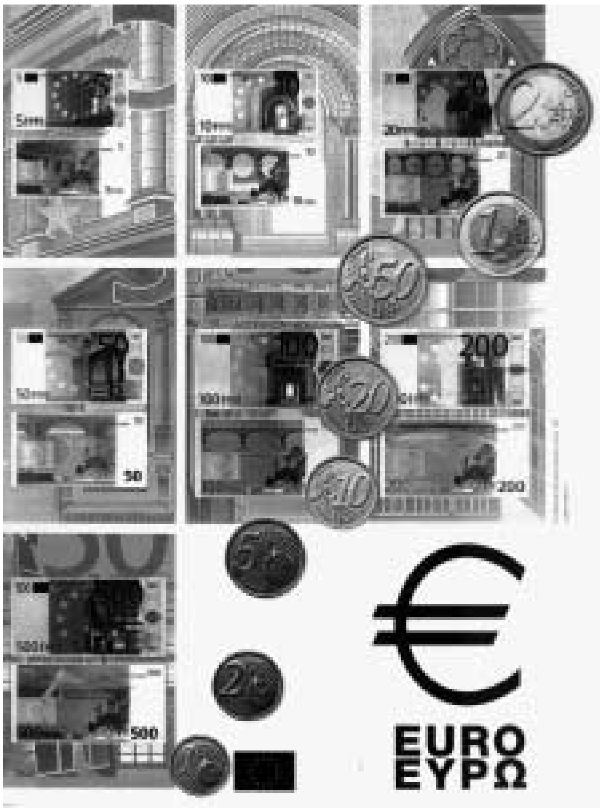
Met de de euro komt het 20 cent stuk in ons muntsysteem, ten koste van het kwartje. Deze verandering heeft gevolgen voor de dagelijkse transacties met contant geld. **Aad Goddijn** laat zien hoe machtreeksen ingezet kunnen worden om dit fenomeen te doorgronden.

De machtreeks van de €uro

Recreatierubriek

Van €uro tot Euler

In Frankrijk zijn ze al geslagen: de nieuwe munten van de euro. Maar de tien en vijftig eurocentstukken moeten nu al weer – lang voor 1 januari 2002 – worden omgesmolten. De blindenorganisaties willen een grovere kartel en de automatenbranche wil het vijftig eurocentstuk wat dikker hebben.
In een loods in Lelystad worden de komende jaren de Nederlandse euromunten opgeslagen. In het jaar 2002 beginnen ze dan te circuleren; het zijn de munten uit de jaren 1999, 2000 en 2001, want we gaan nu geen munten slaan met het jaartal 2002 en het portret van Beatrix erop. Je weet maar nooit.
In deze puzzelrubriek vindt u een paar wiskundige problemen die met dagelijks betalen via het euromuntsysteem te maken hebben. Bijvoorbeeld: vinden we in een hand eurokleingeld snel een bedrag als €13,24, en gaat betalen in dit opzicht misschien handiger dan met het huidige geld?
Enkele puzzels zijn betrekkelijk eenvoudig. Geleidelijk zetten we zwaardere technieken in, met name het gebruik van machtreeksen op een door Euler bedachte manier.
Eerst de benodigde euroformatie.
In de folder van het Europees Monetair Instituut verschijnt de euro als munt van 1, 2, 5, 10, 20, 50 eurocent en van 1 euro en 2 euro. De biljetten zijn 5, 10, 20, 50, 100, 200 of 500 euro waard. De achterkant van de munten staat er niet bij, die worden landafhankelijk. De Nederlandse achterkanten zijn een uitbreiding van het al in uw portemonnaie bekende ontwerp van Bruno Ninaber. Handzame namen voor biljetten en munten zijn er nog niet, die gaan natuurlijk in de invoeringsperiode vanaf 1 januari 2002 gevonden worden en ik raad aankomende studenten socio-linguistiek aan nu vast een kamer te zoeken op de Albert Cuypmarkt in Amsterdam om het veldonderzoek voor de scriptie dicht bij huis te kunnen doen.
Eurogeld wordt zo genoteerd: €13,24. Omdat het giraal verkeer al vanaf 1 januari 1999 gaat vereuroriseren, zult u er wel aan wennen en zodra ze het millenniumprobleem hebben opgelost, komen werkeloze informatici het €-teken op uw computer monteren, ruim op tijd.



