De vertaalslag van een situatie naar een wiskundige formule; een studie naar vraagstellingen en leerlingprestaties op het centraal examen wiskunde B1

Sanne Schaap
Marecollege Leiden

Pauline Vos
Hogeschool van Amsterdam

Ton Ellermeijer
Stichting CMA Amsterdam

Martin Goedhart
Rijksuniversiteit Groningen

Samenvatting
Het wiskundecurriculum voor het voortgezet onderwijs schrijft voor dat leerlingen een situatie moeten kunnen vertalen naar een wiskundige formule (algebraïseren). We hebben onderzocht in hoeverre de vragen in het centraal schriftelijk eindexamen dit leerdoel toetsen en in welke mate vwo wiskunde B1-leerlingen op het centraal examen vaardig zijn in deze vertaalslag. We hebben het centraal schriftelijk eindexamen uit de periode waarin het leerplan gold en de vaardigheden van eindexamenkandidaten geanalyseerd middels drie dataverzamelingen: Cito-scores op de centrale examens, schriftelijke uitwerkingen van leerlingen op examens en interviews met 6-vwo-leerlingen op basis van examenvragen. Uit de analyse bleek dat het leerdoel algebraïseren nauwelijks werd getoetst in vijf opeenvolgende jaren en enkel in een format waarbij de formule reeds werd aangereikt en de leerlingen werd gevraagd deze formule te reconstrueren (reconstruerend algebraïseren). Op dergelijke vragen werd wisselend hoog en laag gescoord. Hoge scores traden op als de examenmakers de vertaalslag van de situatie naar een formule al grotendeels aanreikten. Lagere scores traden op bij vragen met een nadruk op formulevaardigheden (bijvoorbeeld wortels bewerken) of waarbij nog een aantal stappen in de vertaalslag gezet moest worden. We vonden dat de aangereikte formules de leerlingen houvast geven, impliciet aanwijzingen geven voor een probleemaanpak en als doel op zich fungeren. Uit de interviews bleek, dat leerlingen kunnen algebraïseren zonder dat een formule wordt aangereikt. We bevelen onderzoek aan naar vraagformats met verschillende combinaties van algebraïseeractiviteiten zoals simplificeren, structureren, variabelen identificeren en een wiskundige formule construeren.

1. Inleiding

In de afgelopen decennia is het Nederlandse wiskundeonderwijs ingrijpend veranderd. Vanaf 1965 werd in het basisonderwijs realistisch rekenonderwijs ingevoerd via het Wiskobas[1]-project. In het voortgezet onderwijs resulteerden het HEWET[2]- en het HAWEX[3]-project in respectievelijk 1985 en 1990 in twee nieuwe wiskundecurricula voor het VWO en het HAVO: wiskunde A en wiskunde B. Het vak wiskunde A had als doel om leerlingen voor te bereiden op de sociaal-wetenschappelijke studies, terwijl wiskunde B voorbereidde op technische studies. Het vak wiskunde A kenmerkte zich door een rijk geschakeerd gebruik van maatschappelijke en economische probleemsituaties waarvoor wiskundige gereedschappen ingezet moesten worden en vanwaaruit wiskunde geleerd werd. Vanaf 1997 werd via het Profiproject de abstracte wiskunde in het wiskunde B-curriculum ook ingebed in probleemsituaties.

Vanaf de invoering van de Tweede Fase in 1998 zien we als eindterm in het examenprogramma wiskunde dat leerlingen de volgende vaardigheid moeten beheersen: *'een in de context beschreven samenhang vertalen in een functievoorschrift'* (Van der Zwaart, Koolstra & Laaper, 2001). Vanaf 2007, de start van de Vernieuwde Tweede Fase, is dit voor zowel HAVO als VWO geherformuleerd tot *'De kandidaat kan een gegeven probleemsituatie inventariseren, vertalen in een wiskundig model […]'* (bijvoorbeeld CEVO, 2007; SLO, 2007). De Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO) die in 2006 werd ingesteld voor het opstellen van nieuwe examenprogramma's omschrijft *'het mathematiseren van een realistische of wiskundige situatie door een formule of vergelijking op te stellen'* als een centrale wiskundige denkactiviteit (cTWO, 2007). De vaardigheid van het kunnen vertalen van een situatie naar een wiskundige formule is daarmee vooralsnog verankerd in de wiskundecurricula van HAVO en VWO.

De vaardigheid van het kunnen vertalen van een situatie naar een wiskundige formule werd voor het eerst op het centraal examen expliciet getoetst in het HAVO A1,2 examen van 2007 (eerste tijdvak). Bij een tekst over een badkamerradiator werd aan de leerlingen gevraagd om een formule op te stellen waarin de hoogte h uitgedrukt is in de breedte b. Zie figuur 1.

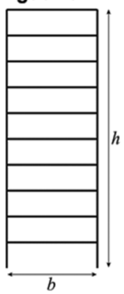
Dit verband kon worden opgesteld door te redeneren dat de tien horizontale buizen en twee verticale buizen in totaal 900 cm aan buizen vormen ($10b + 2h = 900$). Via herleiden ontstond de gevraagde formule voor h ($h = 450 – 5b$).

De score op deze vraag was het laagst van alle opgaven uit dit examen. Deze opgave had een p-waarde[4] van 25%, terwijl de gemiddelde p-waarde op het hele examen 56% was (De Bruijn et al., 2007). Dit resultaat gaf ons aanleiding voor de hypothese dat eindexamenkandidaten moeite hebben om zelfstandig een formule op te stellen. Om deze hypothese te toetsen hebben we een onderzoek opgezet naar de centrale examens en de vaardigheid van het vertalen van een probleemsituatie naar een formule.

We hebben ons daarbij gericht op VWO-leerlingen die een profiel volgen met wiskunde B1. Van de resultaten van het onderzoek doen we verslag in dit artikel.

Een fabrikant maakt radiatoren voor de verwarming van de badkamer.
In figuur 5 zie je zo'n radiator. De radiator bestaat uit twee rechtopstaande stalen buizen met een lengte van h cm en tien stalen dwarsbuizen die elk b cm lang zijn. We laten de dikte van de buizen in deze opgave buiten beschouwing.
De hoogte van de radiator is dus h cm en de breedte b cm.

figuur 5



figuur 6

Voor één radiator wordt altijd in totaal 900 cm aan buizen gebruikt.
Een hogere radiator wordt dan smaller, en een lagere radiator wordt breder.
Hoogte h en breedte b zijn dus afhankelijk van elkaar. Er is een lineair verband tussen h en b.

Stel een formule op waarin h uitgedrukt is in b.

Figuur 1. Fragment van de Badkamerradiator-opgave, HAVO A1,2 examen 2007-I

2 Conceptueel raamwerk

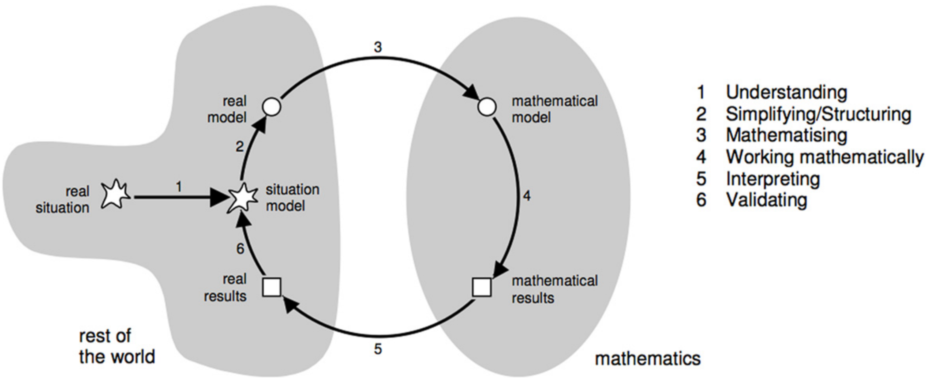
2.1 Het toetsen van leerdoelen

Goodlad, Klein & Tye (1979) maken onderscheid tussen *beoogd curriculum, geïmplementeerd curriculum* en *bereikt curriculum*. Het beoogde curriculum wordt voor het vak wiskunde weergegeven in de vorm van *eindtermen* (bijvoorbeeld CEVO, 2007). Het geïmplementeerde curriculum bestaat uit de gegeven vaklessen wiskunde. Het bereikte curriculum is hetgeen de leerling daadwerkelijk heeft geleerd als gevolg van het genoten onderwijs.

Een toets, en zo ook een schriftelijk eindexamen, beoogt onder meer te evalueren in welke mate het bereikte curriculum overeenkomt met het beoogde curriculum. Wanneer een toetsvraag een leerdoel uit het beoogde curriculum beoogt te toetsen, heeft die vraag *curriculumvaliditeit* ten opzichte van dat doel (Segers, 1997). Curriculumvaliditeit kan bijvoorbeeld worden beoordeeld door de toetsen aan deskundigen voor te leggen. In dit onderzoek bekijken we in welke mate het eindexamen wiskunde B1 curriculumvaliditeit heeft met betrekking tot het leerdoel ‘vertalen van een situatie naar een wiskundige formule’, door de opgaven uit het eindexamen te matchen met de leerdoelen. Daarnaast richten we ons op de mate waarin de toetsvragen ook daadwerkelijk de beoogde leerdoelen meten: moeten leerlingen algebraïseervaardigheden inzetten bij het beantwoorden van een dergelijke vraag? Hiermee wordt de *begripsvaliditeit* van een toets gemeten, waarmee de *curriculumvaliditeit* kan worden geverifieerd: het perspectief is respectievelijk vanuit leerlingactiviteiten die ontlokt worden door een opgave of vanuit het oordeel van een leerplanexpert over een opgave (Van Berkel, 1999; Evers, et al., 1988). Een vraag die in eerste instantie als curriculumvalide wordt beoordeeld ten opzichte van het leerdoel algebraïseren kan vervolgens niet begripsvalide blijken, wanneer bijvoorbeeld de score op die vraag voornamelijk een maat is voor hoe goed leerlingen een algebraïsche vaardigheid als ‘haakjes uitwerken’ beheersen. In dat geval staat de curriculumvaliditeit van de opgave alsnog ter discussie.

