

Proefschrift Angeliki Kolovou

Mathematical problem solving in primary school

Bespreking door:

Bert Zwaneveld

Ruud de Moor Centrum, Open Universiteit

Op 4 juli 2011 promoveerde aan de Universiteit Utrecht Angeliki Kolovou op een studie naar wiskundig probleemoplossen in het basisonderwijs. Het proefschrift bestaat uit gepubliceerde of ingestuurde onderzoeksartikelen, voorafgegaan door een inleiding en afgesloten met een reflectief hoofdstuk.

De aanleiding voor het onderzoek is dat uit een eerder onderzoek van Van den Heuvel-Panhuizen (de eerste promotor van Kolovou) en Bodin uit 2004 bleek dat leerlingen die goed presteerden met rekenen niet goed uit de voeten konden met uitdagende, niet-routinematige contextuele problemen. Ook in PISA-2004 bleken de Nederlandse leerlingen wiskundig gezien hoog te scoren, maar een stuk slechter op probleemoplossen. Onder andere bleken ze contraproductieve houdingen te hebben als geen kladpapier gebruiken of geen schets van de probleemsituatie maken. Het doel van Kolovou's studie is dan ook meer kennis te vergaren over het vermogen van basisschoolleerlingen in Nederland om (wiskundige) problemen op te lossen. Meer in het bijzonder ging het om hun '*performance and strategies, opportunities to learn problem solving*' en om '*characterize possibilities to enhance their performance on problem solving*'. In dit proefschrift staat het begrip probleemoplossen centraal, gebaseerd op Polyá, Schoenfeld, Skemp en anderen: probleemoplossen verwijst naar het oplossen van niet-routinematige, puzzelachtige problemen. Het oplossen is een cognitieve activiteit die een op inzicht gebaseerde benadering van de probleemsituatie en strategisch denken vereist. Het gaat om meer dan het rechtstreeks toepassen van een algoritme, formule of procedure. Meestal zijn er meerdere stappen in het oplossingsproces nodig voordat de leerling in staat is de complexiteit van de probleemsituatie te doorgronden. Bovendien moeten de leerlingen zich het verband tussen de voorkomende getallen of grootheden bewust worden om een oplossingsmanier te vinden. Het onderzoek van Kolovou richt zich op de competentie van leerlingen in het Nederlandse basisonderwijs in het oplossen van problemen met onderling verbonden variabelen. Dit leidt tot de volgende drie overkoepelende onderzoeksvragen. Hoe goed zijn leerlingen uit het Nederlandse basisonderwijs in het oplossen van niet-routinematige puzzelachtige problemen? In welke mate bieden de leerboeken leerlingen kansen dergelijke problemen te leren oplossen? Hoe kunnen we de leerlingen hierbij ondersteunen?

De zes deelstudies gaan achtereenvolgens over (1) het exploreren van aanpakken en flexibiliteit in aanpakken van niet-routinematige problemen door leerlingen van groep 6 met hoge rekenresultaten, (2) de mate waarin de leerboeken het leren probleemoplossen

ondersteunen, (3) een ICT-omgeving om de prestaties van leerlingen van groep 6 bij het oplossen van niet-routinematige woordproblemen te beoordelen en te ondersteunen, (4) door een spel gegenereerde online feedback als een manier om pre-algebraïsch redeneren te ondersteunen bij leerlingen van groep 8, (5) de invloed van een interventie bij leerlingen van groep 8, inclusief een thuis te spelen onlinespel, op hun pre-algebraïsche prestaties en (6) een onlinespel als leeromgeving om pre-algebraïsche problemen op te lossen voor leerlingen van de groepen 4, 5 en 6.

In alle studies met leerlingen speelt de volgende probleemsituatie met onderling verbonden variabelen (of varianten daarop) de hoofdrol. Bij een quiz krijg je twee punten voor een goed antwoord, bij geen of een fout antwoord gaat er een punt af. Dit worden de spelregels genoemd. Een van de typische problemen is dan: hoeveel goede en verkeerde antwoorden leiden tot een totaalscore van acht punten bij een quiz met tien vragen? Een erop volgend typisch probleem is: bij welke spelregels krijg je bij een quiz met 30 vragen, 15 goede antwoorden en 15 verkeerde een totaalscore van 15 punten? En: zijn er meer spelregels die tot deze totaalscore leiden?