(bron: Europees Monetair Instituut)

Omrekenen naar oude florijnen is in deze puzzelrubriek haast niet nodig, maar is net zo eenvoudig als omrekenen naar buitenlands geld; de euro is immers gewoon buitenlands geld waarmee je ook in Nederland moet betalen. Vermenigvuldig met 2.2, dat wordt door economen momenteel beloofd.
Nog een kleinigheidje: ik noteerde €13,24 en 2.2. Het Nationaal Forum voor Introductie van de Euro gebruikt ook de komma in het geld.
Zullen we het dan eindelijk maar zo gaan doen: de komma in het geld houden en de punt in de getallen? Dan houden we toch nog iets van ons Hollandse zelf en volgen met de decimale punt eindelijk niet alleen bijna geheel Europa, maar zowat ook de rest van de wereld.

Mimimaal muntcontact

Hoe betaal je €13,24 nu in de toekomst? Dat kan bijvoorbeeld zo:

twee 5-eurobiljetten
één 2-eurostuk
één 1-eurostuk
één 20-eurocentstuk
één 5-eurocentstuk
en we krijgen één eurocent terug.

Zeven munthandelingen. Ik zie wel dat het anders, maar niet dat het met minder handelingen kan.

(Kleine oefen) opgave 168a
Hoeveel handelingen zijn minimaal nodig voor het met Nederlands geld betalen van f 29,15?

Laten we ons niet direct vanwege opgave 168a uit de euro terugtrekken, er zijn nog andere bedragen te betalen.
Omdat we de Nederlandse cent niet meer hebben, moest $2.2 \times 13{,}24 = 29{,}128$ worden afgerond op 29,15. Terugrekenen van *f* 29,15 naar euro's (delen door 2.2) geeft overigens €13,25. Kassa!
Op ethische gronden:

Opgave XXX
Denk hier niet verder over na!

Het feit dat de euro een biljet van 500€ heeft (dat is dus zo'n *f* 1100,- waard) en het duurste Nederlandse biljet slechts *f* 1000,- is, maakt het betalen van hoge contante bedragen met euro's misschien een tikje gemakkelijker. Maar op die hoogte gaat het allemaal digitaal, virtueel, of zwart.
We gaan ons probleem mathematisch daarom wat insnoeren om deze hinderlijkheden buiten de deur te houden. Voor de volgende opgaven voeren we de cent in het Nederlands betaalverkeer dan ook weer in. Als we nu uitzoeken hoeveel handelingen nodig zijn om bijvoorbeeld *f* 5,64 te betalen, komt dat neer op zoeken van een oplossing van de vergelijking $a + 5b + 10c + 25d + ... = 564$ in gehele $a, b, c, d, ...$, waarbij we $|a| + |b| + |c| + |d| + ...$ minimaal willen hebben. Dat doet een beetje aan een lineair programmeringsprobleem denken, maar ik weet niet of die observatie erg nuttig is.
Een antwoord op de volgende opgave levert een beter gefundeerde vergelijking van de twee muntsystemen.

Opgave 168b
Hoeveel munthandelingen zijn er gemiddeld minimaal nodig om de bedragen f 0,01 tot en met f 1000,00 te betalen met Nederlands geld, en hoeveel om de bedragen €0,01 tot en met €1000,00 te betalen met eurogeld?

Omdat de muntsystemen betrekkelijk simpel zijn, lijkt opgave 168b me goed te doen. Als vastgesteld is dat voor betalen van €13,24 zeven handelingen nodig zijn, dan zijn er acht nodig voor betalen van €113,24. Maar pas een beetje op: voor €14,24 zijn slechts zes (of minder?) handelingen nodig. Maar het blijft allemaal te overzien, met een overzichtelijk lijstje en een rekenmachine lukt het wel.
Was de muntrij onregelmatiger geweest, dan werd de vraag lastig. Stel je had munten van 1, 7 en 10. Dan moet je maar bedenken dat $34 = \mathbf{5} \cdot 7 - \mathbf{1} \cdot 1$ efficiënter is dan $34 = \mathbf{3} \cdot 10 + \mathbf{4} \cdot 1$, maar toch nog onhandiger dan $34 = \mathbf{2} \cdot 10 + \mathbf{2} \cdot 7$.

