Proefschrift Irene van Stiphout

The Development of Algebraic Proficiency

Bespreking door:
Bert Zwaneveld
Ruud de Moor Centrum, Open Universiteit

Op 14 december 2011 promoveerde Irene van Stiphout aan de Technische Universiteit Eindhoven op haar studie naar de ontwikkeling van de algebraïsche bekwaamheden in het Nederlandse voortgezet onderwijs. Het proefschrift bevat vijf deelstudies, voorafgegaan door een inleidend hoofdstuk. Het afsluitende hoofdstuk bevat een synthese van de resultaten.

De aanleiding voor dit promotietraject is de discussie over de rekenkundige en algebraïsche bekwaamheid van leerlingen in het Nederlandse voortgezet onderwijs tegen de achtergrond van leerplanwijzigingen en didactische visies. Sinds begin jaren negentig van de vorige eeuw ligt de nadruk op betekenisvolle contexten en het algebraïsch modelleren daarvan, het (algebraïsch) oplossen van problemen uit die contexten en het interpreteren van de uitkomsten in die contexten. In het leerplan voor de onderbouw krijgen functies grote nadruk, wat tot gevolg heeft dat leerlingen moeten leren wisselen tussen representaties van functies, zoals grafiek, tabel en formule. Deze wijzigingen zijn ten koste gegaan van tijd voor procedurele routines. In de afgelopen jaren heeft zich een debat ontsponnen over de algebraïsche bekwaamheid, met klachten vanuit het vervolgonderwijs en het ter discussie stellen van het gebruiken van de grafische rekenmachine. Mede naar aanleiding van dit debat besloot de minister van onderwijs in het examenprogramma voor havo en vwo meer aandacht aan algebraïsche vaardigheden te geven. Tegen deze achtergrond startte dit promotietraject. Het ging erom inzicht te krijgen in het feitelijke algebraïsche bekwaamheidsniveau in het pre-universitair onderwijs en, als dit niveau teleurstellend zou zijn, inzicht in de diepere oorzaken ervan.

De vijf deelstudies gaan achtereenvolgens over (1) de ontwikkeling van algebraïsche bekwaamheden met als theoretische achtergrond de relatie tussen procedurele en conceptuele kennis en de overgang van rekenen naar algebra; (2) de ontwikkeling van de algebraïsche bekwaamheden bekeken vanuit het theoretisch aspect van structure sense dat beschrijft of leerlingen in staat zijn ‘to use equivalent structures of an [algebraic] expression flexibly and creatively’; (3) de moeilijkheid van het oplossen van algebraïsche problemen vanuit de optiek van de overgangen tussen operationele en structurele begrippen; (4) de vraag of de vanuit de cognitievebelastingstheorie aangereikte maat ‘instructional efficiency’ gebruikt kan worden om het expertiseniveau van de leerlingen te beoordelen; (5) de vraag of de Nederlandse wiskundemethodes leerlingen helpen om hun conceptuele algebraïsche bekwaamheid te ontwikkelen.

Voor de overgang van rekenen naar algebra worden moeilijkheden genoemd zoals *lack of closure* en de *proces-product*dualiteit. Het eerste is dat bij het wegwerken van haakjes in $2(3x - 5)$ tot $6x - 10$ de aftrekking in de laatste uitdrukking niet uitgevoerd kan worden en het antwoord dan als 'niet af' wordt ervaren. Het tweede betekent dat een bewerking soms al wel het antwoord is en soms niet: $\sqrt{9}$ herleid je tot 3, $\sqrt{5}$ laat je staan.

Voor mogelijke diepere oorzaken van het eventuele gebrek aan algebraïsche bekwaamheden wordt het begrip 'algebraïsche expertise' van Drijvers (2003) gebruikt, dat gebaseerd is op het begrip *symbol sense* van Arcavi (1994). Algebraïsche expertise is volgens Drijvers eendimensionaal, lopend van basisvaardigheden zoals procedureel werken, lokale focus en algebraïsche berekening naar *symbol sense* met strategisch werken, globale focus en algebraïsch redeneren. Deze eendimensionale benadering maakt het mogelijk toetsen te analyseren met het Rasch-model. Daarom kort iets over dit model.

