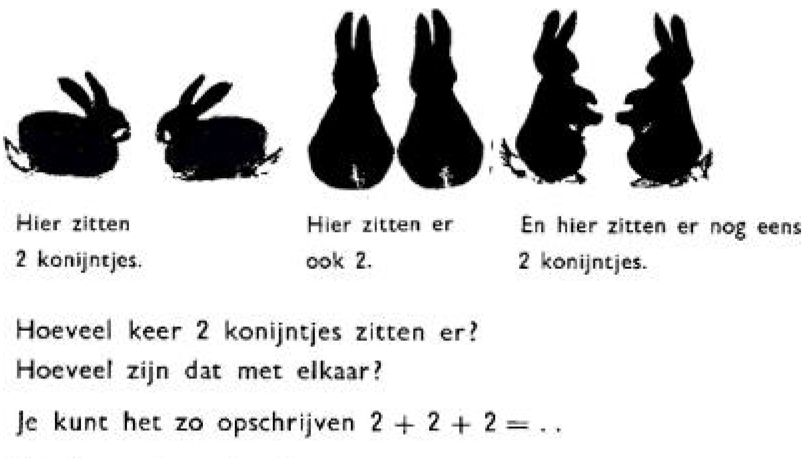
Basisvaardigheden
Tafels van Vermenigvuldiging

Karel Groenewegen
OBS Delfshaven, Rotterdam
Telefoon: 010 4761098
e-mail: kgroenewegen@luna.nl

VROEGER

Hoe ging het er 30 , 40 jaar geleden ook alweer aan toe als de tafels van vermenigvuldiging werden geoefend ? Helemaal geen probleem: achtenveertig kinderen in rijen die reeksen tafels opdreunden, daarbij gesteund door een met een stok op de grond tikkende juf of meester. Het in koor opzeggen van de tafels was nog wel leuk. Als een kind een keer een antwoord niet wist, mompelde het rustig met de rest mee zonder dat de leerkracht het merkte.
Het individuele overhoren, dat onverbiddelijk volgde op het koorwerk, was in veel gevallen een angstige aangelegenheid. De tafels werden dan ‘door elkaar heen’ gevraagd en dat was heel anders dan het met de klas opzeggen van tafelrijen.
Begrip van het vermenigvuldigen werd daarbij ondergeschikt gemaakt aan het uit het hoofd leren van reeksen getallen.
Deze wijze van werken zorgde ervoor dat vermenigvuldigingen los van de alledaagse werkelijkheid stonden, als iets dat alleen op school plaatsvond. De tafels kwamen op veel kinderen over als vaststaande getallenreeksen en het is dan ook geen wonder dat kinderen grote moeite hadden met het zelfstandig oplossen van enigszins onbekende problemen.
In sommige methoden werden de tafels geïntroduceerd door middel van een context, zoals onderstaande konijntjes bij de tafel van twee:



Deze konijntjes speelden echter geen verdere rol bij de opbouw van deze tafel. Ze vormden geen echte context, eerder een illustratie.

Per tafel is de werkwijze steeds dezelfde:

1. Introductie van een tafel al dan niet door middel van een illustratie
2. Starten met herhaald optellen van het betreffende tafelgetal en het maalteken daaraan verbinden:

	1 x 2 = 2
2 + 2 =	2 x 2 = 4
2 + 2 + 2 =	3 x 2 = 6
2 + 2 + 2 + 2 =	4 x 2 = 8
2 + 2 + 2 + 2 + 2 =	5 x 2 = 10
2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 =	6 x 2 = 12
2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 =	7 x 2 = 14
2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 =	8 x 2 = 16
2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 =	9 x 2 = 18
2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 =	10 x 2 = 20

Leer de tafel van 2 uit je hoofd

3. Samenstellen van de tafelrij via sprongen in de telrij.
4. Inprenten van de betreffende rij.
5. Inoefenen van de tafels door elkaar, voornamelijk via schriftelijk inoefenen.
6. Onderhouden van de verworven tafelkennis door middel van het voortdurend oefenen van de voorafgaande tafels.

Zoals al naar voren kwam, ging er aan het inslijpen van de tafels geen fase van begripsvorming van de bewerkingen vooraf: er werd direct aangestuurd op het inprenten van de tafels.
Informele strategieën van handig rekenen werden niet gestimuleerd omdat deze het directe inprenten niet zouden bevorderen.