Betalen is balanceren

Verwant aan het betalen met teruggeven van geld is het wegen met een balans. Er kunnen gewichtjes op beide schalen geplaatst worden, ook aan de kant van de grutterswaren. De volgende opgaven, gesteld binnen deze traditionele gewichtencontext, suggereren dat het eurosysteem in een bepaald opzicht niet handig is.

Opgave 169a
De hoeveelheden 1 tot en met 40 gram moeten gewogen kunnen worden met een balans. Geef een rijtje van 4 goed gekozen gewichten aan (elk van een geheel aantal grammen) waarmee dat kan.

De euro heeft al vijf munten onder de 40 cent en als we er van de vijf elk slechts één hadden, konden we nog niet eens alle bedragen onder de 40 cent 'wegen'.
In opgave 169a traden de getallen 40 en 4 op. Er had echt geen 41 en 4 of 40 en 3 mogen staan, daarmee was het niet mogelijk geweest.
Dat roept nieuwe vragen op. Hoeveel gewichtjes zijn er nodig voor 1 tot en met 1000 gram? Hoe toon je aan dat je gelijk hebt?
Algemeen:

Opgave 169b
De hoeveelheden 1 tot en met n gram moeten gewogen kunnen worden met een balansweegschaal. Hoe hangt het minimaal benodigde aantal (geheelgrammige) gewichtjes k_n van n af?

Zouden we ons op het criterium van het minimale muntcontact vastpinnen, dan valt de euro nu aardig door de mand. Maar is dat criterium wel zo geschikt? In opgave 169a en b leidde dit criterium ertoe dat je bedragen steeds maar op één manier kon betalen. Misschien is dat juist een vervelende beperking; je hebt namelijk niet altijd de juiste munten allemaal bij je, je wilt van los kleingeld af, of je wilt juist een Mars betalen met een tientje om een vijfje terug te krijgen voor de parkeerautomaat.

Mogelijkheden voor passend geld

Je kunt ook stellen: ik wil een gegeven bedrag juist op véél manieren bij elkaar kunnen leggen. Als dat kan, heb je bij een willekeurige hand kleingeld wat meer kans dat je juiste bedragen kunt vormen. Maar dan moeten we in de probleemstelling wel afzien van geld teruggeven, want anders wordt het aantal manieren om €2,51 te betalen onbeperkt groot.

Opgave 170
Op hoeveel manieren kan f 5,52 met gepast Nederlands geld (met cent!) betaald worden en op hoeveel manieren €2,51 met gepast eurogeld?

Voor we hier weer politiek van maken, gaan we het onderliggend wiskundig probleem eens wat verder onderzoeken. Daarbij komt Euler ter sprake.
Eerst een inleidend voorbeeld. In de puur formele algebraïsche gelijkheid hieronder is aangeven waarom er in het rechterlid een '3' voor x^6 staat:

$$(1 + x + x^3 + x^4) \cdot (1 + x^2 + x^3 + x^6)$$
$$= 1 + x + x^2 + 3x^3 + 2x^4 + x^5 + \mathbf{3}x^6 + 2x^7 + x^9 + x^{10}$$

De boogjes geven aan hoe x^6 op diverse manieren samengesteld kan worden uit een bouwsteen van de eerste factor en een van de tweede factor. De coëfficiënt 3 in het rechterlid weerspiegelt het aantal mogelijkheden. Dom algebraïsch uitwerken om een combinatorisch probleem aan te pakken. Dit ruikt naar winst!