Het Rasch-model is een één-parameter-item-responsmodel uit de toetsliteratuur. Met behulp van een Rasch-analyse wordt één lineaire schaal geconstrueerd waarop de leerlingen worden geplaatst overeenkomstig hun bekwaamheid en de vraagitems overeenkomstig hun moeilijkheid. Van Stiphout verwacht dat het Rasch-model een gedetailleerder beeld van de algebraïsche bekwaamheid zal geven dan de *p*-waarden, omdat het model rekening houdt met de moeilijkheid van de vraagitems. Bovendien biedt het Rasch-model de mogelijkheid de schalen van de toetsen onderling te verankeren. De toetsen zijn namelijk niet alleen cross-sectioneel gebruikt per klassenlaag (2, 3, 4, 5 en 6 vwo) maar ook longitudinaal (leerlingen werden in achtereenvolgende jaren opnieuw getoetst).

De toetsen bestaan uit open vragen en bevatten steeds dezelfde vaardigheden (geïllustreerd met een voorbeeldvraag):

– wegwerken van haakjes: $-4(3a + b) =$
– vereenvoudigen: $-2(3x - y) + 3(-4y - 2) =$
– berekenen: $-7 - (4 - 3) \cdot (-8) - 2 =$
– oplossen: $a\sqrt{2} = 1 + 2a\sqrt{3}$
– substitueren: $a = -1$ en $b = -2$ in $-2(a^2b)^2$
– uitleggen of iets waar is of niet: $Q = \sqrt{P-2}$ impliceert $P = Q^2 + 2$
– oplossen indien mogelijk:
  is er een x waarvoor $\dfrac{2x+1}{4x+2} = 2$; zo ja, bereken x; zo nee, leg uit waarom niet
– herschrijven: $P = \dfrac{1}{Q} + 5$ betekent $Q = \ldots$ iets met $P\ldots$

De eerste deelstudie in hoofdstuk 2 gaat over de ontwikkeling van de algebraïsche vaardigheid. Deze ontwikkeling is uitgesplitst naar vaardigheidsniveau per klassenlaag (cross-sectioneel) en per leerling over de klassenlagen heen (longitudinaal) en van basisvaardigheden naar *symbol sense*. De toetsen zijn vier keer afgenomen. Er deden 1020 leerlingen van vier scholen minstens één keer mee aan een toets, waarvan 277 leerlingen alle vier keren. De onderzoeksresultaten laten zien dat de vaardigheden over de jaren heen beter worden, maar in de laatste twee jaar is er nauwelijks meer een toename. Leerlingen met een natuurwetenschappelijk profiel doen het niet significant beter dan die met een maatschappelijk profiel. Per leerling is er over de leerjaren heen ook een verbetering in vaardigheden, maar slechts weinig leerlingen maken significante vorderingen. Wat betreft de ontwikkeling van basisvaardigheden naar *symbol sense* is het resultaat dat leerlingen de eenvoudige vragen beheersen, maar zo gauw het een beetje moeilijker wordt, haken velen af. De vragen die voor de jongste leerlingen te moeilijk waren, waren dat ook nog voor de oudsten. In de discussie noemt de onderzoekster dit teleurstellend. Van Siphout vermoedt dat de belangrijkste reden is dat leerlingen te weinig leren om op een formeel niveau te redeneren, waar de wiskundige structuur en de ambigue natuur (de proces-objectdualiteit) centraal staan.