In feite kent de traditionele tafeldidactiek maar één strategie, die van de ‘tafelrij’: het per tafel leren van de antwoorden in de volgorde van één keer tot tien keer. Als een kind bijvoorbeeld het antwoord niet wist van de vermenigvuldiging ‘9 x 8’ moest het dit ‘berekenen’ door het opzeggen van de tafelrij van ‘1 x 8 tot en met 9 x 8’. Het behoeft geen betoog dat dit een voor kinderen uiterst omslachtige manier was om het antwoord te vinden van tafels die niet werden gekend. Het gevolg was dat kinderen vaak al op de helft van hun opzegsessie het spoor bijster waren.

TEGENWOORDIG

In de huidige didactiek fungeren bepaalde vermenigvuldigingen als vaste steunpunten in een op te bouwen relatienetwerk. Bij steunpunten denken we bijvoorbeeld aan opgaven, die een prettig in het gehoor liggende klank hebben, of een bepaalde affectieve waarde of signaalkarakter dragen voor het kind, zoals bij rijmpjes in de trant van 3 x 3 = 9, de dubbelen (2 x 2), de kwadraten (4 x 4, 6 x 6), enz..

Voor veel kinderen is het ondoenlijk om alleen via memoriseren tot beheersing van de tafels te komen. Daarom vindt uitbreiding van de kennis van tafels plaats door het leggen van relaties (denkstrategieën) tussen gekende en nieuw te leren tafels. Hierdoor kan het kind de kloof die er gaapt tussen 'het uit het hoofd kennen' en 'het bij voortduring op moeten zeggen van een tafelrij' zoals dat bij de traditionele methoden het geval was, overbruggen.

Een voorbeeld: Een kind moet de opgave '6 x 7' uitrekenen.
Het weet al dat 5 x 7 = 35.
Door het kind zich te laten realiseren dat '6 x 7' eigenlijk ‘7’ meer is dan het antwoord bij '5 x 7', wordt het van de last ontslagen om de tafelrij van '1 x 7' tot '6 x 7' te moeten opzeggen om tot het juiste antwoord te komen. Ook kan het antwoord worden vastgesteld met behulp van de omkeerregel ‘7 x 6 = 6 x 7’, verdubbelen (‘3 x 7 + 3 x 7’), of door gebruik te maken van een kwadraat (‘7 x 7

Pas nadat het kind met deze volwaardiger oplossingsmethoden heeft kennisgemaakt, kan herhaald oefenen bijdragen tot verhoging van snelheid en nauwkeurigheid van het aldus geconstrueerde oplossingsgedrag.

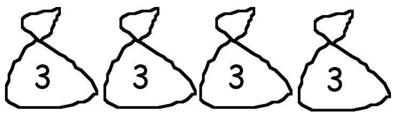
De hedendaagse didactiek stuurt niet meer direct aan op het reproduceren van de tafels. Kennis van de tafels is het resultaat van een proces van steeds verdergaande verkorting van handig rekenen, met als laatste stap het volledig inprenten.
De hiervoor beschreven vormen van handig rekenen zijn echter niet het resultaat van het bij voortduring schriftelijk oefenen, maar van interactief klassikaal onderwijs. Leerlingen worden actief bij de les betrokken, werken elk op hun eigen niveau een opgave uit, maar die wordt wel klassikaal besproken: leerlingen leren van elkaars oplossingsstrategieën.

Tijdens het onderwijs-leerproces worden drie niveaus van opereren onderscheiden: het tellend-, het structurend- en het flexibel/formeel opereren:

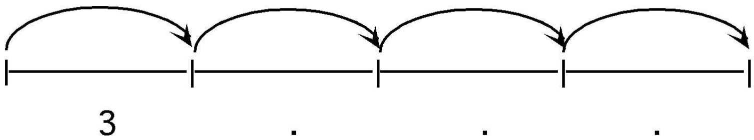
1. Introductiefase: vermenigvuldigen als herhaald optellen