Uitgewerkt voorbeeld met simpel geld

Stel nu eens dat we een eenvoudig muntsysteem met slechts twee munten hebben: één van 2 cent en één van 5 cent. Op hoeveel manieren kunnen we nu '72' gepast betalen? Dat kan proberenderwijs bepaald worden, maar is ook af te lezen uit de uitwerking van:
$(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots) \cdot (1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots) = \ldots$
door te kijken naar de coëfficiënt van x^{72} in de uitwerking rechts. Bij de puntjes hoeven we dan niet per se héél ver te gaan, de coëfficiënt van x^{72} rechts ligt zeker vast, als we in de factoren links voorbij de term x^{72} gaan.
Als we wel heel ver gaan, kan het linkerlid worden herschreven, gebruik makend van de sommen van oneindige meetkundige reeksen. Daar hoort ook weer een reeksuitwerking bij:

$$= \frac{1}{(1-x^2)(1-x^5)} = 1 + x^2 + x^4 + x^5 + \ldots + 8x^{72} + \ldots$$

De reeksuitwerking kan bijvoorbeeld gevonden worden door bijvoorbeeld staartdelen met veeltermen:

$$\begin{array}{lll}
(1 - x^2 - x^5 + x^7)/1 & & \backslash 1 + x^2 + x^4 + \ldots \\
\quad 1 - x^2 - x^5 + x^7 & & \\
\hline
\quad x^2 + x^5 - x^7 & & \\
\quad x^2 - x^4 - x^7 + x^9 & & \\
\hline
\quad x^4 - x^5 - x^9 & & \\
\quad \ldots\ldots\ldots & &
\end{array}$$

Uit die reeksuitwerking lezen we af: op 8 manieren kan 72 cent gepast met 2-tjes en 5-jes betaald worden.
De gebroken functie in het linkerlid bevat alle informatie over betaalmogelijkheden met dit eenvoudige muntsysteem in erg compacte vorm. Het rechterlid ontvouwt die informatie voor zover je maar wilt. De coëfficiënten van de reeks, dat zijn de getallen waar het om gaat. Deze keer heb ik ze met MAPLE bepaald, straks zoeken we uit hoe snel een goede schatting van de coëfficiënten te vinden is zonder ze in detail te bepalen.

Intermezzo voor strenge gewetens

Maar het ging even erg snel. Er kwamen vage puntjes op papier waarbij je niet ver hoefde door te denken en plotseling werd toch de som van een oneindige meetkundige reeks gebruikt. Langs heel verschillende wegen werden de coëfficiënten gevonden. Moet niet onderbouwd worden dat deze methodes veilig zijn?
Flink wat ongerustheid wordt al weggenomen met de aanbeveling '$|x| < 1$'. Dan zijn de reeksen hierboven convergent. De eenduidigheidsstelling over machtreeksontwikkelingen doet de rest. Toch is dat geen fraaie oplossing: de 'domme' algebra wordt dan onderbouwd met de oneindige subtiliteiten van de analyse, waarin de waarde van x een rol speelt. En bij het staartdelen hebben we ook slechts algebraïsche handelingen verricht.
Er komt nog bij dat we deze gestroomlijnde algebra via wat 'formele machtreeksen' heet, ook willen gebruiken als de reeksen alleen convergeren voor $x = 0$.
Minder strenge lezers kunnen het onderstaande desnoods overslaan, of gewoon denken: zo deed Euler het toch ook. Twijfel? Hier is een korte schets van een formele aanpak.

