Diversiteit in representatie van de wiskundige modelleercyclus bij studenten en docenten

Jacob Perrenet
Eindhoven School of Education/Technische Universiteit Eindhoven

Bert Zwaneveld
Ruud de Moor Centrum/Open Universiteit

Samenvatting
Bij het onderwijs in wiskundig modelleren van de bacheloropleiding Technische Wiskunde van de Technische Universiteit Eindhoven leek er ieder jaar aan het eind van de opleiding een grote verscheidenheid te zijn in hoe studenten de modelleercyclus weergeven. Deze vermoede verscheidenheid is nader onderzocht, waarbij ook de representaties van docenten zijn betrokken. De schema's van 77 studenten en 20 docenten waarin zij weergeven hoe zij de modelleercyclus in enig detail zien, zijn geanalyseerd op een aantal kenmerken, zoals validatie, verificatie, iteratie en complexiteit. De interbeoordelaarsbetrouwbaarheid van deze analyse was goed. In beide groepen, studenten en docenten, bleek er inderdaad een grote mate van diversiteit op veel van de kenmerken. De groepen verschilden alleen systematisch op iteratie, dat is het aangeven dat de cyclus vaker doorlopen wordt. In een bespreking van de resultaten met de docenten werd de waarde van de gehanteerde kenmerken erkend. De gevonden diversiteit werd echter door het merendeel niet als een probleem gezien.

1. Inleiding

Het onderwijs in wiskundig modelleren en het didactisch onderzoek daarnaar geniet internationaal een groeiende belangstelling. Sinds 1983 is er een tweejaarlijkse conferentie georganiseerd door *International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications* (ICTMA). Sinds kort is er ook een wetenschappelijk tijdschrift gewijd aan het onderwerp, het *Journal of Mathematical Modelling and Application*.

De activiteit van wiskundig modelleren kan globaal geschetst worden in drie slagen. Een probleemsituatie uit de werkelijkheid wordt vertaald tot een wiskundig model inclusief een wiskundig probleem. Het wiskundige probleem wordt vervolgens met wiskundige middelen opgelost. De wiskundige oplossing wordt geconfronteerd met de werkelijkheid. Zo nodig wordt het model bijgesteld en de cyclus nogmaals doorlopen.

De ervaring leert dat leren en onderwijzen van wiskundig modelleren niet eenvoudig is, zie bijvoorbeeld Galbraith & Stillman (2006). Dit geldt zowel voor wiskunde in het voortgezet onderwijs als voor het hoger onderwijs in bèta en techniek. Het is vooral de inherente complexiteit van modelleren waar leerlingen en studenten, maar ook hun docenten, mee geconfronteerd worden: meerdere stappen, iteratie, wisselen tussen de reële en de wiskundige wereld, het feit dat het altijd om het modelleren van iets uit de werkelijkheid gaat met eigen regels en wetten zodat de wiskunde slechts een deel van het hele proces is, om alvast een paar aspecten van die complexiteit te noemen.

In dit artikel verwijzen we af en toe naar (onderzoek naar) modelleeronderwijs in het voortgezet onderwijs, omdat daarnaar veel meer onderzoek is gedaan dan naar modelleeronderwijs in het hoger onderwijs.

De eerste auteur van dit artikel heeft herhaaldelijk vastgesteld dat er aan het eind van de bacheloropleiding grote verschillen zijn in de manier waarop de wiskundestudenten desgevraagd de modelleercyclus representeren. Vooral nieuwsgierigheid naar de mate van deze verschillen en educatieve consequenties van deze verschillen was de aanleiding meer systematisch onderzoek te doen naar die verschillen. Daarbij hebben we ook de wijze waarop de begeleidende docenten de modelleercyclus weergeven, betrokken. Globaal geformuleerd is de onderzoeksvraag: *Welke variatie komt er voor in de representaties van de wiskundige modelleercyclus van studenten en docenten?*

Voorbeeld van een modelleeropdracht: 'Tanken over de grens of niet'

Om de lezer een indruk te geven van wat wiskundig modelleren inhoudt, geven we hier een opdracht plus uitwerking zoals die wel in de bovenbouw van het VWO gegeven wordt. Het is een voorbeeld dat ook in de literatuur voorkomt (Blum & Borromeo Ferri, 2009). In de erop volgende nadere analyse lichten we er een aantal aspecten uit.

Opdracht

Maastricht ligt in de buurt van de grens met België. Net over de grens is een tankstation waar de benzine goedkoper is dan in Nederland. Nu vraagt een inwoonster van Maastricht zich af of ze beter over de grens kan tanken. Zij moet ongeveer 10 km extra rijden om in België te tanken. Haar auto heeft een tankinhoud van 50 liter en zij rijdt gemiddeld 15 km op een liter benzine, zodat zij op één tank ongeveer 750 km kan rijden. In Nederland kost de benzine op een gegeven moment € 1,50, in België € 1,40. Wat kan zij het beste doen?

Mogelijke aanpak

Eerste vraagt zij zich af hoe dat omrijden om te tanken eigenlijk gaat. Rijd je net zolang tot er precies zoveel benzine in de tank zit dat je nog net het tankstation in België haalt? Of rijd je tegen de tijd dat de tank bijna leeg is langs het Belgische tankstation om dan te tanken? Zou dat uitmaken voor het beantwoorden van de vraag? Verder is er natuurlijk de eerste keer dat ze in België gaat tanken. Moet zij dat als een apart geval beschouwen?

Ze besluit bij haar aanpak ervan uit te gaan dat ze al een tijdje in België aan het tanken is zodat ze die eerste keer tanken in België kan negeren en zich kan concentreren op de vraag of het prijsvoordeel voldoende is voor de extra kilometers die voor het tanken in België nodig zijn.

Zij brengt dit probleem te berde in haar vriendenclub bestaande uit mensen die verspreid over Nederland wonen en met een vergelijkbare vraag bijvoorbeeld ten opzichte van Duitsland zitten.

Uitwerking
Zij besluit daarom het probleem zo algemeen mogelijk op te lossen. Zij gaat daarbij van de volgende gegevens uit. Per tankbeurt gaat er (gemiddeld) T liter in de tank. De auto rijdt (gemiddeld) a kilometer op een liter benzine, dat wil zeggen dat bij een verbruik van bijvoorbeeld 1 op 15 a gelijk is aan 15. We noemen a de literafstand. In Nederland kost de benzine N euro, in het buurland B euro. De extra kilometers om bij het tankstation te komen zijn x km.
Dan gaat ze aan de slag. Bij een literafstand a is voor de extra x km x/a liter nodig. Per tankbeurt tankt zij T liter waarmee zij Ta km kan rijden. In Nederland kost die T liter TN euro, in het buurland TB euro. Het prijsverschil is $T(N-B)$. Met in Nederland getankte benzine kost dan één kilometer N/a euro, met in het buurland getankte benzine is dat B/a euro.
De x extra kilometers kosten xB/a euro. Dit moet uiteraard onder het prijsverschil $T(N-B)$ blijven: $xB/a < T(N-B)$.
In termen van het probleem: tanken in het buurland is goedkoper als het aantal extra kilometers minder is dan het product van wat zij gemiddeld op een tank rijdt en een factor die gelijk is aan de prijsverhouding Nederland-buurland min 1. De ongelijkheid $xB/a < T(N-B)$ is het eerste wiskundige model. Dit model voldoet aan de voor de hand liggende eis: x moet kleiner zijn dan een constante en die constante moet positief zijn. Dat laatste is zo, want op dit moment is N groter dan B en dus is de genoemde factor groter dan 0.
In haar concrete geval is die factor 1,50/1,40 – 1 = 0,071. Haar 10 km extra is minder dan 750 km maal 0,071, want dat is 53,6 km. Haar besluit is om te gaan omrijden om te tanken.
Zij bekijkt het model $x < (N/B-1) \cdot Ta$ nader en realiseert zich dat in het hypothetische geval dat N veel groter dan B is, x praktisch onbegrensd is. En dat is toch echt in strijd met wat er maximaal op een tank gereden kan worden (zoals gezegd Ta), dus ook aan de extra kilometers. Neem bijvoorbeeld de situatie dat N iets groter is dan $2B$. Dan is de genoemde factor iets groter dan 1. Dat zou betekenen dat iemand die zijn hele tank nodig heeft voor de extra kilometers nog altijd voordelig uit is. Dat kan toch niet echt de bedoeling zijn. Zij vermoedt dan ook dat het model niet adequaat is voor grote prijsverschillen. Het zou, intuïtief gesproken, zo moeten zijn dat de factor waarmee het aantal kilometers van een volle tank Ta vermenigvuldigd wordt, naar boven begrensd is en dus tussen 0 en 1 ligt.
Bij het opstellen van het eerste model heeft zij gekeken of de extra kilometers niet te duur zijn. Misschien moet je niet kijken naar de prijs van die extra kilometers, maar naar de prijs die een kilometer rijden kost met in het buurland getankte benzine nadat er met de extra kilometers rekening is gehouden. En die prijs moet dan vergeleken worden met de prijs van een kilometer rijden met in Nederland getankte benzine.
Haar volgende, hopelijk verbeterde aanpak gaat als volgt. Na de x extra kilometers kan zij effectief nog $Ta-x$ km rijden. Zij heeft voor een volle tank TB euro betaald. Eén zo'n effectieve kilometer kost met in het buurland getankte benzine (in euro) $TB/(Ta-x)$. Een kilometer rijden met in Nederland getankte benzine kost N/a euro. Het tweede wiskundige model is dus nu
$TB/(Ta-x) < N/a$ of $x < (N-B)/N \cdot Ta = (1-B/N) \cdot Ta$

