

## Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (7)

L. Streefland, E. de Moor en A. Treffers

### Verhoudingen (1)

Doelstelling 1 over verhoudingen en procenten luidt:

Leerlingen kunnen verhoudingsproblemen oplossen die optreden bij:

- vergroten en verkleinen;
- afbeelden op schaal;
- gelijkwaardig verdelen;
- mengen;
- inwisselen;
- relaties tussen de grootheden: gewicht en prijs, aantal en prijs, afstand en tijd;
- verdelingsdichtheden.

In deze aflevering beperken we ons tot een *overzicht* van vergroten en verkleinen (1a) en afbeelden op schaal (1b). We geven in het kort de meetkundige lijn aan die in deze onderwerpen vervat ligt.

De oorsprong van de meetkundige verhoudingsproblemen is gelegen in de wereld om ons heen. Wij, kinderen en volwassenen, nemen de ruimte waar en alles wat zich daarin bevindt. We zien een stoel, een boom, een huis..., we zien de werkelijkheid.

Tevens worden we geconfronteerd met de afbeeldingen van de realiteit, zoals foto's, tekeningen, televisiebeelden en dergelijke. Als de leraar een tekening op het bord maakt, die de kinderen in hun schrift moeten overnemen, wordt het als de gewoonste zaak van de wereld ervaren, dat de afmetingen van de tekening op het bord tienmaal zo groot zijn als die van de afbeelding in het schoolschrift.

### *Noties van gelijkvormigheid*

Als de afbeelding van een object natuurgetrouw weergegeven is, zijn de verhoudingen binnen het waargenomen object (origineel) niet verstoord in die van het afgebeelde plaatje (beeld) (fig.1).



figuur 1: Spiegel, spiegel, steeds hetzelfde

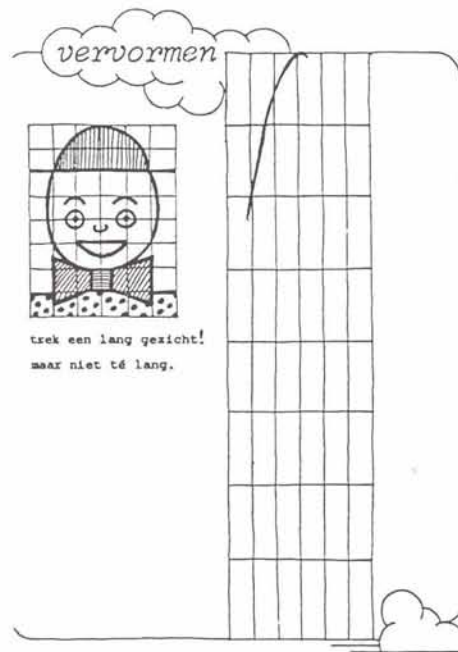
Bij zo'n 'nette' afbeelding moet een gelijkzijdige driehoek dus gelijkzijdig blijven, of je hem nu in je schrift tekent of levensgroot afbeeldt op een reclamebord. De vorm van de driehoek blijft dezelfde, alleen de zijden worden verkleind of vergroot. Dit effect van de gelijkvormige afbeelding kennen we niet alleen van vlakke figuren. Ook op ruimtefiguren kunnen gelijkvormige afbeeldingen toegepast worden, zoals bij maquettes en modellen.

De kleuters maken in hun (lerende) spel op een natuurlijke wijze kennis met dit verschijnsel. Immers veel speelgoed is zo verhoudingsgetrouw mogelijk ontworpen. Door de prentenboeken, de plaatjes uit de krant, de televisiebeelden en dergelijke is deze kennis als het ware van nature aanwezig.<sup>1</sup>

Gebruikmaking van deze impliciete kennis blijkt uit het leggen van de grote legpuzzel naar aanleiding van het kleinere voorbeeld op de deksel van de doos. Wanneer je een lego-bouwsel maakt werk je vanaf een papieren voorbeeldtekening. En als de juf een groot rekenrek of een grote abacus hanteert heeft deze precies dezelfde vorm als die de kinderen op de bank hebben.