> Beschouw de verzameling K van rationale functies in x met coëfficiënten in het lichaam van de rationale getallen (of bijvoorbeeld de complexe getallen).
> Op K definieren we een *norm*, die in zekere zin de 'grootte' van een rationale functie R aangeeft, waarbij 'kleine' R al een hoge factor x^n hebben ingebouwd. Nauwkeurig: stel $\|R\| = 2^{-k}$, als $R \neq 0$, waarbij k het gehele getal is waarvoor R te schrijven is als $x^k S$, met S in K, en waarbij teller en noemer van S geen factoren x hebben. Stel apart nog: $\|0\| = 0$. De *afstand* $d(U, V)$ van twee functies U en V is uiteraard de norm van het verschil. Zo is
>
> $$d\left(\left(\frac{1}{1-x}\right), (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)\right) = \left\|\left(\frac{x^5}{1-x}\right)\right\| = 2^{-5}$$
>
> Deze afstandsfunctie (of deze norm) heeft nog de opmerkelijke eigenschap dat sommen nooit groter zijn dan de oorspronkelijke objecten wegens: $\|A + B\| \leq max(\|A\|, \|B\|)$.
> In vaktaal: hij is niet-archimedisch.
> Met behulp van deze afstandsfunctie kan K gecompleteerd worden tot $\overline{K}$, net zoals de rationale getallen tot de reële getallen worden gecompleteerd via de 'gewone' norm: de absolute waarde.
> Uit de bijzondere eigenschap van de norm kan worden afgeleid dat elke rij veeltermen, waarbij de volgende van de rij steeds de vorige is plus hogeregraadstermen, een limiet heeft. De limiet – een element van $\overline{K}$ dus – kan opgevat worden als de bijhorende formele machtreeks. Handig is nu toe te staan dat de formele machtreeksen ook mogen beginnen met een negatieve macht van x. $\overline{K}$ blijkt niet meer te zijn dan

deze uitgebreide formele machtreeksen.

Een deel van deze limieten bestond al in K zelf, ongeveer net zoals de rij 0.13, 0.1313, 0.131313, ... een rationale limiet heeft. De analogie is heel goed: een formele machtreeks met periodieke coëfficiënten stelt een rationale functie voor en andersom.

Breuksplitsen als tweede wapen

Om wat meer over de coëfficiënten in het algemeen te weten te komen, splitsen we

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^5)}$$

in een som van deelbreuken van de vorm

$$\frac{a}{(x-b)^k},$$

waarin a en b (mogelijk complexe) getallen zijn en k in dit geval 1 of 2 is.

De b's zijn hier wortels van $(1-x^2)\cdot(1-x^5)$. In het complexe vlak liggen die allemaal op de eenheidscirkel. Als een wortel méér keren aanwezig is, zal dat in de k's zijn terug te zien. Bij het 2-5-geld is dat alleen zo bij de wortel 1, die komt dubbel voor. Vandaar:

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^5)} = \frac{1}{10\cdot(1-x)^2} + \frac{a_1}{1-x} + \frac{a_2}{\zeta - x} + \ldots$$

Door de deelbreuken in aparte reeksen te ontwikkelen en corresponderende coëfficiënten samen te nemen, moeten we uiteindelijk weer vinden dat de coëfficiënt van x^{72} gelijk is aan 8. De hoofdmoot van de coëfficiënten in het algemeen wordt echter geleverd door de deelbreuk met $(1-x)^2$ in de noemer, de rest van de deelbreuken heeft immers geen kwadraten in de noemers en de nulpunten zijn begrensd door $|\zeta| = 1$.

Nu is

$$\frac{1}{10\cdot(1-x)^2} = \frac{1}{10}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{10}\cdot x^n$$

Samengevat: het aantal manieren om een bedrag n te betalen met munten van 2 en 5 is ongeveer $n/10$, waarbij 'ongeveer' betekent dat de fout die gemaakt wordt, in het niet valt bij de hoofdterm $n/10$; in dit geval is de fout zelfs absoluut begrensd.

Dat de deelbreuk met de $(1-x)^2$ in de noemer belangrijk is, is duidelijk. Hoe werd echter de coëfficiënt 1/10 gevonden?

Dit gaat snel:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^2}{(1-x^2)(1-x^5)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{(1+x)(1+x^2+x^3+x^4+x^5)}$$

Tot zover het voorbeeld, terug naar florijn en euro. De finale opgave is de volgende.

Opgave 171

Vergelijk nu opnieuw het (met de cent uitgebreide) Nederlandse geld en de Europese nieuwlichterij door de theorie toe te passen op de functies:

$$fl(x) = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1}{1-x^{10}}\cdot\frac{1}{1-x^{25}}\cdot\frac{1}{1-x^{100}}\cdot\ldots$$

en

$$€(x) = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1}{1-x^{10}}\cdot\frac{1}{1-x^{20}}\cdot\ldots$$

Wat vertellen de technieken van formele machtreeksen, genererende functies en breuksplitsing ons nu over de betaalmogelijkheden van de twee geldsystemen?