2.2 Het leerdoel ‘algebraïseren’

Het leerdoel ‘kunnen vertalen van een probleemsituatie naar een wiskundige formule’ wordt gerechtvaardigd als belangrijke component van het modelleren en speelt een duidelijke rol in de natuurwetenschappen, maar ook in economische, technische en sociale wetenschappen (Afstemmingsgroep Modelleren, 2008; cTWO, 2007). Een model is daarbij een vereenvoudiging van het oorspronkelijke fenomeen, bijvoorbeeld een pijlendiagram, een plattegrond of een wiskundige formule. Het werken met modellen is een activiteit die wordt aangeduid als *modelleren*, en daarbinnen is het vertalen van een probleemsituatie naar het model een deelactiviteit. In een gestileerde vorm omschrijven Blum & Leiß (2005) het mathematisch modelleren als een in een cyclus geschakelde reeks van activiteiten (zie figuur 2): men bestudeert de probleemsituatie en vormt zich een beeld ervan (*understanding*). De situatie wordt gestructureerd en vereenvoudigd (*structuring* en *simplifying*) en vervolgens omgezet naar een mathematisch model (*mathematising*). Via het uitvoeren van wiskundige bewerkingen wordt een ‘wiskundig resultaat’ gegenereerd (*working mathematically*). Wanneer het wiskundige resultaat wordt ingebed in de oorspronkelijke probleemsituatie, wordt een ‘realistisch resultaat’ verkregen (*interpreting*). Tot slot wordt gekeken of met dit resultaat een oplossing wordt gegeven voor het oorspronkelijke probleem (*validating*). Is dat niet het geval, dan wordt de cyclus opnieuw doorlopen. De Afstemmingsgroep Modelleren (2007) geeft in haar advies aan de bèta-vernieuwingscommissies een soortgelijke omschrijving van modelleren als een cyclische activiteit. Afwijkend hiervan beperkt cTWO het begrip modelleren tot een reeks activiteiten zonder cyclus: *‘het doorgronden en analyseren van het probleem, het kiezen van variabelen, het opstellen van verbanden, het bepalen van een strategie en het inzetten van wiskundige middelen’* (cTWO, 2007, p. 25).



Figuur 2. Modelleercyclus van Blum en Leiß (2005)

Een mathematisch model kan bestaan uit bijvoorbeeld een grafiek, een tabel of een formule. In dit artikel richten we ons uitsluitend op mathematische modellen die bestaan uit een formule die het verband aangeeft tussen twee of meerdere grootheden, een zogeheten *algebraïsch model*. Van Streun (2007) introduceerde het begrip *algebraïseren* voor *'het formuleren van problemen in vergelijkingen en formules en het interpreteren van die algebraïsche expressies'*. Deze definitie werd overgenomen door cTWO (2007). Ook wij gebruiken deze definitie en we definiëren algebraïseren als: het vertalen van een probleemsituatie naar een formule voor die situatie. Deze activiteit kan deel uitmaken van een reeks modelleeractiviteiten, maar ook afzonderlijk voorkomen, zoals bij de Badkamer-radiator-opgave. De activiteit algebraïseren bestaat uit deelactiviteiten: verkennen, structureren en simplificeren van de situatie, relevante variabelen identificeren, herkennen van een verband tussen de relevante variabelen, omzetten van een verband tussen variabelen naar een formule (Schaap, Vos & Goedhart, 2011).

Algebraïseervaardigheden zijn niet equivalent aan *algebraïsche vaardigheden*. Dit is een term die in de examenprogramma's van de exacte vakken sinds 2007 wordt gebruikt voor een afzonderlijke groep eindtermen. Deze eindtermen beschrijven procedurele bewerkingen met formules, waarbij deze formules geen verband houden met probleemsituaties. Het algebraïseren zoals hiervoor gedefinieerd is dus geen algebraïsche vaardigheid, maar algebraïsche vaardigheden zijn vaak onmisbaar bij het algebraïseren.

Zoals gezegd, start het algebraïseren vanuit een situatie. In schriftelijke toetsen wordt een situatie beschreven in woorden en eventueel verduidelijkt met figuren. Situaties zijn vaak afkomstig uit de leefwereld van de leerlingen, maar dit hoeft niet. In het wiskundeonderwijs is de term 'context' gangbaar en gebruikt men termen als 'contextrijke wiskunde', 'realistische contexten' en 'gecontextualiseerde wiskunde': *'Contextual problems describe situations where a problem is posed. More often this will be an everyday life* *situation, but not necessarily so; for the more advanced students mathematics itself will become a context'* (Gravemeijer, 1994, p. 105).

Er bestaat een grote variatie aan definities van de term 'context', zoals bijvoorbeeld door Van Oers (1998), die een 'context' ziet als het resultaat van een interpretatie van een activiteit, en door Van den Heuvel-Panhuizen (2005), die onderscheid maakt tussen leeromgevingcontext en taakcontext. Om verwarring te voorkomen vermijden we in dit artikel het woord 'context' en spreken we over 'situaties', hetgeen overeenkomt met de term taakcontext van Van den Heuvel-Panhuizen. Bij de opgave in de inleiding is er dus een situatie van een badkamer waarin een radiator is opgebouwd uit buizen van een gegeven lengte. Deze situatie is voorstelbaar (*experientially real*) voor de leerling (Gravemeijer & Doorman, 1999), maar geconstrueerd door de ontwerpers van de opgave en niet authentiek (Vos, 2011). Opvallend bij deze badkamerradiator-opgave is, dat er geen probleem wordt opgelost met de gevraagde formule.

De Lange (1999) maakt een indeling van de verschillende rollen die situaties kunnen spelen in wiskundeopgaven. Situaties kunnen motiveren, betekenis geven aan abstracte wiskunde, enzovoorts. Hij maakt onderscheid tussen situaties die wel of niet functioneel zijn voor het beantwoorden van een opgave. In de badkamerradiator-opgave is de situatie functioneel voor het beantwoorden van de vraag: het verdelen van een lange buis in horizontale en verticale stukken geeft aanleiding voor het opstellen van een formule.

Als illustratie van een niet-functionele situatie staat in figuur 3 een eindexamenopgave wiskunde B1 over een vuurpijl met tegenwind, waarin gevraagd wordt naar de maximale hoogte van de vuurpijl. Voor de beantwoording is de situatie irrelevant en kan men zich beperken tot kale algebra (gegeven de vergelijking $y = \dots$, wat is het maximum?); de situatie van de vuurpijl is hooguit functioneel voor het schatten van het antwoord. De Lange (1999) duidt een dergelijke situatie aan als 'camouflage'; Blum & Niss (1991) duiden dit aan met het aankleden ('dressing up') van een wiskundeopgave. Voor de definitie van het algebraïseren betekent dit dat een functionele situatie vereist is.

2.3 Onderzoeksvragen

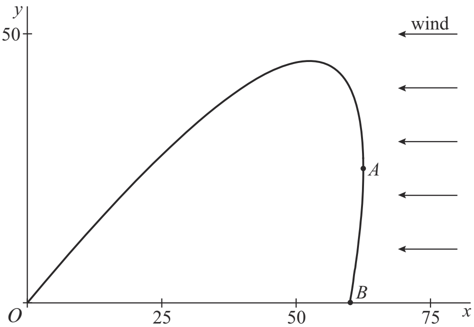
We richten ons in dit artikel op het beantwoorden van de vraag in welke mate vwo-leerlingen op het centraal examen wiskunde B1 kunnen laten zien dat zij een situatie kunnen vertalen naar een formule. Om een antwoord te formuleren op deze vraag richten we ons op een drietal deelvragen:

1. In hoeverre en in welke vorm wordt algebraïseren getoetst op het centraal examen wiskunde B1?
2. In hoeverre verschilt bij examenkandidaten wiskunde B1 de score op vragen waarin gealgebraïseerd dient te worden van de score op de overige vragen?
3. In hoeverre zijn er verklaringen te vinden voor de leerlingscores op vragen van het centraal examen wiskunde B1 waarin gealgebraïseerd dient te worden?

Een vuurpijl met tegenwind

Een vuurpijl wordt vanaf de grond schuin weggeschoten. Door tegenwind beschrijft de vuurpijl een baan zoals die in figuur 1 getekend is.

figuur 1



In deze figuur is een assenstelsel aangebracht met de x-as op de grond tegen de windrichting in en de y-as verticaal. In O wordt de vuurpijl afgeschoten. In B komt hij weer op de grond.
A is het punt van de baan dat het meest naar rechts ligt.
We gebruiken voor de baan de volgende formules:
voor het eerste deel OA van de baan geldt $y = 2x - 100 + 4 \cdot \sqrt{625 - 10x}$,
voor het tweede deel AB van de baan geldt $y = 2x - 100 - 4 \cdot \sqrt{625 - 10x}$,
met x en y in meter.

7p **16** Bereken op algebraïsche wijze de maximale hoogte die de vuurpijl bereikt.

3p **17** Bereken de x-coördinaat van A.

Figuur 3. Vraag 16-2009 (Vuurpijl)

3 Methode

Voor het beantwoorden van deze deelvragen hebben we het onderzoek in twee delen uitgevoerd. Eerst zijn centrale examens wiskunde B1 geanalyseerd op curriculumvaliditeit ten opzichte van het leerdoel algebraïseren; we hebben hiervoor examenvragen geïdentificeerd. Vervolgens hebben we deze vragen gebruikt voor een instrument in een vervolgonderzoek naar leerlingprestaties.

3.1 Beoordeling van curriculumvaliditeit van examens

De steekproef voor het onderzoek naar de curriculumvalideit van de centrale examens wiskunde B1 bestond uit de examens van 2004 tot en met 2008 voor het eerste tijdvak. De examens uit het tweede tijdvak zijn niet gebruikt, omdat alleen bij het eerste tijdvak alle vwo wiskunde B1-leerlingen getoetst kunnen worden op het leerdoel algebraïseren.

Elk examen bestond uit zes *opgaven*, bestaande uit een titel, een situatiebeschrijving en enkele vragen. In ons onderzoek richtten we ons op de vragen, omdat deze de leerlingactiviteiten ontlokken. We identificeerden een vraag als curriculumvalide ten opzichte van het leerdoel algebraïseren, als vanuit een beschreven situatie een vertaalslag moest worden gemaakt naar een formule. De beschreven situatie moest dus functioneel zijn voor het beantwoorden van de vraag, er moest een verband tussen variabelen omgezet worden naar een formule en er moest van de leerling minstens één van de volgende deelactiviteiten geëist worden: structureren en simplificeren van de situatie, relevante variabelen identificeren, herkennen van een verband tussen relevante variabelen. We duiden een dergelijke vraag aan als *algebraïseervraag*.