Dit voldoet in ieder geval aan de eis dat x begrensd is door Ta.
In termen van het probleem staat hier dat omrijden loont als het aantal extra kilometers minder is dan het product van wat zij gemiddeld op een tank rijdt maal een factor die gelijk is aan 1 min de prijsverhouding buurland-Nederland. En deze factor ligt inderdaad tussen 0 en 1 omdat B kleiner dan N is. Vergeleken met het tweede model is het eerste model dus fout, want het gaat er niet om of het prijsverschil voldoende is voor het omrijden, maar of de prijs van een kilometer na het omrijden lager is dan de prijs van een kilometer zonder omrijden.
Zij koppelt haar bevindingen terug naar de vriendenclub. Met deze conclusie kan iedereen van de vriendenclub zijn eigen situatie beoordelen. Vullen we nu voor de parameters T, a, N en B de concrete waarden van de Maastrichtse in, en ook $x = 10$, dan vinden we overigens weer nagenoeg dezelfde waarden: $10 < 50$. Zij woont dus dicht genoeg bij het Belgische tankstation om die 10 km extra te rijden. En zo besluit zij voortaan te handelen.

Nadere analyse van het voorbeeld

We kunnen aan de hand van dit voorbeeld de volgende aspecten onderscheiden. Bij de overgang van het praktijkprobleem (de reële wereld) naar het wiskundig model (de wiskundige wereld) heeft er eerst een probleemanalyse plaats gevonden: hoe verloopt het tanken en eventueel omrijden precies, waar let ik op (loont het omrijden bij het vigerende prijsverschil?), welke parameters (T, a, N en B) en welke variabelen (x) spelen een rol, hoe algemeen zal het model worden? Zo is er duidelijk niet gekozen om op het aspect ‘tijdverlies ten gevolge van het omrijden’ te letten. Er is dus een aanname gemaakt om het probleem niet te moeilijk te maken. Verder is (domeinspecifieke) kennis gebruikt over autorijden en tanken, zoals verbruik en verschil in benzineprijzen.

Daarna zijn de relaties tussen de parameters en de variabele opgesteld en daaruit volgt de eerste ongelijkheid, $x < Ta(N/B - 1)$, om de beslissing op te baseren. Daarna is nagegaan dat het model aan een aantal voor de hand liggende wiskundige en aan de praktijk ontleende eisen voldoet (respectievelijk verificatie en validering). Zo mogen bijvoorbeeld de noemers van N/B en van B/N niet 0 zijn. Hierbij is opnieuw kennis over autorijden en tanken en wiskundige kennis gebruikt. Dat laatste was overigens heel beperkt: er moest een kleine algebraïsche omwerking plaats vinden. Daarna interpreteert zij haar wiskundige uitkomst in haar concrete situatie.

Bij nadere beschouwing blijken er bezwaren aan het model te kleven (validering). En op grond van weer een alleszins redelijk argument, namelijk dat het aantal kilometers van een volle tank met een factor tussen 0 en 1 vermenigvuldigd moet worden, wordt een tweede aanpak gekozen, waarbij met name de vraag wat met wat wordt vergeleken, wordt aangepast. De cyclus wordt dus opnieuw doorlopen (iteratie).

De uit het tweede model afgeleide ongelijkheid, $x < Ta(1 - B/N)$, voldoet vervolgens ook aan de nieuwe eis van die factor tussen 0 en 1.

Tenslotte kan nog opgemerkt worden dat het om een beslissingsprobleem gaat waarbij er communicatie is tussen de modelleerder en de beslisser(s), dat zijn hier de leden van de vriendenclub.

De studenten van de bacheloropleiding Technische Wiskunde krijgen situaties met problemen voorgelegd die in het algemeen groter, opener en complexer zijn. Voor professionele modelleurs geldt dit uiteraard des te sterker.

Korte historische achtergrondschets

Hoewel er natuurlijk al heel lang allerlei verschijnselen wiskundig gemodelleerd zijn, is het als aparte wiskundige discipline pas goed tot ontwikkeling gekomen in de loop van de twintigste eeuw, en dan met name in en na de tweede wereldoorlog. Denk in dit verband aan het vakgebied *Operations Research* (in Nederland vaak als besliskunde aangeduid). De totstandkoming van het Mathematisch Centrum, nu Centrum voor Wiskunde en Informatica geheten, in de tweede helft van de jaren veertig van de vorige eeuw (Alberts, 1998) is daar een voorbeeld van. In dit verband kan David van Dantzig genoemd worden die een wiskundige basis voor het statistisch werk van het Mathematisch Centrum heeft gelegd. Ook Reinier Timman kan vermeld worden. Hij is een van de belangrijkste ‘founding fathers’ van het opleiden van wiskundige ingenieurs, waarvan de bacheloropleiding Technische Wiskunde van de Technische Universiteit Eindhoven een (afgeleide) opvolger is.

Het onderwijs in wiskundig modelleren in het voortgezet onderwijs startte voor de bovenbouw van VWO in de jaren tachtig (wiskunde A). Gedurende het experiment waarmee de invoering gepaard ging, bleek hoe moeilijk het modelleren was, zelfs in die situaties waarin de modelleerproblemen op zich nog tamelijk eenvoudig waren (De Lange, 1978). Voor de bovenbouw van HAVO werd wiskunde A met modelleren begin jaren negentig ingevoerd. Hoewel modelleren nog steeds onderdeel van het examenprogramma is, worden in de centrale examens de wiskundige modellen vrijwel altijd gegeven (met uitzondering van de lineaire en exponentiële modellen), terwijl in de professionele praktijk het juist gaat om het moeilijke proces van het vinden van het meest geschikte wiskundige model.

Context

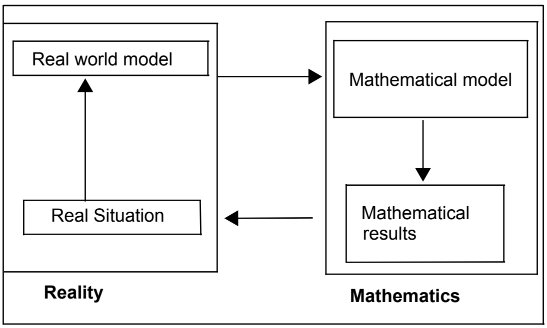
In dit artikel richten we de aandacht op het modelleeronderwijs aan een van de technische universiteiten: het bachelorcurriculum Technische Wiskunde van de Technische Universiteit Eindhoven, dat gespreid over de drie jaar van de opleiding een stroom van modelleerprojecten kent. De volgende beschrijving en de voorbeelden zijn ontleend aan Perrenet & Adan (2010). Het doel van dit modelleeronderwijs is te leren wiskundige kennis en vaardigheden toe te passen om problemen op te lossen die in niet-wiskundige termen gesteld zijn. Het modelleeronderwijs beslaat ongeveer tien procent van het bachelorcurriculum. De studenten werken steeds in groepjes van twee aan de modelleeropdrachten. Die zijn te verdelen in drie toepassingsgebieden: techniek, digitale communicatie en bedrijfsvoering. Ze hebben soms een externe opdrachtgever. Elk groepje heeft zijn eigen begeleider, een docent van de opleiding. Over de jaren van de opleiding heen nemen de projecten toe in openheid, omvang en complexiteit. Ook wordt van de studenten meer zelfstandigheid gevraagd. In de projecten zijn gevarieerde communicatieve vaardigheden geïntegreerd. Aan de stroom projecten is een reflectieportfolio verbonden met een kleine reflectieopdracht na ieder project en een serie grote reflectieopdrachten aan het eind van het derde jaar gericht op de stroom als geheel. Dit gebeurt onder verantwoordelijkheid van de eerste auteur. Ieder tweetal werkt in principe aan een unieke opdracht. Voorbeelden van modelleeropdrachten zijn:

– Bevorderen rotondes de verkeersdoorstroom beter dan gewone kruisingen?
– Is de toekomstige populariteit van een nieuw gestart weblog te voorspellen?
– De oude Egyptenaren hadden waterklokken die bestonden uit een afgeknotte kegel (smal deel onder) waaruit water stroomde door een gat in de bodem. De tijd werd afgelezen uit de hoogte van het water aan de binnenkant van de kegel. Er stonden merktekens op de binnenzijde die (zeg) de uren aangaven. Die merktekens stonden even ver van elkaar. Ontwikkel een model en bepaal daarmee de juiste hoek van de kegel.

