

Nieuwe publikaties

Meetkunde op de basisschool

De ondertitel van dit boek luidt 'Didactiek, inhoud en structuur van meetkunde in de methode Rekenen & Wiskunde'. De auteur, J.M. Kraemer, legt met dit verslag verantwoording af voor het door hem en anderen verrichte ontwikkelwerk voor het onderdeel meetkunde in de basisschoolmethode 'Rekenen & Wiskunde'. Dit lijvige werk (295 pagina's) valt uiteen in drie delen. Deel I schetst het theoretische concept van het meetkundeprogramma van 'Rekenen & Wiskunde'. Deel II laat zien hoe de ontwerpers van dat meetkundeprogramma tewerk zijn gegaan. Deel III handelt over de evaluatie van het betreffende programma.

Als uitgangspunt is gekozen voor de zogenoemde Wiskobas-meetkunde, zo men daar in de jaren zeventig al over kon spreken. Er lag toen namelijk voor dit vak nog geen uitgewerkte leerlijn. Wel een aantal deelleergangen, zoals die over oppervlakte. Tevens was een aantal theoretische publikaties voorhanden, waarvan die van Freudenthal de meest toonaangevende waren.

Eigenlijk is de ontwikkeling die toen nog maar net ingezet was, in het begin van de jaren tachtig onderbroken. Zo waren de discussies en onderzoeken over de aard, de doelen en de functies van de meetkunde op de basisschool nog lang niet afgerond. Toch kan in zekere zin van een bepaalde consensus gesproken worden. De aard van de meetkunde moest informeel zijn. De doelen dienden minder in het vak zelf gezocht te worden dan voorheen, zij het dat met het onderdeel ruimtelijke oriëntatie eindelijk weer aandacht voor meetkunde als vak op zich geaccepteerd leek. Daarnaast zou de meetkunde vooral beschouwd dienen te worden als een bindmiddel tussen verschillende leerstofvlakken, maar bovenal diende het toepasbare karakter van de meetkunde ook voor het rekenen uitgebuit te worden. Met dit laatste werd met name gedoeld op de verschillende visuele modellen die door de Wiskobas-groep aanbevolen werden. Wat de didactiek van de meetkunde betreft stond men nog maar aan het begin. Wel waren er belangrijke bijdragen op dit gebied geleverd door Mevrouw Ehrenfesst (jaren twintig), Van Hiele en Van Hiele-Geldof (jaren vijftig), maar deze betroffen alle het aanvankelijk meetkundeonderwijs van de middelbare school. Daarnaast beschikte men over Freudenthals werk en enkele specifieke ontwerpen van de Wiskobas-groep.

Toch hebben de auteurs van 'Rekenen & Wiskunde' toen een poging gedaan om meetkunde structureel binnen een moderne, realistische reken-wiskundemethode in te bedden. Elders hebben wij al eens vermeld dat dit binnen 'Rekenen & Wiskunde' een heel mooi programma-onderdeel heeft opgeleverd. Thans kunnen wij in het hier bedoelde boek lezen hoe men daartoe te werk is gegaan. Dit wordt exemplarisch aangetoond aan de begrippen 'lijn' en 'hoek'. Van informele noties, ontdekt aan de wereld om ons heen, via schematiseringen, krijgt het kind steeds meer greep op deze begrippen en kan ze tenslotte in verband brengen met andere begrippen alsook toepassen. Dit nu wordt theoretisch ingekaderd, maar ook met vele praktische voorbeelden ondersteund.

Kraemer spreekt met grote overtuiging over een mogelijk nieuw meetkundeprogramma ('onze meetkunde') voor de basisschool, alsook over een hierbij passende didactiek en methodiek. En als iemand het recht heeft zoiets te beweren, dan zijn dat de ontwerpers van een dergelijk programma wel. Nu is 'Rekenen & Wiskunde' ontwikkeld binnen het voormalige OSM-project, dat vooral op de kansarme kinderen gericht diende te zijn. Des te meer glans krijgt de overtuiging als ik lees:

'Het is in principe mogelijk om binnen de verticale opbouw van de basisschool meteen de onderwijsleerprocessen zo in te richten dat zelfs de minst ondernemende en minst getalenteerde leerlingen zelfvertrouwen opbouwen en profijt krijgen van hun eigen activiteiten op eigen niveau (differentiatie in oplossingsniveau binnen een voorwaardelijk opgebouwde leergang).'
(pag.63)

Dit zou wel eens een argument kunnen zijn om meetkunde ook een werkelijke kans te gunnen in het basisonderwijs. Maar niet alleen daarom zouden we meetkunde (na een eeuw) weer moeten invoeren op de basisschool.