In een aantal opgaven hadden de examenmakers situaties beschreven en deze vertaald naar een mathematisch model, zoals bij de Vuurpijl-opgave (zie figuur 3). De bijbehorende vraag vereiste geen vertaalslag van situatie naar formule en bovendien was de situatie niet-functioneel voor de vraag. Dergelijke vragen werden afgewezen als algebraïseervraag. Omdat er echter gradaties bestaan voor de mate waarin de examenmakers de vertaalslag van situatie naar formule onthullen, hebben we ook deels vereenvoudigde, gestructureerde en anderszins gealgebraïseerde situaties meegenomen in de selectie, met dien verstande dat er nog wel een deel van de vertaalslag van situatie naar formule door de leerling gemaakt diende te worden. Bij de selectie van opgaven hebben we hiervan aantekeningen gemaakt.

Aldus hebben we beoordeeld welke vragen uit de steekproef curriculumvaliditeit hebben ten opzichte van het leerdoel algebraïseren. Deze indeling is per examen door de eerste twee auteurs gemaakt en herhaald door een onafhankelijke onderzoeker. De beide indelingen per examen hebben een interraterreliability, uitgedrukt in Cohens kappa, van respectievelijk $\kappa = 1,00$, $\kappa = 0,95$, $\kappa = 0,90$, $\kappa = 0,83$ en $\kappa = 0,84$.

3.2 Leerlingprestaties

Voor het meten van de leerlingprestaties op het gebied van het leerdoel algebraïseren, hebben we op drie niveaus onderzoek uitgevoerd: op macroniveau hebben we een kwantitatieve analyse uitgevoerd van landelijke leerlingscores, op mesoniveau hebben we een semi-kwalititatieve analyse uitgevoerd op schriftelijke uitwerkingen van leerlingen op examens en op microniveau hebben we een kwalitatieve analyse gemaakt aan de hand van interviews waarin leerlingen werkten aan vragen waarbij zij een situatie moesten vertalen naar een formule. De werkwijze bij elk niveau wordt hieronder toegelicht.

3.2.1 Cito-scores

De vraag ‘In hoeverre verschilt, bij examenkandidaten wiskunde B1, de score op vragen waarin gealgebraïseerd dient te worden van de score op de overige vragen’ werd beantwoord door vergelijking van scores uit 2004-2008, die werden verzameld door het Cito en aan ons beschikbaar zijn gesteld. De dataverzameling bestond uit de vraagscores per leerling van de versnelde correctie van 2004 en 2005 (resp. $n = 2081$ en $n = 2178$) en de vraagscores van alle deelnemende examenkandidaten van het examen van 2006, 2007 en 2008 (resp. $n = 6136$, $n = 6978$ en $n = 8497$). Per examenjaar hebben we de vragen verdeeld in algebraïseervragen en overige vragen. Vervolgens hebben we voor ieder examen per examenkandidaat het gemiddelde van scores op de twee soorten vragen berekend. Significantie werd getoetst met een t-test (tweezijdig, 95% betrouwbaarheidsinterval).

3.2.2 CSE-Leerlingwerk

De leerlingscores op de algebraïseervragen zijn geïnterpreteerd aan de hand van schriftelijke uitwerkingen van examenleerlingen. Van 11 scholen[5] is daartoe leerlingwerk van het centraal examen wiskunde B1 2008 (eerste tijdvak) verkregen, van 10 scholen leerlingwerk van het centraal examen wiskunde B1 2007 (eerste tijdvak) en van één school het centraal examen wiskunde B1 2006 (eerste tijdvak). Per school en per examenjaar is een steekproef getrokken van vijf leerlingen, waarbij als volgt een spreiding werd aangebracht: aan betrokken docenten werd gevraagd om het leerlingenwerk op volgorde van totaalscore te leggen en ons kopieën te geven van het werk van de vijf leerlingen op het 5^e, 25^e, 50^e, 75^e en 95^e percentiel[6] . In enkele gevallen namen op een school minder dan vijf leerlingen deel aan het examen. Aldus verkregen we voor 2006, 2007 en 2008 steekproeven met respectievelijk $N = 5$, $N = 46$ en $N = 53$ leerlingen. Voor het doel van ons onderzoek, namelijk het zoeken van verklaringen uit de schriftelijke uitwerkingen op de algebraïseervragen, beschouwen we de steekproef uit 2006 als beperkt representatief en voor de jaren 2007 en 2008 als redelijk representatief.

3.2.3 Task-based interviews

Door leerlingen te observeren tijdens het maken van examenvragen zochten we verklaringen voor de leerlingscores op algebraïseervragen.

Drie 6-vwo wiskunde B-leerlingen (schooljaar 2008-2009) van het Marecollege te Leiden werkten zes weken voor hun centraal examen wiskunde mee aan dit onderzoek. Deze leerlingen zijn dus qua voorkennis te vergelijken met examenkandidaten. Iedere leerling werkte afzonderlijk gedurende een sessie van een uur aan vier vragen, waarvan de eerste twee exacte kopieën waren van examenvragen en de resterende twee gemodificeerd waren tot vragen waarin de formule niet werd aangereikt. Het betrof achtereenvolgens vraag 1-2007 (Podiumverlichting), vraag 6-2006 (Bedekken), een gemodificeerde versie van vraag 1-2007 (Podiumverlichting) en een gemodificeerde versie van vraag 13-2008 (Stangenvlinders). Vraag 1-2007 (Podiumverlichting) werd dus tweemaal aan de leerlingen voorgelegd, maar in verschillende varianten. Hiervoor was gekozen, zodat de leerlingen naderhand de twee vraagformats met elkaar konden vergelijken. De leerlingen werden tijdens het maken van de vragen verzocht hardop te praten om hun denkproces te verbaliseren (task-based interview, Goldin, 2000). De interviewer, tevens eerste auteur van dit artikel, maakte na iedere beantwoorde vraag gebruik van stimulated recall (Calderhead, 1981) en reflective questions (Goldin, 2000) en vroeg aan de leerlingen of (en zo ja: hoe) zij werden beïnvloed door aangereikte formules en door een uitgebreide beschrijving en structurering van de situatie.

Er zijn transcripten gemaakt van de geverbaliseerde denkprocessen van de leerlingen. De data-analyse is gebeurd op basis van transcripten van de video-opnames, het leerlingwerk en de fieldnotes van de interviewer.

4 Resultaten

4.1 Selectie van vragen

We hebben de centrale examens wiskunde B1 2004-2008 beoordeeld op curriculumvaliditeit ten opzichte van het leerdoel algebraïseren; in totaal hebben we 99 vragen onderzocht. Hiervan zijn vier vragen geïdentificeerd als vraag waarbij het leerdoel algebraïseren wordt getoetst, de zogenaamde algebraïseervragen (zie tabel 1). In 2004 en 2005 hebben we geen enkele algebraïseervraag kunnen identificeren. In 2006 identificeerden we twee vragen, in 2007 één vraag en in 2008 ook één vraag. Hieronder lichten we deze selectie toe.

Bij alle door ons geïdentificeerde vragen was de situatie functioneel maar gestructureerd, werden alle variabelen met symbolen aangeduid en werd het algebraïsche model in de opgavetekst vermeld en werd aan de leerlingen gevraagd om de correctheid van dit model aan te tonen. De leerlingen werd gevraagd de aangereikte formule te reconstrueren; deze leerlingactiviteit hebben we benoemd met de term *reconstruerend algebraïseren*.

.

Tabel 1. Frequentietabel van vragen waarbij het leerdoel algebraïseren wordt getoetst per examen wiskunde B1

jaar	2004	2005	2006	2007	2008
totaal aantal vragen	19	20	21	20	19
algebraïseer-vragen	–	–	vraag 6 en 7 (Bedekken)	vraag 1 (Podiumverlichting)	vraag 13 (Stangenvlinders)
aantekeningen	–	–	• structurering gegeven • alle variabelen aangeduid • reconstruerend algebraïseren	• structurering gegeven • alle variabelen aangeduid • reconstruerend algebraïseren	• structurering gegeven • alle variabelen aangeduid • reconstruerend algebraïseren

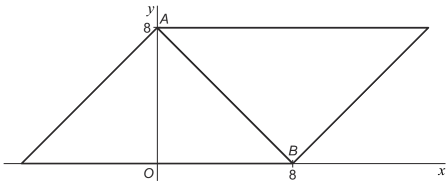
Uit het examen van 2006 hebben we twee vragen geïdentificeerd als algebraïseervraag (zie figuur 4). Beide vragen zijn afkomstig uit de opgave ‘Bedekken’, waarin een situatie wordt geschetst van twee geodriehoeken, waarvan de ene schuift over de andere. Het bedekte gebied heeft de vorm van een rechthoek. De tekst vanaf de titel tot aan vraag 6 beschrijft de situatie, geïllustreerd met twee figuren. In vraag 6 wordt de leerlingen gevraagd een formule van de afstand tussen de hoekpunten *A* en *B* op te stellen als functie van de tijd. In vraag 7 wordt de leerlingen gevraagd de oppervlakte van de rechthoek als functie van de tijd te bepalen.