2. Theoretisch kader

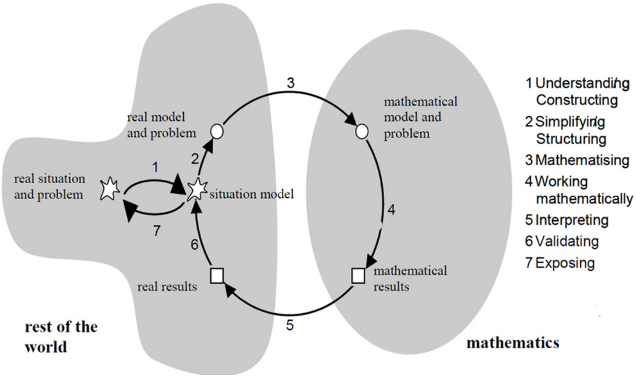
Modelleercyclus

Wiskundig modelleren is voor leerlingen in het voortgezet onderwijs en voor studenten in het hoger onderwijs, zoals gezegd, een moeilijk onderwerp. In de (onderzoeks)literatuur over het onderwijs in wiskundig modelleren is men het er wel over eens dat de kern van het proces van modelleren inderdaad een soort cyclisch proces is zoals in het begin van de inleiding beschreven. In de literatuur komen cycli voor met allerlei aanpassingen, uitbreidingen en verbeteringen, zie bijvoorbeeld Blomhøj & Hoff Kjeldsen (2006), Borromeo Ferri (2006) en Kaiser & Schwartz (2006). Zij verwijzen vaak naar de didactische weergave van het modelleerproces van Kaiser (1995) en Blum (1996), zie figuur 1.



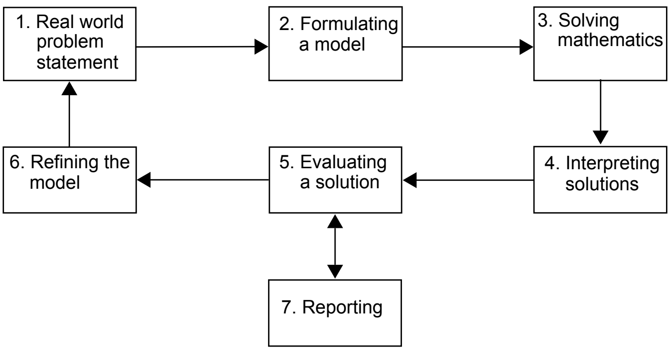
Figuur 1. De modelleercyclus volgens Kaiser & Blum

Deze weergave is gebaseerd op cognitief psychologisch onderzoek naar het gedrag van leerlingen en studenten bij het werken aan modelleeropdrachten (Borromeo Ferri, 2006).
Later hebben Blum & Leiß (2006) een veel uitgebreidere weergave gemaakt, zie figuur 2.



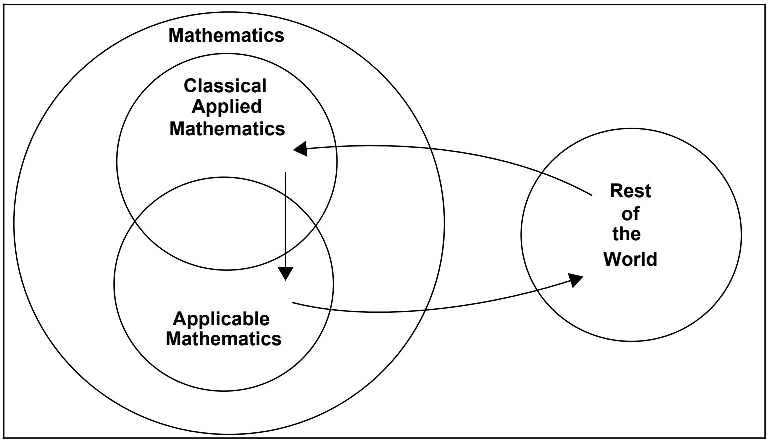
Figuur 2. De modelleercyclus volgens Blum & Leiß

In de literatuur zijn vele andere weergaven van het modelleren te vinden. Vaak worden andere accenten gelegd, afhankelijk van het perspectief vanwaaruit men het modelleren bekijkt. Tegen eind van de jaren zeventig van de vorige eeuw hebben Berry & Davies (1996), gebaseerd op modelleercycli voor het inleidend ingenieursonderwijs, de representatie van figuur 3 ontwikkeld. Zie ook Haines & Crouch (2010). We merken op dat 'rapporteren' in deze cyclus een expliciete plaats heeft gekregen, maar geen onderdeel van de doorlopende cyclus is. Gezien het feit dat het hier om aanstaande ingenieurs gaat, ligt rapporteren inderdaad voor de hand.



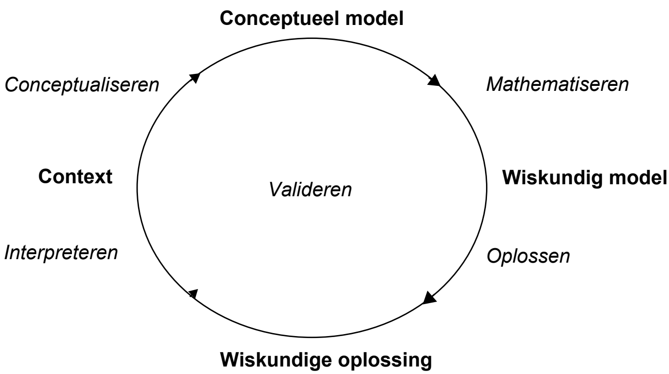
Figuur 3. Modelleercyclus ontwikkeld vanuit een realistisch of toegepast modelleerperspectief volgens Berry & Davies

Pollak (1979), een onderzoeker die modelleren ziet als een manier om de werkelijke wereld beter te begrijpen, heeft de modelleercyclus op de volgende manier weergegeven, zie figuur 4. Zijn weergave legt de nadruk op de wiskunde en de rest van de wereld enerzijds en anderzijds op onderdelen van de wiskunde die toegepast dan wel toepasbaar zijn in interactie met die rest van de wereld. Het gaat bij Pollak dus niet om een didactische weergave.



Figuur 4. De modelleercyclus volgens Pollak

Spandaw & Zwaneveld (2009) hebben ten behoeve van de eerstegraadslerarenopleiding en de professionalisering van zittende leraren de modelleercyclus van figuur 5 ontwikkeld.



Figuur 5. De modelleercyclus volgens Spandaw & Zwaneveld

In het onderhavige onderzoek gaat het om de variatie in de manier waarop studenten en hun docenten modelleren zien. Opgemerkt kan worden dat in het voortgezet onderwijs leerlingen het modelleerproces eerder kriskras dan cyclisch doorlopen (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Borromeo Ferri, 2007), zodat individuele routes ontstaan.

Kaiser, Blomhøj & Sriraman (2006) benadrukken dat de wijze waarop de modelleercyclus wordt weergegeven, afhangt van de functie ervan in het onderwijsproces. Voor hen gaat het om het in terugblik analyseren van een authentiek wiskundig modelleerproces, om het identificeren van de kernelementen in de kennis en vaardigheden rond modelleren, om het achteraf analyseren van leerlingen- en studentenwerk, om het ondersteunen van modelleeractiviteiten door leerlingen en studenten, mede in relatie tot hun metacognitieve activiteiten, en om het plannen van modelleeractiviteiten in relatie tot de rest van het wiskundeprogramma.

Schematische weergave van de modelleercyclus

Naast deze overwegingen met betrekking tot de inhoud van het modelleren, is er de overweging dat het zelf weergeven van een complexe zaak als modelleren de lerenden kan helpen er beter inzicht in te krijgen. Uit het onderzoek van Zwaneveld (1999) is gebleken dat (kennis)grafen of *concept maps* geschikt zijn om in het wiskundeonderwijs cognitieve structuren over wiskundekennis te (laten) visualiseren. Kennisgrafen (inmiddels in het Nederlands ook wel begrippenkaarten genoemd) zijn ontwikkeld in de jaren zeventig van de twintigste eeuw met als doel de zich ontwikkelende kennis van studenten in het bètadomein te visualiseren, zie bijvoorbeeld Novak (1977) en Sowa (1984). Daarbij worden de begrippen en hun onderlinge relaties grafisch weergegeven, de begrippen meestal in rechthoeken, de relaties door gelabelde verbindingspijlen. Een dergelijke grafische representatie brengt in beeld hoe een leerling, student of zelfs een expert een bepaald deelgebied van een vak ‘ziet’. Het construeren van een dergelijke graaf, meestal *concept mapping* genoemd, bevordert betekenisvol leren (Novak & Gowin, 1984) en is gebaseerd op de cognitieve theorieën van Ausubel (1968), die onder andere het belang van voorkennis bij het leren van nieuwe begrippen heeft benadrukt (zie ook Novak & Cañas, 2006). McAleese (1998) heeft net als veel anderen geprobeerd het construeren van kennisgrafen te conceptualiseren. Zijn bevinding is dat het proces van het expliciteren van kennis door middel van knopen en kanten de lerende in staat stelt zich bewust te worden van wat hij weet, maar ook om er betekenis aan te geven en om die kennis aan te passen en uit te breiden. Juist op dit laatste punt sluit onze gedachte aan om kennisgrafen als onderzoeksinstrument te gebruiken.