Waarom doe je eigenlijk meetkunde? Deze vraag wordt helder beantwoord in het hoofdstuk 'Waarvoor meetkunde?' (pag.171 e.v.). Vooral het argument van de 'persoonlijke ontwikkeling en sociale betekenis' sprak mij zeer aan. Maar ook dat van de 'voorbereidende waarde en maatschappelijke relevantie' (pag.178 e.v.). In de twee betreffende paragrafen wordt de meetkunde als vak voor de basisschool naar mijn idee al voldoende gemotiveerd. Het meest kernachtig is dit terug te vinden in het volgende citaat:

'Kortom het wereldoriënterend karakter van de basisschoolmeetkunde biedt in principe de mogelijkheid om elk kind au sérieux te nemen en om hem voortdurend uit te dagen tot een zinvol gebruik van eigen capaciteiten waardoor hij zich steeds verder kan ontwikkelen.' (pag.178)

De titel van deel III 'Uitvoerbaarheid en doeleffectiviteit. Evaluatie van onderwijsleerprocessen en opbrengsten' schept meer verwachtingen dan de auteur waar kan maken. In feite blijkt dat men nog lang zo ver niet is dat de feitelijke opbrengsten van een meetkundeprogramma gemeten kunnen worden. Kraemer vindt wel dat dat nodig is en hoopt dat er in de toekomst mogelijkheden zullen zijn om dergelijke evaluaties over een langere periode (enkele jaren) uit te voeren. Daarbij zou dan vooral de proceskant van het onderwijsleerproces onderzocht moeten worden. Nu heeft Wijdeveld in de jaren zeventig al eens laten zien dat ook in een tamelijk kort tijdsbestek hier iets over aan te tonen is. Ik verwijs hiervoor naar het project van de 'Vierkuber' (IOWO 1977).

Het is lastig concrete, toetsbare doelen voor meetkunde te ontwerpen. Toch zou het de moeite waard zijn als het Cito eens een project opzette om hiermee enige ervaring op te doen. De effecten zouden tweevoudig kunnen zijn. Ten eerste zou het een ondersteuning aan de 'eindtermen' en de 'Proeve ...' kunnen geven. Want daar komt meetkunde wel degelijk in voor. En vervolgens zou een begin gemaakt kunnen worden met onderzoek naar en ontwikkeling van methoden voor toetsing van het meetkundeonderwijs.

Ziehier enkele indrukken van het betreffende boek, dat ik met grote belangstelling heb gelezen. Waardering spreek ik uit voor de auteur, die nu een tweede boek over meetkunde op de basisschool heeft gepubliceerd. Het eerste is 'Met het oog op ruimte', dat Kraemer samen met Gravemeijer publiceerde (Zwijssen, Tilburg). Beide boeken zijn geschikt voor onderzoekers, docenten, leerplanontwikkelaars, vak-studenten en begeleiders. Dit geldt met name voor het hier besproken boek.

Eigenlijk moet men al enigszins op de hoogte zijn van de ontwikkelingen van het realistische reken-wiskundeonderwijs om het boek naar waarde te kunnen schatten. Dit zal inherent zijn aan het feit dat het werk in feite een verslaggeving van jaren ontwikkelwerk is. In feite zou er op grond van de thans voorhanden zijnde literatuur eens een meetkundeboek geschreven moeten worden dat zich direct tot de leraar basisonderwijs wendt. Daarmee ga ik in tegen het idee dat meetkunde geïntegreerd zou moeten worden binnen de andere leerstofvlakken. Maar we moeten niet vergeten dat dit een nieuw onderdeel is van het vak dat officieel 'rekenen en wiskunde' heet. En juist aan meetkunde (of ruimtelijke oriëntatie) kan nog eens getoond worden dat, om met Freudenthal te spreken, echte wiskunde op alle niveaus onderwezen kan worden.

Tot slot merk ik op dat het boek waarschijnlijk onder grote tijdsdruk tot stand gekomen is, gezien het grote aantal type- en spelfouten. Zelden heb ik me hier echter zo weinig aan geërgerd, maar ja, het betrof ook die fantastische meetkunde.

E. de Moor

Kraemer, J.M.: *Meetkunde op de basisschool: didactiek, inhoud en structuur van meetkunde in de methode 'Rekenen & Wiskunde'*, Project Onderwijs en Sociaal Milieu, Rotterdam 1990. ISBN 90-5072-018-8. Prijs fl. 15,-. Te bestellen bij: Rotterdamse Schooladviesdienst, tav. financiële administratie, Postbus 81194, 3009 GD Rotterdam.