Op de resultaten valt nog wel wat af te dingen, of zo u wilt: er valt nog wel wat aan te verbeteren.

Is het wel redelijk de hele range van 1 tot en met oneindig centen gelijkelijk te behandelen? Moet niet aan lagere bedragen hogere prioriteit worden gegeven? En hoe moeten conclusies gebaseerd worden op grof geschatte coëfficiënten, moet de fout niet nauwkeuriger geschat worden dan 'er is een constante waar de fout onder blijft' als die constante misschien erg groot is?

Opgave 172

Doe (eventueel) nader onderzoek!

Priemmunten, machtige munten

Bij de betaalproblemen met de euro moest n voorgesteld worden als som van getallen 1, 2, 5, 10, 50, enzovoort.

Het voorstellen van een natuurlijk getal als som van speciale getallen is een hot topic in de getaltheorie. Daar worden dan wel wat waardevrijere keuzes gemaakt voor de toegestane bouwstenen.

De vraag of elk even natuurlijk getal als som van twee priemgetallen is te schrijven, is nog onopgelost. Dit is het vermoeden van Goldbach, die het probleem in 1742 in een brief aan Euler opgaf. Vinogradov bewees in 1937 wel dat elk voldoende groot oneven getal als som van drie priemgetallen is te schrijven. Voldoende groot betekent op het ogenblik nog: groter dan 10^{43000}. In 1997 toonden vier wiskundigen aan dat onder aanname van de zogenaamde gegeneraliseerde Riemann-hypothese de grens bij 5 gelegd kan worden. (De bewuste hypothese doet een uitspraak over de ligging van de nulpunten van de ζ-functie van Riemann en de verwante L-functies van Dirichlet. Zie de bronnen.) Vermoedelijk kunt u dus met twee of drie munten uit de priemgetallenportemonnee betalen wat u wilt.

Bekend is dat getallen van de vorm $8n + 7$ niet als som van *twee* kwadraten of *drie* kwadraten zijn te schrijven, maar dat elk natuurlijk getal wel als som van *vier* kwadraten is te schrijven. Deze stelling wordt altijd naar eerste bewijzer Lagrange genoemd, maar het feit werd al in 1621 vermeld door Bachet, die echter geen bewijs ervan had. Bachet is ook bedenker en oplosser van opgave 169.

Betalen met derdemachten gaat ook goed: elk natuurlijk getal is de som van ten hoogste 9 derdemachten. De enige getallen waarvoor er echt 9 nodig zijn, zijn 23 en 239.

Maar het is goed mogelijk dat alle getallen op eindig veel na voorstelbaar zijn met 5, eventueel zelfs 4 derdemachten. Bewezen is wel dat bijna alle getallen door 4 derdemachten voorstelbaar zijn; *bijna alle* betekent dan dat de fractie mislukkingen onder de eerste n getallen naar 0 nadert, als n naar oneindig gaat.
Het voorstellen van een getal door machten van natuurlijke getallen en het verkennen van de benodigde aantallen daarvoor heet het probleem van Waring.

Alle partities

Laten we *alle* natuurlijke getallen als bouwstenen toe, dan zijn getallen op erg veel manieren voor te stellen.
Zo'n voorstelling wordt vaak een partitie van een getal genoemd. Neem het getal 5; dat heeft 7 partities:
5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1.
Alle natuurlijke getallen behoren nu als het ware tot ons muntsysteem. Dit algemene partitienemen is het uiterste geval van de tweede manier van vergelijken van geldsystemen: nadruk op de vele mogelijkheden, geen aandacht voor betalen met weinig munten. Niet verrassend is dan ook dat formele machtreeksen zich in de theorie der partities als een vis in het water voelen.
Laat $p(n)$ het aantal partities van een getal n zijn; dan is $p(243)$ al gelijk aan 133978259344888.
De genererende functie van $p(n)$ vinden we al bij Euler. Na al het voorgaande schrikken we er niet meer voor terug ook met een oneindige voorraad munten te werken, die zich in de formule openbaart als oneindig product. De interpretatie is weer: neem zoveel factoren als je nodig hebt om de bedoelde $p(n)$ te vinden.
Zo ziet het eruit:

$$\frac{1}{(1-x)\cdot(1-x^2)\cdot(1-x^3)\cdot\ldots} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n$$