3. Onderzoeksvragen

We hebben in de inleiding als probleemstelling geformuleerd:

Welke variatie komt er voor in de representaties van de wiskundige modelleercyclus van studenten en docenten?

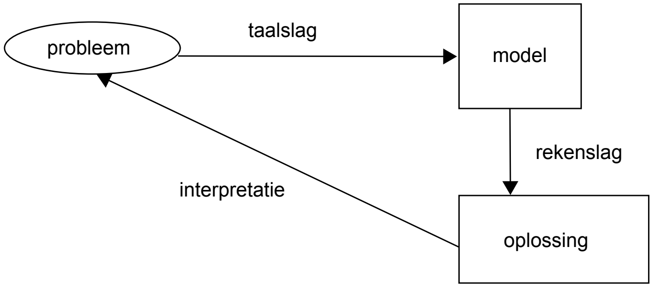
De genoemde diversiteit in representaties van de modelleercyclus bij studenten heeft tot de volgende onderzoeksvragen geleid:

1. Welke verschillen en overeenkomsten zijn er tussen wiskundestudenten aan het eind van de bacheloropleiding Technische Wiskunde bij hun representatie van de wiskundige modelleercyclus?
2. Welke verschillen en overeenkomsten zijn er tussen wiskundedocenten betrokken bij het modelleeronderwijs in de bacheloropleiding Technische Wiskunde bij hun representatie van de wiskundige modelleercyclus?
3. Welke overeenkomsten en verschillen zijn er tussen de docentengroep en studentengroep?

4. Onderzoeksopzet

Aan het eind van de bacheloropleiding Technische Wiskunde van de Technische Universiteit Eindhoven is aan alle 77 studenten van zeven jaargangen de representatie van figuur 6 van de modelleercyclus voorgelegd. We hebben ervoor gekozen die elementen als kern van de modelleercyclus op te nemen die in ieder geval voorkomen in didactische weergaven in de literatuur: probleem, wiskundig model, wiskundige oplossing en terug naar het probleem met de daarbij horende overgangen van respectievelijk vertalen, rekenen en interpreteren. Vergeleken met bijvoorbeeld de modelleercyclus van figuur 2 ontbreekt in deze 'kale' cyclus het begrijpen van de situatie, het *situation model* waarin essentiële aspecten worden vastgelegd, het vereenvoudigen en structureren van de situatie tot een reëel model (op basis waarvan het wiskundig model wordt gebouwd). De vraag is of op het niveau van een bacheloropleiding technische wiskunde deze nadere detaillering nodig is. Wij menen dat op dit niveau volstaan kan worden met het analyseren van het probleem als onderdeel van het vertalen. Daarmee sluiten we aan bij de benadering van Spandaw & Zwaneveld (2009), die hiervoor de termen 'conceptualiseren' en 'conceptueel model' hanteren. Daarmee bedoelen zij dat de modelleerder vaststelt wat de essentiële en de wiskundig hanteerbare elementen zijn. Verder hebben we voor deze 'kale' wijze van aanbieden gekozen omdat we wilden weten waaraan zij nog meer denken bij de term 'modelleercyclus'. Dit was een verplichte opdracht. De dertig wiskundigen, als begeleider of opdrachtgever in het studiejaar 2009-2010 betrokken bij het modelleeronderwijs, kregen dezelfde taak en daarna als aanvulling de vraag hoe volgens hen een student aan het eind van de bacheloropleiding de cyclus zou moeten representeren. De studenten en docenten mochten hun reacties in het Nederlands of het Engels geven. Zij mochten de gevraagde representatie elektronisch of 'met pen en papier' inleveren. Tekeningen en toelichtende tekst zijn verzameld en op overeenkomsten en verschillen geëxploreerd. Zowel de vorm als de inhoud van de representaties werden in deze vooral kwalitatieve analyse meegenomen. Het gaat om de volgende vormaspecten: de mate van voorkomen van knopen, kanten, splitsingen, terugkoppelingen en gelaagdheid (inzoomend op knoop of kant worden meer details getoond); om de volgende inhoudsaspecten:

de al of niet onderscheiden soorten modellen, werelden, kennis, belanghebbenden; om de volgende modelleeraspecten: validatie, verificatie en iteratie. Na raadplegen van enkele deskundigen op het gebied van wiskundig modelleren en het onderwijs daarin hebben we een keuze gemaakt voor de nader te gebruiken variabelen. Deze deskundigen waren een gepromoveerd natuurkundige en ontwerpmethodoloog die aan de TU/e meta-disciplinaire modelleervakken doceert en een wiskundige hoogleraar, die vele jaren het modelleeronderwijs in de bacheloropleiding Technische Wiskunde coördineerde.



Figuur 6. De 'kale' modelleercyclus zoals in het onderhavige onderzoek gebruikt

Alle data zijn onafhankelijk door de twee onderzoekers gescoord. De uitkomsten zijn vergeleken en bediscussieerd. Dit heeft steeds tot overeenstemming geleid.

We brengen met nadruk naar voren dat het ons niet gaat om de ingeleverde schema's te beoordelen, maar dat onze manier van kijken beschrijvend is. Dat betekent dat in principe elk schema 'goed' is.

5. Analyse

Na de exploraties van de data en de genoemde raadpleging van enkele modelleer(onderwijs)experts is ervoor gekozen de representaties met de bijbehorende toelichting te scoren op de volgende variabelen: *communicatie, probleemanalyse, werelden, modellen, kennis, validatie, verificatie, iteratie* en *complexiteit*. We omschrijven per variabele wat we eronder verstaan en hoe we die gescoord hebben. Maar voor we dat doen gaan we eerst in op de variabele *complexiteit*. In de literatuur komen allerlei maten voor om de complexiteit van grafen mee te karakteriseren, zelfs al gaat het nog slechts om grafen met enkelvoudige ongerichte verbindingen (een toegankelijke eerste indruk geven Orrison & Yong (2006)). In onze data hebben we, zoals bleek na een eerste exploratie, te maken met gerichte grafen en met meerdere verbindingen tussen knopen. Ook bleek dat er schema's zijn met heel verschillende aard wat betreft de betekenis van knopen en kanten: processchema's (schema's met toestanden en acties om de overgangen tussen de toestanden weer te geven), communicatieschema's (schema's met actoren en informatiestromen) en zelfs mengvormen. In sommige processchema's zijn keuzeknopen opgenomen (afhankelijk van een test wordt een bepaalde volgende actie ondernomen). In enkele schema's is sprake van gelaagdheid: sommige knopen in het schema hebben zowel een globaal karakter als een interne structuur. In enkele schema's worden splitsingen gebruikt met een variabel aantal pijlen (*n*), bijvoorbeeld om een opdeling van een probleem in deelproblemen aan te geven. Dit maakte de keus voor een hanteerbare complexiteitsmaat moeilijk. In overleg met de geraadpleegde experts hebben we uiteindelijk voor de elementaire wijze van scoren van de complexiteit gekozen, zoals die hierna verwoord is.

