

Proefschrift Geeke Bruin-Muurling

The development of proficiency in the fraction domain. Affordances and constraints in the curriculum

Bespreking door:

Marc van Zanten

Hogeschool Edith Stein, Hengelo

Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education, Universiteit Utrecht

Het proefschrift waarop Geeke Bruin-Muurling op 21 december 2010 promoveerde opent met een beschrijving van het recente Nederlandse debat over leerlingprestaties en didactiek bij rekenen-wiskunde. Dit debat, aldus Bruin-Muurling, raakt verschillende dichotomieën in het (reken-)wiskundeonderwijs, zoals procedurele versus conceptuele kennis en een focus op rekenen-wiskunde in het dagelijks leven versus een theoretische focus op wiskunde. Dergelijke verschillen in focus komen ten dele ook overeen met verschillen in didactische oriëntatie op rekenen-wiskunde zoals die, globaal gezien, tussen het primair onderwijs (PO) en het voortgezet onderwijs (VO) te constateren zijn.

Het is binnen deze context dat Bruin-Muurling het domein breuken koos als onderwerp voor haar onderzoek. Het leren van breuken start (in het PO) binnen een onderwijssetting die sterk is beïnvloed door het realistisch reken-wiskundeonderwijs. Het loopt door in het VO, waar het voor een deel van de leerlingen (in HAVO/VWO) moet uitmonden in beheersing en begrip op formeel niveau. Het doel van het onderzoek is de ontwikkeling van de bekwaamheid van leerlingen op het gebied van breuken van groep 6 tot en met klas 3 HAVO/VWO te onderzoeken en deze ontwikkeling te koppelen aan het formele curriculum zoals vastgelegd in de (reken-)wiskundemethodes.

Het onderzoek bestaat uit twee deelstudies. De eerste gaat over de ontwikkeling van beheersing op het gebied van breuken door leerlingen van groep 6 tot en met klas 3 HAVO/VWO (*attained curriculum*). In de tweede deelstudie wordt het *written curriculum* op het gebied van breuken van deze schooljaren geanalyseerd.

In de eerste deelstudie gaat het, zoals aangegeven, om de ontwikkeling van de beheersing van breuken door leerlingen. Dit betreft volgens Bruin-Muurling niet alleen het correct kunnen oplossen van opgaven, maar ook inzicht in de onderliggende structuren. Om beide te kunnen onderzoeken, heeft zij een schriftelijke test geconstrueerd op basis van *big ideas* en *complexity factors*.

Bij het vaststellen van de *big ideas* gaat het Bruin-Muurling niet louter om inzicht in de afzonderlijke subconcepten van breuken zoals deel-geheel, deling of maat. Op een bepaald niveau (in de ontwikkeling) van inzicht gaat het immers bovendien om het begrijpen van de onderlinge relaties tussen de verschillende subconcepten en inzicht in de veelzijdigheid van het concept 'breuk' als zelfstandig wiskundig object. In dit licht onder-

scheidt Bruin-Muurling vijf *big ideas*, mede gebaseerd op literatuur over moeilijkheden en (mis)concepties bij het leren en onderwijzen van breuken. Eén zo'n *big idea* is de uitbreiding van het getalsysteem van natuurlijke naar rationale getallen. Deze uitbreiding raakt de bewerking vermenigvuldigen, waarvan leerlingen nogal eens denken dat deze bij hele getallen groter maakt, maar bij breuken (kleiner dan 1) niet. Het mogelijke cognitieve conflict dat hiermee ontstaat hangt samen met een al te strikt onderscheid tussen vermenigvuldiger en vermenigvuldigtal.

Op een bepaald niveau van beheersing (van de commutatieve eigenschap van vermenigvuldigen op formeel niveau) speelt deze kwestie niet meer en wordt onderkend dat vermenigvuldigen bij rationale getallen en bij natuurlijke getallen is essentie hetzelfde is.