Vermenigvuldigingen verschijnen aanvankelijk als herhaal optellen.
Deze herhalingsstructuur van optellen vinden we terug bij de contexten waarin de tafels worden geïntroduceerd. Zo kan bijvoorbeeld de tafel van 3 onder de aandacht van de kinderen worden gebracht door middel van een verhaal over een verjaardagsfeestje. De jarige in kwestie wil iedereen in de groep een zakje met drie dropballen geven.
De leerkracht vraagt aan de groep hoeveel dropballen er in vier zakjes kunnen? Dit blijken ‘3 + 3 + 3 + 3 = 12’ dropballen te zijn.
Er blijkt dat dit heel wat werk is en de leerkracht vraagt of er een kortere manier is om dit te doen. Gezamenlijk wordt besproken dat ‘vier keer een groepje van 3’ in het kort kan worden opgeschreven als ‘4 x 3’.
Hierbij kunnen de volgende modellen voor begripsmatige ondersteuning zorgen:

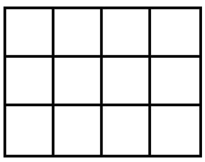
Het groepjesmodel:



Het lijnmodel

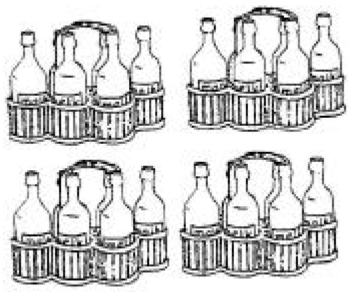


Het rechthoekmodel



Er wordt tijdens deze eerste verkenningen van het vermenigvuldigen veel aandacht besteed aan het leren ‘vertalen’ van vermenigvuldigsituaties in vermenigvuldigsommen.

Kinderen krijgen bijvoorbeeld de volgende vermenigvuldigsituatie voorgelegd: 4 kratten met in iedere krat 6 flessen melk.
Daarbij wordt de bijpassende som ‘4 x 6’ bedacht.

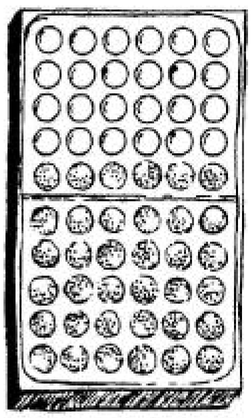


c. Hoeveel flessen melk?

Voor het vaststellen van het antwoord maken kinderen gebruik van aanpakken die in de beginfase al naar voren zijn gekomen, zoals herhaald optellen. Maar er worden ook andere oplossingsstrategieën gehanteerd, zoals verdubbelen en omkeren.

2. Structurerend vermenigvuldigen

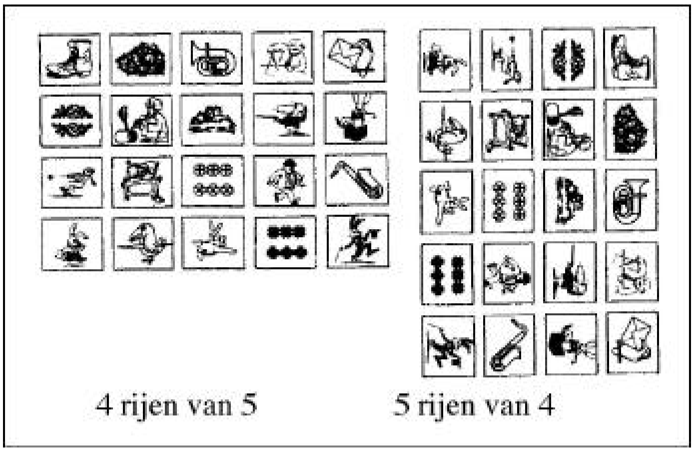
Kenmerkend voor het structurerend vermenigvuldigen is dat een contextopgave met een 6 x 6-structuur niet meer stap-voor-stap optellend wordt berekend, maar dat kinderen vlot gebruik leren maken van eigenschappen en relaties die er tussen de tafelproducten bestaan.
Zo wordt de tafel ‘6 x 6’ opgelost via ‘5 x 6 + 6’.



Hoeveel poffertjes

Het accent in deze fase valt op modellen die een rechthoekstructuur (roosters, patronen, stickervelletjes, tegelvloertjes, e.d.) weerspiegelen.
Deze modellen zijn voor de verdere ontwikkeling van handige vermenigvuldigstrategieën van groot belang, omdat zij volmaakt de formele grondstructuur van het vermenigvuldigen in zich dragen.