Het onlinespel dat steeds gebruikt wordt, is een applet waarbij pijlen op een roos worden afgevuurd en waarbij raak schieten punten oplevert en mis schieten puntenaftrek. De puntentoekenning of -aftrek bij raak of mis schieten kan door de speler worden opgegeven of aan de computer overgelaten worden. De speler kan zelf schieten of dat aan de computer overlaten. Dan moet wel het aantal schoten opgegeven worden. De computer geeft steeds de totaalscore bij een serie schoten.

De zwaartepunten van deze studie bevinden zich in de hoofdstukken 6 en 7 over respectievelijk de rol van de interventie met het onlinespel thuis en het onlinespel als leeromgeving. Hoofdstuk 2 over het aanpakken van niet-routinematige problemen en de flexibiliteit bij het gebruiken van die aanpakken is een voorstudie om vast te stellen in hoeverre leerlingen (hier van groep 6) niet-routinematige problemen kunnen oplossen. Opbrengst van dit hoofdstuk is de identificatie van aanpakken die leerlingen gebruiken: het herhaald ophalen van informatie uit de probleemsituatie, trial & error, het systematisch op een rijtje zetten van mogelijke oplossingen toewerkend naar de juiste oplossing, extreme gevallen bekijken (bij de quiz bijvoorbeeld: alle antwoorden zijn goed of juist fout), bewijzen of controleren dat een antwoord correct is, het gelijk verdelen van de uitkomsten over de twee mogelijkheden (bij de quiz: als er 18 vragen zijn, dan uitgaan van 9 goede en 9 foute antwoorden). Opmerkelijk is dat in hoofdstuk 5 waar ook de verschillende aanpakken van de leerlingen zijn geïdentificeerd, slechts drie aanpakken genoemd worden: trial & error, systematisch proberen en bewijzen of controleren.

In hoofdstuk 3 wordt vastgesteld dat de leerboeken het leren oplossen van niet-routinematige problemen niet of nauwelijks ondersteunen. Als er al dergelijke problemen worden gegeven, gebeurt dat niet in het boek dat de leerlingen dagelijks in de klas gebruiken maar in het extra materiaal naast de methode. In het leerboek met het hoogste percentage puzzelachtige opdrachten was dit percentage minder dan 2,5%. Omdat er maar heel wei-

nig van dergelijke puzzelachtige opdrachten waren (opdrachten zonder rechtstreekse oplossing) werd een nieuwe categorie opdrachten gedefinieerd: grijs-gebied-opdrachten (opdrachten die niet echt puzzelachtig zijn, maar ook niet rechtstreeks op te lossen). Worden de puzzelachtige opdrachten en de grijs-gebied-opdrachten samengevoegd, dan stijgt het hoogste percentage naar 13. Hoofdstuk 4 is vooral een voorstudie naar het onlinespel van het pijl-en-boog-spel. In hoofdstuk 5 wordt het gebruik van het onlinespel in een groter onderzoek nader bestudeerd. Er wordt daarbij aan de applet van het onlinespel een tool gehangen die de acties van een speler vastlegt zodat geen vragenlijst of interview hoeft te worden afgenomen. Kolovou legt hier uitvoerig rekenschap over af. Zoals gezegd, de hoofdstukken 6 en 7 zijn bij wijze van spreken de klap op de vuurpijl.

De titel van hoofdstuk 6 is *'Can an intervention including an online game to be played at home contribute to students' early algebra performance?'* In de inleiding van dit hoofdstuk wordt kort ingegaan op het belang van algebra in het voortgezet onderwijs, op het feit dat dit lang niet onproblematisch is en dat vaak als een van de oorzaken wordt genoemd de matige voorbereiding in het basisonderwijs. Opmerkelijk is dat hier alleen verwezen wordt naar de onderzoeksliteratuur en niet naar de landelijke discussie over kerndoelen van ons rekenonderwijs: het automatiseren van de rekenregels of het (ook) kunnen gebruiken van deze regels bij het aanpakken en oplossen van problemen met een numeriek aspect.