De examenmakers hebben de situatie al deels gealgebraïseerd: de geodriehoeken zijn weergegeven als driehoeken (simplificeren), er is een assenstelsel gedefinieerd (structureren), de beweging van tophoek A(t,8) van de schuivende driehoek is weergegeven in coördinaten met de geïntroduceerde tijdsvariabele t (relevante variabelen identificeren, herkennen van een verband tussen relevante variabelen), en met de aangereikte formule is het verband tussen de tijd t en de afstand a benoemd (omzetten van een verband tussen variabelen naar een formule). De leerlingen moeten de correctheid van de gehele vertaalslag van situatie naar formule aantonen. Hiervoor moeten zij een geschikte rechthoekige driehoek met lange zijde *AB* vinden (structureren), t aan de figuur toevoegen (relevante variabelen identificeren), de rechthoekszijden in termen van relevante variabelen schrijven en de stelling van Pythagoras gebruiken (omzetten van een verband tussen variabelen naar een formule). Omdat er sprake is van een functionele situatie voor de gestelde vraag en omdat er een verband tussen variabelen opgesteld moet worden, hebben we deze vraag geïdentificeerd als algebraïseervraag, met de aantekening: *reconstruerend algebraïseren.*

Bedekken

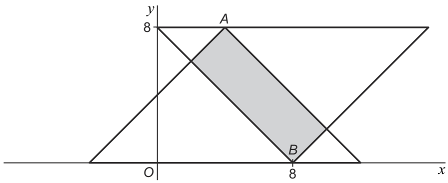
Een geodriehoek is een gelijkbenige rechthoekige driehoek. We plaatsen twee geodriehoeken met een lange zijde van 16 cm in een rechthoekig assenstelsel met eenheid 1 cm op de manier die in figuur 2 (verkleind) is getekend.
De top A van de linker driehoek heeft de coördinaten (0, 8).
De top B van de rechter driehoek heeft de coördinaten (8, 0).

figuur 2



De linker driehoek begint op tijdstip $t = 0$ naar rechts te schuiven over de rechter driehoek met een snelheid van 1 cm/s. Daarbij wordt een gedeelte van de rechter driehoek door de linker driehoek bedekt. De tijd t wordt gemeten in seconden.
In figuur 3 is de situatie voor een zeker tijdstip t getekend.
Punt A heeft dan de coördinaten (t, 8). Het bedekte gebied is grijs gekleurd.

figuur 3



De afstand in cm tussen A en B op tijdstip t noemen we $a(t)$.
Er geldt: $a(t) = \sqrt{128 - 16t + t^2}$.

3p **6** ☐ Toon dit aan.

Het bedekte gebied op een tijdstip t tussen 0 en 16 is een rechthoek. De oppervlakte in cm^2 van deze rechthoek noemen we $G(t)$. De zijden van de rechthoek zijn ook rechthoekszijden van gelijkbenige rechthoekige driehoeken met lange zijden t en $16 - t$.

Er geldt: $G(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 8t$.

4p **7** ☐ Toon dit aan.

Figuur 4. Vragen 6-2006 en 7-2006 (Bedekken)

Bij vraag 7 bij dezelfde opgave spreken de examenmakers over een rechthoek met rechthoekszijden en over twee gelijkbenige rechthoekige driehoeken met lange zijde in termen van tijdsvariabele *t* (structureren, relevante variabelen identificeren, herkennen van een verband tussen relevante variabelen). De leerlingen moeten dit alles koppelen aan de situatie van de schuivende geodriehoeken door in de dynamische figuur te zoeken naar de twee kleine, rechthoekige driehoeken met lange zijden *t* en 16-*t* (structureren, herkennen van een verband tussen relevante variabelen). Vervolgens moeten ze met de stelling van Pythagoras en de oppervlakteformule voor een rechthoek de gevraagde formule opstellen (omzetten van een verband tussen variabelen naar een formule). Ook bij vraag 7 is dus sprake van een functionele situatie voor de gestelde vraag en moet een formule opgesteld worden; daarom hebben we ook vraag 7 geïdentificeerd als reconstruerend algebraïseren.

Uit het examen van 2007 hebben we alleen de allereerste vraag van het examen kunnen identificeren als algebraïseervraag (zie figuur 5). De opgave start met een beschrijving van een situatie door middel van tekst en afbeelding: er is een schematische weergave van een podium gegeven met daarin een structurering – een driehoek met variabelen en constanten (structureren en vereenvoudigen), variabelen voor de lichtopbrengst, twee afstanden en een hoek (relevante variabelen identificeren). In de tekst staat een formule voor de verlichtingssterkte *V* als functie van afstand *r* en hoek α (herkennen van een verband tussen relevante variabelen; omzetten van een verband tussen variabelen naar een formule). De leerlingen wordt gevraagd om de formule te reconstrueren van de verlichtingssterkte *V* in lux in een zeker punt *P* op het podium als functie van *x*, de hoogte van de balk met tl-buizen. De vertaalslag van situatie naar formule die de leerlingen moeten leveren is: de driehoek die in perspectief is getekend gebruiken en interpreteren als een rechthoekige driehoek (structureren en vereenvoudigen), daarmee verbanden tussen *r* en *x* en tussen α , *r* en *x* leggen (herkennen van een verband tussen relevante variabelen) en vervolgens de formules voor deze twee verbanden opstellen en combineren (omzetten van een verband tussen variabelen naar een formule). Deze vraag hebben we daarom geïdentificeerd als algebraïseervraag, met de aantekening: *reconstruerend algebraïseren*.

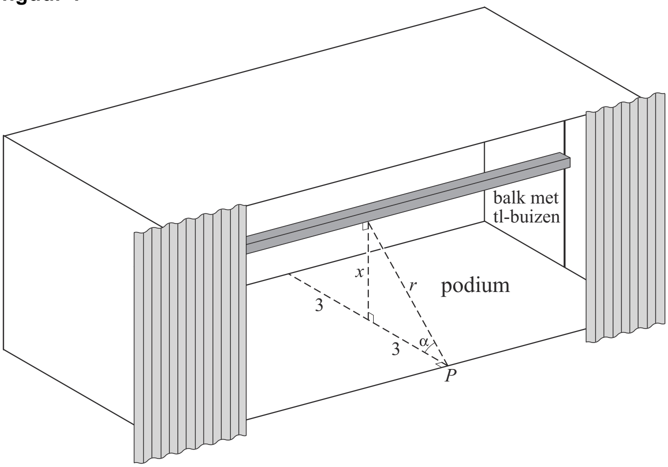
Uit het examen van 2008 konden we alleen vraag 13 (Stangenvlinders) als algebraïseervraag identificeren (zie figuur 6). De opgave bespreekt een scharnierende constructie bestaande uit twee stangen van 18 cm en twee stangen van 10 cm, geïllustreerd met een foto. De constructie wordt in twee figuren getekend (structureren). Drie afstanden worden respectievelijk *x*, *y* en *h* genoemd (relevante variabelen identificeren). Vraag 13 geeft de leerlingen de opdracht af te leiden dat het verband tussen *y* en *x* wordt gegeven door $y = 224/x$. Hiervoor wordt een stappenplan aangereikt: *'door in elk van de vet getekende driehoeken h^2 uit te drukken in x en y kun je afleiden dat y = 224/x'* (herkennen van een verband tussen variabelen). De leerlingen moeten voor het beantwoorden van de vraag beide representaties van de stangenvlinder opvatten als dezelfde stangenvlinder (structureren), en daarom is de oorspronkelijke situatie functioneel voor de gestelde vraag. Daarnaast moeten zij met behulp van de rechthoekige driehoeken en de stelling van Pythagoras tweemaal h^2 uitdrukken in *x* en *y* (omzetten van een verband tussen variabelen naar een formule).

Daarom hebben we deze vraag geïdentificeerd als algebraïseervraag, met de aantekening: *reconstruerend algebraïseren*.

Podiumverlichting

Een podium is 6 meter diep. Midden boven het podium hangt een balk met tl-buizen. De verlichtingssterkte op het podium is het kleinst aan de rand, bijvoorbeeld in punt P. De afstand van P tot de balk is r meter, de hoogte van de balk boven het podium is x meter en de hoek die het kortste verbindingslijnstuk van de balk en punt P met het podium maakt is α radialen. Zie figuur 1.

figuur 1



De verlichtingssterkte op het podium in punt P noemen we V (in lux). V is omgekeerd evenredig met r en evenredig met $\sin\alpha$. Dus $V = c \cdot \frac{1}{r} \cdot \sin\alpha$, waarbij de evenredigheidsconstante c afhangt van het lichtvermogen van de tl-buizen. Voor deze balk met tl-buizen geldt: $c = 650$ (lux·m).

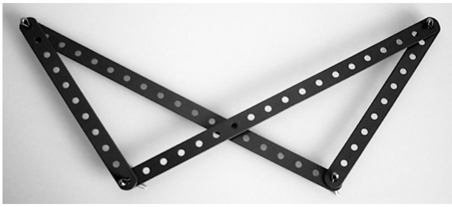
Er geldt: $V = \dfrac{650x}{9 + x^2}$.

Figuur 5. Vraag 1-2007 (Podiumverlichting)

Stangenvlinders

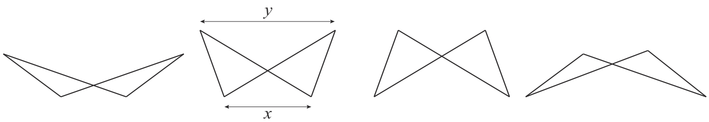
Een constructie bestaat uit twee stangen van lengte 18 cm en twee stangen van lengte 10 cm die scharnierend aan elkaar zijn bevestigd. Zie de foto. We verwaarlozen de breedte en de dikte van de stangen en bekijken alleen de vormen waarbij de lange stangen over elkaar heen liggen.

foto



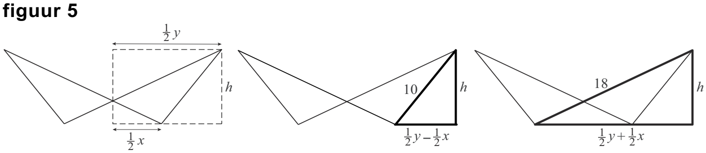
In figuur 4 hieronder zie je een aantal mogelijke vormen getekend; zulke vormen noemen we stangenvlinders.
De afstand tussen de scharnierpunten aan de onderkant noemen we x, die aan de bovenkant y, met x en y in cm.
Als x maximaal is, en dus y minimaal, liggen de vier lijnstukken op één lijn. In die situatie zijn x en y achtereenvolgens 28 en 8.

figuur 4



In figuur 5 zijn bij een stangenvlinder met hoogte h twee rechthoekige driehoeken getekend.

figuur 5



Door in elk van de vet getekende driehoeken h^2 uit te drukken in x en y kun je afleiden dat $y = \dfrac{224}{x}$.

6p **13** Geef deze afleiding.

Figuur 6. Vraag 13-2008 (Stangenvlinders)

Samenvattend: in de vijf onderzochte jaren (2004-2008) hebben we in drie jaren in totaal slechts vier vragen geïdentificeerd met curriculumvaliditeit ten opzichte van het leerdoel algebraïseren. In alle gevallen hadden de examenmakers de situatie al vereenvoudigd en gestructureerd, variabelen benoemd en soms ook al enkele verbanden tussen variabelen gelegd. Deze algebraïseerstappen van de examenmakers vergden een uitgebreide uitleg in tekst en diagram(men). In alle gevallen werd de formule aangereikt en betrof de vraag het *reconstruerend algebraïseren*.