Rekenen en wiskunde in het individueel beroepsonderwijs

Op diverse plaatsen in de onderwijsondersteuning houdt men zich bezig met het Individueel Beroepsonderwijs (IBO). Er wordt een nieuw leerplan gemaakt, er wordt aan nieuwe methoden gewerkt, zorgverbreding en remedial teaching hebben de aandacht, evenals de plaats van het IBO in de lerarenopleiding. Het OWI-project (Ontwikkeling Wiskunde IBO) van de SLO heeft in september 1989 onder de titel 'OWI in de kijker' een eerste versie van een leerplan gepubliceerd¹, en een aantal leerstofpakketjes. De SLO geeft ook het tijdschrift 'OWI-bulletin' uit. De VALO wiskunde/informatica organiseerde in maart 1988 een IBO-conferentie en deed daarvan in november 1988 verslag in 'De 7-sprong in Egmond aan Zee'.²

De Vakwerkgroep Wiskunde van de Landelijke Pedagogische Centra biedt een aantal cursussen Zorgverbreding aan. De werkgroepen voor de ontwikkeling van Remedial Teaching en nieuw lesmateriaal timmeren wat minder aan de weg.

Thans is 'Rekenen en wiskunde in het individueel beroepsonderwijs' van de VALO wiskunde/informatica verschenen. Het is het verslag van een in het IBO gehouden enquête. Veel onderwijsgeveenden zijn bang dat

...'in de toekomstige basisvorming aan I-leerlingen onhaalbare en voor hen weinig zinvolle eisen zullen worden gesteld en dat onvoldoende rekening wordt gehouden met de feitelijke onderwijs situatie in het huidige IBO.' (pag.5)

Het resultaat van de enquête is een waarschuwing aan de ontwikkelaars en de beleidsbeslissers. Wat kunnen die daaruit wijzer worden?

Een opzienbarend nieuwtje: In tenminste één IBO-school is het vorig jaar geen enkele les rekenen of wiskunde gegeven. Maar dat is gelukkig een uitzondering. Het totale aantal wekelijkse lesuren in de vier leerjaren varieert van drie tot zestien, hetgeen toch ook te denken geeft. Er worden in totaal veertien verschillende methoden gebruikt. De docenten zijn daar redelijk tevreden over, maar op de helft van de scholen wordt daarnaast nog ander materiaal gebruikt. Op eveneens de helft van de scholen wordt gewerkt met handelingsplannen of leerlingvolgsystemen. Er zijn allerlei ideeën over de verbetering van het IBO-reken- en wiskundeonderwijs. Daar worden geen frequenties bij vermeld, zodat het moeilijk is daar zwaarwegende conclusie aan te verbinden.

Meer dan de helft van het verslag gaat over schoolonderzoeken en examens. Ongeveer tien procent van de IBO-leerlingen doet wiskunde-examen, het overgrote deel op A-niveau. Van dat A-examen worden in verschillende categorieën verscheidene voorbeelden gegeven.

'Opvallend is dat in de schoolonderzoeken weinig te bespeuren valt van het moderne, realistische reken-wiskundeonderwijs in het basisonderwijs' (pag.23). Ook voor de onderdelen meten, meetkunde, algebra en statistiek zijn er nauwelijks opgaven die stoelen op de realiteit. Dat is anders in de categorie grafieken en diagrammen. Nog steeds worden hier en daar (aan A-leerlingen) examenvragen gesteld over verzamelingen. Een somber beeld. Van A-leerlingen wordt in het algemeen niet verwacht dat ze relevante gegevens uit een tekst kunnen halen. Veel nadruk wordt gelegd op het rekenen met geld, tijd en maten. De B-examens vragen meer leeswerk. Er komen meer meetkunde- en algebra-opgaven in voor en meer opgaven die verband houden met beroepsgerichte vakken. Het gebruik van de rekenmachine schijnt in het algemeen niet te worden toegestaan.

De enquête heeft zijn beperkingen. Van de 350 scholen met I-leerlingen reageerde ruim zestig procent. Er is kennelijk geen onderzoek gedaan naar scholen die niet reageerden. Verder graaft de vragenlijst niet diep, het gaat vooral om direct duidelijke informatie.

Alleen uit de examenopgaven krijg ik een idee wat de leraren met hun *wiskunde*onderwijs willen bereiken (zie boven). Over hoe ze dat willen bereiken geeft de enquête geen informatie.