Complexity factors zijn karakteristieken van opgaven die kunnen variëren en die (in theorie) de moeilijkheid van die opgaven bepalen. Bruin-Muurling onderscheidt er vele, bijvoorbeeld de ondersteuning die contexten en modellen in een opgave bieden (of niet) en het vereenvoudigen en 'helen eruit halen' van het antwoord op een breukenopgave.

Met de ontwikkelde test is een vergelijking gemaakt tussen de beheersing door leerlingen vanaf groep 6 tot en met klas 3, leerlingen dus, die naar verwachting ver uiteenlopen qua niveau. Om dit mogelijk te maken is een toetsbank samengesteld, waaruit voor de verschillende schooljaren een passende subtest is getrokken. De validiteit van de subtests is vastgesteld met een *expert appraisal* en het Raschmodel; de betrouwbaarheid is vastgesteld met Cronbachs alpha.

De test is 1498 keer afgenomen; 366 keer bij leerlingen van zeven PO-scholen en 1132 keer bij HAVO/VWO-leerlingen van één school. Drie cohorten HAVO/VWO van elk zo'n honderd leerlingen hebben de test meermaals gedaan; respectievelijk twee keer in klas 1; twee keer in klas 2; en in klas 1 en (twee jaar later) in klas 3¹.

Een eerste datavergelijking levert het volgende beeld op: van groep 6 tot en met groep 8 is sprake van een aanzienlijke vooruitgang in bekwaamheid. Daarna, vanaf klas 1 tot en met klas 3 HAVO/VWO, wordt geen vooruitgang meer geboekt.

Een nadere data-analyse is uitgevoerd op item- en op conceptniveau. Zo is op itemniveau gekeken naar optellen. Hieruit blijkt dat leerlingen in groep 8 in meerderheid optellen van echte breuken met gelijke noemers zonder eenheid-overschrijding beheersen. Bijna de helft van de leerlingen beheerst optellen van echte breuken en gemengde getallen met dezelfde noemers met eenheid-overschrijding. Hetzelfde geldt voor klas 3 HAVO/VWO. Maar noch in groep 8, noch in klas 3 is sprake van algemene beheersing van optellen van breuken.

De analyse op conceptueel niveau richt zich op de *big ideas*. Bruin-Muurling laat zien dat de geteste leerlingen slechts een oppervlakkige mate van beheersing hebben. Zo beheersen leerlingen in groep 8 het idee van gelijkwaardigheid wel op procedureel niveau, maar is er geen sprake van inzicht hierin op conceptueel niveau. Hetzelfde geldt voor het begrip van delen en gehelen en van de breuk als zelfstandig wiskundig object.

Leerlingen in klas 3 HAVO/VWO hebben weinig begrip van de relatie tussen breuken, delen en vermenigvuldigen en van verhoudingsaspecten van breuken.²

Naast deze algemene trends leveren de analyses interessante detailinformatie op. Om één voorbeeld te noemen: VO-leerlingen kiezen bij optellen van gemengde getallen met ongelijke noemers er relatief vaak voor om beide getallen eerst om te zetten in onechte breuken; een correcte, maar omslachtige methode.

In de tweede deelstudie is het curriculum op het gebied van breuken, zoals vastgelegd in de (reken-)wiskundemethodes, van groep 6 tot en met klas 3 HAVO/VWO geanalyseerd. Doordat de gehanteerde methode in zowel PO als VO in hoge mate leidend is voor het gerealiseerde onderwijs, kunnen in de methodes wellicht verklaringen worden gevonden voor problemen die optreden bij het leren van breuken. De meest in gebruik zijnde methodes, vier voor het PO en twee voor HAVO/VWO, zijn elk geanalyseerd.