In hoofdstuk 3 probeert de onderzoekster greep te krijgen op de achterliggende oorzaken van de teleurstellende algebraïsche vaardigheden. Daartoe zoomt zij in op een aspect van *symbol sense*, namelijk *structure sense*, dat beschreven kan worden als het flexibel kunnen omgaan met de wiskundige structuur van algebraïsche uitdrukkingen. Na een nadere theoretische analyse van dit begrip zijn zestien items uit de vier afgenomen toetsen geselecteerd die een beroep doen op de algebraïsche structuur van een uitdrukking, zoals bijvoorbeeld: los op:$(x-1)(x+3)(x-4) = 0$. Daarna worden de antwoorden van de studenten op deze vragen diepgaand geanalyseerd, met name op het strategische aspect hoe dit soort vragen aan te pakken. Zo zijn er leerlingen die in het linkerlid van $(x-1)(x+3)(x-4) = 0$ eerst de haakjes wegwerken. Kennelijk is voor hen het procedurele aspect overheersend. Zij zien het conceptuele aspect (als een product gelijk aan 0 is, dan is minstens een van de factoren gelijk aan 0) over het hoofd. Het resultaat van deze analyse is dat de meerderheid van de leerlingen niet in staat is flexibel met de wiskundige structuur van de uitdrukkingen om te gaan. In de discussie wordt aangegeven dat *structure sense* een veelheid aan vaardigheden omvat waar leerlingen flexibel mee om moeten gaan, hetgeen het moeilijk te onderwijzen maakt.

Hoofdstuk 4 doet verslag van een nader onderzoek naar de diepere oorzaak van de teleurstellende algebraïsche vaardigheid van leerlingen. Als theoretisch kader wordt de reïficatietheorie van Sfard (1991) gebruikt. Het gaat hier om het ambigue karakter van wiskundige uitdrukkingen: de proces-objectdualiteit. Of het een proces (de operatie) of een object (het resultaat ervan) is, hangt van de situatie af. Naast de overgang van proces naar object speelt hier ook de overgang van de vaste waarde van de getallen in het rekenen naar de variabele waarde in de algebra. De hypothese is dat deze overgangen tussen de operationele (proces)aspecten en de structurele (object)aspecten een complicerende factor bij algebraproblemen zijn. In termen van de door de onderzoekster geformuleerde hypothese: hoe meer overgangen nodig zijn om een algebraprobleem op te lossen, des te moeilijker dit probleem is. Om deze hypothese te onderzoeken, is een toets met zeven items ontwikkeld die aan 92 leerlingen van 5 vwo is voorgelegd. De vragen waren:

– leg uit waarom $\sqrt{12} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$, dan wel $\sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$, dan wel $\sqrt{4} . \sqrt{7} + \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$ al dan niet juist is
– vereenvoudig $2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$
– los op (met uitwerking): $2(3x+2) = 3(2x-1) + 7$, dan wel $2(3x+2) = 3(2x-1)+ 5$, dan wel $2(3x+2) = 3(2x-1) + 8$.

De vragen met de wortels hebben betrekking op de overgang van proces naar object, de vergelijkingen hebben betrekking op de overgang van vaste naar variabele waarde. Van de vragen over de wortels werd verwacht dat een leerling die een bepaalde vraag goed zou doen, ook de daarop volgende juist zou beantwoorden. Dat bleek het geval te zijn. Hetzelfde werd van de drie vergelijkingen verwacht. Ook dat bleek het geval. Daarmee zag de onderzoekster haar hypothese dus bevestigd.

Hoofdstuk 5 is een beetje een vreemde eend in de bijt van dit proefschrift. De onderzoekster past de maat 'instructionele efficiëntie' toe, door Paas en Van Merriënboer (1993) ingevoerd in het kader van de cognitievebelastingstheorie, om verschillende instructieontwerpen met elkaar te vergelijken. De maat is gebaseerd op resultaatscores (percentage juiste antwoorden) en op mentale inspanningsscores (de mate van inspanning die men zelf denkt geleverd te hebben, gescoord op een negenpuntsschaal). Naarmate de mentale inspanning afneemt en de resultaten toenemen, neemt de instructionele efficiëntie toe. Bij de studie van hoofdstuk 2 is aan de leerlingen gevraagd bij elke vraag de mentale inspanning weer te geven die zij denken bij de betreffende vraag te hebben geleverd. Bij de analyse van de scores bleken er diverse methodologische beperkingen, zoals bijvoorbeeld de validiteit van de mentale inspanningsscores: leerlingen kunnen de moeilijkheid van een vraag en de mentale inspanning door elkaar halen. Ook is onbekend wat de leerlingen als referentie gebruiken, zichzelf ten opzichte van de klas of de specifieke vraag ten opzichte van de andere vragen. De onderzoekster is nagegaan wat de correlatie is tussen de Rasch-sores en de mentale inspanningsscores. Immers, je mag verwachten dat een student bij een makkelijke vraag een lage mentale inspanningsscore heeft. Die correlatie bleek laag, zelfs negatief. De conclusie is dan ook dat in dit onderzoek de instructionele efficiëntie geen geschikte maat is om de algebraïsche expertise van de leerlingen te meten. Ik ga in deze bespreking hier dan ook niet verder op in, hoe belangrijk dit negatieve resultaat op zich ook is.