Naast de verdeeleigenschap, zoals bij de poffertjes, wordt ook de verwisseleigenschap (stickervelletje) inzichtelijk weergegeven.



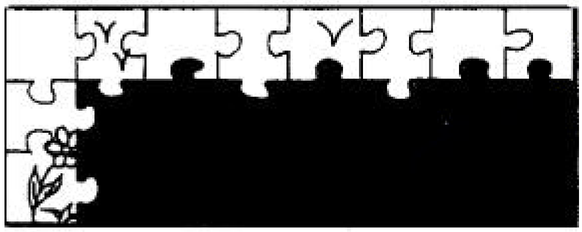
We zullen nu aan de hand van de tafel van 7 laten zien hoe zo'n netwerk van steunpunten en relaties kan worden opgebouwd en gememoriseerd:

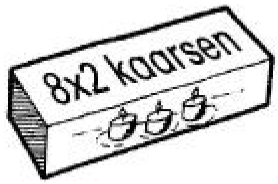
1 x 7	*een weetje*
2 x 7	*een dubbele 7 + 7*
3 x 7	*via (2 x 7) + 7; één maal meer*
4 x 7	*als verdubbeling van 2 x 7*
5 x 7	*halveren van 10 x 7, de helft van 70*
6 x 7	*via (5 x 7) + 7*
7 x 7	*een weetje: een kwadraat,zoals 1 x 1, 2 x 2*
8 x 7	*via (7 x 7) + 7, verdubbeling van 4x7*
9 x 7	*(10 x 7) – 7, éénmaal minder*
10 x 7	*een weetje*
12 x 7	*een onderzoeksprobleem*

Tijdens deze reconstructie fase wordt de aandacht van de leerling gericht op de centrale steunpunten van twee maal (verdubbelen), tien maal (nul erachter) en vijf maal (halveren van tienmaal). Van daaruit is via één-maal-meer en één-maal-minder het grootste deel van de betreffende getaltafel te bestrijken.
Daarnaast maakt de omkeerregel (7 x 4 = 4 x 7) een toegang mogelijk tot de andere tafels.

Omdat in de volgende fase geen gebruik meer wordt gemaakt van ondersteunende modellen, maar louter op getalniveau wordt geredeneerd en gerekend, moet er een overgang plaatsvinden van telbare-
naar niet meer telbare objecten.
De leerlingen worden zodoende gestimuleerd om allerlei aanpakken steeds meer op mentaal niveau uit te voeren, zonder nog te tellen.

Dit kan worden bereikt door de opgaven te presenteren in de vorm van gedeeltelijk afgemaakte puzzels, ingepakte hoeveelheden, bedekte tegelvloertjes, e.d..





Hoeveel stukjes hebben de puzzels?

De overgang van structurerend naar formeel vermenigvuldigen wordt bevorderd door het steeds beter leren redeneren in termen van getalrelaties, rekeneigenschappen en gekende tafelproducten, door deze redeneringen bewust te maken, te verwoorden en te noteren.

3. Formeel vermenigvuldigen

Bij het formeel vermenigvuldigen wordt geen gebruik meer gemaakt van ondersteunende modellen, maar louter op getalniveau geredeneerd en gerekend. Daarbij maakt men, waar nodig, handig gebruik van specifieke eigenschappen van vermenigvuldigingen. Dat wil zeggen dat bekende tafelproducten flexibel en handig worden ingezet om nog niet gekende keersommen vlot te berekenen.
Enkele van die eigenschappen werden al genoemd.
Maar er zijn er meer:
8 x 6 = 4 x 12 = 2 x 24;
8 x 6 = 4 x 6 + 4 x 6;
8 x 6 = 4 x 12 = 4 x 10 + 4 x 2 …
Met name de verdeeleigenschap (6 x 8 = 5 x 8 + 8 of 6 x 8 = 3 x 8 + 3 x 8) en de verwisseleigenschap (5 x 8 = 8 x 5) zijn belangrijk bij het handig vermenigvuldigen en bij het geleidelijk aan uit het hoofd leren van moeilijke tafelproducten.

Samenvattend kunnen we stellen dat de traditionele didactiek maar één oplossingsstrategie kent, die van (het opzeggen van) de tafelrij.
De huidige (realistische) didactiek biedt het kind, als het het antwoord van een vermenigvuldiging niet weet, een netwerk van steunpunten en strategieën waarmee het antwoord kan worden gereconstrueerd.