Er is geen onderzoek gedaan naar wat IBO-leerlingen in wezen typeert, wat de oorzaak is van hun leerproblemen, en wat daaraan gedaan zou kunnen worden in wiskundelessen. Ik heb al eerder het vermoeden geuit van fundamentele ontwikkelingsachterstanden. Daarbij denk ik

aan de volgende problemen: niet zelfstandig serieus met een gegeven opdracht om kunnen gaan; dat, òf heel speels doen, en dan gemakkelijk de plank misslaan, òf juist heel slaafs de leraar volgen; niet geneigd en niet in staat zijn gegeven informatie te structureren; die informatie een dikke brij laten, of gemakkelijk op een enkel woord door-assocïëren; erg produktgericht zijn, geen aandacht op kunnen brengen voor het proces; vaak maar raak doen tot ze vinden dat ze klaar zijn; een gering abstractievermogen hebben; alleen aanspreekbaar zijn voor het heel concrete. Hopelijk kan een dergelijk onderzoek spoedig worden uitgevoerd. Mijn indruk is dat aan IBO-leerlingen al lang eisen worden gesteld die niet bij hen passen. Misschien kan het nieuwe leerplan daar verandering in brengen.

Noten

1. Verstappen, P.: *OWI in de kijker*, SLO, Enschede 1989.
2. Jansen, H. en H. Sissing: *De 7-sprong in Egmond aan Zee*, bijdragen en samenvattingen eerste IBO-conferentie Rekenen en Wiskunde, VALO wiskunde/informatica, Enschede 1989.

B. Lagerwerf

Jansen, H. en H. Sissing: *Rekenen en wiskunde in het individueel beroepsonderwijs*, Resultaten van een enquête over het reken- en wiskundeonderwijs in het individueel beroepsonderwijs, VALO wiskunde/informatica, Enschede 1990.

Te bestellen bij: VALO wiskunde/informatica, H. Hesselink, tel.: 053-840423.

Praktijkcahiers reken-wiskundeonderwijs

Tijdens een diepte-project dat enkele jaren geleden in Utrecht werd uitgevoerd, is nagegaan welke knelpunten zich voordoen indien leerkrachten overstappen van een traditionele op een realistische methode. Ten behoeve van dit onderzoek vonden er talrijke lesobservaties plaats, de leerkrachten voerden experimenten uit en werden in een serie workshops door het onderzoeksteam bijgeschoold. Er kwam een groot aantal knelpunten aan het licht, die overigens voor een deel te verklaren waren uit het feit dat leerkrachten - zeker als zich problemen voordoen - sterk geneigd zijn terug te vallen op de oude didactiek en een mechanistische hantering van handleidingen.

Het projectteam (R. de Jong, F. Goffree, I. Verkruijsse en J. Nelissen) echter was juist een-grote voorstander van een 'instrumenteel' en 'fundamenteel' gebruik van een realistische methode. Om met een methode open, flexibel en op een 'fundamentele' en eigen wijze te kunnen werken, moet echter aan zekere voorwaarden zijn voldaan. De leerkrachten zouden kennis en een aantal vaardigheden moeten verwerven die kenmerkend zijn voor realistisch reken-wiskundeonderwijs. Om die reden is besloten een serie praktijkcahiers te ontwikkelen die de leerkrachten zowel informatie als praktische suggesties bieden op verschillende gebieden die moeilijkheden blijken op te leveren.

Eén zo'n gebied is het automatiseren. Wat is automatiseren eigenlijk, wat heeft automatiseren met het geheugen en met onthouden te maken, wat moeten kinderen automatiseren? Dat zijn zo enkele vragen waar in het eerste cahier 'Automatiseren' op wordt ingegaan. In een tweede cahier 'Interactie' wordt - op basis van allerlei protocolmateriaal - beschreven welke gunstige effecten interactief onderwijs op het leren van kinderen kan hebben. In een derde, binnenkort te verschijnen, cahier 'Toetsen' wordt uiteengezet wat toetsen in het realistische reken-wiskundeonderwijs betekent.

Aan de volgende onderwerpen wordt momenteel nog gewerkt: 'Zelfstandig werken' en 'Achterblijvers'. Op de rol staan: 'Uitleggen', 'Rekenen van allochtone kinderen', 'Zakrekenmachines', 'Gebruik van materiaal', 'Hoofdrekenen', 'Schatten' en 'Kinderen leren denken'. De redactie van de serie wordt gevormd door R. de Jong, I. Verkruijsse en J. Nelissen. Voor een aantal van de bovengenoemde onderwerpen zijn gast-auteurs benaderd.

Serie: *Praktijkcahiers reken-wiskundeonderwijs*, R. de Jong, I. Verkruijsse en J. Nelissen (red.), De Ruiter, Gorinchem 1990. ISBN 90 05 02 1039.