In hoofdstuk 6 rapporteert Van Stiphout haar laatste deelstudie, een explorerende studie naar de manier waarop de wiskundemethodes leerlingen helpen met name de conceptuele kant van hun algebraïsche bekwaamheden te ontwikkelen. Met conceptuele bekwaamheden wordt bedoeld dat leerlingen over hogere-ordebekwaamheden gaan beschikken, zoals het herkennen en flexibel gebruiken van algebraïsche structuren, het omgaan met het eerdergenoemde ambigue karakter van wiskundige uitdrukkingen en het zien van de samenhang tussen wiskundige begrippen. Dat heeft zij gedaan door de begrippen ‘lineaire relatie’ en ‘lineaire vergelijking’ in de twee grote Nederlandse wiskundemethodes nader te analyseren. Zij beschouwt deze begrippen als centraal in het curriculum van het voortgezet onderwijs. Omdat de Nederlandse wiskundemethodes realistisch wiskundeonderwijs als uitgangspunt hebben, kan zij de analyse uitvoeren vanuit het theoretisch perspectief van Gravemeijers ‘emergent modelleren’ (Gravemeijer, 1999). Modelleren van concrete probleemsituaties is een van de belangrijkste uitgangspunten van realistisch wiskundeonderwijs. Gravemeijer onderscheidt vier niveaus: taakstellend (wat is er in de concrete probleemsituatie aan de hand?), verwijzend (hoe kan die probleemsituatie gemodelleerd worden?), generaliserend (kan er over de wiskundige relaties geredeneerd worden en hoe dan?) en formeel (gelden die redeneringen ook los van de oorspronkelijke probleemsituatie?). Van Stiphout heeft de vier niveaus van Gravemeijers theorie uitgewerkt in drie categorieën voor de te analyseren eenheden. Bij de eerste categorie gaat het om redeneren en rekenen binnen een betekenisvolle context. De tweede categorie betreft het ontwikkelen van de daarbij optredende wiskundige eigenschappen en kenmerken. Bij de derde categorie staat het bevorderen van generieke conceptuele bekwaamheden centraal. Tijdens de analyse bleek een vierde categorie nodig. De wiskundemethodes hanteren namelijk niet emergent modelleren als onderwijsontwerp, maar een tweesporenbenadering: in eerste instantie is er veel aandacht voor contextrijke probleemsituaties, gevolgd door de formele benadering. Om de overgang hiertussen te ondersteunen geven de methodes opgaven die door Van Stiphout in deze vierde categorie zijn ondergebracht. Bij de lineaire relaties fungeren deze opgaven als ontbrekende schakel tussen de contextgebonden beschrijvingen van een lineaire relatie en de formele beschrijving door middel van $y = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$; bij de lineaire vergelijkingen dienen deze opgaven om het gat te dichten tussen informele oplossingsmethodes als de ‘weegschaal’ en de ‘bordjesmethode’ en de methode waarbij een term van het ene lid van de vergelijking naar het andere wordt gebracht met verandering van teken.