Twee problemen rond de overgang van rekenen naar algebra worden genoemd: de verschillende betekenissen van het =-teken en het feit dat het bij algebra niet zozeer om de getallen of hoeveelheden gaat alswel over het redeneren over relaties tussen verzamelingen van waarden. Voor de deelstudie van dit hoofdstuk heeft de onderzoekster voortgeborduurd op onderzoeksresultaten waarbij niet zozeer algebra zelf in het basisonderwijs werd geïntroduceerd maar zogenoemde *'entry points'* daartoe. Deze bestaan uit verzamelingen problemen die de leerlingen de kans bieden algebraïsch te redeneren door informele methoden toe te passen (bijvoorbeeld zonder gebruik van variabelen). Daarbij wordt aangenomen dat de leerlingen bedreven rekenaars zijn. Deze *entry points* kunnen bijvoorbeeld leiden naar het exploreren van numerieke patronen, leren begrijpen van functionele verbanden en uiteindelijk abstracte kennis. Hier gaat het om de vraag hoe leerlingen geholpen kunnen worden bij het ontwikkelen van dit algebraïsch redeneren aan de hand van problemen met afhankelijk van elkaar variërende waarden, zie het quizprobleem en het pijl-en-boog-spel. Om dit te onderzoeken is gebruik gemaakt van de mogelijkheden van de technologie: het onlinespel dat een dynamische probleemsituatie biedt die het dynamisch denken dat bij algebra hoort goed kan ondersteunen. Dat is nauwelijks het geval als dit met pen-en-papier moet worden gedaan.

Een tweede uitgangspunt bij deze deelstudie is dat huiswerk onder zekere voorwaarden leerresultaten kan verbeteren. Op het punt van het oefenen van vaardigheden is dat wel duidelijk. Hier was de onderzoekster vooral geïnteresseerd in de vraag of dit ook geldt voor het leren van een complexe competentie als algebraïsch redeneren.

Aan het experiment deden tien klassen met in totaal 236 leerlingen uit groep 8 van verschillende, maar sociaal-economisch vergelijkbare scholen mee. Vijf klassen zaten in de experimentele groep, vijf in de controlegroep. Het experiment duurde ongeveer zes weken, voorafgegaan door een voortoets en afgesloten met een natoets. De interventie voor de experimentele groep bestond uit drie perioden van een week waarin leerlingen thuis met het onlinespel konden spelen. Elke periode begon met een klassikale instructie van 30 tot 45 minuten. De eerste keer werd de onlineomgeving geïntroduceerd. Elke leerling kreeg een uniek internetaccount en een werkblad met de verzameling problemen met het verzoek die thuis met behulp van het onlinespel op te lossen. In de tweede en derde klassikale instructie werden de oplossingen van de vorige periode gedurende ongeveer 15 minuten besproken en het nieuwe werkblad uitgedeeld. In die klassikale les presenteerden leerlingen hun oplossingen waarbij de nadruk lag op de onderliggende structuur van de problemen. De klassikale lessen waren ook bedoeld om leerlingen te motiveren voor de volgende periode met het onlinespel. De rol van de leerkracht bleef hiertoe beperkt. Merk op dat de leerlingen niet verplicht waren thuis het spel te spelen.

De voor- en natoets (met pen-en-papier) bevatten zeven contextproblemen met onderling gerelateerde waarden. In de voortoets werden ook algemene rekenvaardigheden van de leerlingen gemeten door middel van de eindtoets van groep 7 uit het Cito-leerlingvolgsysteem.

Bovengenoemde onderzoeksopzet stelde Kolovou in staat om verbetering van prestaties in pre-algebra te relateren aan een reeks variabelen zoals de ingelogde tijd, het aantal uitgevoerde gebeurtenissen (schoten met het onlinespel), het aantal op de oplossing gerichte gebeurtenissen, de prestatie op de pre-algebraproblemen en verschil tussen jongens en meisjes.

De resultaten waren als volgt. De leerlingen in de experimentele groep verbeterden hun score op de natoets ten opzichte van de voortoets, terwijl er in de controlegroep geen verbetering was. Overigens, niet alle leerlingen van de experimentele groep gingen online, maar dat was immers ook niet verplicht. De variabele 'inspanning' (een samenstelling uit vier indicatoren) bleek niet de belangrijkste voor de prestatiewinst. De onderzoekster vermoedt dat de ervaring met het spel op zich belangrijker is dan de herhaalde ervaring ermee. Over de verschillen tussen jongens en meisjes wordt geconcludeerd dat beiden voordeel hadden als ze in de experimentele groep zaten. Echter, in de voortoets bleken de jongens al beter dan de meisjes en het verschil was in de natoets nog iets toegenomen. Dit was zowel het geval voor de experimentele groep als voor de controlegroep. Op de indicatoren 'aantal gebeurtenissen' en 'aantal op de oplossing gerichte gebeurtenissen' deden de meisjes het (in de experimentele groep) beter dan de jongens zonder tot betere prestatiewinst te leiden.