Prijs fl. 14,75 per cahier. Abonnementsprijs fl. 52,50 per vier nummers.

Te bestellen bij Uitgeverij De Ruiter, Postbus 167, 4200 AD Gorinchem.

Kinderen rekenen - een procesmatige benadering

De auteurs, docenten aan de Opleiding voor Remedial Teachers in België, beginnen hun boek met enkele citaten van Govert Grazer en besluiten het met aanhalingen van Whitney. Grazer is een pseudoniem van frater Rombouts, een bekende pedagoog en (reken-)didacticus uit het midden van deze eeuw. Hij schreef onder meer de rekenmethode 'Geef acht'. Whitney is een vermaard wiskundige die zich aan het einde van zijn carrière ook intensief met het rekenonderwijs bezighield. Grazer en Whitney hebben, wat het aanvankelijke rekenonderwijs betreft, gemeenschappelijk dat ze grote waarde toekennen aan reële problemen, een evenwichtige benadering van het aantal-getal, het telgetal en het meetgetal voorstaan en beide fel gekant zijn tegen een vroegtijdige introductie van het cijferen omdat dit de ontwikkeling van het hoofdrekenen blokkeert. Met name Whitney is hier te lande bekend geworden door zijn gebruik van de kralenketting met vijf- en tienstructuur (maar ook Grazer accentueerde het belang van die structuren) en de zogenoemde lege getallenlijn die in één van zijn laatste manuscripten geïntroduceerd werd.

Een bekend voorbeeld van het gebruik van de lege getallenlijn is het volgende: er wordt een tocht gemaakt van 742 kilometer; 524 kilometer is afgelegd; hoeveel moet er nog gereden worden? (fig.1)



figuur 1

De betreffende getallen worden op de getallenlijn gezet en men kiest zelf de ankerpunten om deze afstand te overbruggen, of indien men een andere methode kiest, om 524 van 742 af te trekken. Methoden daartoe kunnen onder meer zijn:

$$524 \xrightarrow{+200} 724 \xrightarrow{+20} 744 \xrightarrow{-2} 742; 524 \xrightarrow{+218} 742$$

$$524 \xrightarrow{+6} 530 \xrightarrow{+70} 600 \xrightarrow{+100} 700 \xrightarrow{+42} 742; 176 + 42 = 218$$

$$742 \xrightarrow{-500} 242 \xrightarrow{-24} 218$$

$$742 \xrightarrow{-20} 722 \xrightarrow{-4} 718 \xrightarrow{-500} 218$$

Laten we eens nagaan hoe de auteurs van 'Kinderen rekenen' een dergelijk probleem zouden onderwijzen. We citeren enkele stukjes (pag.211-212-214).

Een voorbeeld kan dit verduidelijken:

Rekenverhaal: De moeder van Jan maakt een zakenreis naar Berlijn. Dat is een afstand van 742 km. De eerste dag rijdt ze tot Helmstedt. Ze heeft dan 524 kilometer gereden. Hoeveel kilometer moet ze de volgende dag nog rijden?

Formule: Ze moet nog $742 \text{ km} - 524 \text{ km} = \boxed{}$ rijden.

Ook de volgende formules zijn uiteraard juist:

$$742 \text{ km} = 524 \text{ km} + \boxed{} \text{ of } 524 \text{ km} + \boxed{} = 742 \text{ km.}$$

Het handelen met manipuleerbaar-schematisch materiaal en het stapsgewijze noteren van de oplossing kan als volgt geïllustreerd worden:

We noteren eerst de cijfernotatie:

$$\begin{array}{r} 742 \\ -524 \\ \hline \end{array}$$

De handeling wordt uitgevoerd met manipuleerbaar-schematisch materiaal en verwoord (zie hoofdrekenen). Er moet beklemtoond worden dat het verwoorden ook hier uitdrukkelijk gebeurt

in termen van het tientallig positioneel talstelsel! We behandelen uiteraard eerst de eenheden:

HHHH TT E HHH TT E	HHHH TT HHH TT	HHHH TT EEEEE HHH T EEEEE
	E E	E E

HHHH TT EEEE HHH T EEEE
EE EE

Twee eenheden kunnen onmiddellijk weg. Nu moeten nog twee eenheden weg. Daarom wisselen we een tiental in voor tien eenheden. We hebben dan nog acht eenheden. We schrijven die acht eenheden:

$$\begin{array}{r} 742 \\ - 524 \\ \hline 8 \end{array}$$

Nu komen de tientallen aan de beurt:

HHHH T EEEE HHH EEEE
T EE T EE

Drie tientallen min twee tientallen is één tiental. We schrijven één tiental.

$$\begin{array}{r} 742 \\ - 524 \\ \hline 18 \end{array}$$

Tenslotte de honderdtallen:

H T EEEE H EEEE
HHH T EE HH T EE

Zeven honderdtallen min vijf honderdtallen is twee honderdtallen. We schrijven twee honderdtallen.

$$\begin{array}{r} 742 \\ - 524 \\ \hline 218 \end{array}$$

Nu kan de formule ingevuld worden:

Formule: Ze moet nog $742 \text{ km} - 524 \text{ km} = \boxed{218 \text{ km}}$ rijden.