De analyse heeft tot de volgende bevindingen geleid. De ene methode bevatte 86 eenheden, waarvan 49 in de eerste twee categorieën, 1 in de derde en 36 in de vierde. Bij de andere methode waren deze aantallen respectievelijk 73, 11 en 14 van in totaal 98. De onderzoekster trekt hieruit de conclusie dat beide methodes te weinig doen om de leerlingen te helpen hun conceptuele bekwaamheden (eenheden in de derde categorie) te ontwikkelen. Zij formuleert dit nog wat explicieter: in beide methodes is er een onbalans tussen de contextgebonden en de formele benadering. De benaderingen sluiten niet goed op elkaar aan, waardoor de leerlingen onvoldoende hogere-ordebekwaamheden zoals *structure sense* leren. In de discussie geeft ze uitvoerig weer wat de beperkingen van de analyse(methode) zijn, bijvoorbeeld de door haar gehanteerde indeling in categorieën.

In het zevende en laatste hoofdstuk worden de algemene conclusies besproken. De eerste algemene conclusie is dat beargumenteerd kan worden dat het niveau van de leerlingen op het gebied van algebraïsche bekwaamheden teleurstellend is. Leerlingen boeken weliswaar vooruitgang, maar die is klein. Eenvoudige opgaven gaan over de jaren heen steeds beter, maar dat gebeurt nauwelijks bij complexe opgaven waarin belangrijke conceptuele aspecten een rol spelen. Vervolgens werd met het begrip *structure sense* dieper gekeken naar wat er aan de hand zou kunnen zijn. Daar werd gevonden dat de kern van de algebraïsche bekwaamheden bestaat uit het flexibel kunnen omgaan met de proces-objectdualiteit en dat dit door veel leerlingen nauwelijks wordt bereikt. Dit betekent dat de meerderheid van de leerlingen geen conceptuele bekwaamheden ontwikkelt. Ten slotte zijn de twee grote wiskundemethodes geanalyseerd op de vraag in hoeverre ze leerlingen ondersteunen bij het ontwikkelen van deze conceptuele bekwaamheden. Daar werd gevonden dat deze methodes geen systematische aanpak hebben om leerlingen te helpen een brug te slaan tussen de probleemsituaties van de onderbouw en de formele aanpak in de bovenbouw, en derhalve leerlingen onvoldoende helpen hun conceptuele bekwaamheden te ontwikkelen.

Als beperking voor het onderzoek wordt vermeld dat slechts 277 van de oorspronkelijke ruim 1000 leerlingen aan alle vier de toetsen meededen. Toch noemt de onderzoekster de bevindingen representatief op grond van andere Nederlandse onderzoeken. De vier toetsen hadden in aanvang weliswaar een exploratief karakter, maar door de gerichtheid op de genoemde theoretische inkaderingen, *structure sense* en reïficatie/proces-objectdualiteit, zijn de toetsen boven dit karakter uitgestegen. Nader onderzoek is, zoals de onderzoekster terecht meldt, wel nodig. Verder noemt zij als beperking dat niet naar de rol van de leraar bij het ontwikkelen van algebraïsche bekwaamheden is gekeken. Tot slot geeft Van Stiphout een aantal reflecties op haar onderzoek, die min of meer als aanbevelingen voor verbetering van het onderwijs te lezen zijn.

Commentaar

Tot zover een beschrijving van het onderzoek. Het onderzoek kan in zoverre bevredigend worden genoemd dat het op een wetenschappelijke manier laat zien dat de algebraïsche bekwaamheden van leerlingen teleurstellend zijn en dat een oplossing kan worden gevonden door meer aandacht te besteden aan het ontwikkelen van conceptuele bekwaamheden. De leerboeken doen dat in ieder geval onvoldoende. Aan de rol van de leraar, de rol van oefenen, de rol van de (grafische) rekenmachine en de invloed van de opgaven van het eindexamen op het onderwijs is in het onderzoek (helaas) geen aandacht gegeven. Ook is het onderzoek beperkt tot het vwo, terwijl de problematiek op het havo minstens zo groot is. Deze beperkingen hebben natuurlijk alles te maken met het beperkte kader van promotieonderzoek in Nederland: in vier jaar moet het afgerond zijn. Wat, denk ik, echter in het onderzoek zeker niet had mogen ontbreken is op zijn minst een indicatie van hoe groot de problematiek van de beperkte algebraïsche bekwaamheden is in internationaal verband. Uit het onderzoek van bijvoorbeeld Tempelaar et al. (2011) en Vos (2007) blijkt dat de Nederlandse leerlingen op algebraïsch gebied inderdaad achterblijven, maar niet voor wiskunde als geheel.