In hoofdstuk 7 gaat het over de deelstudie '*An online game as a learning environment for early algebraic problem solving by students in upper primary school*'. In veel opzichten is deze deelstudie vergelijkbaar met die van hoofdstuk 6. Een verschil is bijvoorbeeld dat

nu werd gewerkt met 318 leerlingen uit de groepen 6, 7 en 8 en met verschillen in sociaal-economische achtergrond. Er was geen controlegroep. Wel was er een voortoets en een natoets. De voortoets bevatte zeven vragen van het type zoals eerder genoemd. De natoets bevatte dezelfde zeven vragen en zes nieuwe, elk in wiskundig opzicht corresponderend met een vraag uit de voortoets. Van deze zes nieuwe vragen waren er drie in context en drie met kale getallen (bijvoorbeeld: als $\square + \Delta = 34$ en $\square \square + \Delta \Delta \Delta \Delta = 92$, wat zijn dan Δ en \square ?). Er waren twee onderzoeksvragen: hoe gaan de leerlingen van de drie groepen om met de online omgeving (in feite het onlinespel uit de vorige deelstudies) en hoe is het werken met de omgeving gerelateerd aan hun prestaties op een papieren toets over het oplossen van pre-algebra problemen?

Het bleek dat 80% van de leerlingen minstens één keer inlogde en dat de problemen behoorlijk moeilijk waren voor de leerlingen. In alle groepen was er prestatieverbetering op de zeven gemeenschappelijke vragen, voor de leerlingen van groep 6 was die verbetering het kleinst, voor groep 8 het grootst.

Voor een codering van de aanpakken van de leerlingen is gebruik gemaakt van deels andere indicatoren dan in eerdere hoofdstukken. Nieuw is hier dat via een clusteranalyse drie profielen voor de aanpakken zijn geconstrueerd, elk met een eigen dominante aanpak. Veruit het grootste cluster heeft trial & error als dominante aanpak. Voor het een na grootste cluster is dat het bekijken van extreme gevallen en voor het kleinste cluster is dat de aanpak waarbij een raak schot (+1) en een misser (-1) elkaar opheffen. Ook nieuw in dit hoofdstuk is de poging een niveau-aanduiding voor het online werken te ontwikkelen. Niveau 1, het basisniveau, is 'vrij spelen'. Op niveau 2 gaat het leerlingen alleen maar om het antwoord, terwijl op niveau 3 leerlingen de relaties tussen de getallen en de structuur proberen te doorgronden. De percentages leerlingen op niveau 1 waren voor groep 6, 7 en 8 respectievelijk 61, 30 en 40. Op niveau 2 respectievelijk: 13, 41, en 28. En voor niveau 3: 27, 30 en 32. In de groepen 6 en 8 had het niveau van online werken een significant effect op de prestaties op de natoets. Van groep 6 scoorden de leerlingen van niveau 3 beter dan hun medeleerlingen. Van groep 8 hadden de leerlingen van niveau 2 de beste prestaties. In beide groepen deden de leerlingen van het niveau met de beste prestaties het significant beter dan de leerlingen van niveau 1. In groep 7 bleek het niveau niet significant, maar er was wel een toename in prestaties over de niveaus.

Tot slot van deze bespreking noem ik een paar zaken die me opvielen. Het proefschrift heeft me zeer geboeid. Dat komt vooral doordat keuzes, opzetten, analyses en conclusies goed beargumenteerd en helder beschreven zijn. Dat er nogal wat herhaling inzit doordat het proefschrift grotendeels uit gepubliceerde of nog te publiceren artikelen bestaat, neem ik op de koop toe. Belangrijk vind ik vooral de keuze van het onderwerp: probleemoplossen. Dit onderwerp is zeker van belang in een periode waarin het publieke debat zich vooral richt op rekenregels en niet op dit minstens zo belangrijke aspect van het onderwijs in rekenen en wiskunde. Wat ik jammer vind is dat de focus hierbij vrijwel uitsluitend gericht is op problemen met onderling afhankelijke waarden. Het arsenaal aan niet-routi-