### Vervormingen

Om het intuïtieve begrip van gelijke vorm bewust te maken is het nuttig om ook eens met tegen-voorbeelden van vormbehoud te werken. Voorbeelden hiervan zijn vervormingen, zoals het uitrekken van een vlakke figuur in één richting (fig.2). Denk aan een lachspiegel.



figuur 2

Een voorbeeld van vervormingen uit de alledaagse realiteit is herkenbaar bij schaduwbeelden (fig.3).



figuur 3

#### *Naar verhouding*

Als je enige greep wilt krijgen op een meetkundige verhoudingssituatie - en dáárom gaat het hier - is het niet van belang met welke maat je meet.

De verhoudingen waarin maten op elkaar begrepen zijn kun je allereerst ongeveer aangeven met grove gebaren. We herhalen hiervoor nog eens het voorbeeld (fig.4) uit de vorige aflevering.



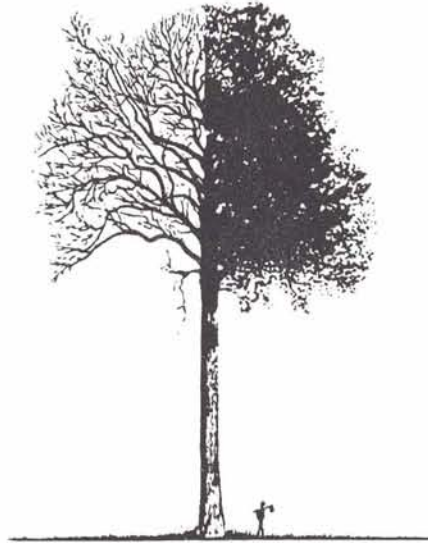
Alexli (zes jaar) zit achter in de auto en kijkt naar de vrachtboten op de rivier. We passeren een boot met een auto op het dek. 'Dat is pas een grote boot', zegt ze. 'Als de auto zo groot is, is de boot zo groot.' (Uit: 'Met het oog op ruimte')

figuur 4

#### *Referentiematen*

Om een indruk te krijgen van de werkelijke grootte (afmetingen) van het afgebeelde origineel is in eerste instantie een precieze getalsmatige informatie overbodig. Door namelijk in de figuur een 'bekend' object mee af te beelden kan een eerste schatting ge-

maakt worden. Zo is in figuur 5 bij de boom ook een houthakker als referentiemaat afgebeeld.

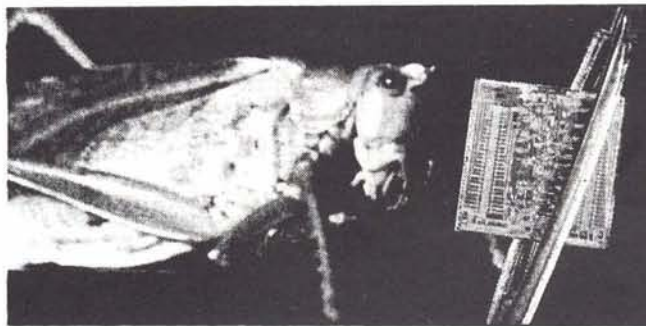


figuur 5: Hoe hoog is deze eik?

Door gewoon met de vingers of eventueel een strookje papier de lengte van de houthakker op de hoogte van de boom af te passen, kan men de boomhoogte in de maat 'houthakkers' uitdrukken. En wie al iets van absolute maten weet kan - denkend aan een houthakker van een kleine twee meter- de hoogte ook in meters schatten.<sup>2</sup>

#### *Verhoudingstaal*

Omdat er nog niet met precieze vergrotings- c.q. verkleiningsfactoren gewerkt wordt zijn de verhoudingen meer kwalitatief te noemen dan kwantitatief te meten. Toch gebruiken we al getallen in de taal waarmee we de verhoudingen beschrijven.



figuur 6: Krekkel en chip

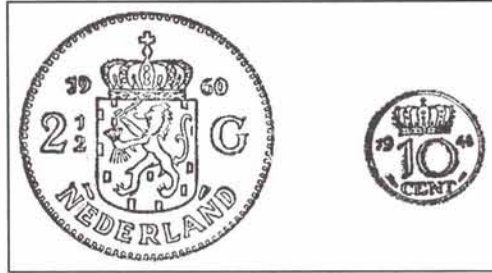
De eik (fig.5) is zeker zo'n twaalf houthakkers hoog. Hij is ongeveer zo groot als twaalf houthakkers of twaalf maal zo groot als een houthakker. De in figuur 6 afgebeelde chip ontleent zijn grootte aan de erbij afgebeelde krekkel. De krekkel is zo groot als vijf chips, dus een chip is ongeveer vijf maal zo klein als de lengte van de krekkel. De voor verhoudingen zo belangrijke taalbegrippen:

- zoveel maal zo groot, en
- zoveel maal zo klein,

kunnen via dergelijke meetkundige onderzoeken een zekere fundering krijgen.

