe technische schema's te ontwikkelen om de applet zinvol en correct te kunnen gebruiken; omdat de struktuur van de formules ten allen tijde zichtbaar is, ligt het accent volledig op de ontwikkeling van inzicht in de struktuur en opbouw van formules; met een elementaire standaardisatie-procedure kunnen formules onderzocht worden op hun equivalentie.

10. Conclusies

1 Algebraïsche meta-vragen aan de leerling stellen werkt denkbevorderend.
Uit de inleidende opgaven blijkt dat het goed is de leerlingen door een nieuwe onverwachte vraag op metaniveau op het verkeerde been te zetten. De vraag naar een 'snellere vorm' van de formule doet dat. De vragen in deze voorbeelden zijn vragen die reflectie over algebraïsche structuren en te ondernemen algebraïsche activiteiten uitlokken. De vragen vormen geen contekst om de algebra heen (zoals taxi-tarieven, weerberichten, etc.) maar zetten de algebra wel in een ruimer kader.

2. Formules transformeren mét een doel is motiverender dan zonder.
Het onderzoek 'Kunnen machten goedkoper' levert concrete vragen over formules op, die het transformeren uitlokken en in een betekenisvol kader plaatsen. Ook hier geen buitenwiskundige motivatie, maar een interne. De ervaringen laten zien dat leerlingen in staat zijn tot generalisatie van zelf ontdekte resultaten en reflectie op de algemene geldigheid van dergelijke resultaten.

3. Patroononderzoek kan uitdagend zijn, maar komt niet van zelf op gang.
Patroonherkenning in formules kan gestimuleerd worden door een geschikte opgavenkeuze; het onderzoek 'Grote breuken' naar de iteraties van $1+\frac{1}{x}$ laat dat zien. De leerlingen hebben weinig moeite met het 'zien' van formele patronen, maar wel moet vastgesteld worden dat het daarna uitbuiten van het ontdekte patroon in een redenering helemaal niet van zelf gaat.

4. De applet Formulemaker vermindert de vrees voor grote formules.
Bij het onderzoek naar de iteraties van $1+\frac{1}{x}$ worden de leerlingen geenszins afgeschrikt door de grote formules; omdat binnen de applet Formulemaker de formulestructuur voortdurend zichtbaar is, kunnen de leerlingen inzien dat de grote breuken steeds gezien kunnen worden als de substitutie van twee kleinere formules in elkaar.

11. Literatuur

[1] Abels, M. e.a. (1992). *Achtergronden van het nieuwe leerplan Wiskunde 12-16,* band I. Freudenthal instituut RU Utrecht / SLO Enschede.
[2] Arcavi, Abraham (1994). *Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics*. For the Learning of Mathematics 14(3), 24-34.
[3] Boon, P.B.J. (2004). *WELP: letterrekenen met applets*. Nieuwe Wiskrant. Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs 23(4).
[4] Boon, P.B.J. & Reeuwijk, M. van (2006). *Wismaat – wiskunde op maat in een digitale leeromgeving.* Nieuwe Wiskrant. Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs 26(2), 34-38.
[5] Commissie Toekomst Wiskunde onderwijs (2006-7). Website: http://www.ctwo.nl
[6] Drijvers, Paul (2002). *Algebraische vaardigheden, symbol sense en ICT*. Nieuwe Wiskrant. Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs 22(1), 4-8.

[7] Drijvers, Paul & Gravemijer, Koeno (2004). *Artefact en instrument: Computeralgebra en algebraische schema's.* Tijdschrift voor Didactiek Betawetenschappen 21(1), 47-68.
[8] Drijvers, Paul (Red.) (2006). *Wat a is dat kun je niet weten. Een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school.*. Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht
[9] Freudenthal (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
[10] Goddijn, Aad & Kindt, Martin (2001). *Knelpunten en toekomstmogelijkheden voor de wiskunde in het VO*. Tijdschrift voor Didactiek Betawetenschappen 18(1), 59-94.
[11] Gravemijer, K. (1990). *Globaal kijken, een kenmerk van algebraische deskundigheid*. Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs 10(2), 29-33.
[12] Gray, Eddie & Tall, David (1993). *Success and Failure in Mathematics: The Flexible Meaning of Symbols as Process and Concept*, Mathematics Teaching 142, 6-10.
[13] Gray, Eddie & Tall, David (1994). *Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic*, The Journal for Research in Mathematics Education 26(2), 115-141.
[14] Hoch, Maureen (2003). *Structure sense.* Contribution to the CERME3 conference, 2003, Bellaria, Italy. www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/WG6.
[15] Janvier, Claude (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations: studies and teaching experiments*. Shell Centre for Mathematical Education , Nottingham
[16] Linchevski, Liora & Livneh, Drora (1999). *Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts.* Educational Studies in Mathematics 40, 173-196.
[17] Nilwik, Huub (2005). *Formulemaker*. Applet op het wisweb: http://www.wisweb.nl/
[18] Pierce, R.V. & Stacey, K.C. (2002). *Algebraic insight: The algebra needed to use computer algebra systems.* The Mathematics Teacher (95), 622-627.
[19] Resonansgroep Wiskunde. Website: http://www.resonansgroepwiskunde.nl/
[20] Sfard, Anna (1991). *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin.* Educational Studies in Mathematics 22, 1-36.
[21] Sfard, Anna & Linchevski, Liora (1994). *The gains and the pitfalls of reification – The case of algebra.* Educational Studies in Mathematics 26, 191-228.
[22] Smale, Steve (1996). *Algebraic Settings for the Problem "P=NP"* (with L. Blum, F. Cucker, M. Shub) Lectures in Applied Mathematics vol 32, ed J. Renegar, M. Shub and S. Smale, 125-144, / Amer. Math. Soc./ 1996. Ook: http://www6.cityu.edu.hk/ma/people/smale/pap100.pdf
[23] Streun, A. van (2007). *Parate kennis en Algebra, wiskundedidactiek Anno 2010.* Euclides, vakblad voor de wiskunde leraar 82 (8).
[24] Tall, David & Thomas, Michael (1991). *Encouraging versatile thinking in algebra using the computer.* Educational Studies in Mathematics 22, 125-147.
[25] Wisweb-team (2004). *Algebra met Applets.* Freudenthal Instituut, februari 2004.
[26] Wisweb-team (2002/7). *Wisweb.* Website: http://www.wisweb.nl/.
[27] Wisb-dag-team (2002). *1+1 = 2 en hoe nu verder?* Website: http://www.fi.uu.nl/wisbdag/.