4.2 Landelijke scores op centrale examens

De leerlingprestaties op enerzijds vragen met curriculumvaliditeit ten opzichte van het leerdoel algebraïseren en anderzijds de overige vragen hebben we kwantitatief onderzocht met data van het Cito. Voor elke geselecteerde vraag uit de steekproef van examens hebben we de gemiddeld behaalde score op die vraag (*p*-waarde) vergeleken met de gemiddeld behaalde score op de overige vragen. Bij drie van de vier van deze vragen was de *p*-waarde significant lager dan de gemiddelde *p*-waarde, en bij één significant hoger (Student t-toets, tweezijdig, $\alpha = 0.05$). Zie tabellen 2a en 2b.

Tabel 2a. Landelijke scores op een algebraïseervraag en het resterende examen

opgave	vraag	te behalen punten		*p*-waarde	
		op de vraag	totaal op gehele examen	op de vraag	gemiddelde op overige vragen
Bedekken	6 (2006)	3	87	37	57
	7 (2006)	4	87	11	57
Podiumverlichting	1 (2007)	3	82	69	62
Stangenvlinders	13 (2008)	6	81	53	63

Tabel 2b. *p*-waardeverschil tussen een algebraïseervraag en het resterende examen

opgave	vraag	*N*	*p*-waarde *(sd.)*		verschil
			op de vraag	gem. op overige vragen	
Bedekken	6 (2006)	6136	37 (47)	57 (16)	$t(6135) = -37$, $p < .001$*
	7 (2006)	6136	11 (27)	59 (17)	$t(6135) = -141$, $p < .001$*
Podiumverlichting	1 (2007)	6978	69 (38)	62 (17)	$t(6977) = 16$, $p < .001$*
Stangenvlinders	13 (2008)	8497	52 (37)	67 (18)	$t(8496) = -47$, $p < .001$*

* significantie getoetst met Student t-toets, tweezijdig, $\alpha = 0.05$.

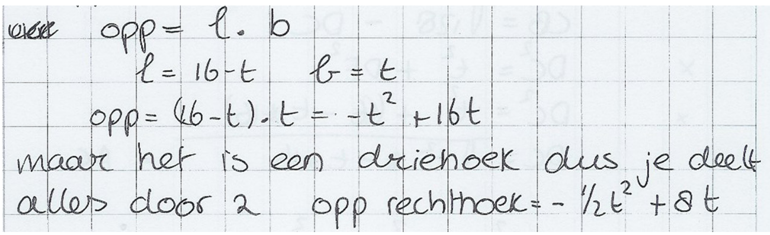
Bijvoorbeeld de vragen 6 en 7 van de opgave Bedekken uit 2006 hebben een *p*-waarde van 37% en 11%, terwijl de *p*-waarde op de overige vragen van dat examen gemiddeld 57% is. De vragen 6 en 7 hebben daarmee een significant lagere *p*-waarde, hetgeen aangeeft dat deze vragen 6 en 7 moeilijker waren dan de overige vragen uit dit examen. We zien echter ook dat vraag 1 uit het examen van 2007 een significant hogere *p*-waarde had dan het resterende examen. We kunnen dus niet constateren dat leerlingen doorgaans lager scoren op algebraïseervragen dan op andere examenvragen.

4.3 Schriftelijke uitwerkingen van examenkandidaten

In hoeverre zijn er verklaringen te vinden voor deze gemiddelde leerlingscores op de algebraïseervragen van het centraal examen wiskunde B1? Om hier een antwoord op te vinden bespreken we schriftelijke uitwerkingen van leerlingen bij de vragen 6-2006 en 7-2006 (Bedekken), vraag 1-2007 (Podiumverlichting) en vraag 13-2008 (Stangenvlinders).

4.3.1 Bedekken

In 2006 waren de Cito-scores bij de algebraïseervragen 6 en 7 (Bedekken) bijzonder laag, met *p*-waarden van respectievelijk 37% en 11%. Dit zagen we ook terug in het leerlingwerk: de steekproef had *p*-waarden van respectievelijk 27% en 0%. We observeerden veel variatie in aanpak: het doorrekenen van een voorbeeld, het inzetten van de natuurkundige formule voor de afgelegde weg of een term uit de aangereikte formule proberen te verklaren. Een voorbeeld van een aanpak zien we in figuur 7. Deze leerling gebruikte bij vraag 7 de aangereikte gegevens voor de lange driehoekszijden, t en $16 - t$, en gebruikte deze als rechthoekszijden in de oppervlakteformule van een rechthoek (in plaats van als driehoekszijden). Vervolgens gaf ze een foutieve reden voor het delen door twee, waardoor ze op een creatieve manier wél de gevraagde formule bereikte. Met dit antwoord behaalde ze nul punten.


opp = l · b
l = 16 − t   b = t
opp = (16 − t) · t = $-t^2 + 16t$
maar het is een driehoek dus je deelt
alles door 2   opp rechthoek = $-\frac{1}{2}t^2 + 8t$

Figuur 7. Larissa's uitwerking van vraag 7-2006 (Bedekken)

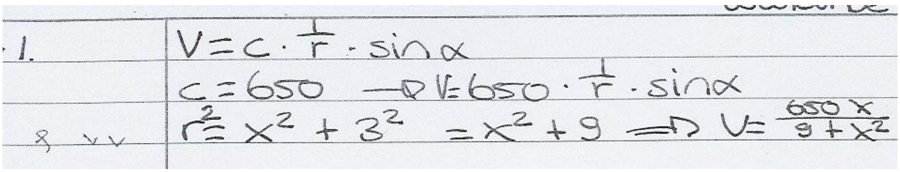
We konden geen verklaring geven voor de lage scores op de twee vragen 6-2006 en 7-2006, omdat we met een kleine steekproef kampten en een grote variatie in aanpak zagen. Wel observeerden we dat de structurering door de examenmakers en hun invoering van tijdsvariabele *t* door geen leerling correct werd opgepakt.

4.3.2 Podiumverlichting

In 2007 werd landelijk op algebraïseervraag 1-2007 (Podiumverlichting) significant hoger gescoord dan gemiddeld op de overige vragen (zie tabel 2b). Dit zagen we terug in het leerlingwerk: de steekproef had *p*-waarde 75.

In onze steekproef van 46 leerlingen vertoonden tien leerlingen (22%) een gebrek aan algebraïsche vaardigheden, bijvoorbeeld bij het rekenen met wortels. Het correctiemodel van het Cito kende bij deze vraag één van de drie punten toe aan algebraïsche vaardigheden, waardoor een gebrek aan deze vaardigheden geen grote invloed had op de *p*-waarde. Ten tweede konden veel leerlingen gebruik maken van de algebraïseerstappen, die door de examenmakers waren onthuld: er is al een verband opgesteld tussen de verlichtingssterkte *V*, hoek α en afstand *r* en de sinus in dit verband suggereert om overstaande en lange zijde te delen. Kortom: er is al een duidelijke aanzet gegeven tot een formule, waardoor de complexiteit van de vraag sterk is gereduceerd.

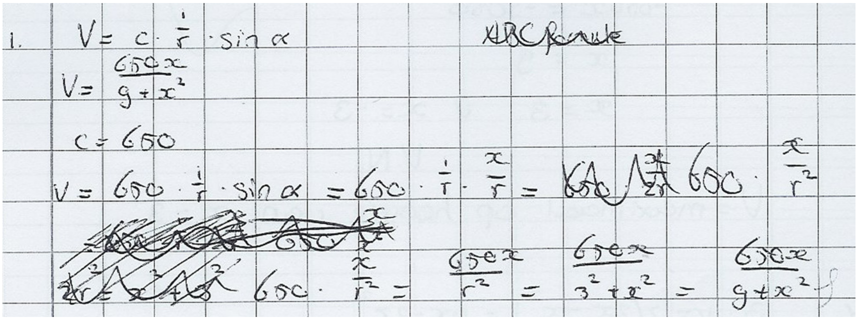
We hebben in het leerlingwerk verschillende strategieën waargenomen waarin leerlingen gebruik maken van de aangereikte formule door naar het antwoord toe te werken. Drie leerlingen sloegen bij vraag 1-2007 (Podiumverlichting) stappen over, maar deden toch voorkomen dat zij het gevraagde resultaat bereikten. Zie het volgende voorbeeld:



Figuur 8. Hermine's uitwerking van vraag 1-2007 (Podiumverlichting)

Hermine bepaalde met de stelling van Pythagoras: $r^2 = x^2 + 9$. Zij doet echter niets met het verschil tussen $r\ en\ r^2$, noch met sin α. Toch schreef ze zonder verdere uitleg dat nu volgde: $V = \dfrac{650x}{9 + x^2}$. Deze aangereikte formule stelde Hermine in staat naar de gevraagde formule toe te werken, zonder dat de afleiding uit haar gegevens volgt.

Een ander voorbeeld van het toewerken naar het eindantwoord vinden we bij Harm: Harm werkte in eerste instantie de term $650 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{x}{r}$ foutief uit tot $650 \cdot \frac{x}{2r}$ en rekende daar mee verder (zie figuur 9). Om op de gevraagde formule uit te komen moest volgens zijn uitwerking gelden dat $2r^2 = x^2 + 3^2$, in plaats van $r^2 = x^2 + 3^2$. Hij kraste de foute uitwerking door en gaf vervolgens een correcte afleiding van de gevraagde formule. Harm



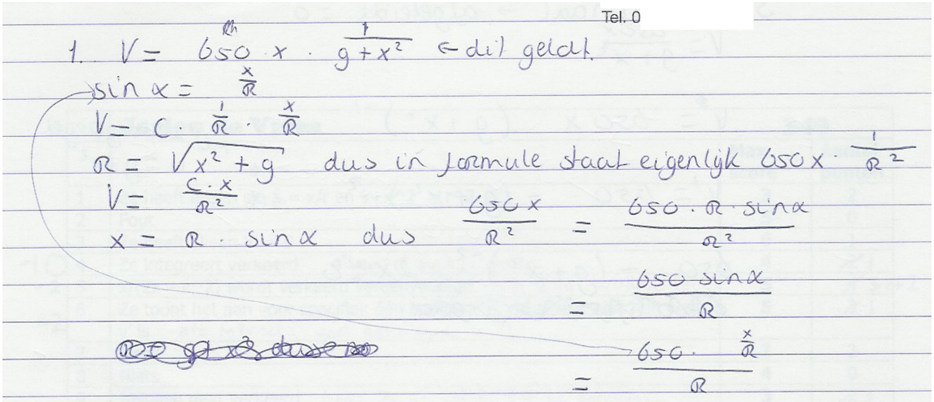
Figuur 9. Harms uitwerking van vraag 1-2007 (Podiumverlichting)

was dus waarschijnlijk in staat zijn fout te herstellen door zijn resultaat te vergelijken met de aangereikte formule. Ook bij andere leerlingen zagen we dit fenomeen, namelijk dat leerlingen op basis van het controleerbare antwoord fouten herstelden.