*Schaalvergroting, verkleining*

Bij gelijkvormige afbeeldingen blijven, zoals gezegd, de verhoudingen binnen de objecten intact, maar ook van overeenkomstige afmetingen tussen de objecten onderling. Als je bijvoorbeeld een paperclip op de overheadprojector legt en het beeld op het scherm is drie maal zo groot als de paperclip zelf dan geldt dat niet alleen voor de lengte maar ook voor de breedte.



figuur 7: Duppie en Riks

De diameter van een rijksdaalder is twee maal zo groot als die van een dubbeltje (fig.7). Leg je ze op de overheadprojector dan blijft die verhouding voor de geprojecteerde beelden dezelfde. Er is alleen op een andere 'schaal' afgebeeld. In deze gevallen spreken we van schaalvergroting.



figuur 8: Voorgevel en schaallijn



figuur 9: Figuur 8 twee maal verkleind

### *Schaallijn*

Een architect gebruikt bij zijn ontwerpen schaalverkleiningen. Een huis wordt vaak getekend op een schaal die honderd maal zo klein is.

Dit betekent dat er een 'net' plaatje getekend wordt van een aanzicht van het huis. De beschouwer ziet in het klein dat aanzicht 'precies' zo als het er in werkelijkheid uit zal gaan zien.

Om de werkelijke maten te kunnen afleiden uit een dergelijke tekening (fig.8) is van oudsher de eenvoudigste manier het toevoegen van een zogenoemde schaallijn of visuele schaal. Hiertoe wordt bij de figuur een lijnstuk getekend dat een werkelijke lengtemaat benoemd, in casu vijf meter.

Vergelijken we deze schaallijn met de reële afstand van vijf meter, dan blijkt dit lijnstuk honderd maal verkleind te zijn. Dit betekent dus dat de hele voorgevel - wat de lengtematen betreft - honderd maal verkleind is. Leggen we de figuur onder het fotokopierapparaat en verkleinen we deze lineair met een factor 2 dan blijft de schaallijn ons alle informatie verschaffen over de werkelijke maten van de voorgevel (fig.9). Dit dank zij het principe van de verhoudingsconstantie.

### *Kaarten*

Kaarten zijn in feite gestileerde luchtfoto's van delen van het aardoppervlak. Het zijn dus verkleiningen van de realiteit. De meest praktische manier om afstandsmaat op een kaart aan te geven is de schaallijn (fig.10).



figuur 10

Het gebruik van de schaallijn om afstanden te meten en het bewust maken van de verkleiningsfactor dient de laatste schakel te zijn naar de uiteindelijke formalisering van het schaalbegrip.

### 1 op 100

Deze formalisering vindt z'n beslag in de notatie 1 : 100 (spreek uit één op honderd), wanneer een verkleining met een factor 100 bedoeld wordt. Zo had in figuur 8 de notatie 'schaal 1 : 100' toegevoegd kunnen zijn.

1 : 1000 betekent: de lengtematen van de afbeelding zijn 1000 maal zo klein als in de werkelijkheid.

2 : 1 betekent: de lengtematen van de afbeelding zijn 2 maal zo groot als in de werkelijkheid.

1 : 1 betekent: afgebeeld op ware grootte.

In figuur 11 is een opgave gegeven, waarbij de kinderen naar aanleiding van werkelijke objecten de vergrotings- of verkleiningsfactor (en dus de schaal) zelf moeten bepalen.

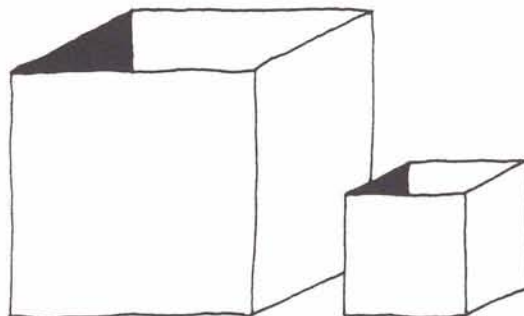


figuur 11: Wat is de schaal?