Samenvattend schema: Optellen en aftrekken met driecijferige getallen

Stap 1: Aanbrengen van de cijfernotatie en het juist onder elkaar noteren.

Stap 2: Uitvoeren, vanuit rekenverhalen, van plus- en minhandelingen met driecijferige getallen met manipuleerbaar-schematisch materiaal en stapsgewijze noteren van het resultaat.

Stap 3: Cijferend oplossen van plus- en minopgaven vanuit rekenverhalen, zonder manipuleerbaar-schematisch materiaal.

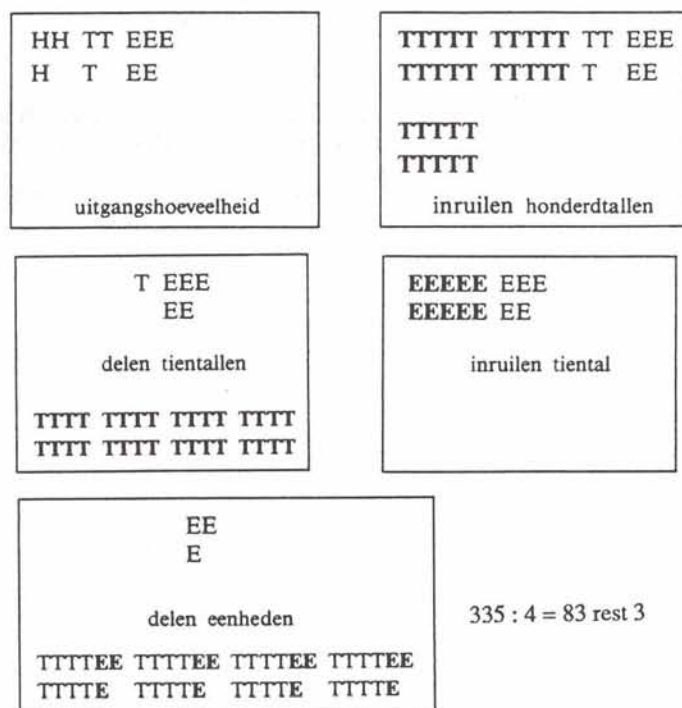
Stap 4: Reeksen van plus- en minopgaven cijferend oplossen.

Stap 5: 'Lange' optellingen.

Duidelijk is dat geen getallenlijn wordt gebruikt:

'Rekenen op de getallenlijn als visuele voorstelling en als tel-middel wordt volledig geweerd. Dit is een gevolg van het uitgangspunt dat het cardinaal aspect van getalbegrip primair is ten opzichte van ordinaal getalbegrip.' (pag.125)

Steeds worden getallen uitgelegd in eenheden (blokjes), tientallen (rood gekleurde blokjes), honderdtallen, etc. Optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen worden steeds 'concreet' met deze positieblokken en schema's geïntroduceerd - uitgaande van een verhaaltjessom. Voor de deling '335 : 4' gaat dat bijvoorbeeld zo.



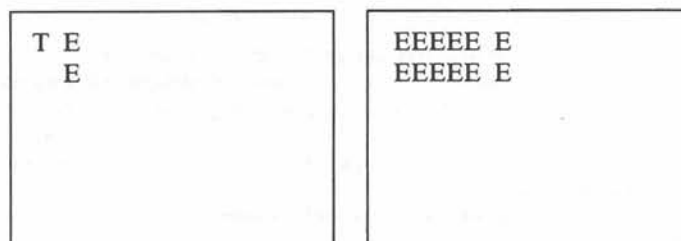
Hierna volgen nog verschillende stappen om tot een verkorting van de rekenwijzen te komen.

Ook de eerste stap bij breuken wordt weer zo gezet: starten met een concreet probleem, voorstellingen maken met positiemateriaal en vervolgens stappen voor verkorting zetten. De eerste stap gaat als volgt.