nematige problemen is aanzienlijk groter, zoals de onderzoekster trouwens ook zelf opmerkt. Verder is het zeker niet zo dat bij de gepresenteerde problemen een aanpak met een tabel met al dan niet doelgerichte, mogelijke oplossingen (een pre-algebraïsche aanpak) voor de leerlingen de enig mogelijke aanpak is. Zo kan het leeftijdsprobleem (Angela is 15 jaar en John is 3 jaar. Over hoeveel jaar is Angela twee keer zo oud als John?) ook anders aangepakt worden. Zij schelen twaalf jaar. Als Angela 24 is, dan is John 12, want hun leeftijdsverschil blijft gelijk. Dat is dus over negen jaar. En eigenlijk hoort hier nog een tweede opmerking bij. Er zijn altijd twee oplossingen behalve als de twee personen op dezelfde dag jarig zijn. Ik heb dat zelf pas opgemerkt: ik was twee maal zo oud toen mijn dochter 29 was geworden en ik 58 was (ik was dus 29 toen zij geboren werd), en ik was opnieuw twee keer zo oud, namelijk na mijn zestigste verjaardag toen zij al 30 was. Leerlingen van het basisonderwijs kunnen diezelfde ervaring opdoen met een broertje of zusje.

Ook is het voor mij geen uitgemaakte zaak dat pre-algebraïsche problemen met onderling samenhangende waarden de meest relevante voorbereiding op de algebra van het voortgezet onderwijs is. In de eerste leerjaren gaat het vaak meer over het oplossen van vergelijkingen met een onbekende dan over functionele verbanden, maar de keuze hiervoor had wat mij betreft wat meer beargumenteerd mogen worden. Hierbij had een beschouwing over de overgang van rekenen naar algebra niet misstaan. Van Amerom (2002) heeft in haar proefschrift bijvoorbeeld opgemerkt dat veel leerlingen in het begin van het voortgezet onderwijs een rekenkundige aanpak blijven prefereren boven een algebraïsche, ook als die algebraïsche effectiever en efficiënter is.

De samenhang tussen de deelstudies is niet altijd overtuigend. Ik heb al genoemd dat de categorieën van probleemoplossingen in de verschillende deelstudies niet steeds dezelfde is. Op zich kan dat natuurlijk, maar gezien het feit dat het steeds om vrijwel dezelfde problemen en voor een deel ook om dezelfde soort leerlingen gaat, had ik hier wel wat meer over willen lezen.

Hoewel met enige regelmaat geschreven wordt over wat bepaalde resultaten voor de onderwijspraktijk kunnen betekenen wordt er geen 'totaalplaatje' voor de didactiek van het onderwijs in probleemoplossen gepresenteerd. Nu mag dat van een onderzoek dat niet ontwerpgericht is misschien niet verwacht worden. Bovendien waren de interventies zo opgezet dat de leerkrachten er eigenlijk geen rol in speelden. Toch had bijvoorbeeld een scenario voor onderwijs in probleemoplossen gericht op leerkrachten (of leerboekenauteurs) niet misstaan, zeker gezien het resultaat van hoofdstuk 3 dat de leerboeken te weinig te bieden hebben. Voor mij is probleemoplossen sterk verbonden met modelleren. Dat wordt in de theoretische delen van de sommige deelstudies ook opgemerkt. Een scenario voor het onderwijs in probleemoplossen zou de relatie met modelleren kunnen expliciteren. Zo'n scenario zou kunnen leiden tot een leerlijn probleemoplossen/modelleren doorlopend van basisonderwijs tot in het voortgezet onderwijs waarvoor ik elders heb bepleit (Zwaneveld, 2011).

Literatuur

- Amerom, B.A. van (2002). *Reinvention of early algebra, Developmental research on the transition from arithmetic to algebra*. Utrecht: CD-bèta Press.
- Kolovou, A. (2011). *Mathematical problem solving in primary school*. Utrecht: Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education, Faculty of Science, Utrecht University.
- Zwaneveld, B. (2011, te verschijnen). *Over het professionaliseren van leraren rekenen, wiskunde en informatica*. Heerlen: Ruud de Moor centrum, Open Universiteit. Afscheidsrede.