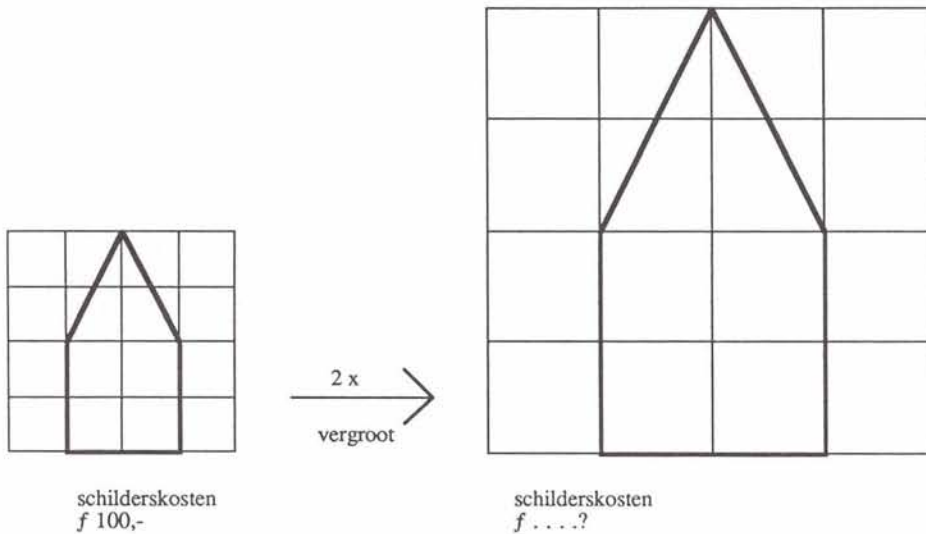
In de traditionele didactiek wordt het schaalbegrip vaak abrupt geïntroduceerd via '1 : 10.000 betekent dat 1 cm op de kaart in werkelijkheid 10.000 cm is'.

### Tweede en derde dimensie

Vergroten en verkleinen van lengten waarbij de verhoudingen intact blijven heeft een niet-lineaire uitwerking op twee-dimensionale figuren (oppervlakte) en drie-dimensionale figuren (inhoud). We volstaan met twee voorbeelden (fig.12 en 13)



figuur 12: Hoeveel kleine bakjes kun je in het grote bakje gooien tot hij vol is?



figuur 13

### *Vogelvlucht*

Het vergroten en verkleinen van meetkundige figuren en het bijbehorende begrip schaal zijn specifieke aspecten van het domein van de verhoudingen.

In het traditionele rekenonderwijs hebben deze aspecten weinig aandacht gekregen. In de moderne methoden wordt van meet af aan aandacht besteed aan deze onderwerpen. Ze staan in dienst van de toepasbaarheid van het reken-wiskundeonderwijs. Maar tevens zullen deze meetkundige verhoudingen een basis kunnen leggen en een ondersteuning kunnen zijn voor het bekendere, meer getalsmatige werken met verhoudingen.

Tenslotte - en dit werd al eerder opgemerkt - gaat het om het greep krijgen op meetkundige situaties met verhoudingen in de werkelijkheid. Dit kan bijvoorbeeld gebeuren door deze te vergroten of te verkleinen, niet zo maar als doel in zichzelf, maar om zulke situaties beter te kunnen vergelijken. We geven hiervan enkele voorbeelden.

#### regenwolken

Bastiaan (7;6). Na een reeks zonnedagen ziet hij wolken en zegt: 'Het gaat regenen.' 'Neen', zeg ik, 'dit zijn heel hoge wolken, daar komt geen regen van; regenwolken zijn laag en donker.' Hij: 'En hoe hoog zijn die wolken?' Ik (overdrijvend) 'tienduizend meter.' Hij: 'En hoe hoog zijn die regenwolken?' Ik: 'Duizend meter.' Hij: 'Dus (met de hand op de grond) als wij hier zijn en de regenwolk zó hoog (wijst ongeveer 30 cm boven de grond), dan zijn dat (wijst ongeveer één meter boven de grond), geen regenwolken.'<sup>3</sup>