Oefenen

De tafels worden niet onderhouden door de kinderen lessenlang schriftelijk de tafels te laten maken, maar door bij iedere rekenles vast ongeveer tien minuten aan hoofdrekenen te besteden en dat gedurende de gehele basisschool. Dit kan bijvoorbeeld door middel van het tafeldictee waarbij de leerkracht de opgaven opleest en de leerlingen de antwoorden noteren. Bij individuele gevallen kan ook educatieve software als rekenhulp worden ingezet.
Oefenen kan ook plaatsvinden met behulp van oefenspellen.
We noemen er twee:

Tafelbingo

De leerkracht leest langzaam de keersommen voor: 6 x 8, 4 x 5, 9 x 3, 7 x 6, 8 x 8 …….

28	81	56
27	48	30
63	72	12

Staat de uitkomst op de kaart, dan kruist de leerling het betreffende getal op de kaart door. Wie alles heeft afgekruist, roept ‘bingo’. De eerste heeft gewonnen.

Tabelopgaven

Dit soort opgaven hebben de leerlingen ook bij het optellen en aftrekken gekregen:

x	3		7	
2		8		12
	9			
4				
	15			

Bronnen

Paul Verder en Klaas Koster   Rekenonderwijs in de fout
Hans ter Heege   Een goed product
Adri Treffers en Ed de Moor   Proeve, deel 2
Adri Treffers, Kees Buys, e.a.   Tal-brochure
Kees Buys, e.a.   Wis en Reken

De Tafels van Vermenigvuldiging in Willem Bartjens

Boonstra, Henk, *Langdurig tafelen*, Willem Bartjens 7 (1987/1988), nr.1

Buys, Kees, *Kijkje in de klas*, Willem Bartjens 16 (1996/1997), nr.2

Galen, Frans van en Toon Meeuwisse, *"Hebben we de tafel van die al gehad ?"*, Willem Bartjens (1985/1986), nr.2

Gilissen, Louis, *Voorwerk voor een computerprogramma*, Willem Bartjens 5 (1985, 1986), nr.2

Heege, Hans ter, *Het leren van de tafels van vermenigvuldiging*, Willem Bartjens 3 (1983/1984), nr.1

Heege, Hans ter, *Tafels leren met "Naar Zelfstandig Rekenen* Willem Bartjens 3 (1983/1984), nr.2

Heege, Hans ter, *Tafels leren met "Taltaal"*, Willem Bartjens 3 (1983/1984), nr.4

Heege, Hans ter, *Tafels leren: een kwestie van drillen* ?, Willem Bartjens 4 (1984/1985), nr.1

Heege, Hans ter, *Automatiseren in het rekenonderwijs*, Willem Bartjens 9 (1989/1990), nr.4

Heege, Hans ter, *Leren vermenigvuldigen en representaties*, Willem Bartjens 10 (1990/1991), nr.2/3

Horst, Ellen ter en Sytze Steinvoorte, *Honderd maal honderd*, Willem Bartjens 15 (1995/1996), nr.4

Kiers, Lilian, *Een leermiddel voor de tafels van vermenigvuldiging*, Willem Bartjens 10 (1990/1991), nr.1

Klep, Joost, *Een wereld rond tafels*, Willem Bartjens 6 (1986/1987), nr.3

Steinvoorte, Sytze, *Hoera, tafels !*, Willem Bartjens 6 (1986/1987), nr.4

Steinvoorte, Sytze, *Tips om de tafels te oefenen voor school en thuis*, Willem Bartjens 7 (1987/1988), nr.1

Steinvoorte, Sytze, *Kinderen maken hun eigen oefenprogramma*, Willem Bartjens 10 (1990/1991), nr.1

Steinvoorte, Sytze, *Meer dan tafelsommen*, Willem Bartjens 10 (1990/1991), nr.4

Steinvoorte, Sytze, *Tom heeft problemen met de tafels van vermenigvuldiging*, Willem Bartjens 18 (1998/1999), nr.2

Treffers, Adri, *Het leren van de tafels van vermenigvuldiging, een goed product – een goed product*, Willem Bartjens 6 (1986/1987), nr.3