De volgende variabelen hebben we in ons onderzoek meegenomen:

communicatie
Wordt er wel (score 1) of niet (score 0) in het schema of in de toelichtende tekst melding gemaakt van tweezijdige communicatie met begeleider of opdrachtgever?

probleemanalyse
Wordt er wel (score 1) of niet (score 0) in het schema of in de toelichting aangegeven dat in het begin van het proces het probleem geanalyseerd wordt? Hierbij gaat het niet om wiskundige aannames, maar om de niet-wiskundige analyse van het probleem, zoals het antwoord op de vraag wat er nu echt relevant is.

werelden
Wordt er wel (score 1) of niet (score 0) in het schema of in de toelichting aangegeven dat de modelleercyclus zich niet alleen in de wereld van de wiskunde afspeelt, maar ook in een of meerdere andere werelden? Zo ja, welke?

modellen
Wordt er wel (score 1) of niet (score 0) in het schema of in de toelichting aangegeven dat in de modelleercyclus gebruik gemaakt wordt van meer soorten modellen (meer dan alleen een 'wiskundig' model)? Zo ja, welke?

kennis
Wordt er wel (score 1) of niet (score 0) in het schema of in de toelichting aangegeven dat er gebruik wordt gemaakt van meer dan alleen wiskundige kennis en dan met name van domeinspecifieke kennis? Zo ja, welke?

validatie
Wordt er wel (score 1) of niet (score 0) in het schema of in de toelichting aangegeven dat een wiskundig model getoetst en bijgesteld wordt aan de eisen van de praktijk?

verificatie
Wordt er wel (score 1) of niet (score 0) in het schema of in de toelichting aangegeven dat het wiskundig model getoetst wordt en bijgesteld wordt op wiskundige consistentie en logica?

iteratie
Wordt er wel (score 1) of niet (score 0) in het schema of in de toelichting aangegeven dat het in het algemeen nodig is de modelleercyclus meermaals te doorlopen?

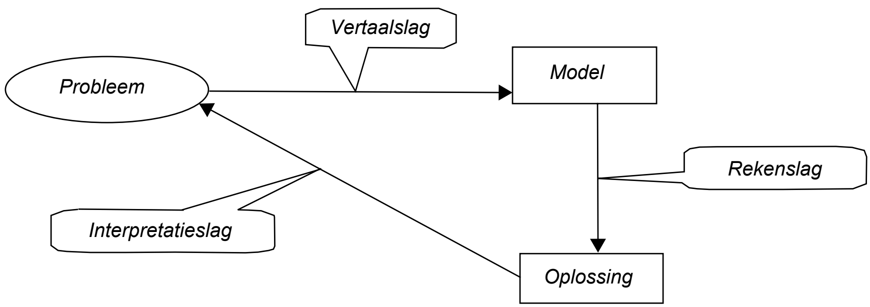
complexiteit
Van elke knoop in een ingeleverd schema hebben we het aantal in- en uitgaande pijlen (relaties) geteld; door ons de lokale complexiteit van de betreffende knoop genoemd. Vervolgens hebben we van elk schema de maximale lokale complexiteit bepaald. Schema's met een maximale lokale complexiteit op of boven de mediaan van alle maximale lokale complexiteiten hebben als een schema met een 'hoge complexiteit' (score 1) aangemerkt; de overige schema's met een 'lage complexiteit' (score 0).

Tijdens de analyse zijn ook andere opvallende zaken genoteerd.

6. Resultaten

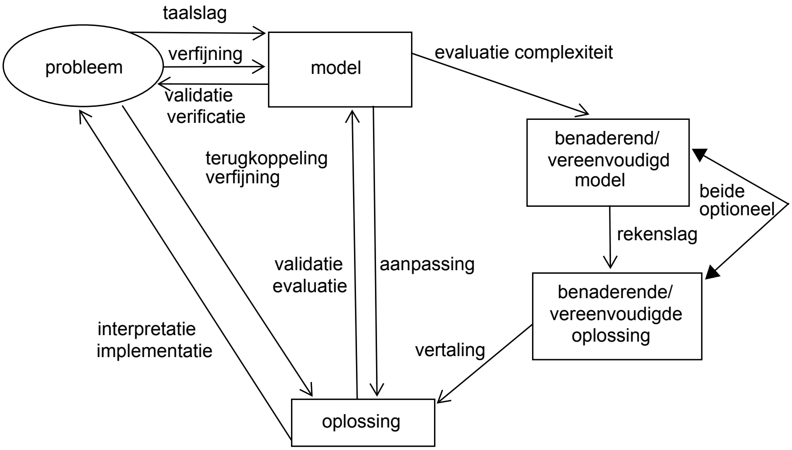
Om een indruk te geven van de mate van diversiteit presenteren we eerst van zowel de docentengroep als de studentengroep een paar voorbeelden. Deze voorbeelden, met name die met 'pen en papier' zijn aangeleverd, zijn vanwege de leesbaarheid in enkele gevallen licht bewerkt door ons. De bewerking betreft uitsluitend de weergave, niet de inhoud.

De eenvoudigste docentengraaf is vrijwel gelijk aan die van figuur 6, met als enige verschil dat 'taalslag' vervangen is door 'vertaalslag', zie figuur 7. Deze docent merkte op dat hij het wel met de gegeven graaf eens is, maar de term 'vertaalslag' prefereerde boven 'taalslag'.



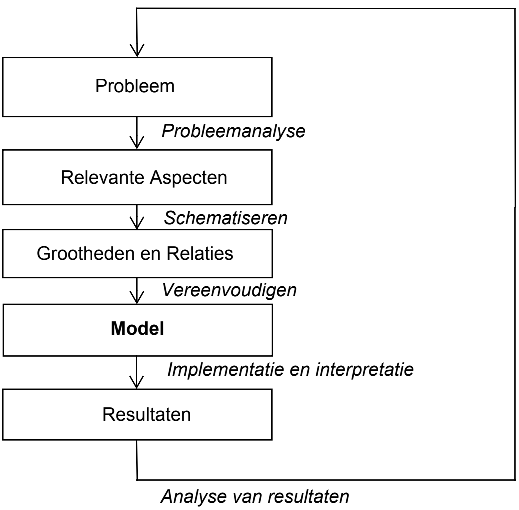
Figuur 7. Voorbeeld van de eenvoudige docentengraaf

Een complexe docentengraaf is die van figuur 8 met een maximale lokale complexiteit van 6 (bij de knoop *model*).



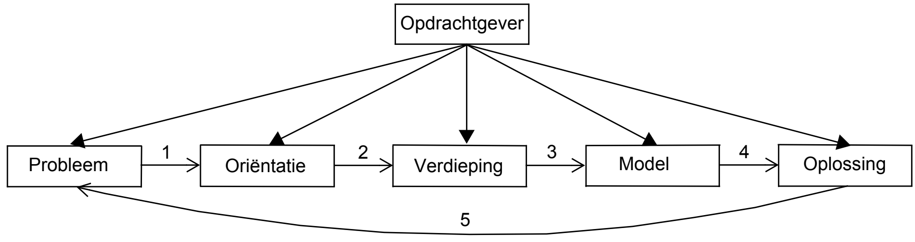
Figuur 8. Voorbeeld van een complexe docentengraaf

De eenvoudigste studentengraaf is die van figuur 9.



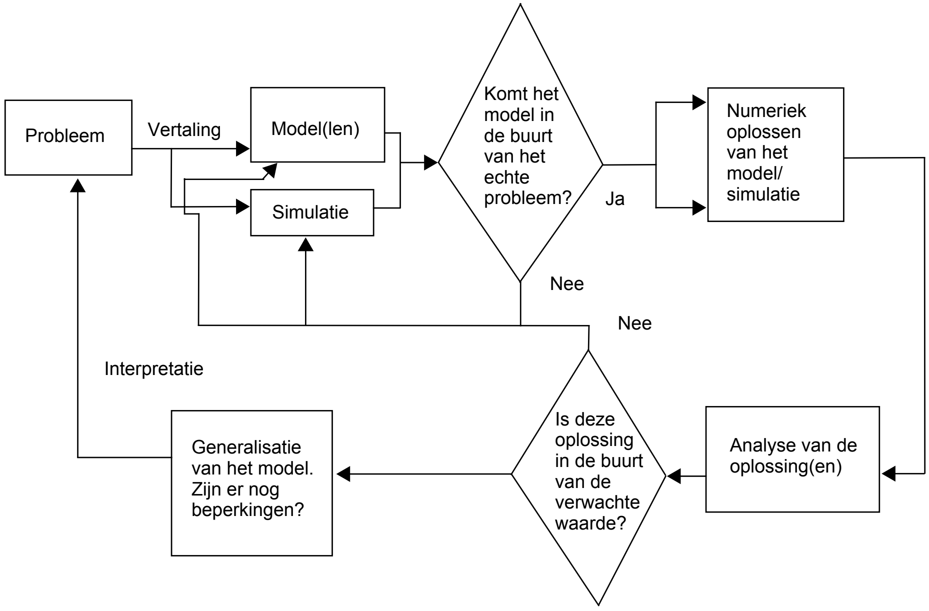
Figuur 9. Voorbeeld van een eenvoudige studentengraaf

In figuur 10 staat een studentengraaf waarin de opdrachtgever figureert.