In het wiskundeonderwijs wordt veel gebruik gemaakt van Kilpatrick et al. (2001) die de volgende lijnen met betrekking tot ‘mathematical proficiency’ onderscheiden:

– conceptual understanding: comprehension of mathematical concepts, operations, and relations
– procedural fluency: skill in carrying out procedures flexibly, accurately, efficiently, and appropriately
– strategic competence: ability to formulate, represent, and solve mathematical problems
– adaptive reasoning: capacity for logical thought, reflection, explanation, and justification
– productive disposition: habitual inclination to see mathematics as sensible, useful, and worthwhile, coupled with a belief in diligence and one’s own efficacy.

Vervangen we in deze opsomming ‘mathematical’ door ‘algebraic’, dan zien we dat Van Stiphout verder gaat door aandacht te besteden aan de ontwikkeling door de jaren heen in het leren van wiskunde/algebra. Anderzijds blijft de lijn van de procedurele vlotheid bij Van Stiphout enigszins impliciet. De heuristische kant van de strategische lijn krijgt bij haar een beetje aandacht in hoofdstuk 4 en in haar reflecties op haar onderzoek als geheel. Nu moet wel worden opgemerkt dat de strategische lijn (die hoort bij ‘problem solving’ – zie ook Schoenfeld (1985) en Pólya (1945) – en dat is wat anders dan ‘handig sommen maken’), een heel lastige is. Van Stiphout gaat ook niet in op de houding ten opzichte van wiskunde. Wat betreft het ontwikkelen van een positieve houding beperkt zij zich tot wat de methodes hieraan doen: er wordt voornamelijk aan gewerkt door de aanwezigheid van contexten, niet door opgaven die daartoe prikkelen. Hier komt de rol van de leraar als spilfiguur in het onderwijs des te sterker naar voren.

Het geheel riep bij mij de vraag op of het algebraonderwijs wel in de eendimensionale benadering van basisvaardigheden naar algebraïsch competenties te vangen is. In mijn ogen bevat het proefschrift voldoende aanknopingspunten om een meer-dimensionale ontwikkeling te kiezen, namelijk de overgang van rekenen naar algebra en de relatie met algebraïseren, of algemener modelleren. Bij de overgang rekenen-algebra speelt de uitbreiding van de proceskant van het rekenen naar de proces-objectdualteit van de algebra. Van Amerom (2002) heeft in haar promotieonderzoek vastgesteld dat veel leerlingen een voorkeur blijven houden voor een rekenbenadering, waardoor ze niet aan de objectkant toekomen. Binnen de algebra speelt niet alleen de overgang van basisvaardigheden naar algebraïsche expressies als objecten, wat tot het ontwikkelen van *symbol sense* leidt, maar ook de verschillende representaties van die expressies en de overgangen daartussen, wat niet alleen tot het deelaspect *structure sense* leidt, maar ook tot het deelaspect dat Heck (2012) in zijn proefschrift *graph sense* heeft genoemd. En ten slotte is er dan nog het rekenen en algebra overkoepelende modelleren, waarvan in ieder geval de onderdelen probleemanalyse, (rekenkundige/algebraïsche) modelvorming, berekenen, interpreteren, valideren en verifiëren en rapporteren essentiële onderdelen zijn (Perrenet &

Zwaneveld, 2011). Wat precies de omvang van de inhoud en afzonderlijke dimensies zijn, zal wellicht door onderzoek kunnen worden vastgesteld.

Tot slot van deze boekbespreking vestig ik nog de aandacht op de positionering van dit proefschrift in de steeds groter wordende stroom reken-wiskundedidactische proefschriften en de plaats ervan in de discussie over realistisch versus traditioneel reken-wiskundeonderwijs.