Resultaten in de theorie der partities kunnen vaak zowel combinatorisch als met genererende functies worden aangepakt. Hier is een mooie formele identiteit:

Opgave 172

$$(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot(1+x^3)\cdot(1+x^4)\cdot\ldots$$
$$= \frac{1}{(1-x)\cdot(1-x^3)\cdot(1-x^5)\cdot(1-x^7)\cdot\ldots}$$

Geef een bewijs van deze identiteit én een interpretatie in de vorm: elk getal n heeft precies evenveel splitsingen in .... als in ....

Tot nu toe kon de lezer met een slecht geweten nog steeds meekomen met behulp van '$|x| < 1$', want zelfs bij de genererende functie van $p(n)$ gaat dat goed.
Maar nu dit:

Opgave 173
Leg een verband tussen de (te bewijzen!) identiteit

$$\left(x+1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x^3+1+\frac{1}{x^3}\right)\cdot\left(x^9+1+\frac{1}{x^9}\right)\cdot\ldots$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)$$

en een van de eerdere opgaven.

Dit gaat ver: de reeks convergeert voor geen enkele waarde van x, de factoren van het product liggen voor reële waarden van x nooit in de buurt van 1, de formele machtreeks loopt hier naar twee kanten oneindig uit.
Maak het toch maar eens waar!

Bronnen

Pólya, G. & G. Szegö (1964). *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Erster Band*. Berlin usw.: Springer.
(Genererende functies in combinatie met partitieproblemen; hier voorgesteld in postzegels en gewichtjes.)
Hardy, G.H. & E.M. Wright (1968). *An Introduction to the Theory of numbers*. Oxford: Clarendon Press.
(Goldbach/Vinogradov, Warings probleem, partities.)
http://www.euro.nl
(De site van het Nationaal Forum voor de introductie van de euro.)
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk:80/~history/
(Geschiedenis van de wiskunde; onder andere biografieënindex.)
http://elib.uni-osnabrueck.de/EMIS/journals/ERA-AMS/1997-01-015/1997-01-015.html
(Deshouillers, Effinger, Riele en Zinoviev over sommen van drie priemgetallen.)
http://www.astro.virginia.edu/~eww6n/math/Waring's Problem.html
(Informatie over het probleem van Waring.)

Reacties 'problemen met diepe wortels'

Er werd onder andere gevraagd aan te tonen:

$$3 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+7\sqrt{1+\ldots}}}}}}}$$

en wie achtereenvolgens heeft berekend

$$1 = \sqrt{1}$$
$$1.732 = \sqrt{1+2\sqrt{1}}$$
$$2.236 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1}}}$$
$$2.92 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+7\sqrt{1}}}}}}}$$

zal dat niet onredelijk hebben gevonden.
Roelof Bruggeman bekeek het probleem van een andere kant, door de vrijheid te nemen de door mij voorgestelde limietbeschrijving die in bovenstaande berekening gesuggereerd wordt, in twijfel te trekken. Uit zijn uitvoerige reactie haal ik de belangrijkste zaken naar voren aan de

hand van het voorbeeld van Ramanujan.

Als $3 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\ldots}}}}}$ redelijk is, dan moet ook aangenomen worden dat

$$4 = \sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+7\sqrt{1+\ldots}}}}}}$$

omdat $(3^2-1)/2 = 4$, of (beter) omdat $3 = \sqrt{1+2\sqrt{4}}$.
Maar zolang er niets is gedefinieerd is het niet onredelijk eens te stellen:

$$3.5 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+7\sqrt{1+\ldots}}}}}}}$$

De consequentie is dat we voor de eerste binnenwortel (die achter de 2) nu moeten nemen:

$$5.625 = \sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+7\sqrt{1+\ldots}}}}}}$$