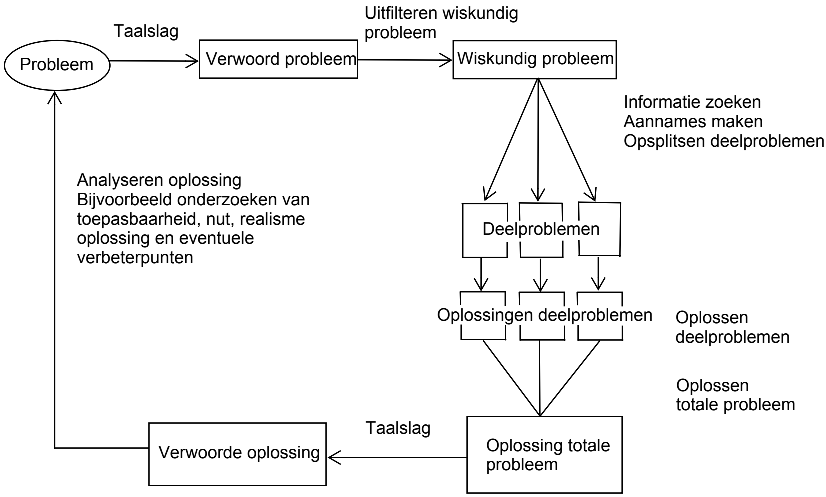
Figuur 10. Voorbeeld van een studentengraaf waarbij de opdrachtgever in beeld is

Een complexe studentengraaf met keuzemogelijkheden staat in figuur 11.



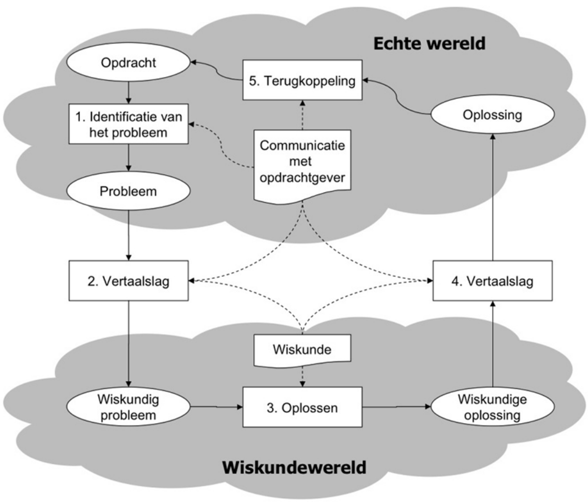
Figuur 11. Voorbeeld van een complexe studentengraaf met keuzemogelijkheden

Een complexe studentengraaf met parallelle deelprocessen staat in figuur 12.



Figuur 12. Voorbeeld van een studentengraaf met parallelle deelprocessen

In figuur 13 een voorbeeld van een studentengraaf waar de reële en de wiskundige wereld onderscheiden worden.



Figuur 13. Voorbeeld van een complexe studentengraaf met onderscheid tussen de reële en de wiskundige wereld

Verder zijn er docenten die geen graaf maar slechts een beschrijving in tekst geven. Hieronder geven we twee voorbeelden, de eerste met veel tekst (de weergave is door ons ingekort), de tweede met maar heel weinig tekst. In de gevallen waarbij we alleen over een beschrijving in tekst beschikten hebben we onafhankelijk van elkaar op basis van die beschrijving en eventuele toelichting een graaf geconstrueerd, die in onderling overleg tot een schema gemaakt en op maximale lokale complexiteit gescoord.

Voorbeeld van een reactie (van een docent) zonder graaf met veel tekst:

1. Informele beschrijving van het probleem
2. Mathematisering
3. Hiërarchie belangrijke-onbelangrijke effecten en relaties
4. Analyse potentiële modellenonder- en bovengrens binnen geordende verzameling potentiële modellen
   - eenvoudigste modellen
   - kleine parameters/asymptotiek/storingsmethoden
5. Definitie van het Minimale Model
   - eenvoud versus eisen
6. Voortdurende interactie met werkelijkheid
   - zo nodig meer of minder stappen terug
7. Eventueel meerdere cascades van modellen
   - partieel geordend.

Voorbeeld van een reactie (van een docent) zonder graaf met weinig tekst: er komen weinig gedachten bij me op en ik kan me wel vinden in de driehoek.

Van de dertig aangeschreven docenten hebben er ondanks een herinnering acht niet gereageerd. Twee reacties waren voor ons niet bruikbaar omdat de betreffende docenten zich niet aan de opdracht hadden gehouden. Er waren uiteindelijk twintig bruikbare reacties van de docenten, dat is bijna 70%. Dit staat in tegenstelling tot de respons van de studenten. We beschikken namelijk over de gegevens van alle studenten, omdat het nu eenmaal om een voor hen verplichte opdracht ging.

In tabel 1 is een overzicht gegeven van de scorepercentages in beide groepen. Over het resultaat bij het kenmerk *complexiteit* kunnen we nog melden dat enkele schema's zo ingewikkeld waren dat we de exacte maximale lokale complexiteit ervan niet eens konden berekenen. Die hebben we als 'hoog' gescoord. De mediaan van alle maximale lokale complexiteiten bleek gelijk aan 4.

Zoals gezegd hebben we onafhankelijk de gegevens van de studenten en de docenten gescoord op de genoemde negen variabelen. In tabel 1 hebben we ook de waarde van Cohens kappa per variabele vermeld, zoals we die hebben berekend voordat we in overleg de schema's definitief gescoord hebben. Die waarden zijn allemaal 0,5 of hoger zodat er sprake is van matige (0,4 – 0,6), substantiële (0,6 – 0,8) tot bijna volledige (0,8 – 1) overeenstemming.

Tabel 1. Percentages aanwezigheid per kenmerk in docentengroep en studentengroep

kenmerk	*% aanwezig bij docenten (n = 20)*	*% aanwezig bij studenten (n = 77)*	*Cohens kappa*
probleemanalyse	40	60	0,54
communicatie	25	31	0,83
werelden	25	16	0,53
modellen	35	20	0,86
kennis	15	10	0,59
validatie	65	81	0,50
verificatie	30	47	0,75
iteratie	70**	39**	0,66
complexiteit	50	53	0,81

** = verschil significant op 0.05 (tweezijdige *t*-toets)

We zien in tabel 1 dat er alleen bij *iteratie* een duidelijk significant verschil is tussen beide groepen: iteratie wordt door docenten vaker genoemd.

De scores op de verschillende variabelen bleken binnen de docentengroep enigszins samen te hangen. We zijn dat nagegaan met behulp van de coëfficiënt φ (Field, 2009, p. 791) die de mate van samenhang tussen twee dichotome variabelen (beide met waarden 0 en 1) meet. Een φ van ten minste 0.4 op een significantieniveau van ten hoogste 0.05 was er in de docentengroep tussen *communicatie en probleemanalyse* (φ = 0.471 met significantie .035), *werelden en kennis* (φ = 0.467 met significantie .037), *werelden en probleemanalyse* (φ = 0.471 met significantie .035), *probleemanalyse en validatie* (φ = 0.599 met significantie .007) en *iteratie en validatie* (φ = 0.435 met significantie 0.052). De docentengroep is echter te klein voor nadere analyse naar clusters. In de studentengroep is er alleen enige samenhang tussen *complexiteit en verificatie* (φ = 0.309 met significantie .007).

Enkele opvallende kenmerken werden nog bij individuele gevallen aangetroffen. We vermelden *terugblik:* terugkijken op het proces van het geheel.

Ook moet genoemd worden *projectbenadering:* vermelding dat tijd en budget een rol speelt.

De term *verificatie* werd in enkele gevallen (ook door docenten) gebruikt om de actie *validatie* aan te duiden. (Dit werd gescoord als *validatie*).

Hoewel lang niet iedereen het drievoudig onderscheid tussen de werkelijkheid, het domein van het probleem, en de wiskundige denkwereld maakt, zoals in figuur 12, is er toch ook hier sprake van diversiteit. We geven in tabel 2 een overzicht.

Tabel 2. Andere dan wiskundige werelden; tussen haakjes is de frequentie vermeld; waar geen frequentie is vermeld is die 1

studenten	*docenten*
werkelijkheid (4)	reële wereld
praktijk (3)	werkelijke wereld
oorspronkelijke wereld	niet-wiskundige wereld
reële wereld	
echte wereld	
niet-wiskundige kant	fysische wereld
wereld waar het probleem zich afspeelt	speelveld met attributen (van astronoom of loodgieter)
	conceptuele wereld
percepties van de probleemsituatie	‘ongelabelde tussenwereld’

Ook het gebruik van andersoortige *modellen* dan *wiskundig modellen* is behoorlijk divers. We merken hierover het volgende op. We hebben deze term niet apart gescoord, en ook niet de termen ‘submodel’ of ‘deelmodel’ in de betekenis van wiskundig model bij een deelprobleem. Er is een meerderheid bij de studenten (62 van de 77, 81%) en docenten (13 van de 20, 65%) die geen andere termen gebruikt en er is in beide groepen een minderheid die wel andere termen gebruikt.