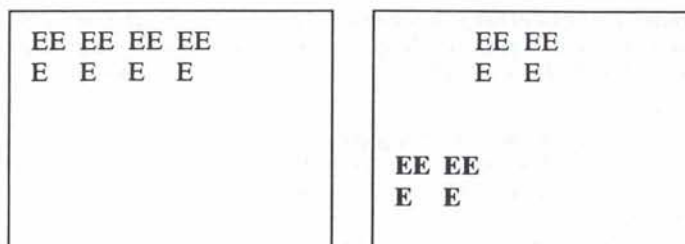
Stap 1: Er worden plus- en minopgaven, vanuit rekenverhalen, uitgevoerd met manipuleerbaar-schematisch materiaal, verwoord en genoteerd zoals hieronder. Daarbij kunnen *aanvankelijk* de aantallen onder de breuken genoteerd worden.

voorbeeld:

Dirk gaat met zijn klas twaalf kilometer wandelen. In de voormiddag leggen ze twee vierden van de afstand af. 's Namiddags, nadat ze nog eens één vierde van de afstand afgelegd hebben, struikelt Dirk. Hij moet opgeven omdat hij zich bezeerd heeft. Hoeveel kilometer heeft hij gewandeld?

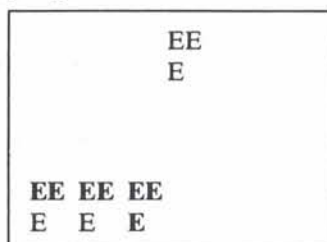


We hebben twaalf. Om er vierden van te nemen moeten we het tiental inruilen voor eenheden.



We nemen nu vierden van twaalf. Dat is telkens een groepje van drie.

Eerst hebben we twee vierden van twaalf. Dat is zes.



Er moet nog één vierde van twaalf (of drie) bij. Nu hebben we drie vierden van twaalf of negen.

Twee vierden van twaalf plus één vierde van twaalf is drie vierden van twaalf. Dat is negen.

$$\text{Vorm A: } 2/4 \text{ van } 12 + 1/4 \text{ van } 12 = 3/4 \text{ van } 12 = 9 \\ 6 + 3 = 9$$

Twee vierden van twaalf (is zes), plus één vierde van twaalf (is drie), dat is samen drie vierden van twaalf of negen. Dirk heeft dus negen kilometer afgelegd.

De auteurs zien breuken als volgt:

'Bij breuken gaat het in essentie om een aantal van de gelijke delen van eenzelfde hoeveelheid. We beschouwen breuken als rekenkundige bewerkingen. Dit uitgangspunt heeft tot gevolg dat breuken primair betrekking moeten hebben op aantallen, uitgedrukt d.m.v. getallen.' (pag.178)

In het voorgaande is steeds te zien dat men van concrete problemen uitgaat die dan vervolgens met structuurmaterialen en -schema's in eerste aanzet worden opgelost en vervolgens verkort, waarbij het verwoorden een belangrijke rol speelt.

'De rol van de realiteit (concrete leefwereld) en de sociale gemeenschap in het didactisch proces kan nauwelijks voldoende beklemtoond worden: leerinhouden moeten hun probleemstelling en toepassingsgebied vinden in de concrete realiteit, de leefwereld van het kind.' (pag.15)

Er wordt ook een oplossingsschema aangereikt voor dergelijke reële opgaven (fig.2).

Volgnummer v.h. rekenverhaal	1	2	3	4	5	6
Resultaat (antwoordzin).....						
Hoe oplossen?						
Wat weet ik?						
Opgave (formule - rekenzin)						
Wat doen?						
Rekenen?						
Welk probleem?						

figuur 2

Rekenverhaal: Kris gaat in het park wandelen met zijn vriend Peter. Peter snoept graag en veel. In het park eet hij twee reepjes chocola op. Als hij thuis komt gaat hij recht naar de kast en neemt nog een stuk chocola. Hoeveel stukken chocola heeft hij dan opgegeten?

Stap 1: Welk probleem?

De leerlingen verwoorden het probleem in een summiere vorm: 'Ik moet zoeken hoeveel stukken chocola hij opgegeten heeft.' of: 'Hij at eerst twee stukken chocola op en daarna nog één. Hoeveel zijn er dat samen?'

Stap 2: Rekenen

De leerlingen geven aan of dit probleem opgelost kan worden door te rekenen. Het antwoord is hier 'Ja.'

Stap 3: Wat doen?

Deze vraag slaat op de bewerking plus of min, die hier van toepassing is. Het antwoord is: 'Het is hier plus; we moeten optellen.'

Stap 4: Opgave (formule - rekenzin)

De leerling noteert de formule zeer algemeen: alleen het bewerkingsteken wordt concreet ingevuld: $. + . = .$

Stap 5: Wat weet ik?