Een grofmazige analyse laat aanzienlijke verschillen tussen de methodes zien, zowel (en tegelijkertijd) tussen PO-, respectievelijk VO-methodes onderling, als tussen enerzijds PO-methodes en anderzijds VO-methodes. Deze liggen bijvoorbeeld op het terrein van: aantallen opgaven, informatieve tekst (alleen in de VO-methodes), aanwijzingen om emergent modelleren te ondersteunen en uitgewerkte voorbeelden.

Een fijnmazige analyse is uitgevoerd ten aanzien van vermenigvuldigen met breuken. Hieruit blijkt dat voor het vermenigvuldigen met breuken in de reken-wiskundemethodes voor PO verschillende getalspecifieke strategieën worden aangeboden, aansluitend bij verschillende betekenissen van vermenigvuldigen. Zo wordt het opgavetype 'heel getal keer echte breuk' uitgewerkt middels herhaald optellen en het omgekeerde type 'echte breuk keer heel getal' door eerlijk verdelen en dan bepalen van het deel (delen door de noemer en vermenigvuldigen met de teller). In de wiskundemethodes voor het VO wordt daarentegen gebruik gemaakt van één algemeen geldende oplossingswijze bij alle opgaventypen: (teller keer teller) gedeeld door (noemer keer noemer). Zo nodig wordt een gemengd getal daartoe eerst omgezet in een onechte breuk. Een ander verschil dat naar voren komt is het gebruik van het rechthoekmodel. Dit model wordt zowel in de PO- als in de VO-methodes gebruikt, maar de manier waarop verschilt. In het PO wordt het gebruikt als een ondersteunend model voor het specifieke somtype 'echte breuk keer echte breuk'. In de methodes voor het VO wordt het gebruikt als illustratie bij de algemeen geldende oplossingswijze (teller keer teller) gedeeld door (noemer keer noemer).

Ten slotte constateert Bruin-Muurling dat hetgeen zij aantroef in de reken-wiskundemethodes voor PO niet geheel in lijn is met oorspronkelijke ideeën van realistisch reken-wiskundeonderwijs (*ideal curriculum*). Daarin is meer aandacht voor veralgemenisering en formalisering dan in de geanalyseerde methodes.

In haar afsluitende reflecties en aanbevelingen gaat Bruin-Muurling met name in op het spanningsveld bij het gebruik van verschillende, getalspecifieke aanpakken, modellen en contexten. Enerzijds kunnen deze bij aanvang (in het PO) van het leerproces ondersteunend (want betekenisverlenend) werken, maar anderzijds kan dit zo krachtig werken,

dat het later in het leerproces (in HAVO/VWO) belemmerend is bij het veralgemeniseren en begrijpen van breuken als zelfstandige wiskundige objecten. Het overbruggen van de kloof tussen PO en VO vraagt aandacht voor het onderscheid tussen enerzijds informele aanpakken (in het PO) en formeel begrip van onderliggende wiskunde (in het VO). Bruin-Muurling pleit in dit licht voor meer aandacht voor het bereiken van een dieper begrip op formeel niveau.

Ik heb dit proefschrift met veel belangstelling gelezen. De eerste deelstudie bevat veel interessante observaties over (niet-)beheersing van de onderzochte leerlingen. De verantwoording van de subtests op basis van de onderscheiden *big ideas* en *complexity factors* is gedegen. Bruin-Muurling geeft aan dat zij met de *big ideas* die zij onderscheidt enige afstand neemt van bestaand onderzoek, maar dat vind ik geen bezwaar. Integendeel; de door Bruin-Muurling geformuleerde *big ideas* zijn goed onderbouwd vanuit het oogpunt van te bereiken begrip van breuken op formeel niveau. Overigens komen ze voor een belangrijk deel wel degelijk overeen met eerder geformuleerde *big ideas* bij breuken (Fosnot & Dolk, 2002).