Tabel 3. Andere termen dan wiskundig model; tussen haakjes het aantal studenten of docenten dat die term gebruikt

studenten	*docenten*
versimpelde modellen (5)	benaderend model
analyseerbaar model, berekenbaar model,	vereenvoudigd model
handelbaar model (3~)	eenvoudigste model
niet werkbaar model,	stochastisch model (2)
onberekenbaar	metaphor
aangepast model	first principle model
bevroren model	empirical data model
conceptueel model, mentaal model	goed model / mogelijk model
concept-model	geordende verzameling potentiële modellen
eindmodel	vollediger, maar ondoorzichtiger modellen
gespecificeerd probleem	minimale model = Het Model
hoofdmodel	deterministisch model
intuïtief model	continu model / gediscretiseerd model
natuurkundig model	berekenbaar model
model (naast wiskundig model)	minimaal fysisch model
schema met grootheden en relaties	gedetailleerder model
uitgebreid model	modelversies

De meesten van hen gebruiken één andere term, enkelen gebruikenmeer extra termen (zie tabel 3). Slechts enkele extra termen worden door meer studenten en/of docenten gebruikt. Zo worden bijvoorbeeld de termen *vereenvoudigde modellen, versimpelde modellen, simpel model, versimpeld model, vereenvoudigd model* door vijf studenten gebruikt (die we in tabel 3 met de term ‘versimpelde modellen’ hebben aangeduid), de term *stochastisch model* door twee docenten.
Ook hier kunnen we een globale indeling maken, en wel in termen die:
– algemeen toepasbaar zijn, zoals vereenvoudigd model
– een specifiek wiskundige achtergrond hebben, zoals stochastisch model
– afkomstig zijn van een specifiek niet-wiskundig domein, zoals natuurkundig model.

In tabel 4 hebben we per groep (studenten, docenten) aangegeven hoe vaak deze categorieën voorkomen.

Tabel 4. Aantal keren dat een andere term dan wiskundig model is genoemd, onderverdeeld naar de categorieën ‘algemeen toepasbaar’, ‘specifiek wiskundig', ‘specifiek niet-wiskundig’

groep	*algemeen toepasbaar*	*specifiek wiskundig*	*specifiek niet-wiskundig*	*totaal*
studenten	16	2	1	19 door 15 studenten
docenten	13	5	1	19 door 7 docenten

Ook opvallend is de diversiteit in wat de docenten vinden dat hun studenten op de opdracht om de gegeven ‘kale’ modelleercyclus uit te breiden zouden moeten antwoorden:
– twee doen hier geen uitspraak over;
– vrijwel niemand tekent hier opnieuw een schema, zoals zij vinden dat hun studenten zouden moeten tekenen
– vier vinden veel variaties ten opzichte van de gegeven ‘kale’ modelleercyclus acceptabel
– zeven zeggen zoiets als: ik verwacht (vrijwel) hetzelfde schema als ikzelf gegeven heb
– zeven accepteren: een deel van het eigen antwoord
– meermaals wordt benadrukt dat moet voorkomen:
  • communicatie met opdrachtgever
  • probleemanalyse
  • iteratie
  • validatie en/of verificatie
– individuele docenten benadrukken:
  • mathematiseren, hiërarchie van modellen, de relatie tussen modeleisen en technische mogelijkheden, de beschikbaarheid van informatie, de correctheid van data, de rol van theorie, het belang van argumentatie.

Alvorens onze conclusies uit deze gegevens te rapporteren, doen we verslag van de discussie die we begin 2011 met de betrokken docenten over deze resultaten hebben gevoerd.

7. Verslag van de discussie met de docenten over de resultaten

Uiteraard waren we benieuwd hoe de betrokken docenten op de resultaten van ons onderzoek zouden reageren. Daartoe hebben we die resultaten van ons onderzoek in een sessie aan hen voorgelegd. De centrale vraag van de discussie daarbij was: Is diversiteit een probleem? En om de lezers een nadere indruk te geven, presenteren we ook de deelvragen waarin deze centrale vraag was opgesplitst:

- Moeten studenten dezelfde taal spreken / hetzelfde soort schema hanteren?
- Moeten docenten dezelfde taal spreken / hetzelfde soort schema hanteren?
- Zou iteratie door studenten vaker genoemd moeten worden?
- Zou probleemanalyse vaker genoemd moeten worden?
- Zou communicatie vaker genoemd moeten worden?
- Zou verificatie vaker genoemd moeten worden?
- Zou validatie en verificatie consistent gebruikt moeten worden?
- En zo ja, hoe zou dat dan bereikt moeten worden?
- Hebben bijvoorbeeld extra methodologiecolleges effect daarop?

We geven een samenvatting van die discussie, waarbij we niet op alle deelvragen afzonderlijk ingaan. In het algemeen was men het er wel over eens dat die diversiteit (binnen zekere grenzen) geen probleem is. Die diversiteit is inherent aan het vak: elk probleem kan zijn eigen benadering en resulterend model hebben. De diversiteit wordt ook bepaald door het feit dat er zoveel docenten bij betrokken zijn die allemaal hun expertise en wellicht mede daardoor hun eigen ideeën over modelleren hebben.

Eén docent zou op ten minste één punt uniformiteit willen hebben: een door ieder onderschreven definitie van wat een wiskundig model is. Dat standpunt ondervond onvoldoende ondersteuning; wel sprak men de wens uit dat in de loop van de jaren bij de begeleiding van de studenten bij hun modelleeropdrachten met hen hierover gesproken zou worden. Verder merkte men op dat er niet één definitie is te geven, maar dat die van toepassingsgebied tot toepassingsgebied kan verschillen.

De conclusie was dat het proces van modelleren belangrijker is dan de vraag wat nu eigenlijk de definitie van een model is.

Men was het er over eens dat de bekeken variabelen relevant zijn. Opmerkelijk vond men dat communicatie (met de opdrachtgever) zo laag scoorde, terwijl dat door de aanwezigen toch als belangrijk werd aangemerkt. Het zou kunnen zijn dat in de praktijk de studenten dit wel doen, maar alleen met de begeleider, omdat dat nu eenmaal makkelijker is dan met de opdrachtgever. En het zou kunnen zijn dat de studenten er vervolgens in hun schema's ook geen gewag van maken omdat ze dit vanzelfsprekend vinden.

Er werd gevraagd of we niet beter naar feitelijk modelleergedrag hadden moeten kijken, in plaats van naar hoe studenten en docenten zelf modelleren zien. Het antwoord hierop is dat dit ook gebeurt, namelijk in de afsluitende cursus van Modelleren in het derde jaar. In een van de bijeenkomsten daarvan worden schema's van studenten in de groep besproken. Studenten vertellen vrijelijk over hun aanpak en tekortkomingen daarin. Maar dat onderdeel was geen onderdeel van ons onderzoek.

Over het inmiddels sinds kort ingevoerde college Methodologie is tamelijk uitvoerig gesproken. In het onderzoek kon een eventueel effect hiervan nog niet worden meegenomen, omdat er nog slechts één cohort is dat deze colleges gevolgd heeft. Het lijkt erop dat er bij dit cohort nog nauwelijks een effect is, maar misschien moet dit nog komen naarmate het college langer draait. Er wordt in het college overigens wel degelijk aandacht besteed aan de vraag of er een definitie is te geven van het begrip 'wiskundig model'.

Wellicht geldt hier dat een college over de vraag of er een definitie van model mogelijk is, pas zinvol kan zijn op het moment dat de studenten over enige modelleerervaring beschikken. Vergelijk dit met heuristieken bij wiskundig probleemoplossen, bijvoorbeeld zoals door Pólya (1954) geformuleerd. Daarvan is gebleken dat het expliciteren ervan pas zinvol is als studenten ervaring hebben opgedaan met probleemoplossen (Schoenfeld, 1985, 1992).

Als resultaat van deze discussie kan worden gemeld dat:

– de docenten onze analyse herkennen en de relevantie van de gebruikte variabelen onderschrijven
– de docenten het doen van modelleren door studenten belangrijker vinden dan wat de studenten erover zeggen
– de docenten vinden dat de genoemde aspecten, zoals: Wat is modelleren, wat is een model, wat is de rol van de opdrachtgever?, het best aan de orde kunnen worden gesteld gedurende de begeleiding
– verder de geconstateerde diversiteit geen probleem is maar inherent aan wiskundig modelleren.

8. Conclusies en discussie

Uit onze analyse van de gegevens van de docenten en studenten blijkt dat er inderdaad een grote diversiteit is, lopend van een heel kleine uitbreiding van het in figuur 7 aan iedereen gepresenteerde schema tot behoorlijk complexe schema's. Dit geldt zowel voor docenten als studenten. De variabelen *probleemanalyse* en *validatie* scoren bij beide groepen in de top drie, *werelden* en *kennis* bij beide groepen bij de laagste drie.