Een andere strategie was: achteruit werken. Wendelien noteerde bijvoorbeeld eerst het gewenste eindresultaat $V = \frac{650x}{9 + x^2}$. In regel 4 van haar uitwerking gebruikte ze de stelling van Pythagoras voor *r* en herschreef het gevraagde eindresultaat als $650x\frac{1}{r^2}$. Daartussen gebruikte ze sin $\alpha = \frac{x}{r}$ in $V = c \cdot \frac{1}{r} \cdot \sin\alpha$, die eerder in de tekst gegeven was. Ze verkreeg $V = c \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{x}{r}$ en twee regels lager $V = \frac{c \cdot x}{r^2}$ (zie figuur 10). In de onderste drie regels verkrijgt ze gelijkheden van $\frac{650x}{r^2}$, $\frac{650\sin\alpha}{r}$ en $\frac{650\frac{x}{r}}{r}$ wat vrijwel overeen komt met het rechterlid van $V = 650 \cdot \frac{1}{r} \cdot \sin\alpha$, maar een sluitende redenering ontbreekt.

Dit voorbeeld laat wel zien dat door het geven van de gevraagde formule een leerling een extra mogelijkheid heeft om tot een correcte uitwerking te komen, door te beginnen bij de gevraagde formule.

In tegenstelling tot de vragen 6-2006 en 7-2007 (Bedekken) was bij vraag 1-2007 de structurering van het podium voor de leerlingen goed te begrijpen. Daarnaast zagen we hier, dat diverse leerlingen werden geholpen door het aanreiken van de formule: ze werkten naar het eindantwoord toe terwijl ze stappen oversloegen, ze waren in staat hun fouten te herstellen door de gevraagde formule als referentie te nemen, en ze konden beginnen bij het eindpunt – de aangereikte formule.



Figuur 10. Wendeliens uitwerking van vraag 1-2007 (Podiumverlichting-opgave)

4.3.3 Stangenvlinders

In 2008 was de landelijke score op algebraïseervraag 13 (Stangenvlinders) significant lager dan op de overige vragen (met een *p*-waarde van 53%). In het leerlingwerk van onze steekproef zagen we dit terug: de steekproef had *p*-waarde 57%.

Van de 53 leerlingen gebruikten 49 leerlingen (92%) de stelling van Pythagoras in hun uitwerking. Hiervan gaven negentien leerlingen (36%) een foutloze uitwerking, vijftien leerlingen (28%) maakten algebrafouten zoals het verkeerd uitwerken van een merkwaardig product, zeven leerlingen (13%) begonnen op een correcte wijze maar maakten de opgave niet af, en de resterende leerlingen toonden een variatie aan incorrecte uitwerkingen. Van deze resterende leerlingen waren er vier leerlingen die alleen het concrete getal 224 in de formule probeerden te verklaren uit het gegeven dat $18^2 - 10^2 = 224$.

In het correctiemodel waren indirect vier van de zes punten gekoppeld aan algebraïsche vaardigheden: leerlingen verdienden twee punten voor het op een goede manier uitwerken van het merkwaardige product en twee punten voor het herleiden van de vergelijking. Dit zorgde voor een aanzienlijke daling op de gemiddelde score. We vermoeden dat de *p*-waarde voor deze vraag lager is dan de *p*-waarde op de overige vragen uit het examen door de nadruk op algebraïsche vaardigheden in het correctievoorschrift. Daar waar het foutief herleiden van een formule in vraag 1-2007 (Podiumverlichting) maximaal een derde van de punten kostte, was dat in vraag 13-2008 (Stangenvlinders) tweederde van de punten. We leiden hieruit af, dat de Cito-scores in beperkte mate weergeven in hoeverre het leerdoel algebraïseren is bereikt. De puntenwaardering maakt dan dat de vraag eerder begripsvaliditeit heeft voor het leerdoel *algebraïsche vaardigheden* dan voor het leerdoel algebraïseren.

4.4 Task-based interviews met drie leerlingen

Aan de hand van enkele vragen met curriculumvaliditeit ten opzichte van het leerdoel algebraïseren hebben we drie leerlingen afzonderlijk geïnterviewd. Het instrument bestond uit vier vragen, verdeeld in twee groepen. Bij de eerste groep was sprake van reconstruerend algebraïseren. Vervolgens maakten zij twee opgaven waarbij de formule niet aangereikt was (vragen 1-2007, Podiumverlichting en 6-2006, Bedekken). De tweede groep bestond uit twee opgaven waarbij de formule niet was aangereikt: vragen 1-2007 (Podiumverlichting) en 13-2008 (Stangenvlinders). De leerlingen werd gevraagd hun denkproces te verbaliseren en na afloop werd hen ook gevraagd te reflecteren op het verschil in vraagformat.

De beschrijving van deze task-based interviews volgt hierna en bestaat uit twee delen. Eerst beschrijven we de stappen die de leerlingen maakten naar aanleiding van elke vraag. Vervolgens beschrijven we de reflectie van de leerlingen, en met name in hoeverre zij werden geholpen of gehinderd door aangereikte formules en door een uitgebreide situatiebeschrijving en structurering.

4.4.1 Leerlingactiviteiten bij reconstruerend algebraïseren

De geïnterviewde leerlingen Dianne, Darlene en Jonathan beantwoordden allen vraag 1-2007 (Podiumverlichting) correct. Ze lazen de tekst nauwkeurig en schreven onderdelen uit de tekst op (structureren). Jonathan maakte een aparte tekening van de driehoek: hij ‘tilde’ deze als het ware uit de driedimensionale figuur (structureren). De sinus in de formule $V = c \cdot \frac{1}{r} \cdot \sin\alpha$ (in de tekst gegeven) gaf direct als aanknopingspunt: *‘overstaand gedeeld door schuin’* en de stelling van Pythagoras werd goed ingezet voor het herschrijven van r^2.

Darlene maakte een fout met wortels $\left(r = \sqrt{x^2+3} = x+3\right)$ en gebruikte een tweede rekenfout $r^2 = (x+3)^2 = x^2+9$ waarmee ze de gewenste formule wist af te dwingen.

De tweede vraag met het format van reconstruerend algebraïseren, vraag 6-2006 (Bedekken), kon geen van de drie geïnterviewde leerlingen zonder hulp van de interviewer tot een goed einde brengen. Allen lazen de tekst nauwkeurig en schreven onderdelen uit de tekst op (structureren).

Dianne probeerde het met goniometrie $\sin\alpha = o/s$ en ontdekte langs die weg dat *AB* in de eerste figuur gelijk is aan $\sqrt{128}$, hetgeen ze herkende als een deel van de aangereikte formule. Ze probeerde het nog met een natuurkundeformule $s(t) = v \cdot t$, maar kon de afstanden *t* en 16 – *t* niet in de figuur identificeren. Ze gaf aan dat als ze in een examensituatie had gezeten, ze het op dit punt had opgegeven en er misschien aan het einde van de zitting nog naar gekeken had.

Darlene probeerde *A*(*t*,8) te gebruiken en herkende hierin dat de afstand van A tot de *y*-as gelijk was aan *t*. Verder meldde ze dat het getal 16 in de formule te maken had met 8 + 8, die ze haalde uit een berekening voor de schuine zijde met $\sqrt{8^2+8^2} = 8+8$

(gebrek aan algebraïsche vaardigheden). Ze berekende vervolgens met Pythagoras de lengte van een schuine zijde voor een driehoek met rechthoekszijden 16 en t – 16 (in een niet-rechthoekige driehoek), en daarmee verkreeg ze een formule sterk gelijkend op de benodigde uitkomst, maar *'het is precies allemaal de helft van wat ik heb.'* Na een hint van de interviewer om *AB* te tekenen met een rechthoekige driehoek met verticale en horizontale zijden, kon ze het goede antwoord bereiken. Darlene was de enige van de drie leerlingen, die de tijdsvariabele t doorzag en gebruikte (relevante variabelen identificeren).

Jonathan moest de vraag enkele keren herlezen en tekende in de figuur een pijl naar rechts bij de schuivende driehoek (structureren). Voor het berekenen van *AB* werd hij misleid door de tweede figuur in de opgave, waarin *AB* de diagonaal is van de gearceerde, schuine rechthoek. Hij dacht daardoor dat hij in die rechthoek de stelling van Pythagoras moest inzetten. Daarnaast kon hij niet zonder hulp van de interviewer de variabele t in de figuur identificeren.

We zagen in deze interviews dat de leerlingen zorgvuldig probeerden de tekst te lezen om de structurering door de examenmakers te volgen. Bij vraag 1-2007 (Podiumverlichting) blijken de variabelen goed te vinden in de figuur en geeft de aangereikte formule houvast, bijvoorbeeld doordat de sinus een aanwijzing is voor het leggen van een verband tussen variabelen en doordat algebrafouten kunnen worden hersteld. Bij vraag 6-2006 (Bedekken) zien we dat de structurering door de examenmakers de leerlingen slechts ten dele helpt: de kleine rechthoekige driehoeken worden niet herkend (structureren), de figuur met de gearceerde rechthoek past niet bij de berekening van afstand *AB* maar bij de volgende vraag en de leerlingen kunnen de aangereikte tijdsvariabele t niet goed met de figuur verbinden. Daardoor komen ze, met uitzondering van Darlene, niet voorbij de algebraïseerstap 'relevante variabelen identificeren'.