De tweede deelstudie levert belangwekkende informatie op over verschillen in didactische uitwerkingen tussen (reken-)wiskundemethodes voor PO en VO. Er zijn enkele frappante overeenkomsten te constateren tussen enerzijds uitwerkingen in methodes en anderzijds aanpakken van leerlingen, al worden die niet allemaal als zodanig benoemd. Een voorbeeld daarvan is het omzetten van gemengde getallen in onechte breuken, dat voorkomt in de HAVO/VWO-methodes bij het vermenigvuldigen van breuken, en dat 3 HAVO/VWO-leerlingen ook hanteren voor het optellen (!) van breuken.

Naast de invalshoeken *attained* en *written* curriculum in de beide deelstudies, is er een zeer lezenswaardig hoofdstuk toegevoegd over de wat problematische relatie tussen het *ideal* curriculum van oorspronkelijke ideeën van realistisch reken-wiskundeonderwijs en het *written* curriculum, zoals dat is vastgelegd in de onderzochte reken-wiskundemethodes voor PO. Helaas is er geen vergelijkbaar hoofdstuk toegevoegd omtrent de wiskundemethodes voor VO.

Er zijn ook enkele kritische kanttekeningen te plaatsen bij het onderzoek. In de eerste deelstudie gaat het om de ontwikkeling van de bekwaamheid van leerlingen. Er is echter maar een klein deel van de deelnemende VO-leerlingen in meerdere schooljaren getest. Er zijn geen leerlingen in meerdere schooljaren PO, of zowel in PO als in VO getest. Het longitudinale karakter van deze studie is daarmee erg bescheiden; er is vooral sprake van een cross-sectionele vergelijking tussen groepen van de betrokken PO- en VO-leerjaren. Doordat bovendien alle HAVO/VWO-leerlingen afkomstig zijn van één school en niet valt na te gaan in hoeverre de zeven deelnemende PO-scholen een representatieve steekproef vormen, moeten de resultaten van deze deelstudie met meer voorbehoud tegemoet worden getreden dan Bruin-Muurling doet.

In de uitgevoerde methodeanalyse benadrukt Bruin-Muurling vooral de verschillen in aanpak tussen enerzijds de reken-wiskundemethodes voor PO en anderzijds de wiskundemethodes voor VO. Echter, de meeste van deze verschillen kunnen ook worden gekenmerkt als verschillen tussen één bepaalde methode enerzijds en alle andere methodes (voor zowel PO als VO) anderzijds. Dit geldt zowel voor de grofmazige als de fijnmazige analyse. Jammer is verder dat er niet meer bijlagen zijn toegevoegd. Nu is bijvoorbeeld de enige gegeven voorbeeldopgave uit een VO-methode juist afkomstig uit de methode die niet in gebruik is op de onderzochte VO-school.

Een laatste opmerking betreft literatuurverwijzingen. Hoewel Bruin-Muurling hier over het algemeen zorgvuldig is, zijn daar helaas ook enkele uitzonderingen op. Zo stelt zij op pagina 67 onder verwijzing naar Gravemeijer e.a. (1993) en De Vos (1998), dat er een sterke samenhang bestaat tussen methode en gerealiseerd onderwijs. Er zijn veel bronnen die dat bevestigen, maar de aangehaalde bronnen melden dat deze samenhang niet eenduidig is en dat leerkrachten juist ook afwijken van de methode. Op pagina 112 stelt zij onder verwijzing naar onder andere Van Zanten e.a. (2010) dat het lijkt dat de lerarenopleidingen voor PO zich richten op gecijferdheid en niet op meer begrip van wiskunde. Dit suggereert een tegenstelling die door deze bron niet wordt ondersteund.