Dat de docenten *iteratie* significant vaker noemen dan de studenten, heeft wellicht te maken met het feit dat studenten bij hun modelleeractiviteiten problemen voorgelegd krijgen die lang niet altijd tot verschillende modellen aanleiding geven en na één iteratieslag (vrijwel) opgelost zijn. Een andere reden kan zijn dat de studenten er niet meer tijd aan kunnen of willen besteden.

De sterke samenhang bij docenten tussen *probleemanalyse* en *validatie* kan als volgt verklaard worden. Bij de probleemanalyse wordt geprobeerd te achterhalen waar het nu echt om gaat. Maar dan moet het model daar ook gevalideerd op aansluiten.

Over de relatief grote variatie in complexiteit van de schema's kunnen we het volgende opmerken. Bij studenten hoeft die niet te verwonderen. Zij hebben relatief weinig kennis en ervaring met modelleren, zeker vergeleken met de docenten. Voor docenten zou kunnen gelden dat zij de 'kale' modelleercyclus als de beste representatie zien, omdat zij, gezien hun uitgebreide kennis en ervaring, hierin de kernelementen van het modelleren terugzien. In de onderwijssituatie, waarop dit onderzoek gericht is, zou men dan mogen verwachten dat zij bij de vraag welke representatie zij vinden dat hun studenten aan het eind van de bacheloropleiding zouden moeten geven, toch een wat uitgebreidere representatie zouden aangeven. Dat was echter niet het geval.

Hoewel het ons, zoals eerder aangegeven, niet om een beoordeling van de ingeleverde schema's ging, waren wij toch verbaasd te moeten vaststellen dat er zelfs bij docenten geen eenduidigheid was over sommige termen, zoals validatie en verificatie.

We ronden dit deel van de discussie af met ons standpunt over de geconstateerde diversiteit bij het modelleren bij de bacheloropleiding. We onderschrijven de stelling dat het doen (het modelleerproces) belangrijker is dan het denken erover. Daarbij tekenen we aan dat bekend is dat bij leren waarbij studenten moeten samenwerken aan open problemen, reflectie op de leeractiviteiten onmisbaar is (Dixon, 1994; Mellander, 1993; Revans, 1982; Simons, 1997). Gezien de (soms grote) verschillen tussen de modelleerproblemen, tussen de wiskundige disciplines daarbij en tussen de (wiskundige achtergronden van de) begeleiders of opdrachtgevers, is de geconstateerde diversiteit wel haast onvermijdelijk. Desondanks zijn er voldoende kenmerken van het modelleren die vrijwel altijd voorkomen: probleemanalyse, onderscheid tussen de reële en de wiskundige wereld, kennis van het relevante deel van de reële wereld, communicatie met de opdrachtgever, interpreteren van de oplossing, iteratie, verifiëren en valideren van het ontwikkelde model. Wij menen daarom dat deze kenmerken een expliciete plaats in het modelleeronderwijs verdienen.

English summary

Over the years, students of the Bachelor's program Industrial and Applied Mathematics of the Eindhoven University of Technology seemed to show a great diversity in representating the modelling cycle at the end of a series of mathematical modelling projects. We investigated this alleged diversity, and into this investigation we included the representations by the tutors of the students. The schemes of 77 students and 20 tutors, in which they give their vision of the modelling cycle in some or more detail, were analysed with respect to variables such as validity, verification, iteration and complexity. The intercoder reliability was good. Indeed in both groups, students and tutors, there was much diversity on many variables. Only on iteration (passing more than once through the modelling cycle) the groups systematically differed. In a discussion with the tutors on the results of the

investigation the value of the variables under investigation was recognized. The ascertained diversity was not considered a problem by most tutors.

We bedanken de coördinator van het modelleeronderwijs, Ivo Adan, voor zijn bemiddeling tussen ons en de modelleerdocenten; we bedanken hem voor zijn meedenken over de analyse van de modelleerschema's, maar op dit punt bedanken we vooral Kees van Overveld.

Literatuur

Alberts, G. (1998). *Jaren van berekening, toepassingsgerichte initiatieven in de Nederlandse wiskunde-beoefening* 1945 – 1960. Amsterdam: Universiteit van Amsterdam.

Ausubel, D. (1968). *Educational Psychology: A Cognitive View*. New York: Holt, Rinehart & Winston.

Berry, J. & Davies, A. (1996). Written reports. In C.R. Haines and S. Dunthorne, (Eds.) Mathematics Learning and Assessment: *Sharing Innovative Practices*, 3.3 – 3.11. London: Arnold.

Bonotto, C. (2007). How to replace word problems with activities of realistic mathematical modelling. In W. Blum, et al. (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (p. 405 – 408). New York: Springer.

Blomhøj, M. & Hoff Kjeldsen, T. (2006). Teaching mathematical modelling through project work. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 163 - 177.

Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven. In G. Kadunz, et al. (Eds.): *Trends und perspektiven. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik*, Vol. 23 (p. 15 - 38). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematical instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 37 - 68.

Blum, W. & Leiß, D. (2006). How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Eds.) Mathematical Modelling (ICTMA12): *Education, Engineering and Economics* (p. 222 - 231). Chichester: Horwood Publishing.

Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematically Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Applications*, *1*(1), 45 - 58.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, *The International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 86 - 95.

Borromeo Ferri, R. (2007). Modelling problems from a cognitive perspective. In: C. R. Haines, P. Galbraith, W. Bloom & S. Khan, (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics* (p. 260 - 270). Chichester: Horwood Publishing.

De Lange Jzn, J. (1987). *Mathematics, Insight and Meaning*. Proefschrift. Utrecht: Vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijscomputercentrum, Rijksuniversiteit Utrecht.

Dixon, N. (1994). *The organisational Learning Cycle: how we can learn collaboratively*. Maidenhead, UK: McGraw-Hill International.

Field, A. (2009). *Discovering Statistics Using SPSS*. London: Sage Publications Ltd.

Galbraith, P. & Stillman, G. (2006). A Framework for Identifying Student Blockages during Transitions in the Modelling process. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 143 - 162.

Haines, C.R. & Crouch, R., (2010). Remarks on modeling cycle and interpretation of behaviours. In R. A. Lesh, P. L. Galbraith, C.R. Haines, & A. Harford (Eds.), *Modelling Students' Mathematical Modelling Competencies*, (ICTMA13) (p. 145 - 154). New York, London: Springer.

Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In G. Graumann, et al. (Eds.): *Materialen für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* (p. 64 - 84). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Kaiser, G. & Schwartz, B. (2006) Mathematical modelling as a bridge between school and university. ZDM, *The International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 196 -208.

Kaiser, G., Blomhøj, M., & Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 82 - 85.

McAlleese, R. (1988). The Knowledge Arena as an Extension to the Concept Map: Reflection in Action, *Interactive Learning Environments*, *6*(1), 1 - 22.

Mellander, K. (1993). *The Power of Learning: Fostering Employee Growth*. Alexandria: American Society for Training and Development.

Novak, J.D. (1977). *A theory of Education*. Ithaca: Cornell University Press.

Novak, J.D. & Gowin, D.B. (1984). *Learning how to learn*. Cambridge: Cambridge University Press.

Novak, J.D. & A. J. Cañas. The Theory Underlying Concept Maps and How to Construct and Use Them, Technical Report IHMC CmapTools 2006-01 Rev 01-2008, Florida: Institute for Human and Machine Cognition, 2008, available at: http://cmap.ihmc.us/Publications/ResearchPapers/TheoryUnderlyingConceptMaps.pdf (geraadpleegd 29 maart 2011).

Orrison, M. & Yong, D. (2006). *Instructor's Guide to the Graph Complexity Project*; on-line op Yonghttp://mathforum.org/pcmi/hstp/sum2007/wg/supervisors/journal/instructors-guide.pdf (geraadpleegd 16 mei 2011).

Perrenet, J.C. & Adan, I. (2010). The Academic Merits of Modelling in Higher Mathematics Education; a Case Study. *Mathematics Education Research Journal 22*(2), 121 - 140.

Pollak, H. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. In UNESCO (eds.), *New trends in mathematics teaching IV*, (p. 232 - 248). Paris: UNESCO.

Polya, G. (1954). *How to solve it?* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Revans, R. (1982). *Action Learning*. Bromley: Chartwell-Bratt.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Eds.), *Handbook for research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 334 - 370). New York: MacMillan.

Simons, P.R.J. (1997). Ontwikkeling van leercompetenties. *Opleiding en Ontwikkeling*, *9*, 17 - 20.

Sowa, J.F. (1984). *Conceptual Structures: Information Processing in Mind and Machine*. Reading, MA: Addison-Wesley.

Spandaw, J. & Zwaneveld, B. (2009). Modelling in mathematics teachers' professional development. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello, (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Working group 11 Application and Modelling*. Lyon: Unversité 1 de Lyon.

Zwaneveld, B. (1999). *Kennisgrafen in het wiskundeonderwijs*. Proefschrift. Maastricht: Shaker Publishing.