Immers, $3.5 = \sqrt{1+2\sqrt{5.625}}$.
Zowel vanuit 3 als vanuit 3.5 kunnen we dat proces voortzetten.
Vanuit 3 ontstaat de rij 3, 4, 5, 6, 7....
Vanuit 3.5 ontstaat 3.5, 5.625, 10.214, 25.829, ...
Beide uitgangswaarden geven zo een mogelijke waardenrij voor alle onderwortels. De begingetallen 3 en 3.5 zijn mogelijke waarden voor de hele wortel.
Beginnen we met 2.5, dan loopt het snel mis:

2.5, 2.625, 1.963, 0.714, -0.098, ...

en dat gaat een kant uit waar we (voorlopig) niet heen willen: wortels die negatief zijn! Ofwel: 2.5 is geen mogelijke waarde.
Roelof toont aan dat er in situaties als deze een minimale mogelijke waarde is en dat die waarde (indien eindig) ook de limiet is in de zin van mijn definitie.
Het fraaie van zijn methode is de brede inzetbaarheid.

Ook kettingwortels als $\sqrt{1+a_1\sqrt{1+a_2\sqrt{1+a_3\sqrt{1+\ldots}}}}$

en $\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{\ldots}}}$ kunnen zo onderzocht worden.

Bij opgave 167 gaf ik de (verborgen) hint:

$$3 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots\ldots(n-1)\sqrt{1+(n)(n+2)}}}}$$

Reken maar eens na door in de binnenste wortel te beginnen!

Vergelijken met de afgeknotte vorm

$$3 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots\ldots(n-1)}}}$$

moet nu nog plaatsvinden. Roelof zegt dat het eenvoudig kan met verschillen nemen, maar gaf niet aan hoe. Ik liep daarbij vast en deed het ten einde raad met quotiënt. Mijn sleutel was:

Als $0 < a < b$, dan geldt: $\dfrac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+b}} > \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Wie het nog eens wil proberen, moet nu verder kunnen komen. Mike Staring en Roelof Bruggeman stelden vast

dat $\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\ldots}}}$ betekenisvol is als de rij der

a's begrensd is door een rij van de vorm $C \cdot k^{2^n}$, waarbij $C > 0$ en $k > 1$. Als zo'n begrenzingsrij er niet is, gaat het mis. Uiteraard is het vinden van deze begrenzing het probleem. Dat de begrensrij het doet, is niet zo moeilijk aan te tonen.
Polya geeft aan dat $\limsup\limits_{n\to\infty}(\ln\ln a_n)$ beslissend is. Groter dan ln ln 2 geeft divergentie, kleiner dan geeft convergentie. Dat klopt met de inzendingen.
Mooie oplossingen ontstaan bij deze rubriek altijd als inzenders hints van de redacteur negeren. Mike Staring pakt opgave 166 (het product van Viète) aan door voor

geschikte x het bekende $\cos x = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)}$ met

enig herleiden in eigen staart te laten bijten:

$$\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2+2\sqrt{2+2\sqrt{2+2\sqrt{2+2\cos(16x)}}}}$$

Dat gaat uiteraard n stappen diep; voor dat $x = \dfrac{\pi}{2^{n+2}}$

wordt gekozen, moet de formule naar x worden gedifferentieerd. Mike heeft voorzien (of terecht gehoopt) dat de factoren die de kettingregel daarbij levert precies leiden naar het product dat we willen hebben. Hieronder de stap waarin ingevuld is in de afgeleide en wat factoren 2 zijn uitgedeeld; de laatste wortel in de noemer heeft n verdiepingen. Het product van Viète is nu dichtbij; de standaardlimiet

$$\lim_{k\to\infty} k\sin\left(\frac{x}{k}\right) = x$$

met $k = 2^n$ maakt het karwei af. Hulde!
Wie de volledige inzendingen van Roelof en Mike wil zien, mag ernaar vragen. Ik stuur ze op.

Aad Goddijn, Freudenthal Instituut, aad@fi.uu.nl

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \frac{\sin\left(2^n\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\ldots\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{2}\times\ldots = \frac{2}{\pi}$$