4.4.2 Leerlingactiviteiten bij construerend algebraïseren

In het interview werd vraag 1-2007 (Podiumverlichting) herhaald met een gemodificeerd format: de leerlingen moesten nu de formule opstellen zonder dat die aangereikt werd. Alle leerlingen herkenden de vraag meteen. Dianne kon vervolgens de formule snel en zonder belemmeringen opstellen. Darlene en Jonathan hadden beiden problemen met het kwadraat van de wortel (algebraïsche vaardigheden) en konden niet naar het antwoord toewerken, maar toch kwamen beiden er goed uit.

Bij de gemodificeerde vraag 13-2008 (Stangenvlinders) hadden we de formule $y = 224/x$ niet gegeven, maar de resterende vraag was ongewijzigd. Alle leerlingen lazen de tekst zorgvuldig, zoekend naar stangenparen en afstanden. De aanwijzing *'door in beide figuren* h^2 *uit te drukken in x en y, …'* was leidend bij allen. Darlene zei hierover: *'Nou, er staat dus eigenlijk al wat een beetje de bedoeling is wat je gaat doen … dus ga ik dat ook maar doen.'* Dianne vroeg zich bij de twee figuren af: *'Zijn het nu wel of niet twee verschillende situaties?'*, alsof ze naar twee verschillende stangenvlinders keek in plaats van naar twee figuren van één stangenvlinder. Jonathan tekende de rechthoekige driehoeken na, met lengten van de zijden erbij (structureren). Alle drie stelden ze met de stelling van Pythagoras twee formules op en stelden die aan elkaar gelijk. Dianne vond $yx = 224$ en zei *'dat is raar, dan kun je zeggen x is gelijk aan 224 gedeeld door y, maar dat kun je ook andersom zeggen. Mmm, kan dat zomaar?'* Doordat ze niet haar antwoord kon controleren, bleef er twijfel over de juiste vorm. Darlene vond (na een fout met min/plus) $xy = -224$ en zei: *'ik vind het een rare uitkomst. [ik verwachtte dat er] iets meer in de zin van .. zoveel x plus of min zoveel x, en niet dat er zoiets kleins overblijft.'* Jonathan was de enige leerling die de *y* links van het = –teken schreef: $y = 224/x$.

Kortom, we zagen dat leerlingen bij de vragen waarin een formule niet wordt aangereikt toch redelijk goed in staat waren om te algebraïseren, al konden ze nu hun antwoord niet controleren, noch ernaar toe werken.

4.4.3 Reflectie op de vragen door de leerlingen

Het eerste dat opviel was dat alle geïnterviewde leerlingen voordelen zagen in het aanreiken van een formule in een opgavetekst, ten opzichte van algebraïseren zonder aangereikte formule. Enerzijds gaf de formule de leerlingen houvast, doordat ze aan het einde wisten of ze het goed hadden en rekenfouten konden herstellen, anderzijds hielp deze hen bij hun probleemaanpak (zo bleek een wortelteken een aanknopingspunt voor de stelling van Pythagoras). Ter illustratie geven we de volgende twee citaten. Dianne: *'Als ik het niet aan had moeten tonen, had ik het dus laten staan. Dan was het me niet opgevallen dat ie fout was en nu zag ik daardoor dat ie niet klopte en kon ik zo terugzoeken waar in het proces ik een rekenfoutje had gemaakt.'*. Jonathan: *'(Het) .. is wel makkelijker als je gelijk de formule ziet. Dus dan weet je al waar je naar toe moet en, eh ja, dus kan je er wel wat sneller opkomen wat je precies moet doen.'*.

De leerlingen gaven echter ook een nadeel van de aangereikte formule. Dianne: *'Ik ging maar allerlei zijdes berekenen, in de hoop dat ik eh.. getallen zou vinden waarmee ik aan de formule zie, dat ik daar wat mee moet, zoals die 128.'* De leerlingen richtten zich op de aangereikte formule als doel op zich; het was voor hen belangrijker om bij het eindresultaat uit te komen, dan dat de afleiding met de probleemsituatie te maken heeft.

Het tweede dat opviel was dat de leerlingen moeite hadden met uitgebreide beschrijvingen in een opgave. Ze gaven daarbij aan dat het secuur lezen en daarbij tekst en figuren aan elkaar koppelen veel concentratie vergden. Jonathan: *'Ik vond de tekst een beetje.. ja daar haalde ik niet veel uit want.. ik begrijp nu nog steeds niet, als x maximaal is en dus y minimaal, (dan) liggen de vier lijnstukken op één lijn'*. De leerlingen verbonden een lange tekst bovendien met de moeilijkheidsgraad, zoals Darlene: *'als het een hele grote opgave is, dan link je het meteen aan heel ingewikkeld'*. Verder dachten ze soms ten onrechte dat zij bepaalde informatie niet nodig hadden. Dianne: *'Bij die laatste kreeg je heel veel bij-informatie die je dus niet nodig had. Uiteindelijk, want als ze alleen dat onderste regeltje hadden opgeschreven zonder enige uitleg wat die dingen waren, dan had je het volgens mij ook kunnen uitrekenen. Dat was wel makkelijker geweest'*. Volgens deze leerling had ze aan het stappenplan en de twee gestructureerde figuren voldoende gehad. Dat daarmee het gelijkstellen van h^2 uit de twee figuren betekenisloos wordt, ervoer ze kennelijk niet als bezwaar.

Ten derde waren de denkstappen van de examenmakers voor de leerlingen niet altijd goed te volgen, zoals het zoeken naar (kleinere) gelijkbenige driehoeken in vraag 6-2006 (Bedekken), Jonathan: *'je moest er daar een driehoek binnen een driehoek uithalen, terwijl er bij dat Podium maar één driehoek was'*.

5 Conclusie

Uit dit onderzoek blijkt dat algebraïseren nauwelijks wordt getoetst op centrale examens: in de examens hebben we slechts vier van de 99 vragen geïdentificeerd met curriculumvaliditeit ten opzichte van het leerdoel algebraïseren. In deze vier algebraïseervragen hadden de examenmakers de situatie reeds verregaand vereenvoudigd en gestructureerd, en waren variabelen reeds benoemd met een symbool, zodat essentiële algebraïseeractiviteiten uit handen van de examenleerlingen waren genomen. De vorm waarin het algebraïseren bij deze vier vragen werd getoetst is het reconstruerend algebraïseren (de formule werd aangereikt).

Uit analyse van de centrale eindexamens (2004-2008) bleek dat leerlingen de ene keer gemiddeld lager scoorden op dit type vragen ten opzichte van het gemiddelde van het hele examen en de andere keer juist hoger. Voor dit verschil in scores zijn verschillende verklaringen gevonden.

Van invloed was bijvoorbeeld de mate waarin de examenmakers in de tekst de probleemsituatie al hadden gealgebraïseerd. Zo was in één opgave de structurering en de variabelenidentificatie voor leerlingen moeilijk te volgen (vragen 6-2006 en 7-2006 (Bedekken)), terwijl bij een andere opgave de leerlingen een zodanig helder stappenplan kregen aangereikt, dat de hele structurering voor hen als minder relevant overkwam.

Ook was de mate waarin algebraïsche vaardigheden werden meegewogen bepalend voor de leerlingscores.

Daarnaast werden leerlingen beïnvloed door het aanreiken van de formule (reconstruerend algebraïseren). Dit nodigde sommige leerlingen uit om naar het eindantwoord toe te werken, door stappen over te slaan, door creatief redeneer- of algebrafouten te maken, of door getallen uit de aangereikte formule proberen te reproduceren. Kenmerk hier was dat leerlingen zich richtten op de formule als doel op zich, en zich concentreerden op het vergelijken van tussenresultaat en gevraagde formule, in plaats van op het vertalen van de situatie naar een formule. Het aanreiken van formules creëerde echter ook kansen bij leerlingen: het stelde leerlingen in staat om fouten te herstellen door naar het antwoord te kijken, om te bepalen of zij op de goede weg waren en of zij al klaar waren, en om een probleemaanpak te kiezen (een wortel in de formule gaf bijvoorbeeld een suggestie voor het gebruik van de stelling van Pythagoras). Ook zagen we dat sommige leerlingen bij het eindpunt begonnen – de aangereikte formule.

Ten slotte kunnen we concluderen dat leerlingen baat hebben bij illustraties die de situatie structureren, vereenvoudigen en voorzien van variabelen en bij een helder stappenplan. Leerlingen worden gehinderd door het uitblijven van deze kenmerken.

Weliswaar hebben leerlingen baat bij illustraties die de situatie structureren, vereenvoudigen en voorzien van variabelen en bij een heldere probleemaanpakbeschrijving, maar het is de vraag of een dergelijke hulp wenselijk is voor het toetsen van het leerdoel algebraïseren. Het algebraïseren is immers in een dergelijk geval grotendeels overgenomen door de examenmakers, waardoor er voor de leerling nog maar weinig te algebraïseren valt.

6 Discussie en aanbevelingen

Het leerdoel algebraïseren is meer dan het herkennen van de stelling van Pythagoras in een meetkundige figuur, die toepassen en het slim substitueren. Algebraïseren omvat ook het structureren en vereenvoudigen van een situatie en het benoemen van variabelen. Deze activiteiten vallen nu buiten de reikwijdte van het centraal examen.

We hebben bijvoorbeeld tijdens onze studie gezien dat de leerlingen bij de Stangenvlindersopgave een correct antwoord konden formuleren zonder de situatiebeschrijving en diens uitgebreide structurering te begrijpen. Zij werden aangemoedigd de situatie te negeren, doordat deze in grote mate al gealgebraïseerd was door de examenmakers. Dat een vraag zodanig geformuleerd is, dat de situatie grotendeels genegeerd kan worden, is onwenselijk voor het aanleren en toetsen van het leerdoel algebraïseren, omdat het vertalen van een situatie naar een verband tussen variabelen juist een belangrijk leerdoel is. Deze observatie is in overeenstemming met een studie van Cooper (1992) naar Engels examenwerk, waarbij het negeren van de situatie door leerlingen een hogere vraagscore opleverde. Greer (1993) merkte op dat de leerlingen uit zijn onderzoek geneigd waren opgaven van situaties te ontdoen en als kale algebrasom te beschouwen. Het mag bij het opstellen van de Stangenvlindersopgave niet de bedoeling zijn geweest dat leerlingen de situatie moeten negeren; het niet kunnen vertalen van een situatie zou er juist voor moeten zorgen dat leerlingen de vraag niet kunnen beantwoorden.