#### Martinitoren

Een jongen (7;3) kreeg een ansichtkaart van Manhattan (New York). Daardoor komt het gesprek op de Martinitoren in Groningen. Deze kende hij slechts uit verhalen van zijn vriendje. Hij wilde vertellen hoe hoog de Martinitoren volgens hem moest zijn en deed dit onder andere als volgt: 'Als de Martinitoren nu eens zó hoog is (ongeveer een halve meter aanwijzend) en een mens zó' (nu wees hij ongeveer twee centimeter aan de voet van zijn denkbeeldige toren aan). De torenhoogte werd dus relatief bepaald, door deze aan de voor hem bekende menshoogte te relateren.<sup>4</sup>

#### spreeuw

Dezelfde jongen (bijna tien jaar) en zijn vriend Rik hebben grote belangstelling voor vogels. Rik heeft een zwarte vogel gezien, maar kan niet met zekerheid zeggen welke. Thuis vertelt de jongen waarom hij denkt dat het een spreeuw is, nadat hij aan Rik gevraagd heeft naar de

(relatieve?) lengte van de staart: 'Als een merel zo'n staart heeft (hij meet gebarend ongeveer een halve meter), dan heeft een spreeuw zo'n staart' (hij wijst nu nog maar de helft aan). Desgevraagd zegt hij het preciezer: 'Als de staart van een merel een halve meter is (hij meet er nog steeds gebarend bij) dan is die van een spreeuw een kwart meter.'<sup>5</sup>

In alle drie gevallen staat het verkleinen en vergroten in dienst van het oplossen van een probleem. Daarmee is het onderwijs op de basisschool in zicht gekomen. Daarover zal de volgende bijdrage gaan.

Opnieuw richt de aandacht zich op 'verkleinen en vergroten' en 'schaal'. In grote lijnen zal dan een leerstofopbouw geschetst worden. En wel aan de hand van een opsomming van concrete activiteiten per leerjaar, zoveel mogelijk voorzien van verwijzingen. Bovendien zullen ten aanzien van deze doelstellingen enkele principes voor het onderwijs in 'deze' verhoudingen worden geformuleerd.

## Noten

1. Van jongsaf aan ontwikkelen kinderen ideeën over verhoudingen op grond van het waarnemen van gelijkvormigheden. Zij zijn al heel vroeg in staat afbeeldingen van werkelijke dingen als zodanig te herkennen, ongeacht de schaal waarop deze zijn afgebeeld. Zie in verband hiermee bijvoorbeeld:  
Brink, J. van den en L. Streefland: Young children (6-8) Ratio and proportion, *Educational Studies in Mathematics*, 10, 1979, pag.403- 420.  
Bryant, P.: *Perception and understanding in Young children*, London 1974.  
Dodwell, P.: Children's perception and their understanding of geometrical ideas, *Piagetion Cognitive development research and mathematical education*, National Council of Teachers of Mathematics, USA 1971.  
Donaldson, Margaret: *Children's minds*, Fontana reeks, Glasgow 1978.  
Freudenthal, H.: *Didactische Fenomenologie van wiskundige structuren*, OW & OC, hoofdstuk 6: Verhoudingen en evenredigheid. Utrecht 1984.  
Fuson, K.S.: An analysis of research needs in projective, affine and similarity geometries, Including an evaluation of Piaget's results in these areas, *Recent Research concerning the development of spatial and geometric concepts*, Columbus Ohio 1978.  
Piaget, J. en B. Inhelder: *The child's conception of space*, New York 1967.
2. Jonge kinderen blijken zichzelf al doende ook zulke referentiepunten aan te meten. Bekende voorbeelden zijn: de lengte van een mens, de hoogte van een deur en dergelijke.  
Zie in dit verband bijvoorbeeld:  
Streefland, L.: *Verhoudingen zoals kinderen (6-9) ze zien*, IOWO, Utrecht 1980.
3. Uit: Freudenthal, H.: Verhoudingen als verschijnsel, *Verhoudingen. Wiskunde & Didactiek in de onderwijzersopleiding*, (Jansen, H., F. Goffree en H. Freudenthal, eds.), IOWO, Utrecht, 1978, hoofdstuk 4, loc. cit. pag.75.
4. Observaties van één van de auteurs.
5. Zie noot 4.