De laatste paar jaar komen er steeds meer proefschriften op het gebied van de didactiek van de wiskunde (waaronder inbegrepen het rekenen): Christian Bokhove over “Use of ICT for Acquiring, Practicing and Assessing Algebraic Expertise”, Geeke Bruijn-Muurling over “The Development of Proficiency in The Function Domain. Affordances and Constraints in the Curriculum”, Gerrit Roorda over “Ontwikkeling in verandering: ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid van leerlingen met betrekking tot het concept afgeleide”, Angeliki Kolovou over “Mathematical Problem Solving in Primary School”, André Heck over “Perspectives on an Integrated Computer Learning Environment”, om er een paar te noemen. Wat opvalt in deze promotietrajecten, en ook in het hier besproken promotieonderzoek, is dat ze allemaal betrekking hebben op cognitieve aspecten van wiskunde leren op een hoog niveau. Zij houden zich verre van de discussie over realistisch versus traditioneel reken-wiskundeonderwijs. Zij richten zich op wat er ‘in de hoofden van de leerlingen moet gebeuren’ teneinde relevante wiskundige activiteiten uit te voeren. Daarbij stellen zij vast of nemen als uitgangspunt dat procedureel en conceptueel wiskundeonderwijs bij elkaar horen. Enigszins chargerend kun je zeggen dat in het realistische wiskundeonderwijs de nadruk ligt op het conceptuele, niet op het procedurele, terwijl in het traditionele wiskundeonderwijs de nadruk ligt op het procedurele en niet op het conceptuele. In deze zin werken de genoemde onderzoeken door op de constatering van het KNAW-rapport (2010) dat er geen wetenschappelijk bewijs bestaat dat de traditionele dan wel de realistische benadering van het wiskundeonderwijs beter zou zijn. Hopelijk kunnen we die discussie nu achter ons laten en de aandacht richten op hoe beide benaderingen, procedureel en conceptueel, in samenhang de noodzakelijke implementatie kunnen krijgen. Want daarover moet het didactisch debat gaan. Van Stiphout heeft daaraan een positieve bijdrage geleverd met haar indeling van opgaven van de twee geanalyseerde wiskundemethodes in de categorieën:

– redeneren en berekenen binnen de context ten behoeve van het ontwikkelen van informele strategieën
– ontwikkelen van wiskundige eigenschappen en kenmerken van de wiskundige aspecten uit de context, waaronder het rekenen en redeneren met formules
– bevorderen van de conceptuele bekwaamheden, wat onder meer inhoudt dat er algebraïsche activiteiten plaatsvinden los van de inhoud
– verbinden van de context-gebonden, vooral informele activiteiten met de formele.

Literatuur

Amerom, B.A. van (2002). *Reinvention of early algebra on the transition from arithmetic to algebra*. PhD thesis, Utrecht: CD-β press.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *14*(3), 24-35.

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer environment. Design research on the understanding of the concept of parameter*. PhD thesis, Utrecht: CD-β press.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(2), 155-177.

Heck, A. (2012). *Perspectives on an integrated computer learning environment*. PhD thesis. Amsterdam: Universiteit van Amsterdam.

Kilpatrick J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). A*dding it up. Helping children learn mathematics*. Washington: National Research Council.

Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool. Analyse en sleutels tot verbetering*. Amsterdam: KNAW.

Paas, F., & Van Merriënboer, J. (1993). The efficiency of instructional conditions: An approach to combine mental effort and performance measures. *Human Factors*, *35(*4), 737-743.

Perrenet, J., & Zwaneveld, B. (2011). Diversiteit in representatie van de wiskundige modelleercyclus bij studenten en docent. *Tijdschrift voor Didactiek der* β*-wetenschappen, 28*(1), 49-74.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego, CA: Academic Press.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Tempelaar, D.T., Rientjes, B., Kaper, W,. Giesbers, B., Van Gastel, L., Van de Vrie, E., Van der Kooij, H., & Cuypers, H. (2011). Effectiviteit van facultatief aansluitonderwijs wiskunde in de transitie van voortgezet naar hoger onderwijs. *Pedagogische Studiën*, *88*(4), 231-247.

Vos, P. (2007). Algebra-prestaties van tweedeklassers, zijn ze voor- of achteruitgegaan? *Euclides, 82*(4), 129-132.