Daarnaast zagen we dat in alle gevallen de formule werd aangereikt en de variabelen al werden benoemd. Ook al helpt een aangereikte formule leerlingen in bepaalde opzichten bij het beantwoorden van een vraag (de manier waarop de formule is opgebouwd geeft richting aan de probleemaanpak; met de formule kunnen de leerlingen beoordelen of zij op de goede weg zijn in hun probleemaanpak), zij worden op deze manier niet uitgedaagd na te gaan in welke mate de gevraagde formule een adequaat beeld geeft van de oorspronkelijke probleemsituatie. *'Is het logisch dat er een kwadratisch verband ontstaat?'* is een veel wezenlijker vraag dan *'heb ik precies dezelfde formule verkregen als in de opgavetekst?'*.

We verwachten dat opgaven met een situatie die in beperkte mate gestructureerd is, waarin de variabelen niet al worden geïdentificeerd en zonder aangereikte formule, mogelijkheden bieden voor het toetsen van het leerdoel algebraïseren.

De opgave Stangenvlinders is bewust ontworpen door examenmakers met een aangereikte formule, om zo het stapelen van fouten in een vervolgvraag te vermijden (G. Limpens, Cito, persoonlijke mededeling, 19 januari 2010). Een fout bij het algebraïseren kan immers de moeilijkheidsgraad van een vervolgvraag veranderen. Deze psychometrische toetsproblematiek is hier dus een oorzaak voor het niet toetsen van het leerdoel (construerend) algebraïseren; het reconstrueren van een aangereikte formule verschilt namelijk essentieel van het zelf moeten construeren van een formule en komt daardoor niet volledig overeen met de leerdoelen. We verwachten dat deze problematiek oplosbaar is met onderzoek naar vraagvariaties, of door geen vervolgvraag te stellen, waardoor het leerdoel toch met curriculumvaliditeit getoetst kan worden.

Doordat het leerdoel algebraïseren op het centraal examen momenteel nauwelijks wordt getoetst, dreigt het gevaar dat er in de vaklessen weinig aandacht aan besteed zal worden; wat er op het centraal examen (beoogd curriculum) getoetst wordt en op welke manier dat gebeurt is namelijk bepalend voor de inhoud van lesgeven door wiskundedocenten (geïmplementeerd curriculum) (Dekker, Vos & Lagerwaard, 2009; De Lange, 2007).

Een leerdoel dat nog slechts onderdeel uitmaakt van het schoolexamen en niet meer van het eindexamen, kan dus door elke school anders inhoudelijk ingevuld worden. Een school kan dan zelfs besluiten om een leerdoel nauwelijks te behandelen en te toetsen via eenvoudige vragen. Als we willen dat leerlingen leren algebraïseren, dan is het dus verstandig om het leerdoel algebraïseren niet alleen te toetsen op een schoolexamen, maar het daarnaast een prominentere plek in het centraal eindexamen te geven.

Het modelleren wordt in de ‘Experimentele examenprogramma’s 2014’ (cTWO, 2009) gesitueerd binnen het schoolexamen. Daarmee wordt afstand genomen van het verplicht toetsen van het leerdoel algebraïseren op het centraal examen en wordt het een minder belangrijke wiskundige denkactiviteit binnen het wiskundeonderwijs. Wij beschouwen dit als onwenselijk. Wanneer je algebraïseren namelijk ziet als een belangrijke wiskundige denkactiviteit en het onderdeel is van de eindtermen (en dus van het beoogd curriculum), dan moet je je er ook hard voor maken dat het wordt opgenomen in het geïmplementeerde curriculum en het niet wegstoppen bij de schoolexamens.

Overigens, wanneer leerlingen bij het vak wiskunde niet zullen oefenen met het algebraïseren, dan is het maar sterk de vraag of zij bij de overige bètavakken in staat zullen zijn formules op te stellen of een modelleerproces zelfstandig te doorlopen. Daarom adviseren we dat er ontwerpgericht onderzoek wordt verricht naar een succesvolle leerstrategie algebraïseren voor de wiskundeles.

English summary

The Dutch senior secondary school mathematics curriculum prescribes that students should be able to translate a situation into a mathematical formula (to algebraise). This article reports on a research that verifies to what extent the national exam questions assess this learning goal and to what extent grade 12 students are skilled in algebraisation. We analysed national exams from the period covered by the curriculum goal and we assessed students' performances through three data sources: scores on exam questions related to algebraisation, written work of students to these questions, and task-based interviews based on these questions with grade 12 students. The analysis of the data reveals that the algebraisation goal was barely assessed in five consecutive years, and only in a format where the formula is given ready made and the students are assigned to reconstruct this formula (reconstructive algebraisation). The score on these questions varied from high to low. High scores occurred for questions in which the authors to a large extent explained how to translate the situation to the ready-made formula. Lower scores occurred on questions that required formula skills (e.g. expanding square roots) or left several translation activities to the students. We found that the ready made formula in questions asking for reconstructive algebraisation gives safety to students, but also reveals problem solving approaches and becomes an aim in itself. The task-based interviews showed that students are able to algebraise, even if a formula is not offered beforehand. We recommend further research into question formats that combine different algebraisation activities, such as simplification, structuring, identifying variables and constructing an algebraic model.

Noten

1. Wiskobas: Wiskunde op de Basisschool.
2. HEWET: Herverkaveling Wiskunde I en II.
3. HAWEX: Havo Wiskunde Experimenten.
4. De gezamenlijke prestatie van deelnemers op een toetsopgave wordt uitgedrukt als *p*-waarde: het gezamenlijk behaalde puntentotaal als percentage van het maximaal aantal punten dat zij gezamenlijk hadden kunnen behalen.
5. De deelnemende scholen zijn Emmauscollege Rotterdam, Montessori Lyceum Rotterdam, Adelbertcollege Wassenaar, Marecollege Leiden, Stedelijk Gymnasium Leiden, Coenecoop College Waddinxveen, Sint Laurenscollege Rotterdam, Daltoncollege Den Haag, Christelijk Lyceum Delft, Vrije School Groningen, Melanchton Schiebroek.
6. Deze selectie komt ongeveer neer op: de op-één-na zwakste leerling, een gemiddeld-zwakke leerling, de mediaan, een gemiddeld-goede leerling en de op-één-na beste leerling.

Literatuur

Afstemmingsgroep Modelleren (2008). *Modelleren in de β-vakken; Kennis in uitvoering; advies aan de gezamenlijke β-vernieuwingscommissies*. Utrecht: Centrum voor Didactiek der Bètawetenschappen.

Blum, W. & Leiß, D. (2005). 'Filling Up'– the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In M. Bosch (Red.), *Proceedings of the Working Group on Mathematical Modelling and Applications at the 4th Conference on European Research in Mathematics Education (CERME-4)*. Gerona, Spain: FUNDEMI IQS – Universitat Ramon Llull.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects: State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 37-68.

Calderhead, J. (1981). Stimulated recall: A method for research on teaching. *British Journal of Educational Psychology*, *51*, 211-217.

CEVO (2007). *Examenprogramma wiskunde B vwo*. Den Haag: Ministerie van OCW. Gedownload op 11 oktober 2007 van http://www.slo.nl/themas/00158/00001/
Examenprogramma_wiskunde_B_vwo_DEFINITIEF.pdf/

Cooper, B. (1992). Testing National Curriculum mathematics: some critical comments on the treatment of 'real' contexts for mathematics. *The Curriculum Journal*, *3*(3), 231-243.

cTWO (2007). *Rijk aan Betekenis: Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*. Utrecht: cTWO.

cTWO (2009). *Experimentele examenprogramma's 2014*. Utrecht: cTWO.

De Bruijn, A., Lagerwaard, K., Limpens, G., Molen, P. van der, Steentjes, M. & Stroomer, G. (2007). Wiskunde-examens 2007 1e tijdvak. *Euclides*, *83*(1), 2-17.

Dekker, T., Vos, P. & Lagerwaard, K. (2009). Wiskundekennis toetsen. Ontwerpen van wiskundeopgaven. In A. van Streun, B. Zwaneveld & P. Drijvers (Red.), *Handboek Vakdidactiek Wiskunde*. Utrecht: ELWIeR/Freudenthal Instituut.

De Lange, J. (1999). *A framework for classroom assessment in mathematics*. Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

De Lange, J. (2007). Large-scale assessment and mathematics education. In F.K. Lester, Jr (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 1111-1142). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Evers, A., Caminada, H., Koning, R., Laak, J. ter, Maesen de Sombreff, P. van der & Starren, J. (1988). *Richtlijnen voor ontwikkeling en gebruik van psychologische tests en studietoetsen*. Amsterdam: Nederlands Instituut van Psychologen.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A.E. Kelly & R.A. Lesh (Red.), *Handbook of* *research design in mathematics and science education* (p. 517-546). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Goodlad, J. L, Klein, M. F. & Tye, K. A. (1979). The domains of curriculum and their study. In J. L. Goodlad (red.), *Curriculum inquiry: The study of curriculum practice* (p. 43-76). New York: McGraw-Hill.

Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: CDbeta press.

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context Problems in Realistic Mathematics Education: A Calculus Course as an Example. *Educational Studies in Mathematics*, *39*(1-3), 111-129.

Schaap, S., Vos, P. & Goedhart, M. J. (2011). Students overcoming blockages while building a mathematical model; exploring a framework. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (red.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (p. 137 - 146). New York: Springer.

Segers, M. S. R. (1997). An alternative for assessing problem-solving skills: The overall test. *Studies in Educational Evaluation*, *23*(4), 373-398.

SLO (2007). *Handreiking schoolexamen wiskunde B vwo; Tweede fase*. Enschede: SLO.

Van Berkel, H. (1999). *Zicht op toetsen. Toetsconstructie in het hoger onderwijs*. Assen: Van Gorcum.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *25*(2), 2-9.

Van der Zwaart, P., Koolstra, G., & Laaper, W. (2001). *Vakdossiers 2001. Wiskunde. Voortgezet onderwijs. Herziening examenprogramma's havo/vwo*. Enschede: SLO.

Van Oers, B. (1998). The fallacy of decontextualisation. *Mind, Culture, and Activity*, *5*(2), 135-142.

Van Streun, A. (2007). Parate kennis en algebra; Aflevering 2: Symbol sense. *Euclides, 82*(4), 151-152.

Vos, P. (2011). What is 'Authentic' in the Teaching and Learning of Mathematical Modelling? In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Red.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (p. 713 - 722). New York: Springer.