Bruin-Muurling pleit voor meer aandacht voor (de ontwikkeling tot) meer inzicht in breuken op formeel-wiskundig niveau, met name vanwege de voorbereiding op algebra. Vanaf een bepaald niveau van begrip, redeneert ze, doet de mate van abstractie er niet meer toe. Ik weet niet wanneer dat bepaalde niveau wordt/kan/moet worden bereikt, maar het lijkt me dat gedurende de leerweg daar naar toe, de mate van abstractie er wel toe doet. Dat blijkt wellicht al uit de verschillen tussen twee van haar testitems die allebei gaan over het verdelen van pannenkoeken (of pizza's) over kinderen. Het item waarbij een illustratie staat van de te verdelen pizza's blijkt veel minder moeilijk te zijn dan het item zonder illustratie, dat alleen daardoor al abstracter is. Bruin-Muurling maakt verder een strikt onderscheid tussen informele, getalspecifieke aanpakken en daarmee verschillende betekenissen van de bewerking vermenigvuldigen met breuken enerzijds, en algemeen geldende aanpakken op formeel niveau anderzijds. Het is de vraag of dit onderscheid wel zo strikt kan worden gemaakt. Lamon (2007) bijvoorbeeld, geeft aan dat het komen tot inzicht in rationale getallen, ook op formeel niveau, niet los kan worden gezien van inzicht in deelconcepten. Ryan & Williams (2007) pleiten er voor om bij de voorbereiding op algebra nadrukkelijk uit te gaan van het informele en intuïtieve denken van kinderen. Uit een analyse van Son en Senk (2010) tenslotte, blijkt dat in het hoog scorende Korea zowel aandacht is voor algemene formele procedures als voor meerdere aanpakken en betekenissen voor vermenigvuldigen en delen van breuken.

Met deze nuancering in het achterhoofd sluit ik mij aan bij het pleidooi van Bruin-Muurling voor meer aandacht voor inzicht bij breuken, evenals bij haar aanbeveling om te zorgen voor een betere aansluiting tussen PO en VO. Sommige van de concrete punten die

zij daartoe aandraagt ten aanzien van breuken zijn inmiddels terug te vinden in het 'Referentiekader taal en rekenen'. Beide onderzochte wiskundemethodes VO hebben ondertussen additionele boeken uitgebracht voor rekenen. Dat betekent in elk geval dat er in het VO meer aandacht voor komt. Ik verwacht niet dat daarmee de kloof tussen PO en VO ineens gedicht is. Daarvoor is de materie te complex. Bruin-Muurling heeft echter in haar proefschrift van deze complexe materie een uitgebreid beeld geschetst en geeft bovendien volop aanwijzingen voor zinvol vervolgonderzoek.

Noten

1. Wellicht betreft deze laatste groep meer leerlingen; ik kan dit echter niet eenduidig uit de gepresenteerde gegevens afleiden.
2. De analyse op conceptueel niveau richtte zich bij de HAVO/VWO-leerlingen op andere *big ideas* dan bij de leerlingen PO

Literatuur

- Gravemeijer, K., Heuvel-Panhuizen, M. van den, Donselaar, G. van, Ruesink, N., Streefland, L., Vermeulen, W., Woerd, E. te & Ploeg, D. van der (1993). *Methoden in het reken-wiskundeonderwijs, een rijke context voor vergelijkend onderzoek*. Utrecht: Centrum voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen.
- Fosnot, C.T. & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work. Constructing Fractions, Decimals, and Percents*. Portsmouth: Heinemann.
- Lamon, S.J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F.K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-667). Charlotte, NC: NCTM.
- Ryan, J. & Williams, J. (2007). *Children's Mathematics 4-15. Learning from errors and misconceptions*, (pp. 105-119). Maidenhead, Berkshire: Open University Press.
- Son, J.W. & Senk, S.L. (2010). How reform curricula in the USA and Korea present multiplication and division of fractions. *Educational Studies in Mathematics* 74(2), 117-142.
- Vos, W.A. (1998). *Het methodegebruik op basisscholen*. Maastricht: Shaker Publishing (proefschrift).
- Zanten, M. van, Barth, F., Faarts, J., Gool, A. van & Keijzer, R. (2009). *Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de lerarenopleiding basisonderwijs*. Den Haag: HBO-raad.