De gekende gegevens worden ingevuld op de stippen en er wordt een vierkantje geplaatst op de plaats van de te zoeken factor:

$$2 + 1 = \boxed{}$$

Stap 6: Hoe oplossen?

Hier moeten de leerlingen beslissen hoe ze het resultaat zullen zoeken:

- ofwel met 'kaartjes/blokjes' (manipuleerbaar-schematisch materiaal),
- ofwel door het 'helemaal te vertellen' (uitvoerige verwoording),
- ofwel 'onmiddellijk invullen' (abstract).

Stap 7: Resultaat? (antwoordzin)

De leerlingen vullen het resultaat in de formule in en verwoorden 'Peter at eerst twee, en daarna nog één reepje chocola op. Dat zijn samen drie reepjes.'

$$2 + 1 = \boxed{3}$$

Afhankelijk van hun taalvorderingen kan dit resultaat neergeschreven worden in een antwoordzin: 'Peter at drie reepjes chocola op.'

Overige opvallende punten. Het getallengebied van nul tot en met negen dient als grondslag voor het verdere rekenen. De tafels worden volgens deze vier stappen geleerd:

Samenvattend schema: opbouw en automatisering van de tafels van vermenigvuldiging

Stap 1: Opbouw van de tafels door herhaalde optellingen.

$$0 + 4 + 4 + 4 + 4 \dots$$

Stap 2: Memoriseren van de naakte produkten.

$$0 \quad 4 \quad 8 \quad 12 \quad 16 \dots$$

Stap 3: Memoriseren van de tafels: referentie-zinnen én produkten.

...; drie maal vier is twaalf; vier maal vier is zestien; ...

Stap 4: Automatiseringsspelen.

Hoofdrekenen wordt omschreven als het rekenen of het vinden van oplossingen voor reken-opgaven zonder gebruik te maken van één of ander extern hulpmiddel, zoals bijvoorbeeld pen en papier, maar ook het met de vinger in het zand schrijven.

De algemene gang van zaken is dezelfde als bij het aanbrengen van bewerkingen met meer-cijferige getallen via het volgende schema:

1. Materiële handeling met uitgebreide verwoording.
2. Materiële handeling, uitgebreide verwoording en lange notatie stap-voor-stap.
3. Materiële handeling, uitgebreide verwoording en daarna de lange notatie ineens.
4. Uitgebreide verwoording en lange notatie.
5. Uitgebreide verwoording en korte notatie.
6. Korte verwoording en korte notatie.

Het werken met kommagetallen gebeurt op analoge wijze als met gehele (natuurlijke) getallen. Nu een voorbeeld van vermenigvuldigen.

uitgangshoeveelheid : ttt ttt	EEE EEE EEE EEE EEE EEE EEE EEE EEE EEE	TT T
---	---	-----------------

$$50 \times 0,6 = 5 \times 6E = 30 \text{ of } 3T$$

50 x 0,6: 'Vijftig keer zes tienden (t) is evenveel als (5 x 10 x 6t of) vijf keer zes eenheden, dus dertig eenheden of drie tientallen'.

Als we deze inzichten toepassen op de volgende opgave dan kunnen we als volgt tot een oplossing komen:

$$\begin{array}{r}
 242 \\
 \times 0,2 \\
 \hline
 48,4
 \end{array}$$

Uit het voorgaande weten we dat het 0,2 keer nemen van 2 eenheden = 2 tienden oplevert. Dit heeft als gevolg dat het meest rechtse cijfer in het resultaat tienden zullen zijn: 0,4

Steunend op voorgaande stappen, weten we dat op de voorlaatste plaats eenheden, daarvoor tientallen, honderdtallen zullen staan: 8

totaal: 48,4

Over het rekenen met decimale getallen merken de auteurs op:

'Vanaf dit punt in het rekenleerproces kunnen we een minder gedetailleerd beeld schetsen van de verdere stappen. Dit is het gevolg van het feit dat we voor de verdere stappen minder gelegenheid gehad hebben om alles in verschillende varianten toe te passen in reële klassesituaties.' (pag.229)

Het slotcitaat uit 'Kinderen rekenen' van Whitney luidt:

'Een goed getalbegrip is de kurk waarop het hele reken- en wiskundeonderwijs drijft. Het traditionele rekenprogramma met zijn 'cijfersommen' zinkt hierbij in het niet.'

We zijn het volledig met Whitney eens.

A. Treffers

Aerts, R. & M. Deckers: *Kinderen rekenen - een procesmatige benadering*. Acco, Leuven/Amersfoort, 1989 (267 pagina's). ISBN 90.334.2129.1.